

Science & Philosophy
Vol. 5(2), 2017, pp. 95-104

ISSN: 2282-7757
eISSN: 2282-7765

Mathematics in Greek Civilization: Significant Current Moments (La Matematica nella Civiltà Greca: Momenti Significativi Attuali)

Ferdinando Casolaro¹, Giovanna Della Vecchia²

³doi:10.23756/sp.v5i2.394



Abstract

This work presents a historical excursus on the evolution of Mathematics from the Chaldean-Babylonian period (VIII-VII century BC) to the economic re-flourishing in Europe (XII century AD), underlining, in particular, those aspects of science that have influenced the development of Architecture, Astronomy and, subsequently, the implications that are manifested in literature and political thought today. The work will be completed in a forthcoming article which deals with the same theme, but in the following period, from the twelfth century to the present.

Keywords: Matematica, Filosofia, Letteratura.

Sunto

In questo lavoro si presenta un excursus storico dell'evoluzione della Matematica dal periodo Caldeo-Babilonese (VIII-VII sec. a.C.) alla rifioritura economica in Europa (XII secolo d. C.), sottolineando, in particolare, quegli aspetti della scienza che hanno influenzato lo sviluppo dell'Architettura, dell'Astronomia e, successivamente, anche i risvolti che si manifestano nella Letteratura e nel pensiero politico oggi. Il lavoro sarà completato in un prossimo articolo sullo stesso tema trattato nel successivo periodo, dal XII secolo ad oggi.

Parole chiave: Matematica, Filosofia, Letteratura.

¹ Dipartimento di Architettura Università "Federico II" di Napoli; ferdinando.casolaro@unina.it.

² IIS "Minzoni" Giugliano in Campania; giovanna.dellavecchia@gmail.com

³ ©Ferdinando Casolaro and Giovanna Della Vecchia. Received: 25-11-2017. Accepted: 27-12-2017. Published: 31-12-2017.

1 Introduzione

La Matematica come disciplina organizzata e indipendente non esisteva prima dell'entrata in scena dei Greci nel periodo classico, compreso tra il 600 ed il 300 a.C. (Kline Morris 1991). Tuttavia ci furono civiltà anteriori in cui vennero creati i primi rudimenti della matematica; in particolare i Babilonesi e gli Egiziani portarono un primo contributo. Degli egiziani, i principali documenti matematici che ci sono pervenuti sono due papiri: "*il papiro di Mosca*" ed "*il papiro di Rhind*" che risalgono entrambi al 1700 a.C., ma la matematica che contiene gli 85 problemi del papiro di Rhind e 25 di quello di Mosca, con relative soluzioni, era nota agli egiziani già 3500 anni prima della nascita di Cristo.

I Babilonesi, insieme ad altre popolazioni, occuparono l'area geografica situata tra i fiumi "*Tigre*" ed "*Eufrate*" nell'VIII sec. a.C.: la regione cadde sotto il dominio degli *Assiri* che non aggiunsero nulla di nuovo alla cultura matematica già esistente, ma nel secolo successivo, con il nome di *Impero Assiro*, venne spartita tra i *Caldeo* e i *Medi*.

I Caldeo dimostrarono un particolare interesse per l'Astronomia e, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercarono di approfondire le proprietà dello spazio; il campo di studi su cui operavano era la sfera, per cui, oltre alle questioni metriche relative a lunghezze, aree e volumi utili nella pratica, i più antichi frammenti di geometria che ci sono giunti riguardano la *geometria sferica* (Casolaro, F., 2002). Gli stessi greci, parallelamente allo studio della "*geometria piana*", provavano interesse per la geometria sferica. Di ciò si è avuta notizia nel 1885, anno in cui sono stati tradotti due testi "*Sulle sfere mobili*" ed "*Il sorgere ed il tramontare*" scritti nel III sec. a.C. da un astronomo contemporaneo di Euclide, *Autolico di Pitane*, e che sono i due testi più antichi rimasti intatti.

E' significativo sottolineare come nel libro *Sulle sfere mobili* le proposizioni siano disposte in ordine logico; infatti, ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta, con esplicito riferimento alla figura e infine ne viene data la dimostrazione. E' questo lo stile usato da Euclide, il quale pure trattò alcune questioni di *Geometria Sferica*, in uno dei suoi scritti (*I fenomeni*) di cui c'è una traduzione pubblicata nel 1916 (Casolaro F. and Pisano R. 2011).

2 Euclide e Autolico negli anni a cavallo del XIX e XX secolo

Nel titolo del presente lavoro si legge: *momenti significativi attuali*. Quali sono questi momenti? Negli ultimi decenni è stato fortemente dibattuto il tema dell'unicità delle culture in contrapposizione all'idea, per troppo tempo

sostenuta, di operare una netta distinzione tra Cultura umanistica e Cultura scientifica.

Oggi è opinione diffusa che la disposizione delle proposizioni enunciate in un teorema della geometria di Euclide che, come abbiamo visto, avevano influenzato anche gli scritti di Autolico, sia la stessa per la comprensione di un fenomeno storico-filosofico o letterario.

Tale disposizione rappresenta un metodo di esposizione del periodo in cui sono vissuti sia l'astronomo che il matematico. Ma, ancora oggi, il modello euclideo è uno degli strumenti più forti a disposizione dei docenti per educare gli studenti alla correttezza dell'esposizione e al rigore logico delle argomentazioni.

L'attualità dei risultati del periodo greco si riscontra in modo evidente nelle traduzioni delle opere di Autolico e di Euclide che riteniamo siano stati i precursori, rispettivamente, della concezione di un universo curvo che ha condotto alla Teoria della Relatività generale (Autolico) e di una geometria dinamica (Euclide ne *I fenomeni*) che negli ultimi due secoli si è sviluppata attraverso la Geometria Proiettiva e la Geometria Descrittiva.

Non a caso i due testi di Autolico furono tradotti alla fine del XIX secolo quando Levi-Civita (1873 - 1941) e Ricci Cubastro (1853 - 1925) pubblicarono i loro risultati sull'algebra tensoriale utilizzata da Einstein per lo sviluppo della sua teoria. Bella è la lettera di Einstein a Ricci Cubastro che ringrazia per "i risultati che lei ha pubblicato e senza i quali probabilmente non avrei sviluppato la mia teoria" (Casolaro F. and Pisano R. 2012). È interessante poi osservare come Euclide, l'autore dell'opera più importante di una geometria statica, ne *"I fenomeni"* tratti le prime proprietà del movimento e che questo testo sia stato tradotto nel XX secolo (Casolaro F. 2008).

Questi risultati hanno oggi una loro importanza, seppur di carattere esclusivamente storico, nel far comprendere come si pensasse ad un Universo non piatto ma curvo ed in continuo movimento già nell'antichità. Basta osservare i due modi in cui Euclide definisce la superficie sferica: ne *"Gli elementi"*, è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto detto centro (definizione statica), ne *"I fenomeni"* è la superficie ottenuta dalla rotazione di una circonferenza intorno al proprio diametro (definