Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Propiedades Topológicas de Espacios Topológicos Lineales Libres

Tesis

Que para obtener el Título de
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta
Rodrigo Hidalgo Linares

Director de Tesis
Dr. Oleg Okunev

Puebla, Puebla 2017

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

RODRIGO HIDALGO LINARES

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 24 de noviembre de 2017, con la tesis titulada:

Propiedades topológicas de espacios topológicos lineales libres

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 24 de noviembre de 2017

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
1578

Ccp.Archivo.
DRA. LAHR/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A mis padres...

Agradecimientos

> "El mayor peligro para la mayoría de nosotros no es que nuestra meta sea demasiado alta y no la alcancemos, sino que sea demasiado baja y la consigamos."
>
> Michelangelo Buonarroti.

Creo que en situaciones similares a esta, el ser agradecido no es simplemente un acto de humildad, sino de reconocimiento que debe engrandecer a todos los que parecerán a continuación.

En primer lugar, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de maestría; así como a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de esta casa de estudios por todas las consideraciones que tuvieron con y para mí.

En segundo lugar, agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Oleg Okunev, por todo lo que me ha enseñado a lo largo de estos años que lo conozco, porque siempre está disponible para charlar sobre cualquier tema, y sobre todo le agradezco por confiar en mí y en este proyecto.

El eslabón básico de toda sociedad es la familia, y en cualquier situación debemos recordar que estamos donde estamos debido en gran parte a ella. Así pues, no puedo dejar de gradecer a mi familia (la de aquí y la de allá) por todo lo que han hecho por mí: este es un logro también para ustedes.

Finalmente, agradezco a los integrantes del jurado por todas las observaciones que me han hecho a lo largo de estos dos años y que han enriquecido el presente trabajo. Como mencioné al principio, todo ellos son dignos de reconocimiento, y por tanto, a continuación los enlisto. Al M. C. Manuel Ibarra Contreras, a los doctores Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo y Fernando Sánchez Texis, mis más sinceras gracias. Al fin y al cabo, siempre hay que recordar la fuente de donde tomamos agua.

Introducción

El concepto actual que se tiene de un espacio topológico lineal es prácticamente el mismo que A. N. Kolmogorov dió en [Tik91] (Cap. 23: *On normability of a general topological linear space*); la idea principal es tomar un espacio lineal o vectorial (real o complejo) y asociarle una topología (usualmente de Hausdorff) que sea compatible con las operaciones de dicho espacio, esto es, de modo que la suma vectorial y el producto por un escalar sean operaciones continuas. Aunque autores como Bourbaki ([Bou03]) no hacen mención explícita acerca de los inicios de esta noción, muchos otros sitúan aquí el origen de dichos entes. Los espacios topológicos lineales surgen como un auxiliar en la resolución de problemas del análisis funcional, por ejemplo, Kolmogorov resolvió el problema de bajo que condiciones un espacio lineal admite una norma. No obstante, dichos espacios pueden ser "demasiado generales", concretamente, existen espacios cuyo dual topológico es trivial ([Kha82], Cap. 1, p. 14). A pesar de esto, existe una clase de espacios topológicos lineales que no posee esta deficiencia: los espacios localmente convexos. Dicha clase fue definida por J. von Neumann en [vN35] bajo el nombre de espacios convexos; el principal cambio reside en pedir que las vecindades de cero sean conjuntos convexos, dicha diferencia, simple y sútil, genera grandes cambios en la teoría general. En particular, los teoremas de Hahn-Banach y de Krein-Milman garantizan que exista una fructífera teoría de la dualidad, así como importantes propiedades de separación de las topologías localmente convexas.

En el caso que nos compete, la combinación de la estructura lineal con la estructura topológica deriva en la obtención de una nueva estructura: *la uniforme*. A. Weil definió las estructuras uniformes como aquellas que intermedian entre las estrucutras métricas y las topológicas ([Wei79], [1937]); dicho claroscuro dota a los espacios topológicos lineales de muchas propiedades que la topología por sí sola no podría alcanzar. Al mismo tiempo, la estructura topológica de los espacios así definidos no es arbitraria pues siempre resulta de Tychonoff. Como resultado de esta unión, la teoría de los espacios topológicos lineales puede vincularse, fácilmente y de manera natural, con el estudio de espacios de funciones. Este enlace, además de necesario, se vuelve imprescindible al momento de establecer los teoremas de Mackey-Arens y de completitud de Grothendieck.

Por lo que se refiere a la investigación en materia de estructuras algebraico-topológicas, ésta toma un giro en el año 1941 cuando el matemático ruso A. A. Markov publica una nota en la que propone la existencia de 3 estructuras libres: *el grupo topológico libre, el grupo abeliano topológico libre y el espacio localmente convexo libre (sobre* $\mathbb{R}$*)*. A pesar de que en dicha época no estaban asentadas perfectamente las bases de lo que hoy conocemos como teoría de categorías; dichos objetos tienen la configuración (categórica) de una flecha universal ([ML98], p. 56). Lamentablemente, en 1945, cuando apareció por fin el artículo de Markov ([Mar45]), no se hace mención alguna del espacio localmente convexo libre, y el estudio de los grupos topológicos libres se vuelve el centro de atención de los matemáticos de la década. Cabe mencionar que aunque seguiremos las definiciones de Markov, muchas veces es útil apegarse al estudio de los grupos libres topológicos que hizo M. I. Graev en [GtdDI48]. Volviendo al tema, los espacios localmente convexos comienzan a tener presencia en el acto con los estudios de D. A. Raĭkov ([Rai64]) a mediados de la década de los 60's, y es en los años 80's y 90's cuando se dan grandes avances en la sistematización del estudio de estos espacios (ver por ejemplo [Flo84] y [Usp91]). Afortunadamente, los espacios localmente convexos, y en general los espacios topológicos lineales, aún tienen mucho que dar, como prueba están las recientes investigaciones de S. S. Gabriyelyan y S. A. Morris en [GM17].

La tesis tiene dos objetivos, principalmente; el primero consiste en dar una descripción de la topología del espacio localmente convexo libre $L(X)$ sobre el espacio topológico X, y a pesar de que esto se deriva (parcialmente) de los teoremas del bipolar, de Alaoglu-Bourbaki, y de Mackey-Arens; nuestra intención recae en relacionar la topología de $L(X)$ con la topología de X y no con la del dual de $L(X)$ ([Flo84]). De manera similar, analizaremos un poco la dualidad entre los espacios débiles (dotados de la topología de la convergencia puntual) $L_p(X)$ y $C_p(X)$ para poder ligar el estudio de los espacios localmente convexos libres con la teoría de C_p (C_p-theory, [Tka16]). En segundo lugar, exploraremos la estructura de la completación del espacio localmente convexo libre y veremos condiciones bajo las cuales $L(X)$ resulta ser un espacio uniforme completo ([Usp83]).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El estudio de los espacios topológicos lineales envuelve varias ramas de la matemática que, si bien son fundamentales, nunca está de más el presentarlas en un apéndice para que se puedan consultar ciertos teoremas básicos. Así pues, la intención de este capítulo es mostrar de manera sintética varios tópicos que son esenciales para el entendimiento de la presente tesis. Nuestro objetivo es realizar un intento de índice sobre la notación que se usará a lo largo del texto, claramente, la idea principal es examinar, al menos superficialmente, la teoría básica de los espacios topológicos lineales.

1.1. Teoría de Conjuntos

Iniciemos con notación básica, dado un conjunto X, su cardinalidad se escribirá $|X|$, y por $\mathcal{P}(X)$ denotaremos al conjunto potencia de X. En el caso de los números naturales, la cardinalidad de $\mathbb{N}$ se indicará por el cardinal infinito $\aleph_0$, y por $\mathbb{N}^*$ se entenderá al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

En el caso de que X sea un conjunto no vacío, entenderemos que una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Si $F\colon A \to \mathscr{F}$ es una función, donde A es un conjunto ordenado, escribiremos $F(\alpha)$ como F_α y el conjunto $\{F_\alpha \colon \alpha \in A\}$ se dirá una familia indexada por A. Note que dicho conjunto también puede ser señalado mediante $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o sencillamente por $\{F_\alpha\}$, cuando el conjunto A quede totalmente claro en el contexto.

Dentro de los entes que son examinados por la teoría de conjuntos existen dos que serán de suma relevancia en el desarrollo de nuestro trabajo: *el producto cartesiano* y *el conjunto cociente*. Todo elemento de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ se denotará por $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y a las proyecciones de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ en cada uno de sus factores las indicaremos como $p_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\alpha$. En el caso de que E sea una relación de equivalencia en X, el símbolo X/E representa al conjunto de todas las clases de equivalencia de la relación E y la función que asigna a cada punto de X su clase de equivalencia en X/E la denotaremos por π; muchas veces se le suele llamar la proyección natural al conjunto factor.

El axioma de elección casi siempre es usado de manera inconsciente en muchos trabajos matemáticos, éste no es la excepción; sin embargo, nos permitiremos formularlo junto con dos enunciados equivalentes que serán la piedra angular de ciertos teoremas importantes.

Axioma de elección. Para cada familia $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$ de conjuntos no vacíos existe una función $f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, de modo que $f(\alpha) \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

Lema de Kuratowski-Zorn. Si cada subconjunto linealmente ordenado A de un conjunto ordenado X posee una cota superior, entonces X posee un elemento maximal.

Supongamos ahora que en el conjunto X tenemos una propiedad $\mathcal{Q}$, referente a subconjuntos de X, diremos que $\mathcal{Q}$ es de **carácter finito** si el conjunto vacío posee esta propiedad y un conjunto $A \subset X$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$ si y sólo si todo subconjunto finito de A posee dicha propiedad.

Lema de Tukey-Teichmüller. Si $\mathcal{Q}$ es una propiedad de carácter finito, referente a subconjuntos de X, entonces todo conjunto $A \subset X$, que posee la propiedad $\mathcal{Q}$, está contenido en un conjunto $B \subset X$, que posee la propiedad $\mathcal{Q}$, el cual es maximal en la familia de subconjuntos de X con la propiedad $\mathcal{Q}$ ordenados por la inclusión.

El lector interesado puede consultar [Cie97] para un desarrollo formal de la teoría de conjuntos y [Eng89] para una demostración concisa sobre la equivalencia de los lemas anteriores.

1.2. Teoría de Categorías

Sin tratar de ser extenuantes, intentaremos dar una pequeñisima revisión sobre los conceptos fundamentales de la teoría de categorías.

En una interpretación moderna, se denomina **clase** a toda propiedad expresada por una fórmula cuyos parámetros o constantes son conjuntos. Un conjunto pertenece a una clase si tal conjunto satisface la fórmula de dicha clase. Ésta definición es válida aún cuando pueda demostrarse que no existe un conjunto que contenga todos los objetos con esa propiedad, en cuyo caso se denomina una **clase propia**. Según [AHS05], toda clase es una subcolección de la **clase universal** (clase de todos los conjuntos). A continuación definiremos algunos conceptos básicos:

Diremos que una **categoría** $\mathscr{C}$ consta de:

(C1) una clase de objetos, $Ob(\mathscr{C})$, y

(C2) para cada par $A, B \in Ob(\mathscr{C})$, una clase $\mathscr{C}(A, B) = Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ de morfismos o flechas, que cumple con las siguientes propiedades:

- para cada objeto A, una flecha $1_A = id_A \in \mathscr{C}(A, A)$,
- para cada terna de objetos A, B, C, una función:

$$\begin{aligned} \circ \colon \mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \quad &\to \quad \mathscr{C}(A, C) \\ (f, g) \quad &\mapsto \quad g \circ f = gf, \end{aligned}$$

  llamada **ley de composición** que satisface lo siguiente:

  - ley de la unidad: si $f \colon A \to B$, entonces $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$,
  - asociatividad: si $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ y $h \colon C \to D$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
  - las clases $\mathscr{C}(A, B)$ son disjuntas para distintos pares de objetos A, B.

El concepto de morfismo, en teoría de categorías, es tan importante como el concepto de pertenencia en la teoría de conjuntos. Asimismo, conviene establecer que existen ciertos morfismos "especiales" que relacionan objetos y los clasifican como similares: *los isomorfismos*. Un **isomorfismo** es un morfismo $f \in \mathscr{C}(A, B)$ para el cual existe un morfismo inverso $g \in \mathscr{C}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Conviene subrayar que si un morfismo posee dos inversas, éstas deben ser iguales. De modo similar, el mapeo identidad siempre es un isomorfismo y, naturalmente, la composición de dos isomorfismos es un isomorfismo.

Otro concepto fundamental es el de funtor, no obstante, sólo lo definiremos y haremos notar un par de clases singulares de funtores. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías; un **funtor covariante**, o simplemente funtor, es una regla de correspondencia $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que:

(F1) a cada objeto A de $\mathscr{C}$ le asocia un objeto FA en la categoría $\mathscr{D}$,

(F2) para cada $f \in \mathscr{C}(A, B)$ existe un morfismo $Ff \colon FA \to FB$ tal que:

- $F1_A = 1_{FA}$, y
- $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

Un funtor $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es **fiel** (**pleno**) si para todo par de objetos A, B de $\mathscr{A}$, la función $f \mapsto Ff$ es inyectiva (sobreyectiva).

No está de más mencionar que existe una subclase de categorías muy específicas que se usan, y usaremos, en algunas construcciones: *las categorías concretas*. Una **categoría concreta** es un par $(\mathscr{C}, U)$, donde $\mathscr{C}$

es una categoría y $U\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ es un funtor fiel (a veces llamado **funtor de olvido**).

El estudio de los morfismos es uno de los principales objetivos de la teoría de categorías. Como debemos imaginar, los matemáticos han desarrollado muchas herramientas para hacerlo, ahora examinaremos una. Sean $U\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor entre las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, y $D \in \mathscr{D}$ un objeto. Definimos la **categoría coma** $(D \downarrow U)$ de morfismos de D en U como la categoría cuyos objetos son pares (f, C), donde C es un objeto de $\mathscr{C}$ y $f\colon D \to UC$ es un morfismo en $\mathscr{D}$; y cuyos morfismos $g\colon (f, C) \to (f', C')$ son flechas $g\colon C \to C'$ para las cuales $f' = Ug \circ f$; es decir, de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & UC \arrow[dd, "Ug"] \\
D \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
 & UC'
\end{tikzcd}$$

Finalizamos esta sección con una definición imprescindible, la cual será la base de la construcción del espacio localmente convexo libre. Una **flecha universal** (f_0, C_0) es un objeto inicial en la categoría $(D \downarrow U)$, esto es, si (f, C) es cualquier otro objeto de $(D \downarrow U)$, entonces existe un único morfismo $g\colon (f_0, C_0) \to (f, C)$ tal que $f = Ug \circ f_0$. De la definición anterior se obtiene que dos flechas universales diferentes son isomorfas, este es el significado de la frase "único salvo isomorfismo". El autor interesado en este tema puede consultar [ML98].

1.3. Álgebra Lineal

Como es usual, en la totalidad de esta sección, así como en el resto del texto, sólo se considerarán espacios lineales sobre el campo de los números reales. Para iniciar esta sección introduciremos algo de notación, si E es un espacio vectorial, $x \in E$, $A, B \subset E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\Lambda \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} x + A &= \{x + a\colon a \in A\}, & A + B &= \{a + b\colon a \in A, b \in B\}, \\ \lambda A &= \{\lambda \cdot a = \lambda a\colon a \in A\}, & \Lambda A &= \{\lambda a\colon \lambda \in \Lambda, a \in A\}. \end{aligned}$$

Cuando tenemos que $A = \emptyset$, entonces $A + B = \emptyset$ para cualquier $B \subset E$. Por otro lado, siempre se tiene que $2A \subset A + A$, y la contención puede ser estricta tal y como lo exhibe el conjunto $A = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Enseguida discutiremos varios aspectos de los subespacios lineales, así como métodos para generar ciertos subconjuntos de especial interés.

Si $\mathscr{L} = \{L_\alpha \colon \alpha \in A\}$ es una familia de subespacios lineales de un espacio vectorial E, entonces $\bigcap \mathscr{L}$ es un subespacio lineal, y si además la familia $\mathscr{L}$ está linealmente ordenada por la inclusión, también $\bigcup \mathscr{L}$ será un subespacio lineal. En ocasiones es conveniente asociar un subespacio lineal a un subconjunto A de un espacio vectorial E, para lo cual definimos la **envolvente lineal** $lin(A)$ de A, como el menor subespacio lineal de E que contiene al conjunto A, en símbolos tenemos lo siguiente:

$$lin(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in A, 1 \leq i \leq n \right\},$$

note que por definición $lin(\emptyset) = \{0\}$ (subespacio trivial), asimismo, en la situación de que $lin(A) = E$, diremos que A **genera** a E.

Respecto a las operaciones fundamentales (producto cartesiano y paso al cociente), la clase de espacios vectoriales se comporta adecuadamente. Dicho de otro modo, el producto cartesiano de espacios lineales vuelve a ser un espacio lineal, como es de suponer, la operación de suma y de producto por escalar quedan definidas coordenada a coordenada. Consideremos ahora un espacio lineal E y sea L un subespacio lineal de E, tenemos que la relación $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$ es de equivalencia. Por tanto, si en el conjunto cociente E/L definimos $[x] + [y] = [x + y]$ y $\lambda[x] = [\lambda x]$, E/L se vuelve un espacio vectorial. Esta nueva estructura hace de la proyección natural, $\pi \colon E \to E/L$, una función lineal.

Junto con los subespacios vectoriales, existen muchas clases de subconjuntos interesantes en un espacio lineal E, por ejemplo, diremos que un conjunto $A \subset E$ es **convexo**, si para cada par de puntos $x, y \in A$ se tiene que $\lambda x + \mu y \in A$ siempre que $\lambda, \mu \geq 0$ y $\lambda + \mu = 1$. Por otra parte, $A \subset E$ es **redondeado** si $[-1, 1]A \subset A$; y es **absolutamente convexo** cuando es convexo y redondeado. Si $A = -A$, entonces A es **simétrico**. Finalmente, A es un conjunto **radial**, si para cada $x \in E$ existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que $x \in \lambda A$ para cada $|\lambda| \geq \lambda_0$.

Las clases de subconjuntos anteriores tienen propiedades muy especiales; en concreto, son cerradas bajo intersecciones arbitrarias, y de esta forma, al igual que con los subespacios, es natural asociar un conjunto convexo (redondeado, absolutamente convexo) a un subconjunto A de un espacio lineal E. Como resultado, definimos la **envolvente convexa** $conv(A)$, de A, como el menor subconjunto convexo de E que contiene a A; análogamente se definen la **envolvente redondeada** $cir(A)$ y la

envolvente absolutamente convexa $\Gamma(A)$. En símbolos tenemos que:

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

$$cir(A) = \{\lambda a \colon a \in A, |\lambda| \leq 1\} = [-1,1]A,$$

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in A, |\lambda_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Volviendo a los conjuntos convexos, estos son invariantes bajo traslaciones y homotecias (multiplicación por un escalar), como consecuencia, las sumas finitas de conjuntos convexos tienen por resultado un conjunto convexo, y en este caso se tiene la igualdad $2A = A + A$, de hecho $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$, siempre y cuando $\lambda\mu > 0$.

Una concepto de gran importancia en el álgebra lineal es el de base. Sea E un espacio lineal, un elemento de la forma $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, se llama una **combinación lineal** de los vectores $x_i \in E$, $1 \leq i \leq n$. Si tenemos que la relación $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ implica que $\lambda_i = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$, nombraremos al conjunto de vectores $\{x_1, \ldots, x_n\}$ como un **conjunto linealmente independiente**. Para nuestra suerte, lo anterior puede extenderse al caso infinito. Un conjunto $A \subset E$ se dice linealmente independiente si todo subconjunto finito de A es linealmente independiente. Note que el conjunto vacío es linealmente independiente, pues ningún elemento de $\emptyset$ puede ser descrito como una combinación lineal de elementos en $\emptyset$. Así pues, el ser linealmente independiente es una propiedad de carácter finito y, en tal caso, el Lema de Tukey-Teichmüller nos dirá que todo conjunto linealmente independiente está contenido en un conjunto linealmente independiente maximal.

Cualquier conjunto linealmente independiente maximal que genera a E se dice una **base de Hamel** (o simplemente base) de E, y por lo anterior, todo espacio lineal E posee una base de Hamel. Todas las bases de Hamel de un espacio lineal E tienen la misma cardinalidad, este cardinal suele llamarse la **dimensión** de E.

En cuando a la categoría **Vet**, de espacios lineales (reales), tenemos que los morfismos son las transformaciones lineales; dichas transformaciones son tan especiales que si E y F son dos espacios lineales, entonces el conjunto $L(E, F)$, formado por todas las transformaciones lineales $f \colon E \to F$, es un espacio vectorial. Cuando $F = \mathbb{R}$, entonces $L(E, \mathbb{R})$ se llama el **dual algebraico** de E y se indica por medio de E^*. Por último, enunciamos una definición que será fundamental en el siguiente capítulo: una aplicación $\phi \colon E \times F \to G$ es llamada una **forma bilineal**, si para cada $x \in E$ y cada $y \in F$, las funciones parciales $\phi_x(y) = \phi(x, y)$ y $\phi_y(x) = \phi(x, y)$ son lineales.

Aunque la notación no es universal, toda la información presentada en esta sección, y más, puede consultarse prácticamente en cualquier libro de álgebra lineal.

1.4. Topología General

En lo que compete a las operaciones de tomar el interior o la clausura de un conjunto $A \subset X$, éstas serán señaladas por medio de $int(A)$ y $[A]_X$. En el caso de la cerradura, podemos simplemente indicarla como $\overline{A}$ si el conjunto X queda claro en el contexto.

Supongamos ahora que tenemos un conjunto X en el que se ha definido una familia (no vacía) de topologías $\{\tau_\alpha \colon \alpha \in A\}$ que satisfacen cierta propiedad $\mathcal{Q}$. Sabemos que $\{\emptyset, X\} \subset \tau_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ para cada $\alpha \in A$; no obstante, existen topologías $\tau_{\text{ínf}}$ y τ_{sup} tales que $\tau_{\text{ínf}} \subset \tau_\alpha \subset \tau_{\text{sup}}$ para cada $\alpha \in A$, $\tau_{\text{ínf}}$ es la topología más fina con la propiedad $\mathcal{Q}$ y τ_{sup} es la topología más gruesa con esta propiedad. Resulta sencillo obtener que $\tau_{\text{ínf}} = \bigcap_{\alpha\in A} \tau_\alpha$ y τ_{sup} es la topología formada por la subbase $\bigcup_{\alpha\in A} \tau_\alpha$.

Examinemos un par de situaciones concretas. Sea $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ una familia de funciones y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. En primer lugar supongamos que dichas funciones tienen la forma $f \colon X \to X_\alpha$ y que queremos definir una topología en X, lo más pequeña posible, con la propiedad de que cada función f_α sea una función continua. Dicha topología existe y resulta ser la que tiene como subbase a la familia de conjuntos $\{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \colon \alpha \in A \text{ y } V_\alpha \in \tau_\alpha\}$. Éstas son las **topologías proyectivas**. En segundo lugar consideremos la situación dual, es decir, donde $f \colon X_\alpha \to X$ y deseamos obtener una topología en X, lo más grande posible, con la propiedad de que cada función f_α sea una función continua. Nuevamente, dicha topología existe y viene dada por la siguiente condición, un conjunto $Y \subset X$ se dirá abierto, si para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(Y)$ es un conjunto abierto en X_α. Las topologías formadas por éste método se denominan **topologías inductivas**.

Las nociones que a continuación recordaremos serán las relacionadas a la convergencia, en filtros y redes. Sea X un espacio topológico (en general puede ser sólo un conjunto), una familia $\mathscr{F}$ no vacía, de subconjuntos de X, se dice un **filtro** si no contiene al conjunto vacío, y es cerrada bajo intersecciones finitas y superconjuntos. Una familia $\mathscr{B}$ no vacía, de subconjuntos de X, se dice una **base de filtro** si $\emptyset \notin \mathscr{B}$, y si dados $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Toda base de filtro $\mathscr{B}$ genera un único filtro $\mathscr{F}$ tal que $F \in \mathscr{F}$ si y sólo si existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset F$.

El ejemplo principal de un filtro es el que se obtiene al tomar la **base de vecindades** $\mathscr{N}(x)$ de un punto x en el espacio X. Dados los filtros $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ en el espacio X, diremos que $\mathscr{F}_1$ es **más fino** que $\mathscr{F}_2$ (o que

$\mathscr{F}_2$ es **más grueso** que $\mathscr{F}_1$) si $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$, es decir, si para cada $F \in \mathscr{F}_2$, existe $G \in \mathscr{F}_1$ tal que $G \subset F$. Supongamos ahora que $\mathscr{F}$ es un filtro en el espacio X, diremos que $\mathscr{F}$ **converge** a $x \in X$ ($\mathscr{F} \to x$), si $\mathscr{F}$ es más fino que $\mathscr{N}(x)$. En general, un filtro puede converger a más de un punto; de este modo, $\lim \mathscr{F}$ es el subconjunto formado por todos los puntos de X para los cuales $\mathscr{F} \to x$.

El concepto de red es una generalización del concepto de sucesión. Primero debemos explicar lo que se entenderá por un **conjunto dirigido** (hacia arriba); sea $\prec$ una relación en un conjunto A que es reflexiva, transitiva y que para cada par de elementos $x, y \in A$ posea un elemento $z \in A$ de modo que $x \prec z$ y $y \prec z$. De modo similar al que se definió una familia indexada, una **red** (en X) es una función definida en un conjunto dirigido (no vacío) cuya imagen recae en X. Nuevamente, el conjunto formado por la base de vecindades $\mathscr{N}(x)$ de un punto $x \in X$, junto con la relación de inclusión conjuntista, es un ejemplo de conjunto dirigido. Regularmente las redes se indican como $S = \{x_\alpha \colon \alpha \in A\}$, donde A es el conjunto dirigido. El símbolo $x \in \lim S$ significa que para cada $V \in \mathscr{N}(x)$ existe α_0 tal que $x_\alpha \in V$ siempre que $\alpha_0 \prec \alpha$.

En general, los filtros y redes pueden tener varios o ningún punto límite, en la situación de que X sea un espacio de Hausdorff, tendremos que el límite es único. Por otra parte, como ya habremos acertado, existe una estrecha relación entre filtros y redes. Si $S = \{x_\alpha \colon \alpha \in A\}$ es una red en el espacio topológico X, y consideramos la familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X de la forma $B_\beta = \{x_\alpha \colon \alpha \geq \beta\}$, $\beta \in A$, tenemos que $\mathscr{B}$ es una base de filtro tal que $\lim S = \lim \mathscr{B}$. Recíprocamente, sea $\mathscr{F}$ es un filtro en X, consideremos el conjunto dirigido A formado por los pares (x, F), donde $x \in F \in \mathscr{F}$. Definiendo $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si $F_2 \subset F_1$, obtenemos que la red $S(\mathscr{F}) = \{x_\alpha \colon \alpha \in A\}$, $x_\alpha = x$ para $\alpha = (x, F) \in A$, posee el mismo conjunto de puntos límite que $\mathscr{F}$, es decir, $\lim S(\mathscr{F}) = \lim \mathscr{F}$ ([Eng89], Cap. 1, Teoremas 1.6.12 y 1.6.13).

1.4.1. Teoría de Uniformidades

Dados un conjunto X y R una relación en X ($R \subset X \times X$), la frase "R es un **entorno de la diagonal** Δ", donde Δ es el subconjunto de $X \times X$ formado por los pares (x, x) con $x \in X$, significará que R es una relación simétrica y reflexiva ($\Delta \subset R$). La familia de todos los entornos de la diagonal del conjunto X será referida por $\mathscr{D}_X$. Una **uniformidad** $\mathscr{U}$ en el conjunto X es un filtro en $X \times X$ formado por entornos de la diagonal que adicionalmente cumplen los siguientes axiomas:

(U1) para cada $W \in \mathscr{U}$ existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V \circ V \subset W$,

(U2) $\bigcap \mathscr{U} = \Delta$.

Claramente, una **base** $\mathscr{B}$ de la uniformidad $\mathscr{U}$ es una base del filtro $\mathscr{U}$ que satisface (U1) y (U2). Conforme a lo anterior, el par $(X, \mathscr{U})$ es llamado un **espacio uniforme**.

Así como en topología se estudian las funciones continuas, en el caso de las estructuras uniformes nos interesan un tipo especial de funciones: las uniformes. Denominaremos a una función $f\colon X \to Y$, entre los espacios uniformes $(X, \mathscr{U})$ y $(Y, \mathscr{V})$, como una **función uniforme** (**uniformemente continua**), respecto a las uniformidades $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, si para cada $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \mathscr{U}$ de modo que cuando $(x, y) \in U$ se tenga que $(f(x), f(y)) \in V$. Cuando las uniformidades $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ queden claras en el contexto sólo diremos que la función f es uniforme.

Consecuentemente, podemos hablar de la categoría **Unif**, cuyos objetos son los espacios uniformes y cuyos morfismos son las funciones uniformemente continuas. Así, un **isomorfismo (uniforme)** en la categoría **Unif** es una biyección uniformemente continua cuya función inversa resulta ser uniforme.

Cada uniformidad $\mathscr{U}$ en el conjunto X induce una topología τ en X, en efecto, definiendo a τ como la familia de conjuntos $V \subset X$, donde para cada $x \in V$ existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $W(x) = \{y\colon (x, y) \in W\} \subset V$, resulta que τ es una familia invariante bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias, en conclusión, es una topología en X, y la familia formada por los conjuntos $W(x)$, $W \in \mathscr{U}$ se convierte en el filtro de vecindades $\mathscr{N}(x)$ de x, en tal caso, dicha topología resulta ser T_1.

Los espacios topológicos X para los cuales existe una uniformidad $\mathscr{U}$ que induce la topología original de X se denominan **espacios uniformizables**. Se sabe que un espacio topológico X es uniformizable si y sólo si es de Tychonoff (completamente regular + T_1).

Un hecho que debemos considerar, y será esencial al momento de describir la topología de $L(X)$, es el siguiente:

Teorema 1.4.1 ([Eng89], Cap. 8, Teorema 8.1.10 y Proposición 8.1.18)**.** Sea X un conjunto. Toda uniformidad en X define una familia $\mathscr{P}$ de pseudonormas uniformes, con respecto a $\mathscr{U}$, tales que:

(P1) si $d_1, d_2 \in \mathscr{P}$, entonces $\max\{d_1, d_2\} \in \mathscr{P}$,

(P1) para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $d \in \mathscr{P}$ tal que $d(x, y) > 0$.

Recíprocamente, si $\mathscr{P}$ es una familia de pseudométricas que poseen las propiedades (P1) y (P2), entonces dicha familia genera una uniformidad que hace de $\mathscr{P}$ una familia de **pseudométricas uniformes**.

En el teorema anterior, debemos entender que una pseudométrica d es uniforme, respecto a $\mathscr{U}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que si $(x, y) \in U$, entonces $d(x, y) < \varepsilon$.

El concepto de pseudométrica uniforme es útil al momento de caracterizar a las funciones uniformes, aunque dicha caracterización puede hacerse en forma semejante a la que se realiza para funciones continuas, la caracterización que utilizaremos más adelante es la siguiente:

Proposición 1.4.2 ([Eng89], Cap. 8, Proposición 8.1.22)**.** Sea f una función entre los espacios uniformes $(X, \mathscr{U})$ y $(Y, \mathscr{V})$. f es uniformemente continua si y sólo si para cada pseudométrica uniforme ϱ en Y, la pseudométrica d definida como $d(x, y) = \varrho(f(x), f(y))$ es uniforme con respecto a $\mathscr{U}$.

Ya que estamos hablando de continuidad uniforme, una definición que jugará un papel importante en casi la totalidad de la tesis es el de equicontinuidad. Si (X, τ) es un espacio topológico y $(Y, \mathscr{V})$ es un espacio uniforme, el conjunto $H \subset Y^X$ es **equicontinuo en el punto** $x_0 \in X$, si dado $V \in \mathscr{V}$ existe una vecindad abierta U, de x_0, tal que $(f(x_0), f(x)) \in V$ para cada $x \in U$ y cada $f \in H$. Si H es equicontinuo en cada punto de X, diremos que H es **equicontinuo**. En el caso particular, cuando $Y = \mathbb{R}$ la definición de equicontinuidad puntual queda del siguiente modo: $H \subset \mathbb{R}^X$ es equicontiuo en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad abierta U, de x_0, tal que $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in U$ y cada $f \in H$. En el caso de que $(X, \mathscr{U})$ sea un espacio uniforme hablaremos de **equicontinuidad uniforme**. $H \subset Y^X$ es **uniformemente equicontinuo**, si dado $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $(f(x_1), f(x_2)) \in V$ para cada par $(x_1, x_2) \in U$ y cada $f \in H$.

Volviendo al estudio de las uniformidades, y como ya habremos imaginado, si $\mathscr{U}_1$ y $\mathscr{U}_2$ son uniformidades sobre el conjunto X, decimos que $\mathscr{U}_1$ es **más fina** que $\mathscr{U}_2$ ($\mathscr{U}_2$ es **más gruesa** que $\mathscr{U}_1$) si $\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_1$. Análogamente a lo que pasa con las topologías proyectivas e inductivas, tenemos que existen las uniformidades proyectivas e inductivas. Las primeras se utilizan en la descripción de uniformidades de subespacio y uniformidades producto; las segundas se utilizan en la descripción de las uniformidades cociente y en la suma de espacios uniformes. Note que en un conjunto X pueden existir diferentes uniformidades que induzcan la misma topología. Por el contrario, en el caso de un espacio compacto X, tenemos que la uniformidad que induce la topología original es única, y una función f es continua si y sólo si es uniformemente continua, habitualmente sólo tenemos que una función uniforme es continua.

Tomemos en cuenta las siguientes afirmaciones: ya que todo espacio métrico es normal, y por ende de Tychonoff, podemos deducir que todo espacio métrico es uniformizable. En segundo lugar, todo espacio métrico posee una completación. Por otra parte, no es díficil ver que la propiedad "ser una sucesión de Cauchy" sólo se preserva mediante funciones uniformemente continuas. Finalmente, toda sucesión es una red; y toda red puede enparejarse con un filtro. De este modo, podemos intentar definir la "completez" de un espacio uniforme mediante el concepto de filtro de Cauchy. Si $(X, \mathscr{U})$ es un espacio uniforme y $\mathscr{F}$ es un filtro en X, diremos que $\mathscr{F}$ es un **filtro de Cauchy** si para cada $V \in \mathscr{U}$ existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \times F \subset V$. Si todo filtro de Cauchy es convergente, tendremos que X es un **espacio uniforme completo**.

Análogamente a lo que pasa en los espacios métricos tenemos el siguiente:

Teorema 1.4.3 ([Bou66], Cap. 2, §3, Teorema 3)**.** Sea X un espacio uniforme. Entonces existe un espacio uniforme completo $\widehat{X}$ (único salvo isomorfismo) y una función uniforme $i\colon X \to \widehat{X}$ tal que $\overline{i(X)} = \widehat{X}$, y que posee la siguiente propiedad universal: dada una función uniforme f, de X en un espacio uniforme completo Y, existe una única función uniformemente continua $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Y$ de modo que $f = \widehat{f} \circ i$.

La demostración de este teorema es algo extensa, pero la idea reside en lo siguiente: en el conjunto $\mathfrak{F}$ formado por los filtros de Cauchy sobre X, consideremos al conjunto $\widehat{X}$ como el conformado por los elementos minimales, respecto del orden dado por la inclusión, de $\mathfrak{F}$. Note que todo filtro de vecindades $\mathscr{N}(x)$, $x \in X$, es un filtro minimal de Cauchy; consecuentemente, $i\colon X \to \widehat{X}$ debe ser la dada por $i(x) = \mathscr{N}(x)$. El espacio $\widehat{X}$, formado por los **filtros minimales de Cauchy**, suele ser llamado la **completación de X en el sentido de Weil**.

Al igual que en el caso métrico, si X es un espacio uniforme completo y $A \subset X$, tendremos que A es completo si y sólo si es cerrado. Aunque no todo espacio uniforme es metrizable, la relación entre espacios uniformes y espacios métricos es muy estrecha, como muestra analizemos las siguientes dos situaciones:

Ejemplos 1.4.4.

1. Dado que podemos obtener una red de todo filtro, parece natural definir la completación de un espacio uniforme en términos de redes. Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme y A un conjunto cuya cardinalidad sea igual al mínimo de los cardinales $|\mathscr{B}|$, donde $|\mathscr{B}|$ es una base de la uniformidad $\mathscr{U}$. Una red $S = \{x_\alpha \colon \alpha \in A\}$, en el espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$, es de Cauchy, si para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$, entonces $(x_\alpha, x_{\alpha'}) \in U$. Ahora podemos identificar a la red S con la red $S' = \{y_\alpha \colon \alpha \in A\}$ mediante la relación $S \sim S' \Leftrightarrow$ para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $(x_\alpha, y_\alpha) \in U$. Sea $\widehat{X}$ el espacio cuyos puntos son las clases de equivalencia de redes de Cauchy. Entonces $\widehat{X}$ es la completación de X ([KG69], Cap. 1, §5).

2. Todo espacio uniforme puede ser encajado uniformemente como subespacio de el producto cartesiano de cierta familia de espacios

métricos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer completos ([Eng89], Cap. 8, Teorema 8.2.3).

En base a los ejemplos anteriores, tenemos el siguiente:

Teorema 1.4.5. Todo espacio uniforme completo puede encajarse uniformemente, como un subespacio cerrado, en el producto cartesiano de una familia de espacios métricos completos.

Otra clase importante de espacios uniformes es la de los espacios totalmente acotados. Un espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$ se dice **totalmente acotado**, si para cada $W \in \mathscr{U}$ existe un conjunto finito $F \subset X$ tal que $W(F) = \bigcup_{x \in F} W(x) = X$. La propiedad de ser totalmente acotado se hereda a subespacios uniformes, más aún, si $A \subset X$ y A es totalmente acotado, entonces $\overline{A}$ es totalmente acotado. Adicionalmente, ser totalmente acotado se preserva bajo funciones uniformes.

Estas dos clases de espacios uniformes tienen propiedades muy buenas, por ejemplo, son cerradas bajo productos arbitrarios y todo espacios uniforme X es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.

Lo anterior es un resumen (con huecos) de los que A. Weil probó en [Wei79], [1937]; pero podemos generalizar un poco más. En el caso de que tengamos un filtro $\mathscr{U}$, sobre $X \times X$, formado por entornos de la diagonal que satisfacen la propiedad (U1) pero no satisfacen la propiedad (U2), diremos que $\mathscr{U}$ es una **pseudouniformidad** sobre el conjunto X. La discusión anterior sigue siendo válida para pseudouniformidades, a excepción de que las topologías generadas no cumpliran el axioma de separación T_1; cabe resaltar que un espacio topológico X tiene una topología inducida por una pseudouniformidad si y sólo si es completamente regular. De hecho $\bigcap_{W \in \mathscr{U}} W(x) = \{x\}$ para todo $x \in X \Leftrightarrow X \in T_1$, por tanto, $\mathscr{U}$ satisface la condición (U2) si y sólo si la topología generada por $\mathscr{U}$ es T_1.

Si el lector desea ampliar la teoría antes descrita puede consultar [Eng89] y [HNV04].

1.5. Espacios Topológicos Lineales

La noción de lo que es un espacio topológico lineal ha permanecido prácticamente sin cambios desde que fue enunciada en [Tik91], Cap. 23. La idea es simple; supongamos que en un espacio lineal E está definida una topología τ, de modo que satisface las siguientes dos condiciones:

(LT1) la función $\begin{array}{rcc} +\colon E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$ es continua, y

(LT2) la función $\begin{array}{rcc} \cdot\colon \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ es continua.

En tal caso decimos que el par (E, τ) es un **espacio topológico lineal**; y cuando la topología de E no requiere especificación, o simplemente es conocida, basta con decir que E es un espacio topológico lineal. Note que estamos tomando a $\mathbb{R}$ con la topología usual, y $E \times E$, $\mathbb{R} \times E$ representan a los respectivos productos topológicos. Al mismo tiempo, el mapeo $(x, y) \mapsto x - y$ es continuo, en particular todo espacio topológico lineal es un grupo topológico abeliano.

Como en cualquier categoría, los morfismos a considerar en este caso serán los operadores lineales continuos. De este modo, un **isomorfismo topológico**, entre dos espacios topológicos lineales, es un isomorfismo de espacios vectoriales que a la vez es un homeomorfismo.

Puesto que al momento sólo contamos con la definición de lo que es un espacio topológico lineal, la cantidad de ejemplos que podemos exhibir es limitada, en particular, tenemos que cualquier potencia de la línea real, y en general cualquier espacio normado, es un espacio topológico lineal.

Lo sorprendente de los espacios topológicos lineales es que con tan sólo la definición previa ya podemos establecer varios resultados sobre su topología, en efecto, tenemos la siguiente:

Proposición 1.5.1 ([RR64], Cap. 1, §3, Proposiciones 1 y 2)**.** Sean E un espacio topológico lineal, $x_0 \in E$ y λ_0 un número real no nulo. Entonces:

1. La función $x \mapsto x + x_0$ es un homeomorfismo. En particular, E es un espacio homogéneo, por tanto, si $\mathscr{N}$ es una base de vecindades de E alrededor de 0, se cumplirá que $x + \mathscr{N}$ es una base de vecindades de E alrededor del punto x.

2. La función $x \mapsto \lambda_0 x$ es un homeomorfismo. Específicamente, si V es una vecindad de 0, entonces $\lambda_0 V$ también lo es.

Una topología que satisface el ítem 1 de la proposición anterior se dice una **topología invariante bajo traslaciones**, o simplemente invariante, esto es, un subconjunto A de un espacio topológico lineal (E, τ) es abierto si y sólo si $x + A$ es abierto para cada $x \in E$; de manera que la topología τ, de un espacio topológico lineal E, queda determinada únicamente por cualquier base de vecindades $\mathscr{N}$ de E alrededor de 0. En este contexto, una **base de vecindades** de E siempre significará una base de vecindades de E alrededor de 0.

Otras propiedades de las topologías lineales se establecen en [RR64], Cap. 1, §3, Proposición 4, [Rud91], Cap. 1, Proposición 1.13 y [Sch71], Cap. 1, Proposición 1.1. A modo de reducir espacio, son enunciadas en la siguiente:

Proposición 1.5.2. Sean E un espacio topológico lineal, $\mathscr{N}$ una base de vecindades de E y A, B subconjuntos de E. Entonces:

1. Si A es abierto, entonces $A+B$ es abierto.

2. $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathscr{N}} (A+V)$.

3. $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$ y la contención puede ser estricta.

4. Si A es un subespacio lineal de E, $\overline{A}$ también lo es.

5. Si A es un conjunto convexo, radial o redondeado, entonces $\overline{A}$ posee la misma propiedad.

6. Si A es redondeado, y si $0 \in int(A)$, tendremos que $int(A)$ es redondeado.

7. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A+B$ es cerrado.

A manera de complementar el ítem 3 de la proposición anterior, tomemos al espacio topológico lineal $\mathbb{R}$, si $A = \{-n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \mathbb{N}$, obtendremos que A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$, pero $A+B$ no lo es, pues $0 \in \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{(A+B)} \setminus (A+B)$.

Antes de continuar, conviene establecer un par de definiciones. Sea E un espacio lineal, si A y B son subconjuntos de E, diremos que A **absorbe** a B si existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que $B \subset \lambda A$, para todo λ con $|\lambda| \geq \lambda_0$. Si ahora consideramos un espacio topológico lineal E, y $A \subset E$, referiremos a que el conjunto A es **acotado** si toda vecindad de 0 absorbe a A. En este caso, todo conjunto de la forma $\{x\}$, con $x \in E$, es acotado, y esto se debe únicamente a (LT2). Por tanto, toda vecindad de cero es radial. De hecho, la propiedad (LT2) también nos garantiza que toda vecindad de cero contiene una vecindad de cero que es redondeada. Así, llegamos al siguiente:

Teorema 1.5.3 ([Sch71], Cap. 1, Proposición 1.2)**.** Una topología τ en un espacio lineal E satisface (LT1) y (LT2) si y sólo si τ es invariante y posee una base de vecindades $\mathscr{N}$ con las siguientes propiedades:

1. para cada $V \in \mathscr{N}$, existe $W \in \mathscr{N}$ tal que $W + W \subset V$, y

2. todo elemento de $\mathscr{N}$ es radial y redondeado.

Claramente, si E es un espacio lineal y $\mathscr{N}$ es una base de filtro con las propiedades del teorema anterior, entonces $\mathscr{N}$ es una base de vecindades para una única topología τ de modo que (E, τ) es un espacio topológico lineal.

Por otra parte, las bases locales de un espacio topológico lineal son invariantes bajo ciertas operaciones, por ejemplo, si $\mathscr{N}$ es una base de vecindades, entonces la familia $\overline{\mathscr{N}} = \{\overline{N} : N \in \mathscr{N}\}$ y $\mathscr{N}^{\odot} = \{\overline{cir(N)} : N \in \mathscr{N}\}$ son bases locales.

Como se mencionó en la Introducción, un espacio topológico lineal resulta ser un espacio uniforme, y al igual que sucede con las topologías, éstas también son invariantes. Concretamente, establecemos que una pseudouniformidad $\mathscr{U}$ en un espacio lineal E es **invariante bajo traslaciones** o simplemente invariante, si $\mathscr{U}$ posee una base $\mathscr{B}$ tal que $(x, y) \in W$ si y sólo si $(x+z, y+z) \in W$ para cada $z \in E$ y cada $W \in \mathscr{B}$.

Teorema 1.5.4 ([Sch71], Cap. 1, Proposición 1.4)**.** La topología de cualquier espacio topológico lineal E se deriva de una única pseudouniformidad invariante $\mathscr{U}$. Si $\mathscr{N}$ es una base de vecindades de E, la familia $\mathscr{B} = \{V_N \colon N \in \mathscr{N}\}$, donde $V_N = \{(x, y) \colon x - y \in N\}$, es una base de $\mathscr{U}$.

En la situación de que el espacio topológico lineal E sea T_1 (basta con T_0), automáticamente resultará que E es un espacio T_3 (regular + T_1), claro que si en el teorema anterior se supone que E es un espacio T_1, conseguiremos que E sea un espacio de Tychonoff. Por la proposición anterior, en un espacio topológico lineal los axiomas de separación T_i son equivalentes, $0 \leq i \leq 3\frac{1}{2}$.

1.5.1. Conceptos Uniformes

Si bien todo espacio topológico lineal es un espacio uniforme, es útil establecer qué significa la completez y la propiedad de acotación total en este nuevo contexto.

Sea E un espacio topológico lineal, $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy si y sólo si para cada vecindad de cero V existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F - F \subset V$. El análogo al Teorema 1.4.3 es el siguiente:

Teorema 1.5.5 ([Sch71], Cap. 1, Proposición 1.5)**.** Sea E un espacio topológico lineal de Hausdorff. Entonces existe un espacio topológico lineal de Hausdorff completo $\widehat{E}$ que contiene a E como un subespacio (lineal) denso. Además, si $\mathscr{N}$ es una base de vecindades de E, entonces $\overline{\mathscr{N}} = \{[N]_{\widehat{E}} \colon N \in \mathscr{N}\}$ es una base de vecindades de $\widehat{E}$.

La demostración se sigue del hecho de que el espacio topológico lineal E es uniformizable, como tal, la suma vectorial, así como el producto por un escalar λ, con λ fijo, son funciones uniformes, y por ende poseen una única extensión uniforme a $\widehat{E}$. Conviene subrayar que dicho espacio $\widehat{E}$ es único salvo isomorfismo topológico.

Respecto a la propiedad de ser totalmente acotado, la traducción de la definición quedaría del siguiente modo: un subconjunto A de un espacio topológico lineal E se dice totalmente acotado, si para cada vecindad de cero V, existe un conjunto finito $A_0 \subset A$ de modo que $A \subset A_0 + V$.

Recordemos que la completación de un espacio uniforme totalmente acotado es compacta, por esta razón, en todo espacio uniforme E, cada subconjunto totalmente acotado es llamado **precompacto**. De hecho, un conjunto $A \subset E$ es precompacto si y sólo si la cerradura de A, en la completación $\widehat{E}$ de E, es compacta.

Note que ser precompacto y **relativamente compacto** no son nociones equivalentes. Sea $E = (0,1)$, entonces la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es un conjunto precompacto en E que no es relativamente compacto. Aunque, si E es un espacio topológico lineal de Hausdorff **casi-completo** (todo conjunto cerrado y acotado de E es completo), entonces ambas nociones son equivalentes.

Algunas propiedades referentes a estos conceptos se resumen en la siguiente:

Proposición 1.5.6 ([Sch71], Cap. 1, Proposición 5.1)**.** Sea E un espacio topológico lineal, si $A, B \subset E$ son subconjuntos acotados (totalmente acotados), entonces los siguientes conjuntos también son acotados (totalmente acotados):

1. todo subconjunto de A,
2. la clausura $\overline{A}$ de A,
3. $cir(A)$,
4. $A \cup B$ y $\lambda A + B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplos 1.5.7.

1. Note que ser totalmente acotado implica ser acotado, pero el recíproco es falso, como muestra tomemos al espacio de sucesiones acotadas reales $l^\infty(\mathbb{R})$ con la norma $||\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$; ahora consideremos a la base canónica $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de $l^\infty(\mathbb{R})$, dicho conjunto es acotado, sin embargo, tomando a V como la bola centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$, se observa que no es totalmente acotado.

2. Cabe destacar que cuando E es de Hausdorff, ningún subespacio lineal de E puede ser acotado a menos que sea trivial, en efecto, sea L un subespacio no trivial de E, y tomemos $x \in L$ no nulo, dado que E es T_2, existe una vecindad de cero V tal que $x \notin V$, consecuentemente, dado $n \in \mathbb{N}$, $nx \notin nV$, y finalmente nV no contiene a L.

3. Si d es una métrica en un conjunto E, entonces un conjunto $A \subset E$ se dice **d-acotado** si existe $0 < M < \infty$ tal que su diamétro $\delta(A) = \sup\{d(x,y) \colon x, y \in A\}$ es menor o igual que M. Si ahora E es un espacio topológico lineal compatible con una métrica d,

los conjuntos acotados y d-acotados no tienen por que ser los mismos. Concretamente, tenemos que la topología usual τ de $\mathbb{R}$ es la inducida por la métrica $d(x,y) = \frac{1}{1+|x-y|}$; como tal, tenemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es d-acotado, el ítem anterior nos dice también que $\mathbb{R}$ no puede ser acotado, luego, las familias de conjuntos acotados y d-acotados no son las mismas.

4. No es díficil verificar que si $(E, ||\cdot||)$ es un espacio normado, y d es la métrica dada por $d(x,y) = ||x-y||$, entonces los conjuntos acotados y d-acotados son los mismos.

Pese a las generalizaciones de dicha idea, no debemos olvidar que los conjuntos acotados a considerar son aquellos que son absorbidos por cada vecindad de cero. Al mismo tiempo, existe una definición puramente topológica que refleja la caracteristica principal de los conjuntos acotados: S es un conjunto acotado en el espacio topológico lineal E, si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ y toda sucesión real $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, se cumple que $\{\lambda_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \in E$. Esta forma de enunciar tal concepto se debe a S. Mazur y W. Orlicz ([AL97], p. 379), y fue enunciada específicamene para espacios normados; Kolmogorov también uso esta definición y es relativamente sencillo probar que ambas definiciones son equivalentes ([Rud91], Cap. 1, Teorema 1.30). Como resultado, todo conjuto $A \subset E$ es acotado si y sólo si todo subconjunto numerable de A es acotado.

Finalizamos esta discusión con una definición. Un espacio topológico lineal cuya base esta formada por conjuntos acotados (totalmente acotados) será un espacio **localmente acotado** (**localmente totalmente acotado**).

1.5.2. Operaciones en Espacios Topológicos Lineales

Sea $\mathscr{E} = \{(E_\alpha, \tau_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos lineales. A continuación discutiremos algunos métodos para generar nuevos espacios topológicos lineales a partir de dicha familia.

Ya sabemos que $E = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ es un espacio lineal, considerando en E la topología producto de Tychonoff, llegamos a que E es un espacio topológico lineal. Claramente, si todos los factores de E son espacios topológicos lineales completos (totalmente acotados), entonces E es un espacio topológico lineal completo (totalmente acotado).

Ahora supongamos que el conjunto A es infinito y consideremos la familia de inyecciones $j_\alpha \colon E_\alpha \to E$ que encajan a E_α en E. Dichas funciones son continuas y tales que la envolvente lineal de $\bigcup_{\alpha\in A} j_\alpha(E_\alpha)$ se corresponde con el conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i j_{\alpha_i}(x_i) \colon n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in E_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n, \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Claramente, $lin\left(\bigcup_{\alpha\in A} j_\alpha(E_\alpha)\right)$ es un espacio lineal, formado por aquellos elementos de E para los cuales sus coordenadas tienen únicamente un número finito de entradas distintas de cero. Por otro lado, dicho conjunto coincide con el σ-producto de la familia $\mathscr{E}$ con centro en $0 \in E$ ([HNV04], p. 40). Siguiendo la notación de [HL14], (p. 27) $lin\left(\bigcup_{\alpha\in A} j_\alpha(E_\alpha)\right)$ se representará mediante el símbolo $\Sigma_0 E$, no olvide que $\Sigma_0 E$ es denso en E. La siguiente definición viene motivada por el párrafo anterior: un subconjunto A de un espacio topológico lineal E es **total** si $lin(A)$ forma un conjunto denso en E.

Aunque lo anterior es muy interesante, la construcción que nos interesa es la siguiente. Consideremos en $\Sigma_0 E$ la topología inductiva generada por las inclusiones j_α, entonces $\Sigma_0 E$ es un espacio topológico lineal cuya topología es la generada por $\bigcup_{\alpha\in A} j_\alpha(\tau_\alpha)$ ([Sch71], p. 54). Al conjunto $\Sigma_0 E$ dotado de la topología inductiva se le representa mediante $\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ y se adoptará bajo el nombre de suma directa de la familia de espacios topológicos lineales $\mathscr{E}$. Análogo a lo que sucede en el producto, tenemos que:

Teorema 1.5.8 ([RR64], Cap. 5, §6, Proposición 23)**.** La suma directa de la familia de espacios topológicos lineales $\mathscr{E}$, es completa si y sólo si cada miembro de $\mathscr{E}$ es un espacio topológico lineal completo.

Observemos que si en este último caso la cardinalidad del conjunto A es finita, entonces $\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$.

Finalmente, otra forma de generar espacios topológicos lineales es por medio de los cocientes. Sea E un espacio topológico lineal y L un subespacio lineal de E, ya sabemos que el conjunto E/L es un espacio vectorial, sin embargo, si dotamos a E/L de la topología cociente, respecto de la proyección canónica π, tendremos que E/L es un espacio topológico lineal. Esta topología no sólo hace lineal a π, también la convierte en una función continua y abierta. Cabe notar que E/L es de Hausdorff si y sólo si L es cerrado, esto sin importar la separación de la topología de E.

Con todo lo anterior, es hora de dar algunos ejemplos de espacios topológicos lineales.

Ejemplos 1.5.9.

1. Todo espacio lineal dotado de la topología indiscreta es un espacio topológico lineal.

2. Si E es un conjunto, entonces $\mathbb{R}^E$ es un espacio vectorial, pero si dotamos a $\mathbb{R}^E$ de la topología producto de Tychonoff tendremos que $\mathbb{R}^E$ es un espacio topológico lineal. En particular, si E es un espacio lineal, entonces $E' = \{f \in \mathbb{R}^E \colon f \text{ es lineal y continua}\} \subset E^* \subset \mathbb{R}^E$

son espacios topológicos lineales; E' representa al **dual topológico** de E. Cabe hacer la advertencia de que no toda topología en $\mathbb{R}^E$ lo convierte en un espacio topológico lineal. Como muestra tomemos la topología de cajas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sea $\varepsilon > 0$ y tomemos el abierto $V = \prod_{i=1}^{\infty}(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces V no es radial. En efecto, el punto $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede encasillarse en ningún múltiplo escalar de V.

3. Sea E un espacio lineal con $|E| > 1$, y consideremos la topología discreta τ_{dis} sobre E, entonces (E, τ_{dis}) no es un espacio topológico lineal. La razón reside en que el conjunto abierto $\{0\}$ no es radial.

4. Supongamos que E es un espacio topológico lineal, y consideremos el subespacio lineal $F = \overline{\{0\}}$, entonces la topología de F es la topología indiscreta. Por tanto, el conjunto $E^\star = E/F$ es un espacio lineal, y si dotamos a este conjunto de la topología cociente, respecto de la proyección natural $\pi\colon E \to E^\star$, tendremos que $E^\star$ es un espacio topológico lineal de Hausdorff. Es decir, a todo espacio topológico lineal podemos asociarle un espacio topológico lineal de Hausdorff.

5. Ya sabemos que si, en el ítem 2 de esta lista de ejemplos, tenemos que $|E| = n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico lineal, lo interesante radica en que todo espacio topológico lineal **separado** (T_1) de dimensión finita es isomorfo topológicamente a una potencia finita de la línea real (**Teorema de Tychonoff sobre espacios topológicos lineales**, [Sch71], Cap. 3, Teorema 3.2), dichos espacios topológicos lineales son completos y tienen la cualidad de que si F es cualquier otro espacio topológico lineal, entonces toda aplicación lineal $f\colon E \to F$ es continua.

6. Respecto a la construcción de la suma de espacios topológicos lineales no debemos olvidar que la topología de $\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ es más fina que la de $\Sigma_0 E$.

Estos ejemplos revelan el gran impacto que tiene el campo $\mathbb{R}$ sobre el espacio topológico lineal E, a manera de un ejemplo final, tenemos que todo espacio topológico lineal, separado o no, es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias; en efecto, si $\lambda \in [0, 1]$ y $x, y \in E$, entonces el mapeo $\lambda \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$ es continuo.

1.5.3. Linealidad y Continuidad

Como mencionamos antes, muchas veces es conveniente estudiar los morfismos de cierta categoría, en nuestro caso debemos estudiar las transformaciones lineales continuas.

Teorema 1.5.10 ([Rud91], Cap. 1, Teorema 1.17)**.** Sean E y F espacios topológicos lineales de Hausdorff, si $f\colon E \to F$ es lineal, se tendrá que:

1. f es continua si y sólo si es continua en $0 \in E$.

2. f es continua si y sólo si es uniformemente continua.

Si dichas aplicaciones lineales son en realidad funcionales lineales, tendremos que $f\colon E \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $f^{-1}(0)$ es un conjunto cerrado.

Sabemos que los conjuntos acotados y totalmente acotados son de gran importancia en la teoría de los espacios topológicos lineales. Por tanto, es natural combinar estos conceptos con la linealidad y continuidad.

Proposición 1.5.11 ([Sch71], Cap. 1, Proposición 5.4)**.** Sean E y F espacios topológicos lineales. Si $f\colon E \to F$ es una transformación lineal continua, entonces para todo conjunto $A \subset E$ acotado (totalmente acotado), se tendrá que $f(A)$ es acotado (totalmente acotado) en F.

A las aplicaciones lineales (no necesariamente continuas) que satisfacen la condición de la proposición anterior se les denomina **aplicaciones acotadas**. Note que toda aplicación lineal continua es acotada.

El siguiente es una versión debilitada del Teorema de Riesz ([Sch71], Cap. 1, Teorema 3.6),

Teorema 1.5.12. Si E es un espacio topológico lineal de Hausdorff localmente totalmente acotado, entonces E es de dimensión finita.

Demostración. Sea V una vecindad totalmente acotada de 0, el ítem 1 del Teorema 1.5.3 garantiza que existe una vecindad de cero W tal que $W + W \subset V$, además, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ no nulos, tales que $V \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + W)$. Sea $L = lin(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Claramente, L es un subespacio de dimensión finita de E, por tanto, L es cerrado en E. Consideremos ahora el espacio topológico lineal $F = E/L$ y sea $\pi\colon E \to F$ la proyección natural. Tendremos que $\pi(W) = \pi(V)$, por tanto, $\pi(V) = \pi(V) + \pi(V)$, y en consecuencia $\pi(V) = \pi\left(\sum_{i=1}^{2^n} V_i\right)$, $n \in \mathbb{N}$ y $V_i = V$. Dado que $\pi(V)$ es una vecindad de cero, y como $\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$, tenemos que

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^{2^n} \pi(V_i) \right) = \pi(V),$$

es decir, F es totalmene acotado, por ende acotado, así $F = \{0\}$. Concluimos finalmente que $E = L$. $\square$

Concluimos esta sección discutiendo sobre algunos subconjuntos de especial interés. Sea E un espacio lineal, una **variedad lineal o espacio afín** es un subconjunto que resulta de trasladar un subespacio vectorial $L \subset E$, es decir, es un conjunto F de la forma $x_0 + L$, para algún $x_0 \in E$. La dimensión del espacio afín es la misma que la del subespacio lineal, del cual es trasladado. Un **hiperplano** en E, es una variedad lineal propia maximal, es decir, es un espacio afín de codimensión 1. La **codimensión** de un subespacio lineal L es la dimensión del espacio cociente E/L. Todo hiperplano que pase por el origen es llamado un **hiperplano homogéneo**. Una manera de caracterizarlos es la siguiente:

Teorema 1.5.13 ([Sch71], Cap. 1, Proposiciones 4.1 y 4.2)**.** Sea E un espacio topológico lineal. Un conjunto $H \subset E$ se dice un hiperplano si y sólo si es la forma $H = f^{-1}(\lambda)$, donde $f \in E^*$ es un funcional lineal no nulo y $\lambda \in \mathbb{R}$. Adicionalmente, H es denso o cerrado en E, y H será cerrado si y sólo si $f \in E'$.

1.5.4. El Funcional de Minkowski

Como se ha descrito a lo largo de este capítulo de preliminares, los conjuntos convexos poseen diversas propiedades, y como si no fuera suficiente aquí tenemos una más:

Proposición 1.5.14 ([BS17], Cap. 1, Proposición 1.4.1)**.** Sea E un espacio topológico lineal. Si A es un conjunto convexo en E, entonces para cada par de puntos $x, y \in A$, tales que $x \in int(A)$ y $y \in \overline{A}$, se cumple que

$$[x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \colon 0 < \lambda \leq 1\} \subset int(A).$$

De aquí se obtiene fácilmente que si A es convexo, entonces $int(A)$ lo es, más aún, cuando $int(A) \neq \emptyset$, se cumple que $\overline{A} = \overline{(int(A))}$ y $int(A) = int\left(\overline{A}\right)$.

Antes de continuar enunciaremos un par de definiciones que serán importantes en las secciones posteriores. Sea $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ una función no negativa cuyo dominio es un espacio vectorial, entonces:

1. φ es una **seminorma** si
   a) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, para $x, y \in E$ (**sub-linealidad**).
   b) $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$, con $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (**homogeneidad**).
2. φ es una **pseudonorma** si
   a) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, para $x, y \in E$.
   b) $\varphi(\lambda x) \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$ y todo $\lambda \in [-1, 1]$.

c) Dada $\{\lambda_n\} \to 0$, entonces $\{\varphi(\lambda_n x)\} \to 0$ para cada $x \in E$.

d) Dada $\{x_n\} \to 0$, entonces $\{\varphi(\lambda x_n)\} \to 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

En las definiciones anteriores, no se cumple necesariamente que $\varphi(x) = 0$ implique $x = 0$, si esto llegara a pasar, la seminorma será llamada una **norma**, y la pseudonorma será llamada una **pseudonorma total**.

Ahora, a manera de ejemplo, examinaremos la estructura de un espacio normado. Sean $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, cuya norma no es conocida explícitamente, y B_X la bola unitaria de E, sin dificultad puede obtenerse que

$$||x|| = \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda B_X\}. \tag{1.1}$$

Aún cuando nuestra norma sólo sea una seminorma, la igualdad se sigue preservando. Examinando la expresión anterior, podemos extraer las principales características de B_X y generalizar lo anterior a cualquier espacio topológico lineal. Note que la buena definición de $||\cdot||$ se debe a que B_X es un conjunto radial, asimismo, la sublinealidad de $||\cdot||$ se logra gracias a que B_X es un conjunto convexo, y finalmente, $||\cdot||$ es homogénea pues B_X es redondeado, aunque esta última condición puede debilitarse hasta suponer que B_X es simétrico. Tomando esto en cuenta, podemos establecer la siguiente:

Proposición 1.5.15. Sea E, un espacio topológico lineal. La función $x \mapsto \mu_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda A\}$, donde $A \subset E$ es un conjunto convexo, radial y redondeado; está bien definida, es una seminorma en E y se denomina el **funcional de Minkowski** de A.

Lo anterior es la generalización de las ideas que Minkowski desarrolló para $\mathbb{R}^n$. Por si fuera poco, algunos otros aportes de Minkowski son el planteamiento y desarrollo del concepto de punto extremo, así como versiones preliminares de los teoremas de Krein-Milman y de normalización de Kolmogorov.

Volviendo a las seminormas, ya hemos observado que éstas tienen una estrecha relación con los conjuntos convexos, lamentablemente la relación no es unívoca, pero sí podemos asegurar lo siguiente:

Proposición 1.5.16 ([Sch71], Cap. 2, Proposición 1.5)**.** Sean E un espacio topológico lineal, $A \subset E$ un conjunto convexo, radial y redondeado, y p una seminorma definida sobre E. Para que p coincida con el funcional de Minkowski de A es necesario y suficiente que $A_0 \subset A \subset A_1$, donde $A_0 = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$ y $A_1 = \{x \in E \colon p(x) \leq 1\}$.

En cuanto a la continuidad de las seminormas, ésta está regida por la siguiente:

Proposición 1.5.17 ([Sch71], Cap. 2, Proposición 1.6)**.** Sea p una seminorma definida en el espacio topológico lineal E. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. p es continua en $0 \in E$.
2. $A_0 = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$ es un conjunto abierto en E.
3. p es uniformemente continua en E.

Diremos que E es un **espacio localmente convexo** si es un espacio topológico lineal con una base formada por conjuntos convexos. La clase de los espacios localmente convexos es invariante por subespacios, productos, sumas y cocientes. De la discusión anterior y tomando en cuenta el Teorema 1.5.3, obtenemos que en todo espacio localmente convexo, cualquier abierto básico define una seminorma. Esta relación entre seminormas y abiertos básicos se visualiza mejor con las siguientes proposiciones.

Proposición 1.5.18 ([Rud91], Cap. 1, Teorema 1.36)**.** Suponga que E es un espacio localmente convexo. Si $\mathscr{N}$ es una base de vecindades de E formada por conjuntos redondeados y convexos, entonces:

1. $V = \{x \in E \colon \mu_V(x) < 1\}$, para cada $V \in \mathscr{N}$.
2. $\{\mu_V \colon V \in \mathscr{N}\}$ es una familia de seminormas continuas en E.

Proposición 1.5.19 ([Rud91], Cap. 1, Teorema 1.37)**.** Supongamos que $\mathscr{P}$ es una familia de seminormas sobre un espacio vectorial E. Asociamos a cada $p \in \mathscr{P}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $V(p,n) = \{x \in E \colon p(x) < \frac{1}{n}\}$. Sea $\mathscr{N}$ la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(p,n)$. Entonces $\mathscr{N}$ es una base de vecindades para una topología en E, formada por conjuntos convexos y redondeados, de manera que convierten a E en un espacio localmente convexo, y a $\mathscr{P}$ en una familia de seminormas continuas en E.

Si la familia de seminormas separa puntos, obtendremos que el espacio localmente convexo E será de Hausdorff. También, del Teorema 1.5.5 obtenemos que la familia de seminormas $\widehat{\mathscr{P}} = \{\widehat{p} \colon p \in \mathscr{P}\}$, donde $\widehat{p}$ es la extensión de la seminorma p a $\widehat{E}$, genera la topología del espacio localmente convexo $\widehat{E}$.

1.5.5. Metrización

Un espacio topológico lineal E se denomina **metrizable** si existe una métrica d que induce la topología lineal de E. De la misma forma, un espacio topológico lineal E se dice **normable o normalizable** si existe una norma $||\cdot||$ definida en E, de modo que la métrica $d(x,y) = ||x-y||$ genera la topología del espacio topológico lineal E. El teorema de metrización que a continuación expondremos es similar para otras estructuras algebraico-topológicas, por lo mismo hemos decidido nombrarlo como el Teorema de metrización de Birkhoff-Kakutani.

Teorema 1.5.20 ([Sch71], Cap. 1, Teorema 6.1)**.** Sea E un espacio topológico lineal separado. E es metrizable si y sólo si posee una base de vecindades numerable. En este caso, existe una pseudonorma total p, de modo que la métrica $d(x,y) = p(x-y)$ genera la topología de E.

Como ya es usual, $\widehat{p}$, la extensión continua de p, define la topología de $\widehat{E}$. El teorema análogo, para normalizar espacios topológicos lineales, se debe a Kolmogorov ([Tik91], Cap. 23), y como podremos adivinar, los conjuntos convexos deberán aparecer.

Teorema 1.5.21 ([Sch71], Cap. 2, Proposición 2.1)**.** Un espacio topológico lineal separado E es normalizable si y sólo si E es localmente acotado y localmente convexo.

Note que ahora los conjuntos acotados también son mencionados, la razón se debe a que si V es una vecindad acotada de 0, entonces $\{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, es una base de vecindades. De esta observación surge la siguiente:

Proposición 1.5.22. Todo espacio topológico lineal localmente acotado es metrizable.

Ejemplo 1.5.23. El recíproco de la proposición anterior no es válido, para muestra tomemos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto de Tychonoff, dado que $\mathbb{R}$ es primero numerable y la cardinalidad de $\mathbb{N}$ es numerable, obtenemos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es metrizable, sin embargo, no es localmente acotado. Para muestra, tomemos una vecindad básica de 0, digamos $V = \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon |x_i| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$, $\varepsilon > 0$. Ahora, consideremos la vecindad abierta de 0 dada por $W = \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in V \colon x_{n+1} < 1\}$; tomando $k \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $kW \not\supseteq V$, la razón es clara, tomemos el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de puntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cuya i-ésima coordenada es 1 y el resto son ceros. Entonces el conjunto $\{me_m : m \geq n\} \subset V$, pero el punto $(m+1)e_{m+1} \in V \setminus mW$, $m \geq n$.

La importancia de los espacios topológicos lineales metrizables reside en el siguiente:

Teorema 1.5.24. Todo espacio localmente convexo separado E se puede encajar en el producto de una familia de espacios de Banach.

Antes de demostrar este teorema conviene demostrar una generalización del Teorema Diagonal ([Eng89], Cap. 2, Teorema 2.3.20) que nos ayude a concluir de manera sencilla.

Teorema 1.5.25. Sea $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ una familia de funciones continuas, donde $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$. El producto diagonal $F = \triangle_{\alpha\in A} f_\alpha \colon X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ es un encaje topológico si y sólo si la familia $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ separa puntos y la topología de X es proyectiva respecto a dicha familia.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si F es un encaje topológico, tendremos que F es inyectiva, y por ende la familia $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ separa puntos. Por otro lado, la familia de proyecciones $\{p_\alpha\colon \alpha \in A\}$ genera la topología de $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ ($p_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha \to Y_\alpha$). Luego, la familia $\{p_\alpha \circ F\colon \alpha \in A\} = \{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ genera la topología de X.

($\Leftarrow$) Como la familia $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ separa puntos se tiene que F es inyectiva. Enseguida debemos considerar la función $F^{-1}\colon F(X) \to X$ y verificar que es continua. Dado que la topología de X es proyectiva respecto de la familia $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$, y como $f_\alpha \circ F^{-1} = p_\alpha$ es una función continua, obtenemos rápidamente que F^{-1} es continua.

□

Demostración. (del Teorema 1.5.24) Claramente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que E es un espacio localmente convexo completo. Sea $\mathscr{N}$ una base de vecindades de E. La familia $\mathscr{P} = \{\mu_V : V \in \mathscr{N}\}$, es una familia de seminormas continuas que separan puntos de E, tales que $V = \{x \in E\colon \mu_V(x) < 1\}$. Consideremos ahora al espacio localmente convexo E_V, donde E_V es el conjunto E con la topología generada por el funcional de Minkowski de V. De este modo, la función identidad $1_{E_V}\colon E \to E_V$, es una aplicación lineal continua. Note que E_V no es necesariamente de Hausdorff, sin embargo, $\mu_V^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de E, por tanto, considerando el espacio localmente convexo $F_V = E_V/\mu_V^{-1}(0)$ obtenemos que E posee la topología proyectiva respecto de la familia de funciones $\{\pi_V \circ 1_{E_V}\colon V \in \mathscr{N}\}$, donde $\pi_V\colon E_V \to F_V$ es la proyección natural; y F_V es un espacio de Banach ([Sch71], Cap. 2, Proposición 2.3). Ahora consideremos la función $F = \triangle_{V\in\mathscr{N}}(\pi_V \circ 1_{E_V})\colon E \to \prod_{V\in\mathscr{N}} F_V$, del Teorema 1.5.25, obtendremos que F es un encaje. □

1.5.6. Espacios Localmente Convexos

Un teorema fundamental en el análisis funcional es el Teorema de Hahn-Banach, dicho teorema posee dos versiones, la llamada versión geométrica (Teorema de Mazur) y la forma analítica. Ambos teoremas usan el Lema de Kuratowski-Zorn y el siguiente hecho:

Proposición 1.5.26 ([Sch71], Cap. 2, Lema)**.** Sea E un espacio topológico lineal separado de dimensión mayor o igual a 2. Si $B \subset E$ es un conjunto abierto y convexo que no contiene a 0, entonces existe un subespacio 1-dimensional de E cuya intersección con B es vacía.

Teorema 1.5.27 ([Sch71], Cap. 2, Teorema 3.1)**.** [Teorema de Mazur] Sean E un espacio topológico lineal, $M \subset E$ una variedad lineal y $A \subset E$ un conjunto no vacío, abierto y convexo cuya intersección con M sea vacía. Entonces existe un hiperplano cerrado que contiene a M y que no intersecta al conjunto A.

La consecuencia más importante del Teorema de Mazur es que un espacio topológico lineal E posee un dual topológico no trivial si y sólo si posee un conjunto convexo y abierto no trivial. En base a esto, ahora toca probar la existencia de un espacio topológico lineal cuyo dual topológico sea trivial.

Ejemplo 1.5.28. Sea I el intervalo unitario de la recta real y ν la medida de Lebesgue en I. Por $\mathcal{L}^p$, $0 < p < 1$, representamos al espacio vectorial de todas las funciones reales ν-integrables sobre I. Consideremos ahora el espacio lineal $\mathbf{L}^p$, que resulta al hacer el cociente de $\mathcal{L}^p$ por el subespacio de todas las funciones ν-nulas.

Dada la naturaleza de p, tendremos que el funcional

$$f \mapsto ||f||_p = \int_I |f|^p d\nu,$$

es una pseudonorma en $\mathbf{L}^p$. Como sabemos, esta pseudonorma da origen a una métrica, bajo la cual $\mathbf{L}^p$ es un espacio topológico lineal completo. Nuestro objetivo es ver que el único funcional lineal continuo definido en $\mathbf{L}^p$, es el funcional lineal nulo.

Sea $\varphi \in (\mathbf{L}^p)'$ no nulo, entonces existe $f_0 \in \mathbf{L}^p$ de modo que $|\varphi(f_0)| = 1$. Para cada $s \in (0,1)$ definimos $f_{(1,s)} = \chi_{[0,s]} f_0$, donde χ_A es la función indicadora de $A \subset I$; y $f_{(2,s)} = f_0 - f_{(1,s)}$. Como $||f_{(1,s)}||_p \uparrow ||f_0||_p$, y tal incremento es continuo, tenemos que existe $s_0 \in I$ tal que $||f_{(1,s_0)}||_p = \frac{1}{2}||f_0||_p = ||f_{(2,s_0)}||_p$. Dado que $|\varphi(f_0)| = 1$, tendremos que $|\varphi(f_{(i,s_0)})| \geq \frac{1}{2}$, para $i = 1$ o $i = 2$. Definamos $f_1 = 2f_{(i,s_0)}$ para dicho i. Así, $|\varphi(f_1)| \geq 1$ y $||f_1||_p = 2^{p-1}||f_0||_p$.

Por recursión, definimos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\varphi(f_n)| \geq 1$ y $||f_n||_p = 2^{n(p-1)}||f_0||_p$. Claramente, $||f_n||_p \to 0$ contradiciendo la continuidad de φ. En conclusión $\varphi \equiv 0$ y $(\mathbf{L}^p)'$ es trivial. Del Teorema de Mazur se obtiene que los espacios $\mathbf{L}^p$, $0 < p < 1$, no son localmente convexos.

La versión analítica del Teorema de Hahn-Banach es la siguiente:

Teorema 1.5.29 ([Sch71], Cap. 2, Teorema 3.2)**.** Sean (E,p) un espacio lineal seminormado y $L \subset E$ un subespacio. Si f es un funcional lineal en L tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in L$, entonces existe una forma lineal f_1 que extiende f a todo E y tal que $|f_1(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in E$.

La siguiente consecuencia del Teorema 1.5.29 refleja la naturaleza de una topología localmente convexa.

Proposición 1.5.30 ([Sch71], Cap. 2, Proposición 4.2)**.** Sea E un espacio topológico lineal. Si f es un funcional lineal que está definido y es continuo en el subespacio lineal $L \subset E$, entonces f tiene una extensión continua a E.

De aquí se desprende que si $n \in \mathbb{N}$, y L es un conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio localmente convexo E, entonces existen n funcionales lineales continuos en E tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

A continuación probaremos que los espacios localmente convexos son más comunes de lo que se cree.

Ejemplos 1.5.31.

1. Sea (E, τ) un espacio topológico lineal y tomemos cualquier subespacio lineal $\emptyset \neq F \subset E^*$. Entonces el conjunto de seminormas $\{|f| \colon f \in F\}$, generan una topología, usualmente denotada como $\sigma(E, F)$, que es localmente convexa en E; dicha topología es separada si y sólo si F separa puntos de E. Bajo esta topología, E es un espacio localmente convexo y $F = (E, \tau)'$. La topología $\sigma(E, F)$ recibe el nombre de la **topología débil** de E. Dado que $E \subset F^*$, tenemos que F puede convertirse en un espacio localmente convexo mediante $\sigma(F, E)$.

2. Sea E un espacio topológico lineal de Hausdorff infinito dimensional cuya base está formada por el conjunto $\{x_\alpha \colon \alpha \in A\}$. No es díficil comprobar que E es algebraicamente isomorfo a la suma directa de $|A|$ copias de la línea real.Como $\mathbb{R}$ es un espacio localmente convexo de dimensión 1, tendremos que el encaje $i : \mathbb{R} \to E$ es una función continua para cualquier topología definida en E que lo convierta en un espacio topológico lineal, por tanto, la topología localmente convexa de la suma directa en E, es la topología τ localmente convexa más fina que se pueda definir en E. Claramente, dicha topología siempre existe, es de Hausdorff, y hace de E un espacio localmente convexo completo tal que $(E, \tau)' = E^*$.

Cerraremos esta sección con el enunciado de algunos teoremas cuya importancia será revelada más adelante y la definición de dos clases importantísimas de espacios localmente convexos. Tales teoremas involucran varios conceptos cuyas nociones pueden ser omitidas en un análisis superficial como este, de cualquier modo se remite al lector interesado al libro [Sch71] (Cap. 2, Secciones 9 y 10).

Teorema 1.5.32 ([Sch71], Cap. 2, Proposición 9.2)**.** Sea E un espacio localmente convexo. Si A y B son dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos tales que A es cerrado y B es compacto, entonces existe un hiperplano cerrado en E que separa estrictamente a A y B.

Proposición 1.5.33 ([Sch71], Cap. 2, Corolarios de la Proposición 9.2)**.** En todo espacio localmente convexo E, la clausura y la clausura débil de un conjunto convexo son idénticas.

Teorema 1.5.34 ([Sch71], Cap. 2, Teorema 10.4)**.** [Krein-Milman] Todo conjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo, es la cerradura de la envolvente convexa de sus puntos extremos.

Respecto a las clases especiales de espacios localmente convexos prometidas tenemos lo siguiente:

Sea E un espacio topológico lineal, un conjunto que es convexo, radial, redondeado y cerrado se dice un **barril**. Un espacio localmente convexo es **barrillado** (**toneleado**) si cada barril es una vecindad de 0. Los ejemplos clásicos de espacios barrillados son todos los espacios de Banach (en general todo espacio de Baire).

Un espacio localmente convexo E se dice **bornológico** si todo subconjunto convexo y redondeado que absorbe a todo conjunto acotado en E es una vecindad de 0. Dichos objetos son llamados **conjuntos bornívoros**. Todo espacio localmente convexo metrizable es bornológico. La característica más útil de estos espacios es que la continuidad de las aplicaciones lineales y seminormas está condicionada por su comportamiento en los subconjuntos acotados de E, es decir, una aplicación o seminorma definida en E es continua si y sólo si es acotada.

Como lo hemos venido haciendo durante todo el capítulo, remitimos al lector interesado a revisar los libros de Alexander P. Robertson y Wendy Robertson [RR64], Walter Rudin [Rud91], Helmut H. Schaefer [Sch71] y, para estudios más profundos, el excelente libro de Gottfried Köthe [KG69].

Capítulo 2

Dualidad

Iniciemos con una convención; como ya se ha manifestado, la forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema de Mazur) nos garantiza que el dual topológico de un espacio localmente convexo es no trivial y separa puntos. Tomando en cuenta el ítem 4 de los Ejemplos 1.5.9, convenimos que todo espacio localmente convexo será considerado, de aquí en adelante, como un espacio de Hausdorff.

El acuerdo anterior debe hacer que nos preguntemos varias cosas, pongamos por caso las siguientes cuestiones: el ítem 1 de la lista de Ejemplos 1.5.31 puede hacer que reflexionemos sobre si existen diferentes maneras de "topologizar" al espacio E en base a subconjuntos especiales de E', o si esta topología influye en la "elección" del dual topológico de E. Por otro lado, de la discusión anterior y del Teorema 1.5.5 puede surgir la siguiente interrogante: ¿Podemos caracterizar al espacio localmente convexo $\widehat{E}$ en términos de E'?

Lo anterior es sólo una parte de lo que llamaremos teoría de la dualidad, aunque por el momento trabajaremos con espacios localmente convexos abstractos, la idea es que las construcciones y afirmaciones que conforman este capítulo sean las que usemos en el capítulo 3 para estudiar la topología del espacio localmente convexo $L(X)$; y en el capítulo 4 para caracterizar al espacio $\widehat{L}(X)$.

2.1. Espacios de Operadores Lineales

Sean F un espacio topológico lineal, E un conjunto y $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(E)$ una familia dirigida mediante la inclusión de conjuntos (en lo que sigue, toda familia denotada por $\mathfrak{S}$ tiene esta propiedad). Consideremos a la familia $\mathscr{M}$ de conjuntos de la forma

$$M(S,V) = \{u \in F^E \colon u(S) \subset V\},$$

donde $S \in \mathfrak{S}$, $V \in \mathscr{N}$ y $\mathscr{N}$ es una base de vecindades de F. Note que si $M(S_1, V_1), M(S_2, V_2) \in \mathscr{M}$, entonces $M(S_3, V_3) \subset M(S_1, V_1) \cap M(S_2, V_2)$, para $S_3 \supset S_1 \cup S_2$ y $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Es decir, $\mathscr{M}$ es el filtro de vecindades de 0. Por otro lado, también se cumple lo siguiente:

$$M(S, W) + M(S, W) \subset M(S, V), \text{ donde } W + W \subset V, \tag{2.1}$$

$$\lambda M(S, V) = M(S, \lambda V), \text{ para } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Por tanto, como veremos inmediatamente, $\mathscr{M}$ es una base de vecindades de F^E para una única topología invariante llamada la **topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de la familia** $\mathfrak{S}$, o **$\mathfrak{S}$-topología**. Dado el uso que tendrán las bases de vecindades en esta sección, por $\mathscr{N}_E$ denotaremos a la base de vecindades del espacio topológico lineal E.

Como vimos en el ítem 2 de la lista de Ejemplos 1.5.9, no todas las topología definidas en F^E lo convierten en un espacio topológico lineal, el siguiente teorema nos da condiciones suficientes y necesarias para que esto suceda.

Teorema 2.1.1. Un subespacio lineal $G \subset F^E$ es un espacio topológico lineal bajo la $\mathfrak{S}$-topología si y sólo si para cada $u \in G$ y cada $S \in \mathfrak{S}$, $u(S)$ es acotado en F.

Demostración. Sea τ la topología inducida en G por la $\mathfrak{S}$-topología. Claramente los conjuntos de la forma $M(S, V) \cap G = M_G(S, V)$ forman una base de vecindades de G en torno al punto 0. Para que el par (G, τ) sea un espacio topológico lineal debemos mostrar que la topología τ cumple las condiciones del Teorema 1.5.3. De (2.1) obtenemos que τ satisface el ítem (a) del Teorema 1.5.3, sólo resta probar que los conjuntos $M_G(S, V)$ son radiales y redondeados.

Sea $V \in \mathscr{N}_F$ redondeado, por (2.2) obtenemos que $M_G(S, V)$ es redondeado. Supongamos que para cada $S \in \mathfrak{S}$ y cada $u \in G$, $u(S)$ es acotado en F. Entonces, dados u, S y V, existe $\lambda > 0$ tal que $u(S) \subset \lambda V$, en otras palabras, $u \in M_G(S, \lambda V) = \lambda M_G(S, V)$, con lo cual se ha demostrado que los conjuntos $M_G(S, V)$ son radiales.

Recíprocamente, si τ es una topología compatible con la estructura vectorial de G, los conjuntos $M_G(S, V)$ son radiales, es decir, dados u, S y V, existe $\lambda > 0$ tal que $u(S) \subset \lambda V$, luego, $u(S)$ es acotado en F. □

Naturalmente, en el teorema anterior podemos reemplazar a la familia $\mathfrak{S}$ por una familia más pequeña, en este sentido diremos que una familia $\mathfrak{S}_1$ es **fundamental**, con respecto a $\mathfrak{S}$, si es cofinal en $\mathfrak{S}$ (todo miembro de $\mathfrak{S}$ está contenido en algún miembro de $\mathfrak{S}_1$). Por otra parte, la $\mathfrak{S}$-topología no depende de la elección de la base de vecindades de E. Respecto a los espacios localmente convexos tenemos la siguiente:

Proposición 2.1.2. Sean F un espacio localmente convexo, E un espacio topológico y $\mathfrak{S}$ una familia de subconjuntos de E cuya unión es densa en E. Si $G \subset F^E$ es el conjunto formado por todas las funciones continuas en E que son acotadas en cada $S \in \mathfrak{S}$, entonces G es un espacio localmente convexo bajo la $\mathfrak{S}$-topología.

Demostración. Para que cada conjunto $M(S,V)$ sea convexo, sólo necesitamos que V forme parte de una base de vecindades $\mathscr{N}$ de conjuntos convexos. Dado que los elementos de G son acotados en cada $S \in \mathfrak{S}$, del Teorema 2.1.1 obtenemos que la $\mathfrak{S}$-topología es compatible con la estructura lineal de G y por lo anterior tenemos que es localmente convexa. Para ver que es de Hausdorff tomemos $0 \neq u \in G$. Sea $x \in E$ tal que $u(x) \neq 0$, de la continuidad de u se sigue que existe una vecindad V de x para la cual $u(V) \neq 0$. Como $\bigcup \mathfrak{S}$ es densa en E, tenemos que existe $S_0 \in \mathfrak{S}$ de modo que $u(S_0 \cap V) \neq 0$. Puesto que F es de Hausdorff, existe $V_0 \in \mathscr{N}$ tal que $u(S_0) \not\subset V_0$, es decir, $u \notin M(S_0, V_0)$, por ende, la $\mathfrak{S}$-topología es de Hausdorff. $\square$

Cuando E es un espacio topológico lineal, la condición de que $\bigcup \mathfrak{S}$ sea densa puede cambiarse y suponer sólo que $lin\,(\bigcup \mathfrak{S})$ es densa.

Corolario 2.1.3. Sean F un espacio localmente convexo, E un espacio topológico lineal, y $\mathfrak{S} \subset \mathcal{E}$ una familia de conjuntos acotados cuya unión es total en E. Entonces el espacio vectorial $\mathscr{L}(E,F)$ de todos los operadores lineales continuos de E en F es un espacio localmente convexo bajo la $\mathfrak{S}$-topología.

Demostración. Sea $\mathscr{N}_F$ una base de vecindades de F formada por conjuntos convexos, dado que todo elemento de $\mathscr{L}(E,F)$ es una aplicación lineal continua, de la Proposición 1.5.11 obtenemos que la conclusión del Teorema 2.1.1 se cumple, por tanto $\mathscr{L}(E,F)$ es un espacio localmente convexo. Para ver que la $\mathfrak{S}$-topología es de Hausdorff observemos que dado $0 \neq u \in \mathscr{L}(E,F)$, y como $lin\,(\bigcup \mathfrak{S})$ es densa, existe $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in lin\,(\bigcup \mathfrak{S})$ tal que $u(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \neq 0$, luego, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $u(x_i) \neq 0$, así, la $\mathfrak{S}$-topología es de Hausdorff. $\square$

Sabemos que la topología de todo espacio localmente convexo se deriva de una familia de seminormas, por tanto, complementando al corolario anterior, tenemos que si $\{p_\alpha \colon \alpha \in A\}$ es una familia de seminormas que genera la topología de F, entonces la familia de seminormas

$$u \mapsto p_{S,\alpha}(u) = \sup\{p_\alpha(u(x)) \colon x \in S\},$$

$S \in \mathfrak{S}$, $\alpha \in A$, genera la $\mathfrak{S}$-topología en $\mathscr{L}(E,F)$. En efecto, basta observar que para cada $\alpha \in A$ existe $V \in \mathscr{N}$ de modo que p_α coincide con el funcional de Minkowski de V, así, $p_{S,\alpha}(u) = \sup\{\mu_V(u(x)) \colon x \in S\}$, de aquí obtenemos que $p_{S,\alpha}^{-1}([0,1]) = M(S,V)$. Ahora describiremos brevemente como son las $\mathfrak{S}$-topologías.

Ejemplos 2.1.4. Sean F un espacio topológico lineal, E un conjunto y $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Consideremos el conjunto F^E.

   a) Si $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos finitos de E, entonces la $\mathfrak{S}$-topología coincide con la topología producto de Tychonoff.

   b) Si E es un espacio topológico de Hausdorff y $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos compactos de E, entonces la $\mathfrak{S}$-topología y la topología compacto-abierta coinciden.

2. Supongamos ahora que F y E son espacios topológicos lineales. En el espacio lineal $\mathscr{L}(E,F)$ podemos considerar las siguientes $\mathfrak{S}$-topologías:

   a) La topología de la **convergencia puntual** (o **convergencia simple**), donde $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos finitos de E.

   b) La topología de la **convergencia precompacta**, donde $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos precompactos de E.

   c) La topología de la **convergencia acotada**, donde $\mathfrak{S}$ es la familia de todos los conjuntos acotados de E, en ocasiones también es llamada la topología de la **convergencia fuerte**.

3. Observe que si E es un espacio localmente convexo, entonces $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ y recíprocamente, $E = \mathscr{L}(E',\mathbb{R})$.

Respecto a las familias $\mathfrak{S}$, debemos hablar de una clase especial: las familias saturadas. Una familia $\mathfrak{S} \neq \{\emptyset\}$ de subconjuntos acotados, de un espacio localmente convexo E, se dice **saturada** si cumple las siguientes condiciones:

(SH1) Si $S \in \mathfrak{S}$ y $R \subset S$, entonces $R \in \mathfrak{S}$.

(SH2) Si $S \in \mathfrak{S}$, entonces $\lambda S \in \mathfrak{S}$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

(SH3) Si $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$, entonces $\overline{\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)} \in \mathfrak{S}$

Las familias de los ejemplos 2.*b*) y 2.*c*) son saturadas. Por otro lado, no es difícil mostrar que las familias saturadas son estables bajo intersecciones arbitrarias, por tanto, y dado que la familia de todos los conjuntos acotados de E es saturada, toda familia $\mathfrak{S}$, de conjuntos acotados de E, define una familia saturada minimal $\widetilde{\mathfrak{S}}$ que contienen a $\mathfrak{S}$. Dicha familia es llamada la **envolvente saturada** de $\mathfrak{S}$.

Recordemos que los conjuntos acotados son fundamentales en la descripción de ciertas topologías, por tanto, ahora caracterizaremos los conjuntos acotados de los espacios $\mathscr{L}(E,F)$ bajo las $\mathfrak{S}$-topologías.

Teorema 2.1.5. Sean E y F espacios topológicos lineales, y $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(E)$ una familia de conjuntos acotados. Consideremos al conjunto $H \subset \mathscr{L}(E,F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. H es acotado bajo la $\mathfrak{S}$-topología.
2. Para cada $V \in \mathscr{N}_F$, $\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ absorbe a cada $S \in \mathfrak{S}$.
3. Para cada $S \in \mathfrak{S}$, $\bigcup_{u\in H} u(S)$ es acotado en F.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{N}_F$ es una base de vecindades de F formada por conjuntos redondeados.

(1 ⇒ 2) Si H es acotado, dada $V \in \mathscr{N}_F$ y $S \in \mathfrak{S}$, existe $\lambda > 0$ tal que $H \subset \lambda M(S,V) = M(S,\lambda V)$, es decir, $u(S) \subset \lambda V$ para cada $u \in H$. Como las funciones $u \in H$ son lineales, obtenemos que $S \subset \lambda \bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$.

(2 ⇒ 3) Sean $S \in \mathfrak{S}$ y $V \in \mathscr{N}_F$, como $S \subset \lambda \bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ para algún $\lambda > 0$, tenemos que $u(S) \subset \lambda V$ para cada $u \in H$, entonces $\bigcup_{u\in H} u(S) \subset \lambda V$, por tanto, $\bigcup_{u\in H} u(S)$ es acotado en F.

(3 ⇒ 1) Sean $S \in \mathfrak{S}$ y $V \in \mathscr{N}_F$, dado que $\bigcup_{u\in H} u(S)$ es acotado en F, existe $\lambda > 0$ tal que $\bigcup_{u\in H} u(S) \subset \lambda V$, en particular $u(S) \subset \lambda V$, $u \in H$, esto es, $H \subset M(S,\lambda V) = \lambda M(S,V)$, así, H está acotado.

□

Un concepto de gran importancia cuando hablamos de espacios de funciones es el de equicontinuidad. Si E y F son espacios topológicos lineales, $H \subset \mathscr{L}(E,F)$ es uniformemente equicontinuo si y sólo si es **equicontinuo en** $0 \in E$, en otras palabras, si y sólo si dada $V \in \mathscr{N}_F$, existe $W \in \mathscr{N}_E$, tal que $u(W) \subset V$ para cada $u \in H$.

Caracterizaremos a los subconjuntos equicontinuos de $\mathscr{L}(E,F)$, bajo la $\mathfrak{S}$-topología, con el siguiente:

Teorema 2.1.6. Sean E y F espacios topológicos lineales, $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(E)$ una familia de conjuntos acotados cuya unión es total en E. Consideremos un conjunto $H \subset \mathscr{L}(E,F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. H es equicontinuo.

2. Para cada $V \in \mathscr{N}_F$, $\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ es una vecindad de cero en E.
3. Para cada $V \in \mathscr{N}_F$, existe $W \in \mathscr{N}_E$, tal que $\bigcup_{u\in H} u(W) \subset V$.

Demostración.

(1 $\Rightarrow$ 2) Si H es equicontinuo, dada $V \in \mathscr{N}_F$, existe $W \in \mathscr{N}_E$, de modo que $u(W) \subset V$, con $u \in H$, es decir, $W \subset \bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$, por ende, $\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ es una vecindad de cero en E.

(2 $\Rightarrow$ 3) Como $\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ es una vecindad de cero en E, existe $W \in \mathscr{N}_E$, tal que $W \subset \bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$, en particular, $W \subset u^{-1}(V)$, para cada $u \in H$, esto equivale a que $u(W) \subset V$ con $u \in H$. Finalmente, $\bigcup_{u\in H} u(W) \subset V$.

(3 $\Rightarrow$ 1) Es clara.

□

Corolario 2.1.7. Todo subconjunto equicontinuo de $\mathscr{L}(E, F)$ es acotado en cualquier $\mathfrak{S}$-topología.

Demostración. El ítem 2 del Teorema 2.1.6 implica el ítem 2 del Teorema 2.1.5. □

Recordemos que el conjunto $L(E, F)$ representa al conjunto de todas las transformaciones lineales (continuas o no) de E en F. También note que si dotamos a F^E de la topología de la convergencia puntual, entonces $L(E, F)$ es un subespacio cerrado de F^E. En efecto, toda red de funciones lineales converge puntualmente a una aplicación lineal.

Proposición 2.1.8. Consideremos al espacio F^E con la topología producto. Si $H \subset \mathscr{L}(E, F)$ es equicontinuo y si $H_1 = [H]_{F^E}$, entonces $H_1 \subset \mathscr{L}(E, F)$ y H_1 es equicontinuo.

Demostración. Para cada $u_1 \in H_1$ tenemos que $u_1 \in L(E, F)$. Sea $\mathscr{N}_F$ una base de vecindades que consta de conjuntos cerrados. Dada $V \in \mathscr{N}_F$, y dada la equicontinuidad de H, existe $W \in \mathscr{N}_E$ para la cual $u(W) \subset V$, $u \in H$. Como u_1 es el límite puntual de una red de funciones lineales en H, se cumple que $u_1(W) \subset V$. La función u_1 es arbitraria, luego, H_1 es equicontinuo y por tanto $H_1 \subset \mathscr{L}(E, F)$. □

De aquí se desprende el Teorema de Alaoglu-Bourbaki:

Corolario 2.1.9. Sea E un espacio localmente convexo cuyo dual topológico es E'. Entonces todo subconjunto equicontinuo de E' es relativamente compacto para la topología débil $\sigma(E', E)$.

Demostración. Note que la topología débil $\sigma(E', E)$ es la topología de la convergencia puntual en $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, y por tanto, la topología inducida por la topología producto de Tychonoff en $\mathbb{R}^E$. Del Teorema de Tychonoff ([Eng89], Cap. 3, Teorema 3.2.4) obtenemos que $H \subset \mathbb{R}^E$ es relativamente compacto si y sólo si, para cada $x \in E$, el conjunto $\{u(x) \colon u \in H\}$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}$. Supongamos que $H \subset E'$ es equicontinuo, luego, existe $W \in \mathscr{N}_E$, tal que $|u(W)| \leq 1$ para todo $u \in H$. Ahora, si $x_0 \in E$, y dado que toda vecindad de cero es radial, existe $\lambda > 0$ tal que $x_0 \in \lambda W$, así, $|u(x_0)| \leq \lambda$ para cada $u \in H$. De este modo, la clausura H_1 de H en $\mathbb{R}^E$ es compacta y $H_1 \subset E'$ (Proposición 2.1.8), luego, H_1 coincide con la clausura $\overline{H}$ de H en $\sigma(E', E)$. Concluimos que $\overline{H}$ es compacto en la topología débil. □

2.2. Topologías Débiles

Ya se ha hecho mención del dual algebraico (y topológico) de un espacio topológico lineal. Pero hasta el momento no se ha entablado una noción formal sobre lo que significa que dos espacios lineales estén en dualidad. En primera instancia, la topología no es requerida en la definición, sin embargo, al examinar el ítem 1 de la lista de Ejemplos 1.5.31, podemos ver que la topología débil sí es influenciada por el "dual elegido". Sin más que agregar, presentamos por fin la definición de una dualidad.

Sean E y F un par de espacios lineales y $\phi \colon E \times F \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que satisface las siguientes condiciones:

$(D1)$ si $\phi(x_0, y) = 0$ para cada $y \in F$, entonces $x_0 = 0$,

$(D2)$ si $\phi(x, y_0) = 0$ para cada $x \in E$, entonces $y_0 = 0$.

En tal caso decimos que la tripleta (E, F, ϕ) es un **sistema dual** o una **dualidad**. Usualmente se dice que ϕ es la forma canónica de la dualidad y se denota por $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. De este modo, la tripleta $(E, F, \langle , \rangle)$ generalmente será denotada por $\langle E, F \rangle$.

Ejemplo 2.2.1. Sea E un espacio topológico lineal cuyo dual algebraico es E^*. Claramente, la forma bilineal $(x, u) \mapsto u(x) = \langle x, u \rangle$ define la dualidad $\langle E, E^* \rangle$. Note que el dual topológico E' es un subespacio vectorial de E^*, por tanto, $\langle E, E' \rangle$ es una dualidad en $E \times E' \subset E \times E^*$. De hecho, cualquier dualidad $\langle E, F \rangle$ identifica a F como subconjunto de E^*. En lo que sigue, siempre se supondrá lo anterior.

Antes de establecer qué subconjunto F de E^* es apto para establecer una dualidad entre E y F, necesitamos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.2.2. Sea $\langle F, G\rangle$ una dualidad. Dado $n \in \mathbb{N}$ sea $\{y_i \colon i = 1, \dots, n\}$ un conjunto linealmente independiente de F. Entonces existen n elementos linealmente independientes $x_1, \dots, x_n \in E$ tales que $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Demostración. La demostración se hace por medio de inducción. La tesis para $n = 1$ se obtiene de $(D2)$. Tomemos ahora $n > 1$; y supongamos que ya se ha demostrado la tesis de la proposición para el conjunto de n elementos $\{y_i \colon i = 1, \dots, n\}$. Sea $y_{n+1} \in F$ tal que el conjunto $\{y_i \colon i = 1, \dots, n+1\}$ es linealmente independiente. Por hipótesis de inducción, existe un conjunto $\{\overline{x}_i \colon i = 1, \dots, n\} \subset E$ tal que $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Consideremos el conjunto $A = lin(\{\overline{x}_i \colon i = 1, \dots, n\})$ y sea $B = \bigcap_{i=1}^{n} y_i^{-1}(0)$. Dado que cada $x \in E$ puede ser escrito trivialmente como

$$x = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, y_i\rangle\, \overline{x}_i}^{\in A} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_i\rangle\, \overline{x}_i\right)}_{\in B}, \tag{2.3}$$

obtenemos que E es la suma algebraica directa de A y B. Por otro lado, debido a (2.3) $\langle x, y_{n+1}\rangle \neq 0$ para algún $x \in B$, de otro modo y_{n+1} es una combinación lineal de $\{y_i \colon i = 1, \dots, n\}$, por ende, existe $x_{n+1} \in B$ tal que $\langle x_{n+1}, y_{n+1}\rangle = 1$, definiendo $x_i = \overline{x}_i - \langle \overline{x}_i, y_{n+1}\rangle\, x_{n+1}$ obtenemos el conjunto deseado $\{x_i \colon i = 1, \dots, n+1\}$. $\square$

Corolario 2.2.3. Sean $\langle E, F\rangle$ una dualidad y $y_1, \dots, y_{n+1} \in F$ tales que cuando $\langle x, y_i\rangle = 0$, para $1 \leq i \leq n$, se cumple que $\langle x, y_{n+1}\rangle = 0$. Entonces y_{n+1} es una combinación lineal de $y_1, \dots, y_n$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que el conjunto $\{y_1, \dots, y_n\}$ es linealmente independiente. Si $y_{n+1} \notin lin(\{y_1, \dots, y_n\})$, entonces el conjunto $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ es linealmente independiente, de la proposición anterior obtenemos que existen $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ tales que $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n+1$. Sin embargo, $\langle x_{n+1}, y_{n+1}\rangle = 0$; esto contradice la proposición anterior, luego, $y_{n+1} \in lin(\{y_1, \dots, y_n\})$. $\square$

Proposición 2.2.4. Sean E y F espacios localmente convexos de Hausdorff cuyas topologías están definidas por las familias de seminormas $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$ respectivamente. Una función lineal $u \colon E \to F$ es continua si y sólo si para cada $q \in \mathscr{Q}$ existe una subfamilia finita $\{p_i \colon i = 1, \dots, n\}$ de $\mathscr{P}$ y una constante $C > 0$ tal que para cada $x \in E$ se tenga que

$$q(u(x)) \leq C \sup\{p_i(x) \colon 1 \leq i \leq n\}.$$

Demostración. Supongamos que u es continua. Sea $q \in \mathscr{Q}$, y consideremos la vecindad de cero $V = \{y \in F \colon q(y) < 1\}$. Entonces existe

$W \in \mathscr{N}_E$, de modo que $u(W) \subset V$. Dado que la topología de E está definida por la familia $\mathscr{P}$, tenemos que existen $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\bigcap_{i=1}^n \{x \in E \colon p_i(x) < \varepsilon\} \subset W$. Por ende, la condición $\sup\{p_i(x) \colon 1 \leq i \leq n\} \leq \varepsilon$ implica que $u(x) \in V$, es decir, $q(u(x)) < 1$. Claramente, al tomar $C = \varepsilon^{-1}$ se tiene que $q(u(x)) < C \sup\{p_i(x) \colon 1 \leq i \leq n\}$.

Recíprocamente, para demostrar la continuidad de u en base a la hipótesis, tenemos que si $V \in \mathscr{N}_F$, el funcional de Minkowski μ_V es una seminorma continua en F, de modo que existen $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ y $C > 0$ tales que $\mu_V(u(x)) \leq C \sup\{p_i(x) \colon 1 \leq i \leq n\}$, se sigue que $W = \{x \in E \colon p_i(x) < C^{-1}, 1 \leq i \leq n\}$ es una vecindad de cero en E tal que $u(W) \subset V$. $\square$

Ahora es momento de caracterizar las dualidades.

Proposición 2.2.5. Consideremos la dualidad $\langle E, E^* \rangle$, si $F \subset E^*$, entonces el dual topológico de $(E, \sigma(E, F))$ es F, es decir, si $u \colon E \to F$ es lineal, tendremos que u es $\sigma(E, F)$-continua si y sólo si es de la forma $u(x) = \langle x, y \rangle$ para un único $y \in F$.

Demostración. De la definición de $\sigma(E, F)$, obtenemos que la forma lineal $x \mapsto \langle x, y \rangle$ es $\sigma(E, F)$-continua para cada $y \in F$. Sea ahora $u \colon E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Recordemos que la topología $\sigma(E, F)$ es la generada por las seminormas $x \mapsto |\langle x, y \rangle|$, $y \in F$, sin embargo, ésta familia de seminormas puede reducirse tomando sólo a los elementos de una base de Hamel B de F. De la Proposición 2.2.4 obtenemos que existen $y_1, \ldots, y_n$ y $C > 0$ tales que $|u(x)| \leq C \sup\{|\langle x, y_i \rangle| \colon 1 \leq i \leq n\}$ para todo $x \in E$. Del Corolario 2.2.3 se tiene que $u = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n \in F$. $\square$

Claramente, si $\langle E, F_1 \rangle$ y $\langle E, F_2 \rangle$ son dualidades y $F_2 \subset F_1$, entonces $\sigma(E, F_2)$ es más gruesa que $\sigma(E, F_1)$.

Teorema 2.2.6. Sea $\langle E, F \rangle$ un sistema dual. La forma bilineal canónica $\langle E, F \rangle$ pone a E y G en dualidad, G subespacio lineal de F, si y sólo si G es $\sigma(F, E)$-denso en F.

Demostración. Supongamos que $\langle E, G \rangle$ es una dualidad y que G no es $\sigma(F, E)$-denso en F. Así, existe $y_0 \in F \setminus \overline{G}$. Consideremos el funcional lineal $u \colon \overline{G} + lin(\{y_0\}) \to \mathbb{R}$ definido por $u(g + \lambda y_0) = \lambda$, $g \in \overline{G}$. Es fácil verificar que la suma $\overline{G} + lin(\{y_0\})$ es algebraica directa.

Para ver que u es $\sigma(F, E)$-continua en $\overline{G} + lin(y_0)$ observe lo siguiente. Dado $\varepsilon > 0$ el conjunto $[-\varepsilon, \varepsilon] y_0$ es homeomorfo al compacto $[-\varepsilon, \varepsilon]$, luego, el conjunto $\overline{G} + [-\varepsilon, \varepsilon] y_0 = u^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ es $\sigma(F, E)$-cerrado en $\overline{G} + lin(\{y_0\})$.

Tomando en cuenta la Proposición 1.5.30, u posee una extensión continua u_1 a F. De la Proposición 2.2.5 tenemos que existe $x_0 \in E$ no cero, tal que $u_1(y) = \langle x_0, y\rangle$ para todo $y \in F$. Por hipótesis se tiene que $(D1)$ se cumple en $E \times G$, así $x_0 = 0$. Esto contradice el hecho de que $u_1(y_0) = \langle x_0, y_0\rangle = 1$, por tanto, G deber ser $\sigma(F, E)$-denso en F.

Para demostrar el recíproco sólo basta con demostrar $(D1)$. En efecto, supongamos que $\langle x_0, y\rangle = 0$ para todo $y \in G$, la $\sigma(F, E)$-continuidad de $y \mapsto \langle x_0, y\rangle$, así como el hecho de que G es $\sigma(F, E)$-denso en F, obligan a que $\langle x_0, y\rangle = 0$ para todo $y \in F$, luego, $x_0 = 0$. $\square$

2.3. Topologías Polares

Sea $\langle E, F\rangle$ un sistema dual, definimos el conjunto **polar** de $M \subset E$ como el conjunto $M^\circ = \{y \in F \colon \langle x, y\rangle \leq 1, x \in M\}$, el **polar absoluto** de M se define como el conjunto $M^\bullet = \{y \in F \colon |\langle x, y\rangle| \leq 1, x \in M\}$. Note que el polar absoluto de M coincide con el polar de $cir(M)$, también se tiene que cuando M es absolutamente convexo, $M^\circ = M^\bullet$. Los siguientes hechos son consecuencias sencillas de la definición:

1. $\emptyset^\circ = \{0\}^\circ = F$ y $E^\circ = \{0\}$.
2. Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda M \subset N$, entonces $N^\circ \subset \lambda^{-1} M^\circ$; y $(\lambda M)^\circ = \left(\frac{1}{\lambda}\right) M^\circ$.
3. $M \subset (M^\circ)^\circ = M^{\circ\circ}$. $M^{\circ\circ}$ es el **bipolar** de M.
4. $M^\circ = M^{\circ\circ\circ}$.
5. Para cualquier familia $\{M_\alpha \colon \alpha \in A\}$ de subconjuntos de E se tiene que $\left(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha\right)^\circ = \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha^\circ$.

Proposición 2.3.1. Sean E un espacio localmente convexo y $\mathfrak{S}$ una familia saturada de conjuntos $\sigma(E, E')$-acotados de E. Entonces la familia de polares $\{S^\circ \colon S \in \mathfrak{S}\}$ es una base de vecindades para la $\mathfrak{S}$-topología de $E' = \mathscr{L}((E, \sigma(E, E')), \mathbb{R})$.

Demostración. Note que una vecindad de cero en E', bajo la $\mathfrak{S}$-topología, viene dada por los conjuntos $M(S, [-\varepsilon, \varepsilon]) = \{y \in E' \colon |y(x)| \leq \varepsilon, x \in S\}$, $\varepsilon > 0$. Por otro lado, como $\mathfrak{S}$ es una familia saturada, podemos considerar a $S \in \mathfrak{S}$ como un conjunto convexo, cerrado y redondeado. En este caso, $S^\circ = \{y \in E' \colon |\langle x, y\rangle| \leq 1, x \in S\}$. Por tanto, $M(S, [-\varepsilon, \varepsilon]) = (\varepsilon^{-1} S)^\circ$. $\square$

Un hecho interesante que relaciona a las $\mathfrak{S}$-topologías con las topologías generadas por la envolvente saturada $\overline{\mathfrak{S}}$, y tiene que ver con los conjuntos polares absolutos, es el siguiente:

Proposición 2.3.2. Sean $\mathfrak{S}$ una familia de conjuntos acotados de un espacio topológico lineal E. Entonces la $\mathfrak{S}$-topología y la $\overline{\mathfrak{S}}$-topología coinciden en $\mathbb{R}^E$.

Demostración. Claramente, siempre se tiene que la $\mathfrak{S}$-topología es más débil que la $\overline{\mathfrak{S}}$-topología. Recíprocamente, para demostrar que todo elemento de la forma $M(T,V)$, $T \in \overline{\mathfrak{S}}$, V vecindad de cero en $\mathbb{R}$, es un elemento de la $\mathfrak{S}$-topología, basta con probar que todo elemento de la forma $M(T,V)$, donde T es el resulta de aplicar alguna de la operaciones en (SH1)-(SH3) a un conjunto $S \in \mathfrak{S}$, es una vecindad de cero. Como toda vecindad convexa y redondeada de $0 \in \mathbb{R}$ es un múltiplo escalar de $[-1,1]$, es suficiente hacer ver que $M(T,[-1,1])$ (el polar absoluto de T) es una vecindad de cero.

Así pues, sea $S \in \mathfrak{S}$, luego:

1. Si $T \subset S$, entonces $S^\bullet \subset T^\bullet$ y $T^\bullet$ es una vecindad de cero.

2. Si $T = \lambda S$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $T^\bullet = (\lambda S)^\bullet = \frac{1}{\lambda}S^\bullet$.

3. Si $R \in \mathfrak{S}$ y $T = \overline{\Gamma(R \cup S)}$, entonces $T^\bullet = R^\bullet \cap S^\bullet$.

En cualquier caso $T^\bullet$ es una vecindad de cero. Consecuentemente, la $\mathfrak{S}$-topología y la $\overline{\mathfrak{S}}$-topología coinciden. □

Los conjuntos polares o **conjuntos duales**, tienen un lugar preferencial en el estudio de los espacios localmente convexos, una de las razones es que nos auxiliarán en las demostraciones de teoremas fundamentales como el Teorema de Mackey-Arens y el Teorema de completitud de Grothendieck, entre otros. La mayoría de estas demostraciones se basan fuertemente en el llamado Teorema del bipolar. Antes de mostrarlo probemos la siguiente:

Proposición 2.3.3. Sea $\langle E,F\rangle$ un sistema dual. Para cualquier conjunto $M \subset E$, M° es un conjunto convexo, $\sigma(F,E)$-cerrado y que contiene a cero. Si M es redondeado, entonces M° es redondeado.

Demostración. La dualidad $\langle E,F\rangle$ induce la dualidad $\langle F,E\rangle$. Además, es fácil hacer notar que M° es un conjunto convexo que contiene a cero. Ahora note que dado $x \in E$, $y \mapsto \langle x,y\rangle$ es una forma lineal en F, por tanto, el conjunto cerrado $G_x = \{y \in F\colon\ \langle x,y\rangle \leq 1\}$ es $\sigma(F,E)$-cerrado. Obviamente $M^\circ = \bigcap_{x\in M} G_x$.

Supongamos ahora que M es redondeado, entonces dado $0 < |\lambda| \leq 1$ y $y \in M^\circ$, tenemos que $\langle x,\lambda y\rangle = \langle \lambda x,y\rangle \leq 1$, pues $\lambda x \in M$, y por tanto $\lambda y \in M^\circ$. □

Teorema 2.3.4 (Teorema del bipolar)**.** Sea $\langle E,F\rangle$ una dualidad. Para cualquier conjunto $M \subset E$, el bipolar $M^{\circ\circ}$ es la envolvente convexa $\sigma(E,F)$-cerrada de $M \cup \{0\}$.

Demostración. De la Proposición 2.3.3 obtenemos que $M^{\circ\circ}$ es convexo, $\sigma(E,F)$-cerrado y contiene a cero. Por tanto, si M_1 es la $\sigma(E,F)$-cerradura de la envolvente convexa de $M\cup\{0\}$ tenemos que $M_1 \subset M^{\circ\circ}$. Para probar que $M^{\circ\circ} \subset M_1$ mostraremos que si $x \notin M_1$, entonces $x \notin M^{\circ\circ}$. Supongamos que $x_0 \notin M_1$, del Teorema 1.5.32 obtenemos que existe un hiperplano H cerrado en E que separa estrictamente a $\{x_0\}$ y M_1. Sin pérdida de generalidad, debido a la Proposición 2.2.5, podemos suponer que $H = y_0^{-1}(1)$ para algún $y_0 \in F$. Como $0 \in M_1$ tendremos que $\langle x, y_0\rangle < 1$ para cada $x \in M_1$, de aquí $\langle x_0, y_0\rangle > 1$. De lo anterior obtenemos que $y_0 \in M_1^\circ \subset M^\circ$, y por tanto, $x_0 \notin M^{\circ\circ}$. □

Corolario 2.3.5. $M \subset E'$ es equicontinuo si y sólo si M° es una vecindad de cero en E.

Demostración. Como $M \subset E'$ es equicontinuo, existe $V \in \mathscr{N}_E$, vecindad convexa y redondeada, tal que $\langle x, y\rangle \leq 1$ para cada $x \in V$ y $y \in M$, esto es, $M \subset V^\circ$, luego, del Teorema del bipolar se obtiene que $V^{\circ\circ} = V \subset M^\circ$ con lo que M° es una vecindad de cero. Esto último implica que $M \subset M^{\circ\circ} \subset V^{\circ\circ\circ} = V^\circ$, por tanto, dado $\varepsilon > 0$, si $x \in \varepsilon V$ y $y \in M$ se tendrá que $\langle x, y\rangle \leq \varepsilon$, con lo cual hemos demostrado que M es equicontinuo. □

El siguiente corolario posee una afirmación muy importante: toda topología localmente convexa es una $\mathfrak{S}$-topología, donde $\mathfrak{S}$ es una familia "adecuada" de subconjuntos de E'. La demostración reside en el corolario anterior.

Corolario 2.3.6. Sea (E,τ) un espacio topológico lineal. La topología τ es localmente convexa si y sólo si τ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E'.

Más adelante veremos que los espacios barrillados y bornológicos son muy útiles en la práctica, pero por el momento sólo caracterizaremos a los espacios barrillados en términos polares.

Teorema 2.3.7. Sea E un espacio localmente convexo. Entonces la familia de barriles en E, así como la familia de todos los subconjuntos acotados de $(E', \sigma(E', E))$ que son cerrados, convexos y redondeados se corresponden 1 a 1 bajo polaridad.

Demostración. Supongamos que B es un barril en E, de la Proposición 2.3.3 sabemos que B° es $\sigma(E',E)$-cerrado, convexo y redondeado, sólo resta demostrar que es $\sigma(E',E)$-acotado. Recordemos que la topología $\sigma(E',E)$ está definida por las seminormas $y \mapsto |\langle x, y\rangle|$. Para ver que B° es $\sigma(E',E)$-acotado demostraremos que las seminormas $y \mapsto |\langle x, y\rangle|$ son funciones acotadas en B°, $x \in E$. Sea $x_0 \in E$, dado que B es radial, tendremos que $x_0 \in \lambda B$ para algún $\lambda > 0$. Tomemos ahora $y \in B^\circ$, entonces $|\left\langle \lambda^{-1}x_0, y\right\rangle| \leq 1$, es decir, $|\langle x_0, y\rangle| \leq \lambda$, en otras palabras, la función lineal $y \mapsto |\langle x, y\rangle|$ es acotada en B°, y por tanto, B es acotado.

Ahora consideremos un conjunto $B \subset E'$ que sea $\sigma(E', E)$-acotado, $\sigma(E', E)$-cerrado, convexo y redondeado. Veamos que B° es un barril en E. Por la Proposición 2.3.3 tenemos que B° es convexo, redondeado y $\sigma(E, E')$-cerrado, es decir, cerrado (Proposición 1.5.33). Para verificar que B° es radial tomemos $x \in E$, el conjunto $\{x\}^\circ$ es una vecindad de cero en E', luego, y dado que B es $\sigma(E', E)$-acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda\{x\}^\circ = \{\lambda^{-1}x\}^\circ$, de tal modo que $\lambda^{-1}x \in B \Leftrightarrow x \in \lambda B$. Por tanto, B es un barril. □

Proposición 2.3.8. Sean E, F espacios localmente convexos tal que E es barrillado. Entonces todo subconjunto acotado en la topología simple de $\mathscr{L}(E, F)$ es equicontinuo.

Demostración. Sea $H \subset \mathscr{L}(E, F)$, sin pérdida de generalidad, sea $V \in \mathscr{N}_F$ que es cerrada, convexa y redondeada. Por el ítem 2 del Teorema 2.1.5 tendremos que $W = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ es un conjunto cerrado, convexo, redondeado y que absorbe a todo conjunto finito. Como E es barrillado y W es un barril, W es una vecindad de cero. Así, H es equicontinuo. □

Corolario 2.3.9. Sea E un espacio localmente convexo. E es barrillado si y sólo si cada subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado de E' es equicontinuo.

Demostración. Sean E es un espacio localmente convexo barrillado y $B \subset E'$ un subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado. Tomando a $F = \mathbb{R}$ en la Proposición 2.3.8 obtenemos que B es equicontinuo.

Recíprocamente, supongamos que todo subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado es equicontinuo. Sea B un barril en E. Por el Teorema 2.3.7, B° es acotado, y por hipótesis tendremos que B° es equicontinuo. Del Corolario 2.3.6 obtenemos que $B^{\circ\circ} = B$ es una vecindad de cero, por ende E es barrillado. □

Por tanto, de los Corolarios 2.3.6, 2.3.9 y 2.1.7 tenemos que la topología de todo espacio barrillado es la dada por los subconjuntos $\sigma(E', E)$-acotados de E'. En resumen, la topología de todo espacio barrillado es la topología fuerte. Aunado a lo anterior, los espacios barrillados son de gran importancia en la práctica, pues sólo en este tipo de espacios es válido el Teorema de Banach-Steinhaus ([Sch71], Cap. 3, Teorema 4.6).

2.4. Topologías Consistentes

Sea (E, τ) un espacio topológico lineal cuya topología es localmente convexa, diremos que τ es **consistente** con la dualidad $\langle E, F\rangle$ si el dual topológico de (E, τ) es F. Se sigue que toda topología consistente con $\langle E, F\rangle$ es más fina que $\sigma(E, F)$, por ende de Hausdorff. Sabiendo esto, y sumando la tesis de la Proposición 1.5.33 obtenemos la siguiente:

Proposición 2.4.1. La clausura de un conjunto convexo $C \subset E$ es la misma para todas las topologías localmente convexas consistentes con $\langle E, F\rangle$.

También del Corolario 2.3.6 obtenemos que toda topología τ consistente con $\langle E, F\rangle$ es una $\mathfrak{S}$-topología ($\mathfrak{S}$ es la clase saturada de los subconjuntos equicontinuos de F), y del Teorema de Alaoglu-Bourbaki, ésta clase no es más que la de los subconjuntos relativamente compactos de $\sigma(F, E)$. Sin embargo, la afirmación recíproca también es válida, éste es el contenido del Teorema de Mackey-Arens.

Teorema 2.4.2. Una topología localmente convexa τ (definida en E) es consistente con $\langle E, F\rangle$ si y sólo si τ es la $\mathfrak{S}$-topología formada por una clase saturada de conjuntos $\sigma(F, E)$-relativamente compactos que cubren a F.

Demostración. Ya sabemos que toda topología localmente convexa satisface la conclusión del teorema. Ahora supongamos que $\mathfrak{S}$ es una clase saturada de conjuntos $\sigma(F, E)$-relativamente compactos que cubren a F. De la Proposición 2.1.2 obtenemos que E es un espacio topológico lineal bajo la $\mathfrak{S}$-topología. Probemos ahora que la $\mathfrak{S}$-topología es más fina que la $\sigma(E, F)$-topología. Sea $V = \{x \in E\colon |y_i(x)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$, donde $\varepsilon > 0$ y $y_i \in F$ para $1 \leq i \leq n$. Dado que la clase $\mathfrak{S}$ es saturada tenemos que para cada $1 \leq i \leq n$, los conjuntos $\{y_i\}$ pertenecen a $\mathfrak{S}$, así, $\bigcap_{i=1}^{n} M(\{y_i\}, (-\varepsilon, \varepsilon)) = V$. Por tanto, el dual de E (con la $\mathfrak{S}$-topología) contiene a F. La prueba finaliza demostrando que de hecho el dual de E es idéntico a F. Sea y una forma lineal continua respecto de la $\mathfrak{S}$-topología; entonces el conjunto $\{y\}^\circ$ es una vecindad de cero en E. El ítem 1 de la Proposición 2.3.1 nos dice que existe $S \in \mathfrak{S}$ tal que $S^\circ \subset \{y\}^\circ$. Dado que $\mathfrak{S}$ es saturada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que S es convexo, redondeado y $\sigma(F, E)$-compacto. Del Teorema del bipolar obtenemos que $y \in S^{\circ\circ} = S \subset F$. $\square$

Dado que el conjunto de topologías localmente convexas sobre E que son consistentes con $\langle E, F\rangle$ es una laticce completa, tenemos que existe una topología consistente con $\langle E, F\rangle$ que es la más fina con este propiedad. De la discusión anterior, tenemos que esta topología es la de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\sigma(F, E)$-compactos, convexos y redondeados de F; dicha topología es llamada la **topología de Mackey** y es denotada por $\tau(E, F)$. Todo espacio localmente convexo que posea la topología $\tau(E, F)$ es llamado un **espacio de Mackey**.

La clase de espacios de Mackey es invariante bajo completaciones, es decir, tenemos la siguiente afirmación:

Proposición 2.4.3. Si E es un espacio de Mackey, también $\widehat{E}$ es un espacio de Mackey.

Demostración. A pesar de la simplicidad del enunciado, éste esconde varios hechos, por ejemplo:

1. El dual topológico de E coincide con $(\widehat{E})'$. Esto se debe a que toda forma lineal y continua se extiende uniformemente a $\widehat{E}$, e inversamente, la restricción a E de todo funcional lineal y continuo en $\widehat{E}$ es continuo.

2. Los conjuntos $\tau(E, E')$-equicontinuos y $\tau(\widehat{E}, E')$-equicontinuos son los mismos. En otras palabras, dada una vecindad cerrada y absolutamente convexa V de cero en E, el conjunto $[V]_{\widehat{E}}$ posee el mismo polar $V^\circ = ([V]_{\widehat{E}})^\circ$, luego, todo conjunto $\tau(E, E')$-equicontinuo es $\tau(\widehat{E}, E')$-equicontinuo, y viceversa.

Dado que todo subconjunto absolutamente convexo y $\sigma(E', \widehat{E})$-compacto es absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-compacto, y como los conjuntos $\tau(E, E')$-equicontinuos y $\tau(\widehat{E}, E')$-equicontinuos son los mismos, tenemos que la topología $\tau(\widehat{E}, E')$ es de Mackey. □

Antes de demostrar que los conjuntos acotados son los mismos en cualquier topología consistente, probaremos la siguiente:

Proposición 2.4.4. Sean (E, ν) y F espacios localmente convexos, y $\mathfrak{S}$ la familia de todos los conjuntos convexos, redondeados de E que son ν-compactos. Entonces todo subconjunto acotado débilmente de $\mathscr{L}(E, F)$ es acotado en la $\mathfrak{S}$-topología.

Demostración. Si H es acotado débilmente en $\mathscr{L}(E, F)$ y $V \in \mathscr{N}_F$ es cerrada, convexa y redondeada, entonces $B = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ es un conjunto cerrado, convexo y redondeado en E que absorbe a todo conjunto finito (ítem 2 del Teorema 2.1.5 considerando a la familia de los conjuntos finitos de E), y por tanto es radial, es decir, B es un barril.

Veamos ahora que B absorbe a todo $S \in \mathfrak{S}$, con lo cual H será acotado en la $\mathfrak{S}$-topología (ítem 2 del Teorema 2.1.5). Sea $S \in \mathfrak{S}$, dado que S es convexo y redondeado, tendremos que $0 \in S$. Consideremos al conjunto $E_S \subset E$ definido como $E_S = \bigcup_{n=1}^{\infty} nS$, no es díficil ver que E_S es un subespacio lineal de E en el cual S es una vecindad de cero. Tomando el funcional de Minkowski de S en E_S, obtenemos que el par (E_S, μ_S) es un espacio normado cuya topología es más fina que la inducida por ν. Más aún, (E_S, μ_S) es un espacio de Banach. Para ver esto consideremos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (E_S, μ_S), entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (E, ν). Dado que el rango de toda sucesión de Cauchy es acotado tendremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in E_S \subset E$, de este modo hemos verificado que (E_S, μ_S) es completo. De lo anterior tenemos que (E_S, μ_S) es un espacio barrillado, por ende $B \cap E_S$ es un barril en E_S y una vecindad de cero en E_S, dado que S es acotado tendremos que B absorbe a S. $\square$

Corolario 2.4.5. Todo subconjunto $\sigma(E, F)$-acotado de E es $\tau(E, F)$-acotado, en decir, las familias de subconjuntos acotados son las mismas para cualquier topología localmente convexa consistente con $\langle E, F\rangle$.

Demostración. Tenemos que la topología $\tau(E, F)$ es la $\mathfrak{S}$-topología, donde $\mathfrak{S}$ es una familia saturada de conjuntos $\sigma(F, E)$-relativamente compactos que cubre a F. Sin pérdida de generalidad, tomando cerraduras débiles en los elementos de $\mathfrak{S}$, podemos considerar a $\mathfrak{S}$ como la familia $\mathfrak{C}$ de todos los conjuntos convexos, redondeados y $\sigma(F, E)$-compactos. Consideremos a $F = \mathbb{R}$ en la proposición anterior, de este modo obtenemos la conclusión deseada. $\square$

Los primeros ejemplos de espacios de Mackey que conoceremos son los espacios barrillados y bornológicos, en efecto, si E es un espacio barrillado, entonces el Corolario 2.3.9 nos dice que todo conjunto $\sigma(E', E)$-compacto ($\sigma(E', E)$-acotado) de E' es equicontinuo, por tanto, la topología de E es más fina que $\tau(E, F)$, y por tanto deben ser idénticas. Si ahora (E, ν) es bornológico, la función identidad $1_E \colon (E, \nu) \to (E, \tau(E, F))$ es continua, pues la imagen de todo conjunto acotado es acotada, luego, ambas topologías coinciden y por tanto E es de Mackey.

2.5. Topologías Fuertes

Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad, dado que los conjuntos acotados de cada topología consistente con la dualidad $\langle E, F\rangle$ son escencialmente los mismos, al considerar la familia $\mathfrak{S}$, de los conjuntos acotados en F, generaremos una $\mathfrak{S}$-topología en E llamada la topología fuerte y que será denotada por $\beta(E, F)$. El principal "defecto" de esta topología es que no siempre es consistente con la dualidad $\langle E, F\rangle$.

Antes de continuar es conveniente establecer cierta notación. Si E es un espacio localmente convexo, los espacios $(E, \sigma(E, E'))$, $(E, \tau(E, E'))$, $(E, \beta(E, E'))$ serán denotados por E_σ, E_τ y E_β respectivamente. La notación E'_σ, E'_τ, E'_β es completamente análoga. Ahora consideremos las siguientes familias de subconjuntos de E':

- $\mathfrak{E}$ denota a la familia de subconjuntos equicontinuos.

- $\mathfrak{C}$ denota a la familia de subconjuntos cuya envolvente cerrada, convexa y redondeada es débilmente compacta.
- $\mathfrak{B}$ es la familia de subconjuntos fuertemente acotados de E', y $\mathfrak{B}_\sigma$ es la familia de subconjuntos débilmente acotados de E'.

A continuación veremos que estas familias son saturadas y que se tienen las contenciones $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\sigma$. Claramente, todo conjunto equicontinuo es relativamente compacto en la topología débil (Teorema de Alaoglu-Bourbaki), por otro lado, no es difícil mostrar que la envolvente convexa de la unión finita de una familia de subconjuntos compactos es compacta, así, debido a la Proposición 2.1.8 $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{E}$ es una familia saturada.

Ahora tomemos un conjunto convexo redondeado y compacto $C \subset E'_\sigma$. Entonces C° es una vecindad de cero en E_τ, y por tanto absorbe a todo conjunto acotado $B \subset E_\sigma$, en otras palabras B° absorbe a $C^{\circ\circ} = C$, es decir, C es fuertemente acotado, con esto concluimos que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$. Naturalmente, $\mathfrak{C}$ es una familia saturada. Para las familias $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}_\sigma$ las propiedades son claras.

Del Corolario 2.3.9 obtenemos que un espacio localmente convexo E es barrillado si y sólo si las propiedades de ser equicontinuo, relativamente compacto en sentido débil, fuertemente acotado y débilmente acotado son equivalentes para cualquier subconjunto de E', es decir $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_\sigma$. Del Teorema de Mackey-Arens obtenemos que E es de Mackey si y sólo si $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}$. A los espacios donde $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$ se les llama **infrabarrillados**. No debemos olvidar que las contenciones entre estas clases pueden ser estrictas, en particular, existen espacios bornológicos no barrillados.

Ejemplo 2.5.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ el conjunto de todas las sucesiones reales cuyo rango es finito, es decir, $x \in X$ si y sólo si $x(\mathbb{N})$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. X se convierte en un espacio normado bajo $||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$, de aquí que X sea bornológico. Para ver que X no es barrillado exhibiremos un conjunto débilmente acotado que no es equicontinuo. Sea $Y \subset \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones $f_m \colon X \to \mathbb{R}$ definidas como $f_m(x) = mx(m)$, claramente, este conjunto de funciones es puntualmente acotado. Para ver que Y no es equicontinuo en 0, tomemos $\varepsilon = 1$, y veamos que para todo $\xi > 0$, $B(0, \xi) \not\subseteq (-1, 1)$. Dado $\xi > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m}{2}\xi > 1$, por tanto, para $x \in B(0, \xi)$ tal que $x(n) = \frac{\xi}{2}\delta_{nm}$, tendremos que $f_m(x) = mx(m) = \frac{m}{2}\xi > 1$. En conclusión, X no es barrillado.

En ámbitos más generales tenemos que existen espacios barrillados no bornológicos, obviamente la demostración de este hecho sale de los objetivos del presente trabajo, sin embargo, todo interesado la puede consultar en [Shi54] y [Nac54].

El ejemplo anterior pone de manifiesto que en general $\beta(E', E)$ no es consistente con la dualidad $\langle E, E'\rangle$, es decir, el dual topológico de E'_β no puede identificarse con E, por tanto, si denotamos por E'' al dual de E'_β obtenemos que $E \subset E'' \subset E'^*$. El conjunto E'' se denomina el **bidual** de E, y puede ser dotado de una topología de diferentes maneras. Cuando tiene la topología definida por la familia $\mathfrak{B}$ (de E') es usualmente nombrado el **bidual fuerte** de E. Si en cambio posee la $\mathfrak{E}$-topología diremos que tiene la **topología natural**, pues esta topología induce la topología original de E.

Consideremos ahora al encaje canónico de E en E'', dado por $x \to u_x$, donde u_x es la forma lineal definida en E' cuya regla de asignación es $u_x(x') = \langle x, x'\rangle$. Dicha función siempre es continua e inyectiva. Aunque el objetivo no es desarrollar este tema de manera extensa, finalizaremos esta sección con unas definiciones.

Cuando $E = E''$, es decir, el encaje canónico es una biyección, diremos que el espacio E es **semireflexivo**. Si además en E' se tiene la coincidencia de las familias $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{B}$, es decir, si el encaje canónico de E en E''_β es un isomorfismo, diremos que el espacio E es **reflexivo**. Naturalmente, E es semireflexivo si y sólo si es infrabarrillado, y es reflexivo si y sólo si es semireflexivo y barrillado.

2.6. Teorema de Grothendieck

Ahora trataremos de examinar un poco la completitud de un espacio localmente convexo E bajo una $\mathfrak{S}$-topología dada. En lo que sigue, $\mathbb{R}^E$ es considerado un espacio topológico con la topología producto de Tychonoff. Sabemos que E^* es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^E$, por tanto, E^* es un espacio topológico lineal completo. Del Teorema 2.2.6 obtenemos que E' es un subconjunto denso de E^*, por tanto, podemos identificar a E^* como la completación del espacio localmente convexo E'. En resumen, E' es un espacio localmente convexo completo si y sólo si $E' = E^*$. Aunque la discusión sólo se ha centrado en la topología débil, el objetivo de la presente sección es examinar las diferentes $\mathfrak{S}$-topologías. Primero nos centraremos en los espacios barrillados y bornológicos.

Proposición 2.6.1. Sean E un espacio localmente convexo, y $\mathfrak{S}$ una familia de conjuntos acotados que cubren a E. Entonces:

1. Si E es barrillado, E' es casi-completo para cada $\mathfrak{S}$-topología.

2. Si $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_\sigma$ y E es bornológico, entonces E'_β es completo.

Demostración.

1. Para ver que E' es casi-completo bajo cualquier $\mathfrak{S}$-topología, debemos mostrar que todo conjunto acotado y cerrado de E' es completo. Dado que todo conjunto cerrado y acotado de E' es equicontinuo y cerrado (Proposiciones 2.3.8 y 2.1.8), del Teorema de Alaoglu-Bourbaki concluimos que dicho conjunto es compacto.

2. Supongamos que E es bornológico. Sean $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en E'_β y Σ la red de Cauchy asociada a $\mathscr{F}$, entonces existe $\varphi \in E^*$ tal que $\Sigma \to \varphi$. Dado que la convergencia es uniforme en cada subconjunto acotado de E'_β, tendremos que φ es una aplicación acotada en E, como E es bornológico llegamos a que $\varphi \in E'$.

□

Al inicio del capítulo nos preguntamos lo siguiente: ¿podemos caracterizar a la completación de un espacio localmente convexo en términos de su dual topológico? La respuesta está detras del Teorema de completitud de Grothendieck:

Teorema 2.6.2. Sea (E, ν) un espacio localmente convexo, y sea $\mathfrak{S}$ una familia saturada de subconjuntos acotados que cubren a E. E' es un espacio localmente convexo completo bajo la $\mathfrak{S}$-topología si y sólo si toda forma lineal en E que es ν-continua en cada $S \in \mathfrak{S}$ resulta ser continua en (E, ν).

Demostración. Supongamos que E' es completo y que f es una forma lineal en E' que es ν-continua en cada $S \in \mathfrak{S}$, debemos mostrar que $f \in E'$, para lo cual es suficiente mostrar que f_S puede ser aproximada uniformemente en S por elementos de E'. Sean $S \in \mathfrak{S}$ y $\varepsilon > 0$, como $\mathfrak{S}$ es saturada, podemos suponer que S es convexo, redondeado y débilmente cerrado. Sea $f \in E^*$ tal que f_S es ν-continua en $0 \in S$, entonces existe una ν-vecindad de cero V que es convexa redondeada y cerrada en E tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in S \cap V$. Tomando polares obtenemos que $f \in \varepsilon(S \cap V)^\circ$. Ahora veremos que $(S \cap V)^\circ = \overline{conv(S^\circ \cup V^\circ)}$. Como $0 \in S^\circ \cup V^\circ$, del Teorema del bipolar obtenemos lo siguiente:

$$\overline{conv(S^\circ \cup V^\circ)} = (S^\circ \cup V^\circ)^{\circ\circ} = (S \cap V)^{\circ\circ\circ} = (S \cap V)^\circ,$$

claramente, $\overline{conv(S^\circ \cup V^\circ)} \subset \overline{S^\circ + V^\circ}$. Del ítem 2 de la Proposición 2.3.1 y del Teorema de Alaoglu-Bourbaki obtenemos que $S^\circ + V^\circ$ es un conjunto cerrado (V° es compacto y S° es cerrado) y $f \in \varepsilon(S^\circ + V^\circ)$, es decir, existe $g \in \varepsilon V^\circ \subset E'$ tal que $f - g \in \varepsilon S^\circ$, entonces $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in S$.

Recíprocamente, sean $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en E' y Σ la red de Cauchy asociada a $\mathscr{F}$. Dado que la familia $\mathfrak{S}$ es saturada y cubre a E, entonces todo conjunto finito de E está en la familia $\mathfrak{S}$, es decir, $\lim \Sigma(x)$

existe para cada $x \in E$, claramente, esta función límite es lineal, por tanto, existe $f \in E^*$ tal que $\Sigma \to f$. Como la convergencia es uniforme en cada $S \in \mathfrak{S}$ llegamos a que f es continua en cada S, de la hipótesis obtenemos que $f \in E'$. $\square$

Dado que las dualidades son sistemas simétricos la proposición dual del Teorema de Grothendieck es la siguiente:

Corolario 2.6.3. E es un espacio localmente convexo completo si y sólo si todo funcional lineal definido en E', que es $\sigma(E', E)$-continuo en cada subconjunto equicontinuo de E', es continuo en E'_σ.

En general, no todo espacio localmente convexo E es completo, pero podemos completarlo, el Teorema 1.5.5 es un teorema de existencia (y unicidad), lamentablemente no nos específica exactamente que espacios pueden ser dignos de ser llamados la completación de E. El siguiente teorema aclarará esta duda.

Teorema 2.6.4. Sean E un espacio localmente convexo y $\mathfrak{S}$ una familia saturada de subconjuntos acotados que cubren a E. Consideremos al conjunto $E_1 \subset E^*$, formado por todas las formas lineales definidas en E que son continuas en cada $S \in \mathfrak{S}$, con la $\mathfrak{S}$-topología. Entonces E_1 es un espacio localmente convexo completo que contiene a E' como un subconjunto denso.

Demostración. Primero debemos notar que E_1 junto con la $\mathfrak{S}$-topología es en efecto un espacio localmente convexo. Sea $f \in E_1$ y tomemos un $S \in \mathfrak{S}$ convexo, redondeado y débilmente cerrado; dado que f es débilmente continua en $0 \in S$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de cero (en E) convexa, redondeada y cerrada tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in S \cap V$. Continuando como en la demostración del Teorema 2.6.2 obtenemos que $f \in \varepsilon(S^\circ + V^\circ)$, es decir, existe $g \in \varepsilon V^\circ \subset E'$ tal que $f - g \in \varepsilon S^\circ$, en otras palabras $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in S$, pero

$$|f(x)| - |g(x)| \leq ||f(x)| - |g(x)|| \leq |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon + |g(x)|,$$

para cada $x \in S$, dado que $g \in E'$, g es acotada en S, por tanto, f lo es. Del Teorema 2.1.1 obtenemos que E_1 es un espacio localmente convexo. Lo anterior también pone de maniefiesto que E' es denso en E_1. Finalmente, análogo a la parte final de la demostración del Teorema 2.6.2, E_1 resulta ser un espacio completo. $\square$

Capítulo 3

Espacios Localmente Convexos Libres

En la Introducción se ha comentado un poco acerca de la historia del desarrollo del concepto de espacio localmente convexo libre. Este capítulo está dedicado completamente a explorar este concepto y atender varias cuestiones concretas. Como se hizo ver anteriormente, los espacios localmente convexos son flechas universales en ciertas categorías; como tal, la forma usual de demostrar la existencia de estas estructuras es mediante el Teorema del funtor adjunto de Freyd ([ML98], Cap. 5, Sec. 6, Teorema 2). Dicho teorema nos garantiza la existencia y unicidad (salvo isomorfismo) del espacio localmente convexo libre, pero no nos dice de qué espacio se trata ni cuales son sus elementos. Iniciaremos proponiendo, a manera de ejemplo, cuál es el candidato a ser llamado “el espacio localmente convexo libre”.

Ejemplo 3.0.1. El espacio vectorial libre $L(X)$ sobre el conjunto X es un ejemplo de flecha universal. Sea **Vet** la categoría de espacios vectoriales reales cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre ellos. Consideremos el funtor de olvido $U\colon \mathbf{Vet} \to \mathbf{Set}$. Sea X un conjunto, y consideremos al espacio lineal $L(X)$ de todas las funciones reales con soporte finito, es decir, $L(X) = \{f \in \mathbb{R}^X \colon f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ es finito}\}$. Definimos el **encaje de Dirac** como la función $i\colon X \to L(X)$ dada por la regla $x \mapsto \delta_x$, donde:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases} .$$

La función i encaja a X como una base de Hamel de $L(X)$. Por otro lado, consideremos un espacio vectorial E, tomemos cualquier función

$\varphi\colon X \to E$ y un punto $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in L(X)$, entonces φ se extiende de manera única a un operador lineal $\Phi\colon L(X) \to E$ definido por:

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i),$$

observe que $\varphi = U\Phi \circ i$, es decir, $(i, L(X))$ es un objeto inicial de la categoría coma $(X \downarrow U)$.

La versión topológica de lo anterior es la siguiente:

Sea X un espacio topológico. El **espacio localmente convexo libre** sobre X se define como un par $(i, L(X))$, donde $i\colon X \to L(X)$ es una inyección continua, y $L(X)$ es un espacio localmente convexo (no necesariamente de Hausdorff), tales que para toda función continua $\varphi\colon X \to E$, donde E es un espacio localmente convexo (no necesariamente de Hausdorff), existe un operador lineal continuo $\Phi\colon L(X) \to E$ de modo que $\varphi = \Phi \circ i$; es decir, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L(X) \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\varphi"'] & E \end{tikzcd}$$

Como vemos, el ejemplo anterior ya nos da una idea de lo que puede ser el espacio localmente convexo, el siguiente teorema nos aclarará esta duda.

Teorema 3.0.2. Sea X un espacio topológico. El espacio localmente convexo libre $L(X)$ sobre el espacio topológico X siempre existe, está dotado de la topología τ localmente convexa más fina (no necesariamente de Hausdorff) que hace del encaje de Dirac una función continua, es único salvo isomorfismo topológico y se caracteriza por la siguiente propiedad universal:

(L) Si $\varphi\colon X \to E$ es una función continua, donde E es un espacio localmente convexo (no necesariamente de Hausdorff), entonces existe un único operador lineal continuo $\Phi\colon L(X) \to E$ tal que $\Phi \circ i = \varphi$.

Demostración. Consideremos el par $(i, L(X))$ formado por el encaje de Dirac i, y el conjunto $L(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ es finito}\}$. La demostración del teorema reside en probar que el par $(i, L(X))$ es un objeto inicial de la categoría coma $(X \downarrow U)$, donde $U\colon$ **Locon** $\to$ **Top** es el funtor de olvido, y **Locon** es la categoría de espacios localmente convexos (no necesariamente de Hausdorff) cuyos morfismos son las transformaciones lineales continuas. En primer lugar, note que τ siempre existe, pues la topología indiscreta $\{L(X), \emptyset\}$ es localmente convexa y hace de i una función continua, además, el supremo de una familia de topologías localmente convexas es localmente convexa.

Ahora veamos que se cumple la propiedad de universalidad. Supongamos que $\varphi\colon X \to E$ es una función continua, donde E es un espacio localmente convexo (no necesariamente de Hausdorff), y sea Φ el único operador lineal que extiende a φ. Para ver que Φ es continuo, consideremos unas bases locales $\mathscr{N}$ y $\mathscr{M}$ de $L(X)$ y E, respectivamente, formadas por conjuntos absolutamente convexos; no es difícil verificar que $\mathscr{M}' = \Phi^{-1}(\mathscr{M})$ es una base de vecindades de $L(X)$. Por tanto, la familia $\mathscr{N}' = \{V \cap W \colon V \in \mathscr{N}, W \in \mathscr{M}'\}$ es una base de vecindades de $L(X)$. Recordemos que una topología vectorial está determinada únicamente por una base de vecindades alrededor del punto 0, así, $\mathscr{N}'$ determina una topología localmente convexa τ' más fina que τ y que hace de i una función continua. En efecto, como

$$\begin{aligned} i^{-1}(V \cap W) = i^{-1}(V) \cap i^{-1}(W) = i^{-1}(V) \cap i^{-1}(\Phi^{-1}(U)) = \\ = i^{-1}(V) \cap (\Phi \circ i)^{-1}(U) = i^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(U), \end{aligned}$$

tenemos que i es continua en $(L(X), \tau')$, y de la definición de la topología de $L(X)$ obtenemos que las topología generadas por las bases locales $\mathscr{N}$ y $\mathscr{N}'$ son esencialmente las mismas.

De lo anterior, tenemos que los conjuntos de la forma $V \cap W$ con $V \in \mathscr{N}, W \in \mathscr{M}'$ son abiertos en τ, como $L(X) \in \mathscr{N}$, obtenemos que $W \in \tau$ con $W \in \mathscr{M}'$, es decir, Φ es una función continua. En resumen, $(L(X), i)$ es un objeto inicial en la categoría coma $(X \downarrow U)$, por consiguiente, $L(X)$ es único (salvo isomorfismo topológico). Otra forma de contruir al espacio localmente convexo libre sobre X es la dada en [Tka16] (Cap. 1, Sec. 1.3). $\square$

Sea $\varphi \in C(X, E)$, donde E es un espacio localmente convexo, conviene hacer una notación que no de lugar a dudas sobre el operador lineal, hasta ahora representada por, Φ que extiende lineal y continuamente a φ. En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, dicha extensión será representada por $\widetilde{\varphi}$. Ahora si, los primeros resultados que obtendremos sobre la topología de $L(X)$ son los siguientes:

Proposición 3.0.3.

1. $\langle L(X), C(X) \rangle$ es un sistema dual.
2. $L(X)$ es de Hausdorff si y sólo si $C(X)$ separa puntos de X.

3. Si X es de Tychonoff, entonces i es un encaje topológico, en tal caso $i(X)$ es un subconjunto cerrado de $L(X)$.

Demostración.

1. Claramente, $\langle L(X), L(X)' \rangle$ es un sistema dual, la prueba de este hecho finaliza demostrando que existe un isomorfismo de espacios lineales entre $L(X)'$ y $C(X)$, donde $C(X)$ es el conjunto de todas las funciones continuas real-valuadas definidas en X. El isomorfismo es el dado por $\Psi\colon C(X) \to L(X)'$, donde $\Psi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$. No es difícil ver que Ψ es una biyección y que $\Psi(\lambda\varphi + \mu\omega) = \lambda\widetilde{\varphi} + \mu\widetilde{\omega}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Se desprende del Teorema de Hahn-Banach y del ítem anterior.

3. Supongamos que X es de Tychonoff. Sean $x \in X$ y $F \subset X$ tales que $x \notin F$, entonces existe una función continua $\varphi\colon X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ de modo que $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(\overline{F}) \subset \{1\}$. Así, $\widetilde{\varphi}(\delta_x) = 0$ y $\widetilde{\varphi}(i(F)) \subset \{1\}$, es decir, $i(x) = \delta_x \notin \overline{i(F)}$. Como i separa puntos de conjuntos cerrados obtenemos que i es un encaje.

   Note que el encaje de Dirac sitúa a X como un subconjunto de $L(X)$. Ahora sea $\beta\colon X \to \beta X \subset L(\beta X)$ el encaje de X en su compactación de Stone-Čech. Note que β puede extenderse a un operador lineal continuo $\widetilde{\beta}\colon L(X) \to L(\beta X)$; como βX es compacto, tendremos que βX es cerrado en $L(\beta X)$, y dado que $\widetilde{\beta}$ es continua e inyectiva, obtenemos que $X = \widetilde{\beta}^{-1}(\beta X)$ es cerrado en $L(X)$.

□

Note que si en la proposición anterior suponemos que $L(X)$ es de Hausdorff y que i es un encaje topológico, entonces X es de Tychonoff.

Ejemplo 3.0.4. Sea **Tych** la subcategoría de **Top** formada por todos los espacios topológicos de Tychonoff. Observe que, dado un espacio topológico X, la relación $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ para toda $f \in C(X)$ es una equivalencia. Consideremos al conjunto X_T, formado por todas las clases de equivalencia, entonces X_T dotado de la topología cociente es un espacio topológico de Tychonoff tal que $C(X) = C(X_T)$ ([Tka11], Problema 100). Consideremos el funtor de inclusión $I\colon$ **Tych** $\to$ **Top**, entonces (π, X_T) (π es la proyección natural) es una flecha universal en la categoría coma $(X \downarrow I)$. En efecto, sea $Y \in$ **Tych** y consideremos una función continua $f\colon X \to Y$, tomando $\widetilde{f}\colon X_T \to Y$ definida por $\widetilde{f}([x]) = f(x)$ obtenemos que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Dado que X_T tiene la topología cociente obtenemos que $\widetilde{f}$ es continua si y sólo si f lo es.

Lo anterior puede realizarse en el ámbito de los espacios localmente convexos. Sea $I\colon$ **LHvs** $\to$ **Locon** el funtor de inclusión, donde **LHvs** es la subcategoría de **Locon** formada por todos los espacios localmente convexos de Hausdorff. Si E es un espacio localmente convexo, no necesariamente de Hausdorff, entonces la pareja (π, F) es una flecha universal en la categoría coma $(E \downarrow I)$, donde $F = E/\overline{\{0\}}$.

El ejemplo anterior promueve la idea que de aquí en adelante sólo sean considerados espacios localmente convexos de Hausdorff y espacios topológicos de Tychonoff.

3.1. Pares de Seminormas

En las Proposiciones 1.5.18 y 1.5.19 puede verse que toda topología localmente convexa está determinada por una familia de seminormas y viceversa. El objetivo de esta sección es similar. Queremos exhibir una familia de seminormas que genere la topología de $L(X)$, pero con la característica adicional de que, al restringirlas a X, obtengamos la topología original de X. Éste enfoque que seguiremos es el que Joe Flood ideó para su tesis doctoral [Flo84]. Antes de continuar, estableceremos cierta notación.

Todo número real será escrito en letras griegas (minúsculas), y el elemento $\lambda_1\delta_{x_1} + \cdots \lambda_n\delta_{x_n} \in L(X)$ será denotado por Λ (letra en mayúscula); el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se llamará el **soporte** de Λ y se denotará $supp(\Lambda)$. Respecto a las funciones continuas en X, éstas serán denotadas por las letras $f, g, \ldots$ y a sus extensiones lineales continuas a $L(X)$ las escribiremos $\widetilde{f}, \widetilde{g}, \ldots$. Recordemos que el dual topológico de $L(X)$ puede identificarse con $C(X)$, por tanto, cuando $C(X)$ esté dotado de la topología débil, éste será denotado por $C_p(X)$.

Como sucedió en el capítulo anterior, conviene estudiar a los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$. Primero note que si $H \subset C(X)$ es equicontinuo y débilmente acotado, entonces la función

$$p_H(\Lambda) = \sup\left\{\left|\widetilde{f}(\Lambda)\right| : f \in H\right\} \tag{3.1}$$

está bien definida e induce una seminorma en $L(X)$, además, la pseudométrica

$$d_H(x, y) = p_H(\delta_x - \delta_y) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| : f \in H\right\} \tag{3.2}$$

es continua en X debido a la equicontinuidad de H. Consideremos ahora un espacio pseudométrico (X, d) y una función $\varrho \in C(X)$, $\varrho(x) \geq 0$ para cada $x \in X$, tal que $|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq d(x, y)$, es decir, de modo que ϱ es una **contracción**. Para cada contracción ϱ definimos el conjunto

$$B(d, \varrho) = \{g \in C(X)\colon |g| \leq \varrho \text{ y } |g(x) - g(y)| \leq d(x, y), x, y \in X\},$$

este tipo de conjuntos son de gran importancia en el desarrollo del presente capítulo, por tanto, resumiremos algunas propiedades sobre $B(d,\varrho)$ en la siguiente:

Proposición 3.1.1. $B(d,\varrho)$ es un subconjunto equicontinuo de $C(X)$, absolutamente convexo, y cerrado en $C_p(X)$. Adicionalmente, $B(d,\varrho)$ define una seminorma $p(d,\varrho)$ como en (3.1) por medio de

$$p(d,\varrho)(\Lambda) = \sup\left\{|\widetilde{g}(\Lambda)| : g \in B(d,\varrho)\right\}, \tag{3.3}$$

dicha seminorma determina una pseudométrica, como en (3.2), d_B tal que $d_B \leq d$.

Demostración. Recordemos que si (X,d) es un espacio pseudométrico, entonces $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua, por tanto, una simple verificación nos muestra que $B(d,\varrho)$ es equicontinuo. Tampoco es difícil porbar que es absolutamente convexo.

Probemos ahora que $B(d,\varrho)$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. Sea $f \in \overline{B(d,\varrho)}$, entonces existe una red $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset B(d,\varrho)$ tal que $g_\alpha \to f$. Es claro que $|f| \leq \varrho$, por tanto, dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $|f(x) - g_\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(y) - g_\alpha(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, por ende

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-g_\alpha(x)|+|g_\alpha(x)-g_\alpha(y)|+|f(y)-g_\alpha(y)| < d(x,y)+\varepsilon,$$

es decir, $f \in B(d,\alpha)$. Por otro lado, del Corolario 2.1.7 se obtiene fácilmente que el número

$$p(d,\varrho)(\Lambda) = \sup\left\{|\widetilde{g}(\Lambda)| : g \in B(d,\varrho)\right\},$$

está bien definido para cada $\Lambda \in L(X)$. Una simple verificación nos muestra que

$$d_B(x,y) = \sup\left\{|g(x) - g(y)| : g \in B(d,\varrho)\right\} \leq d(x,y). \tag{3.4}$$

□

Si en (3.4) obtenemos que $d_B = d$, diremos que el par (d,ϱ) es un **par de seminormas**. La siguiente proposición caracteriza a estos pares.

Proposición 3.1.2. Sean d una pseudométrica continua en un espacio topológico X y ϱ una contracción en $C(X)$. (d,ϱ) es un par de seminormas si y sólo si $\varrho(x) + \varrho(y) \geq d(x,y)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.

Demostración. Si (d,ϱ) es un par de seminormas, tendremos que $d(x,y) = d_B(x,y) = \sup\{|g(x) - g(y)|\colon g \in B(d,\varrho)\} \leq \varrho(x) + \varrho(y)$. Recíprocamente, el hecho de que ϱ es una contracción junto con la desigualdad

$\varrho(x) + \varrho(y) \geq d(x, y)$ implican que $|\varrho(y) - d(x, y)| \leq \varrho(x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$, además $\varrho \geq 0$. Para cada $z \in X$ definimos $g_z(x) = \varrho(z) - d(x, z)$, entonces $|g_z(x)| = |\varrho(z) - d(x, z)| \leq \varrho(z)$ y $|g_z(x) - g_z(y)| \leq d(x, y)$, es decir, $g_z \in B(d, \varrho)$, $z \in X$. Finalmente, como $g_z(z) - g_z(x) = d(x, z)$, obtenemos que $\sup\{|g_z(x) - g_z(y)| \colon z \in X\} = d(x, y)$. Por tanto, (d, ϱ) es un par de seminormas. $\square$

Puntualizamos que un par de seminormas en un espacio topológico X es un par (d, ϱ), donde d es una pseudométrica y ϱ es una función no negativa tales que

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq d(x, y) \leq \varrho(x) + \varrho(y). \tag{3.5}$$

Note que en particular (d, d_{x_0}) es un par de seminormas, $d_{x_0}(y) = d(x_0, y)$, $x_0 \in X$. Como se mencionó antes, Flood es el creador de dicho concepto, y argumenta que la siguiente proposición es la razón de su denominación.

Proposición 3.1.3. Sea (E, p) un espacio lineal seminormado. Si X es un subconjunto de E, entonces la restricción del par (d_p, p) a $(X \times X, X)$ es un par de seminormas en X, donde $d_p(e_1, e_2) = p(e_1 - e_2)$, $e_1, e_2 \in E$. Recíprocamente, si (d, ϱ) es un par de seminormas en X, este puede ser encajado en un espacio lineal seminormado (E, p) tal que $d_p = d$ en $X \times X$ y $\varrho = p$ en X.

Demostración. Como $|p(e_1) - p(e_2)| \leq p(e_1 - e_2) \leq p(e_1) + p(e_2)$ para todo $e_1, e_2 \in E$, obtenemos que (d_p, p) es un par de seminormas. Recíprocamente, si (d, ϱ) es un par de seminormas en X, tomando a E como $L(X)$ y a p como en (3.3), obtenemos que $(L(X), p)$ es un espacio seminormado tal que $d_p = d$ en $X \times X$. Por otro lado, note que $\varrho \in B(d, \varrho)$, por tanto, $p = \varrho$ en X. En efecto, para $x \in X$,

$$p(x) = p(d, \varrho)(\delta_x) = \sup\{|g(x)| : g \in B(d, \varrho)\} = \varrho(x).$$

$\square$

Como vemos, los pares de seminormas relacionan de una buena manera a las pseudométricas continuas en X con seminormas en $L(X)$. De hecho esta relación es tal que los pares de seminormas definen la topología de $L(X)$. Antes de probar esta afirmación veamos una importante consecuencia del Teorema de Hahn-Banach.

Corolario 3.1.4. Si E es un espacio vectorial en el cual está definida una seminorma p, entonces

$$p = \sup\{|f| \colon f \in E^* \text{ y } |f| \leq p\}. \tag{3.6}$$

Demostración. Del Teorema 1.5.29 se obtiene fácilmente que p está por encima de $\sup\{|f|\colon f \in E^* \text{ y } |f| \leq p\}$. Por otro lado, dado $x \in E$, consideremos al subespacio $L = lin(x)$. En tal subespacio definamos la función $f(\lambda x) = \lambda p(x)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, claramente f es lineal y $|f(\lambda x)| = |p(\lambda x)|$, por el Teorema 1.5.29 existe un funcional lineal f_1 definido en E tal que extiende linealmente a f y sigue dominado por p, sin embargo, en este caso tenemos que $f_1(x) = f(x) = p(x)$. Como lo anterior puede realizarse para cada $x \in E$, concluimos que el supremo es alcanzado y que en efecto (3.6) es una igualdad. ☐

Teorema 3.1.5. Si X es un espacio topológico, entonces el conjunto de las seminormas $p(d, \varrho)$, donde (d, ϱ) es un par de seminormas en $L(X)$ y d es una pseudométrica continua en X, define la topología de $L(X)$. Más aún, la familia de pseudométricas d_B generan la topología de X.

Demostración. El esquema de la demostración está formado como sigue. Primero probaremos que las seminormas $p(d, \varrho)$, donde (d, ϱ) es un par de seminormas en $L(X)$ y d es una pseudométrica continua en X, son las mayores seminormas definidas en $L(X)$ tales que

$$p(d, \varrho)(\delta_x - \delta_y) = d(x, y) \text{ y } p(d, \varrho)(\delta_z) = \varrho(z).$$

Finalmente, demostraremos que cada seminorma continua definida en $L(X)$ está dominada por una seminorma $p(d, \varrho)$.

Dado que (d, ϱ) es un par de seminormas en $L(X)$ obtenemos que $p(d, \varrho)(\delta_x - \delta_y) = d(x, y)$ y $p(d, \varrho)(\delta_z) = \varrho(z)$ para cada $x, y, z \in X$. Por otro lado, supongamos que q es una seminorma en $L(X)$ tal que $q(\delta_x - \delta_y) = d(x, y)$ y $q(\delta_z) = \varrho(z)$ para cada $x, y, z \in X$, entonces del Corolario 3.1.4 obtenemos que

$$q = \sup\{|f|\colon |f| \leq q\},$$

pero como $f \in B(d, \varrho)$ se tiene que $|f| \leq p(d, \varrho)$, y por ende, $p(d, \varrho) \geq q$.

Como se ve en la Proposición 1.5.19, la familia de intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V(p(d, \varrho), n) = \left\{\Lambda \in L(X)\colon p(d, \varrho)(\Lambda) < \frac{1}{n}\right\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, definen una base de vecindades de $0 \in L(X)$. Si probamos que cada seminorma continua q definida en $L(X)$ está dominada por una seminorma $p(d, \varrho)$, habremos probado que la topología generada por $p(d, \varrho)$ es más fina que la generada por q, y en consecuencia, la familia de seminormas $p(d, \varrho)$ generará la topología de $L(X)$. Por la Proposición 3.1.3, tendremos que $(d_q, q \circ i)$ es un par de seminormas en

X, donde $d_q(x,y) = q(\delta_x - \delta_y)$, en consecuencia, de la primera parte de la demostración se deriva que $p(d_q, q) \geq q$.

El hecho de que todo espacio de Tychonoff es uniformizable junto con el Teorema 1.4.1 implican que en todo espacio de Tychonoff existe una familia de pseudométricas $\mathscr{P}$ que genera la topología de X. También hemos puntualizado que los pares de la forma (d, d_{x_0}), donde $d \in \mathscr{P}$ y $x_0 \in X$, son pares de seminormas. De la Proposición 3.1.3 se desprende que la familia de pseudométricas $\{d_B = d\colon d \in \mathscr{P}\}$ genera la topología de X. □

3.2. Propiedades básicas de $L(X)$

Cuando X es de Tychonoff, podemos suponer que el conjunto $i(X)$ es una copia homeomorfa de X, como tal, es natural preguntarnos si la topología que posee el conjunto X afecta o no a la topología de $L(X)$. La respuesta es que sí, y en ciertos casos, en gran medida.

Si $Y \subset X$, el símbolo $L(Y,X)$ representa al subespacio lineal generado algebraicamente por Y en $L(X)$, claramente, $L(Y,X)$ posee la topología de subespacio.

Proposición 3.2.1. Si $Y \subset X$ es un conjunto cerrado, entonces $L(Y,X)$ es cerrado en $L(X)$.

Demostración. Sea $\Lambda \in L(X) \setminus L(Y,X)$, donde $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ no nulos, $1 \leq i \leq n$, y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. De lo anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 \notin Y$. Dado que X es de Tychonoff, existe $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 1$ y $f(X \setminus (Z \cup \{x_2, \dots, x_n\})) = \{0\}$.

Note que $\widetilde{f}(L(Y,X)) = 0$ y $\widetilde{f}(\Lambda) = \widetilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \lambda_1 \neq 0$. Consideremos una vecindad abierta V de $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ de tal modo que $0 \notin V$, entonces $\Lambda \in \widetilde{f}^{-1}(V)$ y $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap L(Y,X) = \emptyset$. □

Proposición 3.2.2. Si $Y \subset X$ es un conjunto denso, entonces $L(Y,X)$ es denso en $L(X)$.

Demostración. Sea $\Lambda \in L(X) \setminus L(Y,X)$, donde $\Lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{x_j}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ no nulos, $1 \leq i \leq n$, y $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Como las operaciones de espacio vectorial son continuas en $L(X)$, para toda vecindad abierta de Λ, existen V_j, vecindades de δ_{x_j} en $L(X)$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V_j \subset V$, note que $i^{-1}(V_j \cap i(X))$ es abierto en X para cada $1 \leq j \leq n$, luego, existen $y_1, \dots, y_j \in Y$ tales que $\delta_{y_j} \in V_j$, así $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{y_j} \in \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V_j \subset V$, es decir, $L(Y,X) \cap V \neq \emptyset$. □

Respecto a la separación de la topología de $L(X)$ tenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.2.3. Si X es un espacio no normal, entonces $L(X)$ no es normal.

Demostración. La conclusión de este hecho reside en que si $L(X)$ fuera un espacio normal, el conjunto $i(X)$, al ser un subconjunto cerrado de $L(X)$, debería ser normal y esto contradice nuestra hipótesis. $\square$

Ejemplos 3.2.4.

1. Consideremos a X como el plano de Tychonoff, $X = [0, \omega_0] \times [0, \omega_1] \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$, sabemos que X es un espacio de Tychonoff que no es normal, por ende $L(X)$ es un espacio localmente convexo no normal.

2. Incluso si X fuera normal, $L(X)$ no tiene por que ser normal. Denotemos por $A(X)$ al grupo abeliano topológico libre sobre X en el sentido de Markov, y por $A_G(X, p)$ al grupo abeliano topológico libre, sobre el espacio X, con punto distinguido $p \in X$, en el sentido de Graev. De [GtdDI48] se deduce que el grupo $A_G(Y, e)$, donde $Y = X \cup \{e\}$ y $e \notin X$ es un punto aislado en Y, coincide con el grupo $A(X)$. Adicionalmente, en [McP03] (anunciado primero en [Tka83a]) se observa que $A(Y, e) = A(X)$ se encaja como un subgrupo de $L(X)$. Por otro lado, si X es compacto, entonces Y también lo es, y del Teorema 6 de [GtdDI48] se obtiene que $A_G(Y, e) = A(X)$ es Weil-completo. Ahora, note que si X es un espacio no compacto, tomando la función continua $\beta\colon X \to \beta X$, obtenemos un homomorfismo continuo $\widetilde{\beta}\colon A(X) \to A(\beta X) \subset L(\beta X)$, dado que $A(\beta X)$ es Weil-completo se tiene que es cerrado en $L(\beta X)$, luego $A(X) = \widetilde{\beta}^{-1}(A(\beta X))$ es cerrado en $L(X)$. El resto de la prueba reside en el hecho de que $A(X)$, el grupo abeliano topológico libre sobre X (en el sentido de Markov), contiene una copia cerrada isomorfa a X^n para cada $n \in \mathbb{N}$ [AT08] (original de [ST74]). Por todo lo anterior, cuando X es la línea de Sorgenfrey, tenemos que X es un espacio normal, que posee un cuadrado $X \times X$ no normal ([Eng89], Ejemplo 2.3.12). De aquí concluimos que $L(X)$ no puede ser normal.

Continuando con las propiedades que X refleja en $L(X)$ tenemos el siguiente Teorema; aunque la versión original ([Ark92], Proposición 0.5.13) está hecha para el espacio débil $L_p(X)$, la demostración sigue siendo válida en $L(X)$.

Teorema 3.2.5. Sea $\mathcal{P}$ cualquier clase de espacios topológicos con las siguientes propiedades:

1. La imagen continua de un miembro de $\mathcal{P}$ reside en $\mathcal{P}$.

2. Si $X = \bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X_n \in \mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces también $X \in \mathcal{P}$.

3. Si $X, Y \in \mathcal{P}$, también $X \times Y \in \mathcal{P}$.

4. $\mathbb{R} \in \mathcal{P}$.

Si $X \in \mathcal{P}$, entonces $L(X) \in \mathcal{P}$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{P}$, de las propiedades 3. y 4. se obtiene que $X^n \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos la función $\phi_n : X^n \times \mathbb{R}^n \to L(X)$ por la regla:

$$\phi_n(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Por medio de L_n denotemos a la imagen de $X^n \times \mathbb{R}^n$ bajo ϕ_n. Como ϕ_n es continua, de la propiedad 1. se deriva que $L_n \in \mathcal{P}$. Es fácil ver que $L(X) = \bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$, por tanto, aplicando 2. obtenemos que $L(X) \in \mathcal{P}$. $\square$

Ejemplos 3.2.6.

1. Si X es separable, entonces $L(X)$ también lo es.

2. X es σ-compacto si y sólo si $L(X)$ lo es.

3. Si X^n es de Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $L(X)$ es de Lindelöf. En este último caso debemos notar que como $\mathbb{R}^n$ es σ-compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, se tendrá que $X^n \times \mathbb{R}^n$ es una unión numerable de subespacios cerrados de Lindelöf.

Ahora introduciremos un poco de notación debida al Teorema anterior. Dado $\Lambda \in L(X)$ no nulo, definimos la **longitud de** Λ $l(\Lambda)$ como el menor entero no negativo n para el cual existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. En el caso del elemento nulo 0 de $L(X)$ definimos simplemente $l(0) = 0$. En relación a lo anterior definimos los siguientes conjuntos:

$$L_n(X) = \{\Lambda \in L(X) : l(\Lambda) \leq n\}, \text{ y } M_n(X) = L_n(X) \setminus L_{n-1}(X).$$

Los conjuntos $L_n(X)$ tiene la siguiente carcaterística:

Proposición 3.2.7. El conjunto $L_n(X)$ es cerrado en $L(X)$.

Demostración. Note que cuando $n = 0$ se tiene que $L_0(X) = \{0\}$ que claramente es cerrado. Supongamos que $n \geq 1$ y sea $\Lambda \in L(X) \setminus L_n(X)$. Entonces $\Lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, donde $k > n$, $\lambda_i \neq 0$, para $i = 1 \ldots, k$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Dado que X es de Tychonoff, podemos tomar vecindades disjuntas V_i de los puntos x_i, $1 \leq i \leq k$ y funciones continuas

$f_i\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i(X \setminus V_i) = \{0\}$. Como el conjunto $W = \bigcup\{\widetilde{f}_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\colon i = 1, \ldots, k\}$ es abierto en $L(X)$ tendremos que $\Lambda \in W$, pues $\widetilde{f}_i(\Lambda) = \lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. La prueba termina demostrando que $W \cap L_n(X) = \emptyset$.

Sea $\Gamma \in W$ tal que $l(\Gamma) = m$, y $\Gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j y_j$ donde $\gamma_j \neq 0$, para $j = 1 \ldots, m$ y $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$. Entonces $\widetilde{f}_j(\Gamma) \neq 0$, es decir, $\widetilde{f}_i\left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j f_i(y_j) \neq 0$. De aquí se implica que $V_i \cap \{y_1, \ldots y_m\} \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq k$ y que el sistema $\{U_i\colon i = 1, \ldots, k\}$ $(U_i = V_i \cap \{y_1, \ldots y_m\})$ está formado por conjuntos mutuamente disjuntos y no vacíos. De este modo $m \geq k > n$ y en consecuencia $W \cap L_n(X) = \emptyset$. □

3.3. Propiedades de la topología débil

El estudio de los espacios $L(X)$ no ha sido tan profundo como el de otros objetos matemáticos, no obstante, y a pesar de que los resultados conocidos sobre $L(X)$ son contados, lo anterior es una pequeña muestra de todo lo que se sabe sobre $L(X)$. Afortunadamente, se sabe un poco más acerca de los espacios débiles $L_p(X)$. Dichos espacios vinculan a nuestro objeto de estudio con la teoría de espacios funcionales. Tal teoría ha tenido, y sigue teniendo, un gran desarrollo en los últimos años, por lo cual hemos decidido ligarlas y analizar un par de proposiciones sobre las llamadas “equivalencias funcionales”.

Dos espacios topológicos X y Y son ***l*-equivalentes** si los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son linealmente homeomorfos. Cuando los espacios $L(X)$ y $L(Y)$ son linealmente homeomorfos diremos que los espacios son ***L*-equivalentes**. Por otro lado, recordemos que todo espacio de Tychonoff es uniformizable, por tanto, cuando los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son uniformemente isomorfos, haremos referencia a que X y Y son ***u*-equivalentes**. Finalmente si $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos (homeomorfos), llamaremos a los espacios X y Y ***t*-equivalentes**. La notación es sencilla, ante cualquiera de las situaciones anteriores escribiremos $X \overset{l}{\sim} Y$, $X \overset{L}{\sim} Y$, $X \overset{u}{\sim} Y$, $X \overset{t}{\sim} Y$, respectivamente.

Iniciamos con una afirmación que nos indica (probablemente) por que se denominó así a los espacios l-equivalentes.

Teorema 3.3.1. $X \overset{l}{\sim} Y$ si y sólo si $L_p(X)$ es linealmente isomorfo a $L_p(Y)$.

Demostración. Recuerde que $(L(X), \sigma(L(X), C(X))) = L_p(X)$, es decir, $L_p(X)$ es el espacio localmente convexo libre sobre X dotado de la topología débil. Por otro lado, $C_p(X)$ es el conjunto $C(X)$ dotado de la topología de subespacio de $\mathbb{R}^X$, en otras palabras, tiene la topología débil respecto a la familia de funciones $\{p_x : x \in X\}$, donde $p_x : \mathbb{R}^X \to X$ y $p_x(f) = f(x) = \delta_x(f)$. Como todo elemento de $L(X)$ es un funcional lineal continuo sobre $C(X)$, podemos dotar a $C(X)$ de la topología débil $\sigma(C(X), L(X))$. Dado que $i(X)$ es una base de Hamel de $L(X)$, se tendrá que $\sigma(C(X), L(X)) = \sigma(C(X), i(X))$, en otras palabras, la topología de $C_p(X)$ es la topología proyectiva respecto de $\{\delta_x : x \in X\}$. En conclusión $C_p(X)$ es el dual débil de $L(X)$. Adicionalmente, del Teorema de Mackey-Arens se desprende que dichas topologías son compatibles con la dualidad entre estos espacios. En resumen tenemos que $L_p(X)' = C_p(X)$ y $C_p(X)' = L(X)$.

Es claro que cuando dos espacios localmente convexos E y F son isomorfos topológicamente, entonces son el mismo objeto tanto linealmente como topológicamente, por ende, sus espacios duales débiles deben ser linealmente homeomorfos. De aquí que $C_p(X)$ es isomorfo topológicamente a $C_p(Y)$ si y sólo si $L_p(X)$ es isomorfo topológicamente a $L_p(Y)$. $\square$

Antes de aplicar el contenido del Teorema anterior, debemos imponer un comentario: el espacio $L_p(X)$ también puede verse como el espacio topológico lineal libre débil sobre X. En analogía con la definición del espacio localmente convexo libre, se define el **espacio topológico lineal libre débil** sobre X como el par $(i, L_p(X))$, donde $i : X \to L_p(X)$ es una inyección continua, y $L_p(X)$ es un espacio topológico lineal cuya topología es débil tal que para todo espacio topológico débil E y toda función continua $\varphi : X \to E$ existe un operador lineal continuo $\Phi : L_p(X) \to E$ de modo que $\varphi = \Phi \circ i$. La demostración de la existencia y unicidad del espacio $L_p(X)$ es completamente similar a la demostración de la existencia y unicidad del espacio $L(X)$. Cabe destacar que la topología de $L_p(X)$ es la topología localmente convexa débil más fina que hace del encaje de Dirac una función continua.

El Ejemplo 3.0.1 es fundamental en la descripción de varias estructuras lineales libres sobre X, como caso adicional también podemos definir el **espacio topológico lineal libre** sobre X [GM17], y haciendo una pequeña variación a dicho ejemplo, podemos definir el **espacio localmente convexo libre de Graev** que no es más que el análogo al grupo abeliano libre de Graev [GM17].

Regresando al Teorema 3.3.1, su aplicación principal recae al momento de relacionar las equivalencias definidas al inicio de esta sección.

Corolario 3.3.2. Supongamos que $X \overset{L}{\sim} Y$, entonces $X \overset{l}{\sim} Y$, $X \overset{u}{\sim} Y$ y $X \overset{t}{\sim} Y$.

Demostración. Demostraremos que cada una de las equivalencias es precedida por la anterior, es decir, probaremos que $X \overset{L}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{l}{\sim} Y \Rightarrow$

$X \overset{u}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{t}{\sim} Y$.

Primeramente supongamos que $X \overset{L}{\sim} Y$, entonces $C_p(X)$ es linealmente isomorfo a $C_p(Y)$, es decir, $X \overset{l}{\sim} Y$, más aún, este isomorfismo es compatible con las uniformidades de $C_p(X)$ y $C_p(Y)$, en otras palabras, $X \overset{u}{\sim} Y$. El hecho de que $X \overset{t}{\sim} Y$ es completamente claro. Finalmente, cabe mencionar que ninguna de las implicaciones anteriores posee un reverso ([Tka16], V.137 y V.316). $\square$

Estas equivalencias no son las únicas que se estudian, como comentario adicional, existen otros tipos de equivalencias como la h-equivalencia ($X \overset{h}{\sim} Y$ si y sólo si X es homeomorfo a Y), la M-equivalencia ($X \overset{M}{\sim} Y$ si y sólo si $F(X)$ es topológicamente isomorfo a $F(Y)$), la A-equivalencia ($X \overset{A}{\sim} Y$ si y sólo si $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $A(Y)$); entre otras.

Estas últimas son de gran importancia pues tienen que ver con estructuras libres, además es interesante ver que ser M-equivalentes implica ser A-equivalentes ([AT08], Proposición 7.10.1). Por otro lado, invariantes como la pseudocompacidad (compacidad, compacidad + metrizabilidad) que se preservan por A-equivalencia ([AT08], Teoremas 7.10.10 y 7.10.11), también se preservan mediante L-equivalencia ([GM17], Teoremas 4.6 y 4.7). Asimismo, existe un método debido a O. Okunev [Oku90], para generar M-equivalencias que fue extendido por A. V. Arkhangel'skii, [Ark82], para generar l-equivalencias. Cabe destacar que el primero en publicar un método para generar M-equivalencias fue V. V. Tkachuk en [Tka83b].

En nuestro caso, nos interesa el estudio de la L-equivalencia, pues aunque no se hizo mención de esto al final del Teorema 3.2.5, la motivación principal que surge al estudiar dicha equivalencia está en que para toda propiedad topológica $\mathscr{P}$, en el espacio X, que se preserva por L-equivalencia, existe una propiedad topológico-lineal $\mathscr{Q}$, correspondiente a $\mathscr{P}$, en $L(X)$.

Algunas propiedades básicas de este tipo se encuentran en la lista de Ejemplos 3.2.6, sin embargo, a modo de que no decaiga el interés, podemos preguntarnos, almenos momentáneamente, ¿cuál es la propiedad $\mathscr{P}$ correspondiente a la completez de $L(X)$?, la respuesta no es nada simple y el siguiente capítulo está dedicado a reponder esta cuestión.

Para finalizar, haremos enfásis en que lo anterior es válido para cualquier tipo de equivalencia, es decir, si una propiedad topológica $\mathscr{P}$ se preserva por l-equivalencia (u-equivalencia, t-equivalencia), en el espacio X, entonces existe una propiedad topológico-lineal (uniforme, topológica) $\mathscr{Q}$, correspondiente a $\mathscr{P}$, en la estructura correspondiente. Cabe mencionar que, por ejemplo, aunque la compacidad no se preserva por t-equivalencia, pues la línea real $\mathbb{R}$ es t-equivalente a $[0, 1]$, sí se preserva por l-equivalencia ([GM17], Teorema 4.7), luego, existe una propiedad topológico-lineal correspondiente a la compacidad pero no una propiedad puramente topológica. Recíprocamente, ser metrizable se preserva por t-equivalencia, pues el peso red (network weight) se preserva por t-equivalencia ([Tka16], V. 001) y en la clase de los espacios métricos el peso y el peso red coinciden, por tanto, existe una propiedad topológica correspondiente a la metrizabilidad; lamentablemente, la metrizabilidad no se preserva por l-equivalencia ([Tka16], V. 263), así, no existe una propiedad topológico-lineal que corresponda a la propiedad de ser metrizable.

Capítulo 4

Completez

4.1. Espacios Paracompactos

Los espacios paracompactos forman una clase de espacios topológicos considerada como una de las más importantes, tanto en topología como en análisis funcional. Las razones son muchas y muy variadas, una de ellas es que es una clase que contiene a los espacios compactos y a los espacios métricos, además, se simplifica la demostración de muchos hechos relacionados con las clases anteriores. Los espacios paracompactos fueron introducidos por J. Dieudonné en 1944 en [Die44].

Iniciemos con unos preliminares. Diremos que una familia de subconjuntos $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ es **localmente finita** si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V tal que el conjunto $\{\alpha \in A\colon V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito, si dicha cardinalidad es a lo más 1 diremos entonces que la familia es **discreta**. Dadas las cubiertas $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ de X diremos que $\mathscr{V}$ es un **refinamiento** de la cubierta $\mathscr{U}$ si para cada $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $V \subset U$.

De este modo, un espacio topológico de Hausdorff X es **paracompacto** si toda cubierta abierta de X posee un refinamiento abierto localmente finito. No debe confundirse el término de subcubierta con el de refinamiento. De la definición se obtiene rápidamente que todo espacio compacto es paracompacto, también todo espacio de Lindelöf es paracompacto ([Eng89], Cap. 5, Teorema 5.1.2), y del Teorema de Stone ([Eng89], Cap. 4, Teorema 4.4.1) se deduce que todo espacio métrico es paracompacto. También se tiene el hecho de que todo espacio paracompacto es normal. Por otro lado, ser paracompacto es una propiedad que se hereda a los subespacios F_σ, en particular, a los subconjuntos cerrados.

La paracompacidad es una propiedad que puede ser caracterizada en términos de particiones de la unidad. Una familia de funciones continuas $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$, de un espacio topológico X a el intervalo unitario $I = [0,1]$, se dice una **partición de la unidad** de X cuando se cumpla que $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in X$. En términos más intutitivos, la última igualdad significa que para cada $x \in X$ existe un conjunto a lo más numerable $A_x \subset A$ tal que las correspondientes funciones no se anulan en x y que la serie $\sum_{\alpha\in A_x} f_\alpha(x)$ converge absolutamente a 1.

Usualmente se refiere a que la partición de la unidad $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ es **localmente finita**, si la cubierta $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\colon \alpha \in A\}$ es localmente finita. Es decir, para cada $x_0 \in X$ existen una vecindad $V(x_0)$ de x_0 y un conjunto finito $A_{x_0} \subset A$ tales que $\sum_{\alpha\in A_{x_0}} f_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in V(x_0)$. Respecto a las cubiertas, la partición de la unidad $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ se dice **subordinada a la cubierta** $\mathscr{U}$ si la cubierta $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\colon \alpha \in A\}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$.

Antes de caracterizar a los espacios paracompactos, según nuestros intereses, mostraremos dos lemas previos que ayudarán a que la prueba sea más clara; dado que sus demostraciones pueden consultarse en [Eng89] sólo serán enunciados.

Lema 4.1.1 ([Eng89], Cap. 5, Lema 5.1.6)**.** Si toda cubierta abierta de un espacio regular tiene un refinamiento localmente finito, entonces para toda cubierta abierta de X existe una cubierta localmente finita de subconjuntos cerrados de X que a la vez resulta ser un refinamiento de la cubierta original.

Lema 4.1.2 ([Eng89], Cap. 5, Lema 5.1.8)**.** Si una cubierta de X posee una partición de la unidad subordinada a ella, entonces posee un refinamiento abierto localmente finito.

Teorema 4.1.3. Para cada $X \in T_1$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es paracompacto.
2. Toda cubierta abierta de X posee una partición de la unidad localmente finita subordinada a ella.
3. Toda cubierta abierta de X posee una partición de la unidad subordinada a ella.

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que X es paracompacto y que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathscr{V} = \{V_\alpha\colon \alpha \in A\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathscr{U}$, del Lema 4.1.1 obtenemos que existe una cubierta cerrada localmente finita $\{F_\alpha\colon \alpha \in A\}$ que es un refinamiento de $\mathscr{U}$ $(F_\alpha \subset V_\alpha)$. Del Lema de Urysohn ([Eng89], Cap. 1, Teorema 1.5.11) tenemos que existe una familia de funciones continuas $\{g_\alpha\colon \alpha \in A\}$ definidas en X y con valores en I, tales que $g_\alpha(x) = 0$ para $x \in X \setminus V_\alpha$ y $g_\alpha(x) = 1$ para $x \in F_\alpha$; como $\mathscr{V}$ es localmente finita, la función $g(x) = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$ está bien definida para cada $x \in X$. Si ahora hacemos $f_\alpha = \frac{g_\alpha}{g}$ obtenemos una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathscr{U}$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Es obvio.

$(3 \Rightarrow 1)$ Del Lema 4.1.2 deducimos que para probar esta afirmación basta con demostrar que X es en realidad de Hausdorff. Dados $x, y \in X$ puntos distintos, consideremos la cubierta abierta $\{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$, por hipótesis, existe una partición de la unidad $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ subordinada a ella. Sea $\alpha_0 \in A$ tal que $f_{\alpha_0}(x) = \lambda > 0$, como $f_{\alpha_0}^{-1}((0, 1]) \subset X \setminus \{y\}$ tendremos que $f_{\alpha_0}(y) = 0$. Por tanto los conjuntos $U = f_{\alpha_0}^{-1}((\frac{\lambda}{2}, 1])$ y $V = f_{\alpha_0}^{-1}([0, \frac{\lambda}{2}))$ separan a dichos puntos.

□

Finalizamos con el siguiente:

Teorema 4.1.4. Ser paracompacto es un invariante inverso de las funciones perfectas.

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ una función perfecta y sobreyectiva, donde Y es un espacio paracompacto. Sea $\mathscr{U} = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de X. Dado que las fibras de f son compactas en X, para cada $y \in Y$ sea $A_y \subset A$ un conjunto finito de modo que $f^{-1}(y) \subset \bigcup\{U_\alpha\colon \alpha \in A_y\}$, no es díficil mostrar que existe $V(y) \subset Y$ vecindad abierta de y tal que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V(y)) \subset \bigcup\{U_\alpha\colon \alpha \in A_y\}$ ([Eng89], Cap. 1, Teorema 1.4.13). Dada la paracompacidad de Y, la cubierta abierta $\{V(y)\colon y \in Y\}$ posee un refinamiento abierto localmente finito $\mathscr{V} = \{V_\beta\colon \beta \in B\}$. Debido a la sobreyectividad de f, la familia $\{f^{-1}(V_\beta)\colon \beta \in B\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X. Además, para cada $\beta \in B$ existe $y_\beta \in Y$ tal que $f^{-1}(V_\beta) \subset f^{-1}(V(y_\beta)) \subset \bigcup\{U_\alpha\colon \alpha \in A_{y_\beta}\}$. Tomando la familia $\{f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha\colon \beta \in B \text{ y } \alpha \in A_{y_\beta}\}$ obtenemos el refinamiento abierto localmente finito que deseabamos. □

4.2. Espacios Dieudonné-completos

Consideremos un espacio topológico X, sabemos que X es uniformizable si y sólo si es de Tychonoff. Por otro lado, la familia de uniformidades sobre X está parcialmente ordenada por la inclusión, y hace de este conjunto un retículo completo. Por tanto, para cada familia $\{\mathscr{U}_\alpha\colon \alpha \in A\}$ de uniformidades en X, existe una uniformidad $\mathscr{U} = \sup\{\mathscr{U}_\alpha \colon \alpha \in A\}$ que es la uniformidad más gruesa sobre el conjunto de las uniformidades más finas que $\{\mathscr{U}_\alpha \colon \alpha \in A\}$. Esta uniformidad se construye de una manera sencilla. Para cada $\alpha \in A$ el espacio X_α se refiere al espacio uniforme $(X, \mathscr{U}_\alpha)$, consideremos la familia de mapeos idénticos $1_{X_\alpha} \colon X \to X_\alpha$, entonces $\sup\{\mathscr{U}_\alpha \colon \alpha \in A\}$ es la uniformidad proyectiva en X respecto a la familia de mapeos idénticos. Supongamos ahora que el espacio topológico (X, τ) es tal que la familia de uniformidades $\{\mathscr{U}_\alpha \colon \alpha \in A\}$ induce la topología τ, entonces τ y la topología inducida por $\mathscr{U}$ son idénticas. A la uniformidad $\mathscr{U}$ suele llamársele la **uniformidad universal** en X. En este contexto decimos que un espacio X es **Dieudonné-completo** si la uniformidad universal de X es completa, o equivalentemente, si posee una uniformidad completa que induce su topología.

Es claro que todo espacio uniformizable X posee una completación en el sentido de Dieudonné, este espacio se denota por μX y debe contener a X como subespacio denso. De hecho, un espacio X es Dieudonné-completo si y sólo si se encaja como un subespacio cerrado de el producto cartesiano de una familia de espacios métricos (Teorema 1.4.5), adicionalmente, dicha propiedad se hereda a subespacios cerrados y se preserva bajo productos cartesianos. Antes de dar una caracterización de estos espacios estableceremos una proposición fundamental.

Proposición 4.2.1. El espacio uniforme $(Y, \mathscr{V})$ coincide con la completación del espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$ si y sólo si existe un mapeo uniforme $f \colon X \to Y$ tal que $\overline{f(X)} = Y$ y para cada pseudométrica ϱ definida en X, uniforme respecto a $\mathscr{U}$, existe una pseudométrica $\overline{\varrho}$ definida en Y, uniforme respecto a $\mathscr{V}$, tal que $\overline{\varrho}(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ para cada $x, y \in X$.

Demostración.

($\Leftarrow$) Supongamos que $(Y, \mathscr{V})$ coincide con la completación del espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$, entonces existe un encaje uniforme $f \colon X \to Y$ tal que $\overline{f(X)} = Y$. Por otro lado, si ϱ es una pseudométrica uniforme en X, la pseudométrica ϱ_1 definida en $f(X)$ como $\varrho_1(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ es uniforme. En efecto, sea $\varepsilon > 0$; primero que nada, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que si $(x, y) \in U$, entonces $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Como f es un encaje uniforme, existe $V \in \mathscr{V}$ tal que $(f \times f)(U) = V \cap (f(X) \times f(X))$. Asimismo, como f es uniformemente continua, existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $(f(x), f(y)) \in V$ si $(x, y) \in W$. Tomemos $(x, y) \in U \cap W$, de este modo $(f(x), f(y)) \in f(U)$, y así $\varrho_1(f(x), f(y)) = \varrho(x, y) < \varepsilon$. No es díficil probar que ϱ_1 es una función uniforme definida en $f(X) \times f(X)$, y como $f(X)$ es denso en Y, de [Bou66] (Cap. 2, § 3, Proposición 18) obtenemos que $Y \times Y$ coincide con la completación del espacio $f(X) \times f(X)$. Por esta razón, podemos extender ϱ_1 a una pseudométrica $\overline{\varrho}$ tal que $\overline{\varrho}(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$.

($\Rightarrow$) Para demostrar que Y coincide con la completación de X basta probar que f es un encaje uniforme. Primero observe que f es inyectiva, pues dado el par de puntos distintos $x, y \in X$, por el Teorema 1.4.1, existe una pseudométrica uniforme ϱ tal que $\varrho(x,y) > 0$. Por hipótesis, existe una pseudométrica uniforme $\overline{\varrho}$ tal que $\overline{\varrho}(f(x), f(y)) = \varrho(x,y) > 0$, es decir, $f(x) \neq f(y)$. Consideremos ahora la función $f^{-1}\colon f(X) \to X$. Dado que para cada pseudométrica uniforme ϱ definida en X, la pseudométrica $\overline{\varrho}(f(x), f(y)) = \varrho(x,y)$ es uniforme, de la Proposición 1.4.2 obtenemos que f^{-1} es uniforme. Así, f es un encaje uniforme y Y coincide con la completación del espacio uniforme X.

□

Teorema 4.2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es Dieudonné-completo.
2. Para cada punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe un subespacio paracompacto $T \subset \beta X$ tal que $X \subset T \subset \beta X \setminus \{x_0\}$.
3. Para cada punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una cubierta localmente finita $\mathscr{A}$ de X, formada por conjuntos funcionalmente abiertos, tal que el punto x_0 no pertenece a la clausura, en βX, de ningún miembro de $\mathscr{A}$.
4. Para cada punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una partición de la unidad localmente finita $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ en el espacio X tal que el punto x_0 no se encuentra en la clausura, tomada en βX, de $f_\alpha^{-1}((0,1])$.

Demostración.

($1 \Rightarrow 2$) Supongamos que X es Dieudonné-completo, de la Proposición 4.2.1 se desprende que para cada $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una pseudométrica uniforme en X que no posee extensión uniforme a $(X \cup \{x_0\}) \times (X \cup \{x_0\})$. Sea $Y = X/\varrho$, es decir, Y es el conjunto de clases de equivalencia formadas por la relación $x \sim y \Leftrightarrow \varrho(x,y) = 0$. Note que Y es un espacio métrico y que el mapeo cociente $\pi\colon X \to Y$ dota a Y de la topología cociente, por otro lado, dicho mapeo se extiende de manera continua a $\widehat{\pi}\colon \beta X \to \beta\widehat{Y}$, donde $\widehat{Y}$ es la completación de Y. Consideremos la restricción $\widehat{\pi}_{\widehat{Y}}\colon \widehat{\pi}^{-1}(\widehat{Y}) \to \widehat{Y}$, observe que dicha función es perfecta pues $\widehat{\pi}$ lo es ([Eng89], Cap. 3, Proposición 3.7.6). Dado que $\widehat{Y}$ es un espacio métrico, $\widehat{Y}$ es paracompacto. Así, $\widehat{\pi}^{-1}(\widehat{Y})$ será paracompacto (Teorema 4.1.4). Por otro lado, note que $\widehat{\pi}(x_0) \notin \widehat{Y}$, de lo contrario tendríamos que $x_0 \in X$. De este modo, haciendo $T = \widehat{\pi}_{\widehat{Y}}^{-1}(\widehat{Y})$ obtenemos el conjunto buscado.

$(2 \Rightarrow 3)$ Supongamos que para cada $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe un conjunto paracompacto T tal que $X \subset T \subset \beta X \setminus \{x_0\}$. Para cada $y \in T$ sea U_y un abierto (en βX) tal que x_0 no está en la cerradura de U_y en βX. Entonces $\mathscr{U} = \{T \cap U_y \colon y \in T\}$ es una cubierta abierta de T, y del Teorema 4.1.3 tenemos que existe $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a la cubierta $\mathscr{U}$, es decir, la cubierta $\{f_\alpha^{-1}((0,1]) \colon \alpha \in A\}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathscr{U}$ formada por conjuntos funcionalmente abiertos. Terminamos la prueba definiendo a la cubierta $\mathscr{A}$ como aquella conformada por los conjuntos $X \cap f_\alpha^{-1}((0,1])$, $\alpha \in A$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Completamente análogo a lo anterior.

$(4 \Rightarrow 1)$ Supongamos que X no es Dieudonné-completo, sea $x_0 \in \mu X \setminus X \subset \beta X \setminus X$, entonces existe una partición de la unidad localmente finita $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ tal que x_0 no se encuentra en la clausura de los conjuntos $f_\alpha^{-1}((0,1])$. Dado que para cada $x_0 \in X$ existe una vecindad abierta V_{x_0} y un conjunto finito $A_{x_0} \subset A$ tal que $\sum_{\alpha \in A_{x_0}} f_\alpha(x) = 1$, $x \in V(x_0)$, tendremos que la pseudométrica $\varrho \colon X \times X$ definida por

$$\varrho(x,y) = \left| \sum_{\alpha \in A_x} f_\alpha(x) - \sum_{\alpha \in A_y} f_\alpha(y) \right|,$$

no posee una extensión continua (uniforme) a $\mu X \times \mu X$. Esto contradice la Proposición 4.2.1, y en consecuencia debemos tener que $X = \mu X$.

$\square$

El ítem 2. del Teorema anterior nos da el siguiente:

Corolario 4.2.3. Si X es un espacio paracompacto, entonces X es Dieudonné-completo.

Otra clase de espacios estrechamente relacionada con los espacios Dieudonné-completos son los μ-espacios. Sea X un espacio topológico, diremos que $A \subset X$ es **t-acotado** (topologically bounded) si para toda $f \in C(X)$ tenemos que $f(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Naturalmente, todo subconjunto compacto es t-acotado, sin embargo, si se da el caso de que todo subconjunto cerrado y t-acotado es compacto, diremos que X es un **μ-espacio**.

El resultado al que queremos llegar es que todo espacio Dieudonné-completo (y por ende, todo espacio paracompacto) es un μ-espacio. Pero primero analicemos ciertas propiedades de los conjuntos t-acotados.

Proposición 4.2.4. Ser t-acotado es una propiedad que se preserva al tomar clausuras y bajo funciones continuas.

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto t-acotado, dada $f \in C(X)$ tenemos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, dado que $\overline{f(A)}$ es un subconjunto compacto de la línea real tenemos que es acotado, luego $\overline{A}$ es t-acotado.

Consideramos ahora una función continua $f\colon X \to Y$ y un conjunto $A \subset X$ que es t-acotado. Dada $g \in C(Y)$ tenemos que $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, luego, $f(A)$ es un subconjunto t-acotado de Y. □

Un hecho bastante conocido es que en la clase de los espacios métricos, la compacidad y la compacidad numerable son nociones equivalentes ([Eng89], Teorema 4.1.17); para la demostración del siguiente hecho puede seguirse el Teorema 2.2.2 de [HL14].

Lema 4.2.5. Sea (X, d) un espacio métrico no compacto, entonces existe un subconjunto A discreto, cerrado e infinito.

Teorema 4.2.6. Todo espacio métrico (X, d) es un μ-espacio.

Demostración. Supongamos que existe un conjunto $Y \subset X$ cerrado, t-acotado y no compacto, entonces Y contiene un subconjunto numerable $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es discreto y cerrado. Dado que (X, d) es normal, el Teorema de extensión de Tietze-Urysohn ([Eng89], Teorema 2.1.8) nos dice que la función $f\colon A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x_n) = n$ es continua y posee una extensión continua a X. Nuestra suerte es tal que dicha extensión no es acotada, es decir, Y no es t-acotado. Concluimos que Y debe ser compacto. □

Teorema 4.2.7. Si X es Dieudonné-completo, entonces X es un μ-espacio.

Demostración. Como X es Dieudonné-completo, podemos verlo como un subespacio cerrado del producto $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, donde cada X_α es un espacio métrico. Sea ahora $F \subset X$ un conjunto t-acotado, entonces $F_\alpha = \pi_\alpha(F)$ es t-acotado en X_α, π_α es la proyección canónica sobre el α-ésimo factor. Sea $K_\alpha = [F_\alpha]_{X_\alpha}$, así, K_α es compacto y $F \subset \prod\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Claramente $[F]_X \subset \prod\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ es compacto. De este modo hemos probado que X es un μ-espacio. □

4.3. Espacios Realcompactos

Los espacios realcompactos tienen varias denominaciones, por ejemplo, son llamados Q-espacios, espacios real-completos, espacios de Hewitt-Nachbin, etc. La idea de discutir un poco sobre estos espacios reside en que son una subclase importante de espacios Dieudonné-completos. Muchas veces se usará el hecho de que un espacios X es realcompacto si y sólo si se encaja como un subespacio cerrado en el producto cartesiano de líneas reales; sin embargo la definición formal es la siguiente: un espacio X se dice **realcompacto** si no existe un espacio topológico $\widetilde{X}$ que cumpla las siguientes condiciones:

(R1) Existe un encaje topológico $r\colon X \to \widetilde{X}$ tal que $r(X) \neq \overline{r(X)} = \widetilde{X}$.

(R2) Para cada función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ existe una función continua $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f} \circ r = f$.

Por otro lado, el Teorema del encaje de Tychonoff ([Eng89], Cap. 3, Teorema 3.2.5) nos dice que todo espacio de Tychonoff se puede encajar en una potencia del intervalo unitario I, por ejemplo, si $C(X, I)$ representa al conjunto de funciones continuas de X en I, se obtiene fácilmente que $X \hookrightarrow I^{C(X,I)}$, tomando la cerradura de X en $I^{C(X,I)}$ se obtiene la compactación de Stone-Čech βX de X. Análogamente, si ahora tomamos el encaje $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{C(X)}$ y tomamos la cerradura de X en $\mathbb{R}^{C(X)}$ obtenemos la llamada **realcompactación de Hewitt** υX del espacio X, es decir, hemos probado que todo espacio X se encaja en un espacio realcompacto υX. Como nota histórica, estos resultados fueron los obtenidos por el matemático E. Hewitt en su titánico artículo [Hew48], por si fuera poco, en dicho artículo también se define la clase de los espacios pseudocompactos así como la noción de ideal hiper-real.

Naturalmente todo espacio compacto es realcompacto, de hecho se sabe que X es compacto si y sólo si es pseudocompacto y realcompacto ([Eng89], Cap. 3, Teorema 3.11.1). Como es de esperar, ser realcompacto es una propiedad que se hereda a subespacios cerrados, se mantiene bajo el producto cartesiano y bajo intersecciones arbitrarias. Adicionalmente, la realcompactación de Hewitt υX del espacio X cumple las siguientes propiedades ([Eng89], Cap. 3, Teorema 3.11.16):

1. Existe un encaje topológico $\upsilon\colon X \to \upsilon X$ tal que $\overline{\upsilon(X)} = \upsilon X$.

2. Toda función continua con valores en los reales y definida en X posee una única extensión continua a υX.

Asimismo, se tiene que $X \subset \mu X \subset \upsilon X \subset \beta X$.

Para los própositos del presente capítulo, la caracterización de los espacios realcompactos que utilizaremos es la siguiente:

Teorema 4.3.1. Un espacio topológico es realcompacto si y sólo si para cada punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una función continua $f\colon \beta X \to I$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) > 0$ para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que X es realcompacto, entonces para cada $x_0 \in \beta X \setminus X$ tenemos que el espacio $\widetilde{X} = X \cup \{x_0\}$ cumple (R1), dado que X es realcompacto debe existir una función continua $g\colon X \to \mathbb{R}$ que no posea extensión continua a $\widetilde{X}$. Debido a que g puede descomponerse en la forma $g = g_1 - g_2$, donde $g_1(x) = 1 + \max\{g(x), 0\}$ y $g_2(x) = 1 - \min\{g(x), 0\}$; podemos suponer que $g(x) \leq 1$ para cada $x \in X$. De este modo, la función $\frac{1}{g}\colon X \to I$ posee una extensión continua a βX. Sea f dicha extensión, entonces $f(x) > 0$ para cada $x \in X$, y $f(x_0) = 0$. Observe que no puede suceder que $f(x_0) \neq 0$, pues en este caso la función $\widetilde{g} = \frac{1}{f}$ es una extensión continua de g al espacio $\widetilde{X}$.

Ahora pensemos en que para cada punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una función $f_{x_0}\colon \beta X \to I$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) > 0$ para cada $x \in X$. Note que el intervalo $(0, 1]$ es realcompacto, pues la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no posee extensión continua a ningún subconjunto de los reales que contenga propiamente a $(0, 1]$ como subespacio denso. Aunado a esto, tenemos el hecho de que $f_{x_0}^{-1}((0, 1])$ es realcompacto para cada $x_0 \in \beta X \setminus X$. En efecto, el conjunto $\{(x, y) \in \beta X \times (0, 1]\colon f_{x_0}(x) = y\}$ es cerrado y es homeomorfo a $f_{x_0}^{-1}((0, 1])$. Dado que $X = \bigcap\{f_{x_0}^{-1}((0, 1])\colon x_0 \in \beta X \setminus X\}$ obtenemos que X es realcompacto. □

Para terminar esta sección mencionaremos que $\mu X = \upsilon X$ si y sólo si no existen los cardinales medibles. Sea $\varkappa$ un cardinal no numerable y consideremos a λ como una medida σ-aditiva definida en $\mathcal{P}(\varkappa)$ con valores en $\{0, 1\}$ tal que $\lambda(\{\alpha\}) = 0$ para cada $\alpha \in \varkappa$, $\varkappa$ es un cardinal medible si podemos definir una medida no nula con dichas propiedades, en caso contrario $\varkappa$ es un cardinal no medible. La suerte que tenemos es tal que no se puede probar en **ZFC** (Axiomas de Zermelo-Fraenkel + Axioma de Elección) si existen o no los cardinales medibles, por tanto, no se puede probar en ZFC que $\mu X = \upsilon X$. Aunque estos hechos son puramente conjuntistas, el lector interesado puede consultar [Jec03].

4.4. Espacios de Medidas

Supongamos que (X, τ) es un espacio localmente compacto, y que σ es una σ-álgebra que contiene a los conjuntos borelianos de X. Si μ es una medida sobre σ, definimos el soporte de la medida μ como el complemento del conjunto abierto U más grande en el cual se anula μ [JP89] (Cap. 3, Definición 3.6). Dicho conjunto se denota por *supp*(μ). Naturalmente, si X es compacto se tendrá que el soporte de toda medida es compacto. Note que la suposición de que τ sea localmente compacta es escencial en dicha definición, pues para asegurar que $U \in \sigma$, se necesita aproximar la medida de U por medio de las medidas de los subconjuntos compactos contenidos en él, esto se debe a que en el Teorema de representación de Riesz ([JP89], Cap. 3, Teorema 3.2), dicha medida se construyó usando el Lema de Urysohn ([JP89], Cap. 3, Teorema 3.1), en el cual es imprescindible la compacidad local.

De acuerdo con [Bou04] (Cap 3, §2), tendremos que $x \in supp(\mu)$ si para cada vecindad abierta $V \in \mathscr{N}(x)$, existe $f \in C_k(X)$ cuyo soporte está contenido en V y tal que $\mu(f) \neq 0$; $C_k(X)$ representa al subespacio de $C(X)$ formado por todas la funciones de soporte compacto.

Recuerde que una medida μ sobre un espacio localmente compacto X es un funcional lineal definido en $C(X)$. Dado que todo espacio localmente compacto es de Tychonoff, y que a cualquier espacio topológico de Tychonoff X podemos asociarle un espacio compacto βX, parece natural extender la definición de soporte de una medida a cualquier espacio topológico de Tychonoff. Sea μ un funcional lineal definido en $C(X)$, según [VV98], definimos el soporte de μ como el subconjunto de todos los $x \in \beta X$ tales que si V es una vecindad de x en βX, entonces existe $f \in C(X)$ tal que $(\beta f)(\beta X \setminus V) = 0$ y $\mu(f) \neq 0$, $\beta f \colon \beta X \to \beta\mathbb{R}$ es la extensión continua de f.

El símbolo $C^*_u(X)$ representa al subconjunto $C(X)$ formado por las funciones acotadas, dotado de la topología de la convergencia uniforme. Algunas propiedades de los conjuntos de soporte son las siguientes:

Lema 4.4.1. Sean μ un funcional lineal definido en $C(X)$ y U una vecindad abierta en βX de $supp(\mu)$. Entonces:

1. $\mu(f) = 0$ para cada $f \in C(X)$ con $(\beta f)(U) = 0$.
2. $\mu(f) = 0$ para cada $f \in C(X)$ con $(\beta f)(supp(\mu)) = 0$, probando antes que μ es continua en $C^*_u(X)$.

Demostración.

1. Para cada x que no pertenece a $supp(\mu)$ existe una vecindad $U(x)$ abierta en βX tal que si $g \in C(X)$ y $(\beta g)(\beta X \setminus U(x)) = 0$, entonces $\mu(g) = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los conjuntos $U(x)$ son disjuntos de $supp(\mu)$. Como βX es compacto, la cubierta $\{U, U(x) \colon x \notin supp(\mu)\}$ posee una subcubierta finita $\mathscr{A} = \{U, U(x_i) \colon 1 \leq i \leq n\}$, dado que βX también es paracompacto, del Teorema 5.1.9 de [Eng89] tenemos que existe una partición de la unidad $\{h, h_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ subordinada a $\mathscr{A}$. Supongamos ahora que $(\beta f)(U) = 0$ para alguna $f \in C(X)$. Definimos las funciones $g_0 = h \cdot f$ y $g_i = h_i \cdot f$, $1 \leq i \leq n$. Note que
$$f = \sum_{i=0}^{n} g_i \Rightarrow \mu(f) = \sum_{i=0}^{n} \mu(g_i).$$
Inspeccionando cuidadosamente cómo es la función g_0, obtenemos que g_0 es la función nula y $\mu(g_0) = 0$. Dado que $X \setminus U(x_i)$ es denso

en $\beta X \setminus U(x_i)$ y como g_i se anula fuera de $U(x_i)$ obtenemos que $(\beta g_i)(\beta X \setminus U(x_i)) = 0$. De la definición del soporte de μ obtenemos que $\mu(g_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Concluimos que $\mu(f) = 0$.

2. Recordemos que la topología de $C_u^*(X)$ es la inducida por la norma uniforme $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\}$. Supongamos que μ es continua en $C_u^*(X)$, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $||g||_\infty < \delta$, entonces $|\mu(g)| < 1$. Sea $f \in C(X)$ tal que $(\beta f)(supp(\mu)) = 0$. Tomemos $V = \{x \in \beta X \colon |(\beta f)(x)| < \varepsilon\} = (\beta f)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$, note que V es un subconjunto abierto de βX que contiene a $supp(\mu)$. Definimos la función truncada:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < \varepsilon \\ \\ \varepsilon \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{en otro caso} \end{cases},$$

entonces $f_\varepsilon \in C^*(X)$ y $(f - f_\varepsilon)(V \cap X) = 0$, como $V \cap X$ es denso en V, de la primera parte del lema obtenemos que $\mu(f - f_\varepsilon) = 0$, es decir, $\mu(f) = \mu(f_\varepsilon)$, recordemos que $||f_\varepsilon||_\infty < \varepsilon$, luego, $|\mu(f)| = |\mu(f_\varepsilon)| \leq 1$.

Suponga ahora que $\mu(f) \neq 0$, y elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(nf)| > 1$. No es díficil probar que $\beta(nf)(supp(\mu)) = 0$, esto significa que $|\mu(nf)| \leq 1$. Ésta contradicción prueba que $\mu(f) = 0$.

□

Lema 4.4.2. Sea μ un funcional lineal en $C(X)$ tal que $\mu(S)$ es acotado para cada $S \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ representa a la familia de subconjuntos equicontinuos de $C(X)$. Entonces $supp(\mu)$ se encuentra contenido totalmente en υX.

Demostración. Supongamos que $supp(\mu) \setminus \upsilon X \neq \emptyset$. Ya sabemos que para cada $x \in supp(\mu) \setminus \upsilon X$ existe una función continua $h \colon \beta X \to I$ tal que $h(x) = 0$ y $h|_X > 0$. Sea $U_n = h^{-1}([0, \frac{1}{n}))$, entonces U_n es una vecindad abierta de x en βX, tal que $U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n$. Por otro lado, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \beta X \setminus \upsilon X$. Dado que $x \in supp(\mu)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C(X)$ tal que $(\beta f_n)(\beta X \setminus U_n) = 0$ y $\mu(f_n) \neq 0$. De este modo, para cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tendremos que $(\beta(\lambda \cdot f_n))(\beta X \setminus U_n) = 0$, por tanto, multiplicando por un escalar si es necesario, podemos suponer que $|\mu(f_n)| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ahora note que el conjunto de funciones $\{\beta f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo, pues para cada $x \in X$ existe un conjunto $N_x \subset \mathbb{N}$, a lo más finito, tal que $N_x = \{n \in \mathbb{N} \colon x \in U_n\}$. Por hipótesis debe tenerse que $\mu(\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\})$ es acotado, lo cual es una contradicción. □

Lema 4.4.3. Sea μ como en el Lema 4.4.2. Supongamos que X es Diedudonné completo y $supp(\mu) \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$. Entonces existe un subconjunto equicontinuo E de $C(X)$ que satisface la siguiente condición:

($*$) si $H \subset X$ es un conjunto compacto, entonces existe $f \in E$ tal que $f(H) = 0$ y $|\mu(f)| \geq 1$.

Demostración. Por K denotemos al soporte de μ. Del ítem 2 del Teorema 4.2.2 se desprende que para cada $x^* \in K \cap (\beta X \setminus X)$ existe un espacio paracompacto Z tal que $x^* \in K \cap (\beta X \setminus Z)$. Por otro lado, $K \cap Z$ es cerrado y t-acotado en Z, luego, $K \cap Z$ es compacto debido a la paracompacidad de Z. Dada la compacidad de $K \cap Z$ y la normalidad de βX, existen abiertos W y T tales que $x^* \in W$, $K \cap Z \subset T$ y $W \cap T = \overline{W} \cap K \cap Z = \emptyset$. Como βX también es un espacio regular, existe una vecindad abierta U de x^* tal que $\overline{U} \subset W$.

Note que $Z = (Z \cap U) \cup (Z \setminus U)$. Para cada $z \in Z$, sea V_z un abierto en Z tal que $\overline{V_z} \cap \overline{W} \cap K = \emptyset$. Si $z \in Z \cap U$, tomemos a V_z como antes con la condición adicional de que $V_z \subset U$. Así, $\{V_z : z \in Z\}$ es una cubierta abierta de Z, y como Z es paracompacto, existe un refinamiento localmente finito $\mathscr{B} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ de dicha cubierta. Sea también $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$ una partición de la unidad (localmente finita) subordinada a $\mathscr{B}$. Claramente nuestro refinamiento $\mathscr{B}$ cumple las siguientes condiciones:

(1) Si $V_\alpha \cap U \neq \emptyset$ para algún $\alpha \in A$, entonces $\overline{V_\alpha} \subset W$.

(2) $\overline{V_z} \cap \overline{W} \cap K = \emptyset$ para todo $\alpha \in A$.

Como $x^* \in K$, y U es una vecindad de x^*, podemos tomar $f \in C(X)$ tal que $(\beta f)(\beta X \setminus U) = 0$ y $\mu(f) \neq 0$. Multiplicando f por una constante si es necesario, podemos suponer que $|\mu(f)| \geq 1$. Sea D el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de A. Para cada $\gamma \in D$ definimos $f_\gamma \in C(X)$ como

$$f_\gamma = f \cdot (1 - \varphi_\gamma), \text{ donde } \varphi_\gamma = \sum_{\alpha \in \gamma} h_\alpha.$$

Observe que $\{f_\gamma : \gamma \in D\}$ es equicontinuo, en efecto, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$ es localmente finita, existe un abierto $S(x)$ y un subconjunto finito $A_x = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de A tales que para cada $y \in S(x)$ se tiene que $\sum_{\alpha \in A_x} h_\alpha(y) = 1$. Note que el conjunto $\{h_\alpha : \alpha \in A_x\}$ es equicontinuo en x. Tomemos $Q \cap R \cap S(x)$, donde Q resulta de la continuidad de f_γ en x y R resulta de la equicontinuidad de $\{h_\alpha : \alpha \in A_x\}$ en x. Sea $\gamma \in C$, para $y \in Q \cap R \cap S(x)$ tenemos que $|f_\gamma(x) - f_\gamma(y)| < \varepsilon$.

Elegimos un compacto cualquiera $H \subset X$, para cada $x \in H$ tomemos $S(x)$ tal que $\{\alpha \in A : S(x) \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito, luego existen $x_1, \ldots, x_n \in$

H tales que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i)$, tomemos $\gamma(H) = \bigcup_{i=1}^{n}\{\alpha \in A\colon S(x) \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$. Note que si $V_\alpha \cap H \neq \emptyset$, entonces $V_\alpha \cap S(x_i) \neq \emptyset$ para algún $1 \leq i \leq n$, así $\alpha \in \gamma(H)$. Tomemos $x \in H$, de este modo existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in S(x_i)$ y $\varphi_{\gamma(H)}(x) = 1$, con lo cual $\varphi_{\gamma(H)}(H) = \varphi_{\gamma(H)}|_H \equiv 1$ y en consecuencia $f_{\gamma(H)}(H) = 0$.

Ya sólo resta probar que $|\mu(f_{\gamma(H)})| \geq 1$, para esto, primero probaremos que $\mu(f \cdot \varphi_{\gamma(H)}) = 0$. Sea $\gamma_U(H) = \{\alpha \in \gamma(H)\colon V_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$. Definimos $P = \bigcup\{\overline{V_\alpha}\colon \alpha \in \gamma_U(H)\}$ y $G = \beta X \setminus P$. Es claro que P es cerrado y que G es abierto.

Sea $x \in P$, entonces $x \in \overline{V_\alpha}$ para algún $\alpha \in \gamma_U(H)$; como $V_\alpha \cap U \neq \emptyset$ debe tenerse que $\overline{V_\alpha} \subset W$, luego, $x \in W$ y por tanto $P \subset W$. Observe ahora que $W \cap K \subset \overline{W \cap K} \subset \overline{W} \cap K$, para $x \in W \cap K$ y $\alpha \in \gamma_U(H)$ tenemos que $\overline{V_\alpha} \cap \overline{W} \cap K = \emptyset$, entonces $x \in \beta X \setminus \overline{V_\alpha}$, en otras palabras $x \in \bigcap\{(\beta X \setminus \overline{V_\alpha})\colon \alpha \in \gamma_U(H)\} = \beta X \setminus P = G$. Como $P \subset W$, tenemos que $\beta X \setminus W \subset \beta X \setminus P = G$, por otro lado, $K = (K \cap W) \cup (K \setminus W)$, es decir, $K \setminus W \subset \beta X \setminus W \subset G$, y así G es una vecindad abierta de K.

Consideremos ahora $x \in G \cap X$. Si $x \notin U$, tendremos que $f(x) = 0$, por otro lado, si $x \in U$ y $\alpha \in \gamma(H) \setminus \gamma_U(H) = \{\alpha \in A\colon V_\alpha \cap H \neq \emptyset \text{ y } V_\alpha \cap U = \emptyset\}$, como $V_\alpha \cap U = \emptyset$ y $x \in U$, entonces $x \notin V_\alpha$, es decir, $h_\alpha(x) = 0$. Para $\alpha \in \gamma_U(H)$, y dado que $x \in G$, también se tendrá que $h_\alpha(x) = 0$. Con todo esto, para $x \in U$ se tiene que $\varphi_{\gamma(H)}(x) = 0$. Como consecuencia obtenemos que $(f \cdot \varphi_{\gamma(H)})(G \cap X) = 0$ y por ende $\beta(f \cdot \varphi_{\gamma(H)})(G) = 0$, pues $G \cap X$ es denso en G. Del Lema 4.4.1 se tiene que $\mu(f \cdot \varphi_{\gamma(H)}) = 0$. Para finalizar note que como $f_\gamma = f - f \cdot \varphi_{\gamma(H)}$ se cumplirá que $|\mu(f_\gamma)| = |\mu(f) - \mu(f \cdot \varphi_{\gamma(H)})| = |\mu(f)| \geq 1$. □

4.5. Completez del Espacio Localmente Convexo Libre

Como se menciona en el capítulo introductorio, deseamos estudiar la estructura del espacio $\widehat{L}(X)$ así como explorar condiciones bajo las cuales $L(X)$ sea un espacio localmente convexo completo. Esta sección está completamente dedicada a probar el teorema final de la tesis: "La completación del espacio $L(X)$ coincide con el espacio $MR_c(\mu X)$ de medidas de Radón, sobre el espacio μX, con la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$". Dicha afirmación fue presentada originalmente por V. V. Uspenskii en [Usp83], probada en [Usp91], y finalmente generalizada por V. Valov y D. Vuma en [VV98].

Iniciaremos explorando situaciones muy particulaes que nos ayuden a vislumbrar el método a seguir. Primero note que dado un espacio localmente compacto X, la función $||\cdot||_\infty\colon C_k(X) \to \mathbb{R}$ dada por la regla $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$ está bien definida y es una norma.

Ejemplo 4.5.1. Tomemos $X = \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión de funciones $f_n\colon [-n, n] \to \mathbb{R}$ dadas por la regla

$$f_n(x) = \frac{1 - \left(\dfrac{x}{n}\right)^2}{1 + x^2}.$$

Dicha sucesión de funciones pertenece al espacio $C_k(\mathbb{R})$, es de Cauchy, y converge puntualmente a la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Sin embargo, la función f no pertenece a $C_k(\mathbb{R})$, luego $C_k(\mathbb{R})$ no es un espacio completo.

En base al ejemplo anterior, podemos considerar a la completación del espacio $C_k(X)$, como el espacio de funciones que se anulan en el infinito $C_0(X)$ ([JP89], Cap. 6, Proposición 6.18). Ahora consideremos una σ-álgebra σ en X que contenga a los conjuntos borelianos de X, y tomemos el espacio $M(X)$ de medidas reales sobre X. Para cada $\mu \in M(X)$ tenemos que el funcional $\Lambda f = \int f d\mu$ es lineal y continuo; la continuidad de Λ se debe a que para cada $f \in C_0(X)$ se tiene que:

$$|\Lambda f| \leq \int |f| d/\mu/ \leq ||f||_\infty /\mu/(X) < \infty. \tag{4.1}$$

El símbolo $/\mu/$ representa a la **variación de** μ. $/\mu/$ es una medida positiva finita que es la menor entre todas las medidas positivas que mayoran al módulo $|\mu|$ de μ ([JP89], Cap. 6, Teorema 6.1). Un concepto muy importante en teoría de la medida es el de regularidad. Diremos que una medida positiva μ es regular si para cada conjunto boreliano A se tiene que:

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(V)\colon A \subset V \text{ y } V \text{ es abierto}\}, y$$
$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

De (4.1) obtenemos que $(C_0(X))' \subset M(X)$. La identificación del dual topológico de $C_0(X)$ está dada por el Teorema de representación de Riesz, pero antes de enunciarlo, establezcamos una definición más. El subconjunto de $M(X)$ formado por las medidas que son regulares, se llama el conjunto de **medidas de Radón sobre** X, usualmente se denota $MR(X)$.

Teorema 4.5.2 ([JP89], Cap. 6, Teorema 6.6)**.** [Teorema de representación de Riesz] Para cada funcional continuo Λ sobre $C_0(X)$, existe una única medida $\mu \in MR(X)$ tal que

$$\Lambda f = \int f d\mu \text{ para toda} f \in C_0(X). \tag{4.2}$$

Por tanto, el dual topológico de $C_0(X)$ puede identificarse con $MR(X)$. La topología de $MR(X)$ es la de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C_0(X)$, tal espacio con dicha topología es localmente convexo y se simboliza mediante $MR_c(X)$. Por otro lado, la topología de $C_0(X)$ es la de Mackey, pues $C_0(X)$ es de Banach (barrillado). En resumen, las topologías de los espacios $C_0(X)$ y $MR_c(X)$ son consistentes con la dualidad dada por la forma bilineal:

$$\langle f, \mu \rangle = \int f d\mu.$$

Examinemos que pasa cuando X es compacto.

Ejemplo 4.5.3. Como $C(X) = C_k(X)$, tenemos que $C(X)$ es de Banach con la norma $||\cdot||_\infty$. El Teorema 4.2.17 de [Eng89] nos afirma que la topología derivada de la norma $||\cdot||_\infty$ coincide con la topología compacto-abierta de $C(X)$, dicho espacio con tal topología será denotado por $C_c(X)$. Además, el Teorema de Arzelá-Ascoli ([Eng89], Cap. 3, Teorema 3.4.20) nos dice que los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$ coinciden con los subconjuntos relativamente compactos de $C_c(X)$. En otras palabras, si dotamos a $MR(X)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$, obtenemos que las topologías de $C_c(X)$ y $MR_c(X)$ son consistentes con la dualidad $\langle C(X), MR(X)\rangle$. Observe también que, en este caso, toda medida de Radón posee soporte compacto.

Ahora note que si Y es un espacio de Banach, Y es un espacio bornológico, es decir, una función es continua si y sólo si es acotada, por tanto $C(Y) = C^*(Y)$, como Y es de Tychonoff, podemos considerar al espacio βY y tendremos que $C^*(Y) = C(\beta Y)$, por lo anterior, $C_c(\beta Y)$ es completo, pero este espacio no es más que $C_c(Y)$. Volviendo a nuestra construcción, dado que podemos identificar a $MR_c(X)$ con un subespacio (lineal) del espacio completo $C_c(C_c(X))$; si logramos demostrar que $MR_c(X)$ es cerrado, habremos probado que $MR_c(X)$ es completo.

Para $\mu \in \overline{MR_c(X)}$, tenemos que μ es lineal (Proposición 2.1.8), y que existe una sucesión de medidas reales regulares $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a μ. Dado que la convergencia es uniforme, μ es continua, así, concluimos que $\mu \in MR_c(X)$. Por tanto, $MR_c(X)$ es un espacio completo.

Hasta aquí tenemos que el dual topológico de $C_c(X)$, X compacto, se ha identificado con el conjunto $MR_c(X)$ de medidas de Radón sobre X, con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de $C(X)$. Note que la regularidad de las medidas es un requisito indispensable, pues aunque toda medida induce un funcional lineal y continuo, puede suceder que existan medidas $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$

con $\mu_1 \neq \mu_2$ tales que $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ para toda $f \in C_k(X)$. De cierto modo, el conjunto $M(X)$ contiene "demasiados" funcionales lineales continuos.

Sea ahora X un espacio de Tychonoff, y consideremos al conjunto $(C_c(X))'$ con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de $C(X)$. Note que en los casos anteriores, el conjunto de medidas de Radón sobre X puede verse, en la forma más simple, como el conjunto de los funcionales lineales y continuos sobre $C_c(X)$. Dado que toda medida es un funcional lineal continuo, y que el concepto de soporte de una medida posee un análogo para espacios de Tychonoff, podemos pensar a todo elemento de $(C_c(X))'$ como una "medida de Radón" sobre X. Por ende, parece natural denotar al espacio $(C_c(X))'$, como $MR_c(X)$.

Del Teorema 2.2.6 se obtiene que $L(X)$ está contenido en $MR_c(X)$ como un conjunto débilmente denso, pero como $L(X)$ es convexo, por la Proposición 2.4.1, tendremos que $L(X)$ es denso en $MR_c(X)$. También se tiene que las topologías de $L(X)$ y $C_c(X)$ son consistentes con la dualidad $\langle C_c(X), L(X)\rangle$ que está dada por la forma bilineal

$$\langle f, \lambda_1\delta_{x_1} + \cdots + \lambda_n\delta_{x_n}\rangle = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

A las medidas de Dirac, con masa en el punto x_0, usualmente se les llama **medidas atómicas**. En el contexto químico, toda unión (finita) de atómos forma una molécula, por tanto, a las medidas en $L(X)$ las llamaremos **medidas moleculares**. Lo anterior sirve para expresar que existen espacios topológicos, para los cuales el conjunto de medidas de Radón contiene estrictamente al conjunto de medidas moleculares.

Ejemplo 4.5.4. Cabe mencionar que las medidas positivas no son un caso particular de las medidas reales, esto último sucede sólo en el caso de que la medida sea finita. Por tanto al considerar al espacio de medida $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel, la medida de Lebesgue no forma parte de $MR(X)$. Aún así, existen medidas no moleculares en $MR(X)$. Consideremos a la función:

$$f(x) = \begin{cases} \eta e^{-\eta x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Sea χ_A la función indicadora de un conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}$. Definimos la medida positiva μ por la regla:

$$\mu(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\chi_A dx,$$

μ es positiva y finita, de hecho es una medida de probabilidad, y por ende, $\mu \in MR(\mathbb{R})$, pero no es una medida molecular, luego, $\mu \in MR(\mathbb{R})\backslash L(\mathbb{R})$. Note que algo similar sucede en el caso compacto, tomando cualquier medida de probabilidad continua en el intervalo $[0,1]$, ésta no puede ser una medida molecular. Por tanto, incluso si X es compacto, la contención $L(X) \subset MR(X)$ es estricta. Como conclusión, a pesar de la compacidad de X, puede suceder que $L(X)$ no sea un espacio localmente convexo completo.

Respecto al Ejemplo 4.5.3, la completitud de $MR(X)$ se debe en gran medida a la compacidad de X. Ya que, de forma más general, X es un espacio uniforme completo, cabe preguntarse si el espacio $MR(X)$ sigue siendo completo para espacios de Tychonoff completos. La razón de esto es que, en ocaciones, el espacio βX es muy grande. En concreto, tomemos a X como el conjunto de los número naturales con la topología discreta, entonces $|\beta X| = 2^{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad del continuo, mientras que $|X| = \aleph_0$. Por otro lado, X es de Lindelöf, lo que conlleva a que sea paracompacto, y por el Corolario 4.2.3, X será Diedudonné-completo. Además, de las contenciones $X \subset \mu X \subset \upsilon X \subset \beta X$, el espacio μX es la completación más pequeña que contiene a X, para cualquier espacio no compacto X. El contenido de nuestro último teorema se basa en lo anterior:

Teorema 4.5.5. Sea X un espacio Dieudonné-completo, entonces el espacio de las medidas de Radón sobre X, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$, se corresponde con la completación del espacio localmente convexo $L(X)$.

Demostración. Del Teorema 2.6.4, obtenemos que la completación del espacio localmente convexo $MR_c(X)$ se corresponde topológicamente con el subespacio lineal de $C(X)^*$ formado por aquellos funcionales lineales $\Lambda\colon C(X) \to \mathbb{R}$ tales que para cada subconjunto equicontinuo F de $C(X)$ existe $\mu \in MR(X)$ tal que $|\Lambda f - \mu f| < \varepsilon$ para toda $f \in F$.

Note también que el funcional Λ puede determinarse únicamente por sus valores en $C^*(X)$, en efecto, si $f \in C(X)$, definiendo las funciones $f_n(x) = \text{mín}\{\text{máx}\{-n, f(x)\}, n\}$, tendremos que $f_n \in C^*(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Tomemos ahora un conjunto compacto $K \subset X$, dado que f es continua tendremos que $f(K) \subset [-N, N]$ para algún número natural N. Así, para cada $n \geq N$, tendremos que $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$, para cada $\varepsilon > 0$. En otras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_c(X)$. Además, dado $x \in X$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $-M \leq f(x) \leq M$, esto es, para cada $n \geq M$, $f_n(x) = f(x)$, entonces el conjunto de funciones $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{f_1, \dots, f_M, f\}$ es equicontinuo en x, luego, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo en X. Como Λ es continuo en cada subconjunto equicontinuo de $C(X)$, podemos definir

$$\Lambda f = \lim_{n\to\infty} \Lambda f_n.$$

El mapeo $\beta\colon X \to \beta X$ puede extenderse a un operador lineal y continuo $\widetilde{\beta}\colon MR_c(X) \to MR_c(\beta X)$, y éste último se extiende a un mapeo inyectivo y continuo $\widehat{\beta}\colon \widehat{MR}_c(X) \to MR_c(\beta X)$, en este caso podemos considerar a Λ como una medida sobre βX.

Para demostrar que $MR_c(X)$ es completo, bastará probar que el conjunto $supp(\Lambda)$ está totalmente contenido en X. Aplicando el Lema 4.4.3, obtenemos que existe $B \subset C(X)$ equicontinuo y acotado puntualmente que satisface $(*)$ (Lema 4.4.3). Tomemos $\mu \in MR_c(X)$ tal que $|\Lambda(f) - \mu(f)| < \varepsilon$ para cada $f \in B$. Note que $supp(\mu) \cap X$ es compacto en X, pues X es un μ-espacio. De acuerdo con $(*)$ (Lema 4.4.3) tendremos que $|\Lambda(g)| > 1$ y $g|_{supp(\mu)\cap X} = 0$ para alguna $g \in B$.

Para finalizar la demostración basta probar que μ es continua en $C_u^*(X)$, luego, del ítem 2 del Lema 4.4.1 obtenemos que $|\Lambda(g) - \mu(g)| > 1$ lo cual es una contradicción, y por tanto $supp(\Lambda) \subset X$.

Sea $f \in C_u^*(X)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_u^*(X)$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a f. Debemos hacer ver que el conjunto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ es equicontinuo, así, μ será continua en $C_u^*(X)$. De las condiciones obtenemos que para cada $x \in X$:

- existe U vecindad de x tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $y \in U$,
- existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, para cada $n \geq N$, y
- el conjunto $\{f_1, \ldots, f_{N-1}\}$ es equicontinuo, en otras palabras, existe W vecindad de x tal que $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $n < N$.

Por tanto, si $y \in V = U \cap W$, tendremos que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$; pues cuando $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)| + |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

y si $n < N$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. En conclusión, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ es equicontinuo. □

Finalizamos el capítulo con una lista de hechos que se desprenden fácilmente del último Teorema, que son la parte esencial de este capítulo, y con una pequeña discusión sobre la L-equivalencia.

Corolario 4.5.6. La completación del espacio localmente convexo libre $L(X)$ coincide con el espacio $MR(\mu X)$ de medidas de Radón sobre la completación de Dieudonné de X, y su topología es la de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$.

Demostración. Primero note que $L(X) \subset L(\mu X)$, y que como X es denso en μX, de la Proposición 3.2.2 obtenemos que $L(X)$ es un subespacio denso de $L(\mu X)$. Por otro lado, del Teorema 4.5.5, se tiene que

$MR_c(\mu X)$ es un espacio completo, sin embargo, éste espacio posee la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de $C(\mu X)$; como los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$ y de $C(\mu X)$ son los mismos (Proposición 2.4.3), obtenemos que la topología de $MR(\mu X)$ es la de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$. □

Corolario 4.5.7. $L(X)$ es completo si y sólo X es Dieudonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito.

Demostración.

(⇒) Supongamos que $L(X)$ es completo, dado que X está encajado como un subconjunto cerrado de $L(X)$, obtendremos que X es Dieudonné-completo. Recuerde también que $L(X)$ es un conjunto denso en $MR_c(X)$, si $L(X)$ es completo, se tiene que $L(X) = MR(X)$, es decir, toda medida de Radón es molecular. Sea $K \subset X$ compacto, entonces cualquier medida de probabilidad concentrada en K es una medida de Radón cuyo soporte es K, como dicha medida es molecular, obtenemos que K debe ser finito.

(⇐) Si X es Dieudonné-completo, entonces $MR_c(X)$ es completo. En la demostración del último teorema se vio que el soporte de toda medida es compacto (en X), por tanto, cuando todo conjunto compacto de X sea finito, obtenemos que toda medida de Radón en X es molecular, esto es, $L(X) = MR_c(X)$.

□

Corolario 4.5.8. La propiedad "ser Dieudonné-completo y que todo subconjunto compacto sea finito" se preserva por L-equivalencia.

Demostración. Supongamos que X es Dieudonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito. Si X es L-equivalente a Y, entonces $L(X)$ es completo si y sólo si $L(Y)$ es completo si y sólo si Y es Diedudonné-completo y todo subconjunto compacto de Y es finito. □

De este modo se ve que la propiedad topológica correspondiente a la completez de $L(X)$ es ser Diedudonné-completo y que todo subconjunto compacto de X sea finito, sin embargo, podemos "mejorar" esta propiedad, es decir, podemos hacer que la propiedad $\mathscr{P}$, de ser Dieudonné-completo y que todo subconjunto compacto de X sea finito, se corresponda con una propiedad $\mathscr{Q}$ más fuerte que la simple completez de $L(X)$.

Proposición 4.5.9. X es Dieduonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito si y sólo si $L(X)$ es completo y todo subconjunto compacto linealmente independiente de $L(X)$ es finito.

Demostración. Resulta claro que sólo resta probar que si X es Dieduonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito, entonces todo subconjunto compacto linealmente independiente de $L(X)$ es finito. En efecto, sea K un subconjunto compacto de $L(X)$ que es linealmente independiente. Definimos $supp(K) = \bigcup\{supp(\lambda) \colon \lambda \in K\}$, como K es compacto, se tiene que es acotado, y por ende débilmente acotado, aplicando el problema 245 de [Tka16] (original de [GO86]), obtenemos que $supp(K)$ es un conjunto t-acotado de X, luego, debido a que X es Dieudonné-completo, $[supp(K)]_X$ es un conjunto compacto, por hipótesis debe ser finito. Como $K \subset lin(supp(K))$ y $lin(supp(K))$ posee dimensión finita, K debe ser un conjunto finito. $\square$

Ésta posibilidad de que varias propiedades topológico-lineales coincidan en la clase de los espacios localmente convexos libres, se debe a que es una clase "pequeña" (respecto a la clase de espacios localmente convexos) de espacios topológico-lineales, en concreto, si E es un espacio localmente convexo, entonces ser completo y que todo subcojunto compacto linealmente independiente de E sea finito son propiedades topológico-lineales completamente distintas.

Ejemplos 4.5.10.

1. Consideremos al espacio $l^\infty(\mathbb{R})$ de sucesiones reales acotadas con la norma uniforme, entonces $l^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio completo pero no todo subconjunto compacto linealmente independiente es finito, para muestra tomemos la base estándar $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ formada por las sucesiones que poseen la entrada n-ésima igual a 1 y las demás igual a 0. Tomemos la sucesión de elementos $a_n = e_1 - \frac{1}{n}e_n$, $n \geq 2$. Entonces $\{a_n \colon n \geq 2\} \cup \{e_1\}$ es un subconjunto compacto y linealmente independiente que no es finito.

2. Recíprocamente, sea X un μ-espacio en el que todo subconjunto t-acotado es finito y que no es Dieudonné-completo ([CA06], Ejemplo 4.7), entonces $L(X)$ no es completo, pero todo subconjunto compacto y linealmente independiente de $L(X)$ es finito.

Así pues, la propiedad $\mathscr{P}$, de ser Dieudonné-completo y que todo subconjunto compacto de X sea finito, se corresponde con la propiedad $\mathscr{Q}$ de ser completo y que todo subconjunto compacto (basta con ser acotado) y linealmente independiente de $L(X)$ sea finito. En pocas palabras, hemos mejorado a la completez de $L(X)$ con la propiedad $\mathscr{Q}$. Puede verse que, en las correspondencias que manejemos, una propiedad puede corresponder a varias, y unas pueden ser más débiles que otras. En particular, también se tiene que ser Dieudonné-completo es correspondiente a ser Dieudonné-completo ([Usp83], Teorema 8).

Conclusión

Como se mencionó en la parte introductoria, los objetivos de la tesis eran principalmente dos: primeramente, dar una descripción de la topología del espacio localmente convexo libre $L(X)$ sobre X mediante un enfoque que relacione directamente la topología de $L(X)$ con la de X. Dicha descripción quedó asentada perfectamente en el Teorema 3.1.5.

Por otro lado, el segundo objetivo era explorar la topología de la completación del espacio $L(X)$ y ver condiciones bajo las cuales $L(X)$ resulta ser un espacio completo, no fue sencillo, pero al final logramos probar en el Corolario 4.5.6 que dicho espacio coincide con el espacio de medidas de Radón sobre X, y que su topología es la de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de $C(X)$. Asimismo, en el Corolario 4.5.7 demostramos que $L(X)$ es un espacio completo si y sólo si X es Dieudonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito.

La pregunta que se hizo al final del capítulo 3 era ¿cuál es la propiedad $\mathscr{P}$ correspondiente a la completez de $L(X)$? Del Corolario 4.5.8 se observa que dicha propiedad es ser Dieudonné-completo y que todo subconjunto compacto de X sea finito, así hemos vinculado el estudio de los espacios $L(X)$ con las equivalencias funcionales. De hecho, el estudio de estas equivalencias nos brindan una gran cantidad de cuestiones, algunas de ellas abiertas, aplicables a otros problemas de la topología general, en particular, son una gran fuente de ejemplos y contraejemplos.

En conclusión, el estudio de los espacios localmente convexos libres, mediante sus equivalencias funcionales, abre una puerta a muchos problemas abiertos que pueden resolverse en un futuro proyecto de investigación.

Bibliografía

[AHS05] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Strecker. *Abstract and concrete categories: the joy of cats.* Online edition, 18th January 2005.

[AL97] C. E. Aull and R. Lowen. *Handbook of the history of general topology*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1997.

[Ark82] A. V. Arkhangel'skii. On linear homeomorphisms of function spaces. *Soviet Math. Dokl.*, 25:852–855, 1982.

[Ark92] A. V. Arkhangel'skii. *Topological Function Spaces.* Kluwer Academic Publishers, 1992.

[AT08] A. V. Arkhangel'skii and M. G. Tkachenko. *Topological groups and related structures.* Springer Science & Business Media, 2008.

[Bou66] N. Bourbaki. *Elements of general topology: Part 1.* Addison-Wesley, 1966.

[Bou03] N. Bourbaki. *Topological vector spaces: Chapters 1-5.* Springer Science & Business Media, 2003.

[Bou04] N. Bourbaki. *Integration I. Chapters 1-6.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BS17] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Topological vector spaces and their applications.* Springer, 2017.

[CA06] M. M. Choban and D. N. Afanas. Spaces and sequences. *Matematika Balkanica*, 20:3–4, 2006.

[Cie97] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39. Cambridge University Press, 1997.

[Die44] J. Dieudonné. Une généralisation des espaces compacts. *J. Math. Pures Appl.*, 23(9):65–76, 1944.

[Eng89] R. Engelking. *General topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Flo84] J. Flood. *Free topological vector spaces.* Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk (Warszawa), 1984.

[GM17] S. S. Gabriyelyan and S. A. Morris. Free topological vector spaces. *Topology and its Applications*, 223:30–49, 2017.

[GO86] S. Gul'ko and O. Okunev. Local compactness and M-equivalence. *et al., Questions of Geometry and Topology, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk*, pages 14–23, 1986.

[GtdDI48] M. I. Graev (traducción de Druzhinina Irina). Free topological groups. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 12(3):279–324, 1948.

[Hew48] E. Hewitt. Rings of real-valued continuous functions. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 64(1):45–99, 1948.

[HL14] R. Hidalgo Linares. *Ejemplos de espacios pseudocompactos.* Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[HNV04] K. P. Hart, J. Nagata, and J. E. Vaughan. *Encyclopedia of general topology.* Elsevier, 2004.

[Jec03] T. Jech. *Set theory. The third millennium edition.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003.

[JP89] M. A. Jiménez Pozo. *Medida, integración y funcionales.* Editorial Pueblo y Educación, 1989.

[KG69] G. Köthe and D. J. H. Garling. *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag, New York, 1969.

[Kha82] S. M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces.* Springer-Verlag, 1982.

[Mar45] A. A. Markov. On free topological groups. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 9(1):3–64, 1945.

[McP03] C. E. McPhail. The free abelian topological group as a subgroup of the free locally convex topological vector space. *Journal of Group Theory*, 6(3):391–398, 2003.

[ML98] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 1998.

[Nac54] L. Nachbin. Topological vector spaces of continuous functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40(6):471–474, 1954.

[Oku90] O. Okunev. A method for constructing examples of M-equivalent spaces. *Topology and its Applications*, 36(2):157–171, 1990.

[Rai64] D. A. Raikov. Free locally convex spaces for uniform spaces. *Matematicheskii Sbornik*, 105(4):582–590, 1964.

[RR64] A.P. Robertson and W. Robertson. *Topological vector spaces.* CUP Archive, 1964.

[Rud91] W. Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[Sch71] H. H. Schaefer. *Topological vector spaces*, volume 3. Springer Science and Business Media, 1971.

[Shi54] T. Shirota. On locally convex vector spaces of continuous functions. *Proceedings of the Japan Academy*, 30(4):294–298, 1954.

[ST74] B. V. Smith Thomas. Free topological groups. *General Topology and its applications*, 4(1):51–72, 1974.

[Tik91] V. M. Tikhomirov. *Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume I: Mathematics and mechanics.* Springer Science & Business Media, 1991.

[Tka83a] M. G. Tkachenko. On completeness of free abelian topological groups. *Soviet Math. Dokl*, 27(2):341–345, 1983.

[Tka83b] V. V. Tkachuk. On a method of constructing examples of M-equivalent spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 38(6):135–136, 1983.

[Tka11] V. V. Tkachuk. *A Cp-theory problem book: Topological and function spaces.* Springer, 2011.

[Tka16] V. V. Tkachuk. *A Cp-theory problem book: Functional equivalencies.* Springer, 2016.

[Usp83] V. V. Uspenskii. On the topology of a free locally convex space. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 270, pages 1334–1337, 1983.

[Usp91] V. V. Uspenskii. Free topological groups of metrizable spaces. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 37(3):657, 1991.

[vN35] J. von Neumann. On complete topological spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 37(1):1–20, 1935.

[VV98] V. Valov and D. Vuma. Function spaces and Dieudonné completeness. *Quaestiones Mathematicae*, 21(3-4):303–309, 1998.

[Wei79] A. Weil. *Oeuvres scientifiques / Collected papers. Volume I: 1926-1951.* Springer-Verlag, 1979.

Índice alfabético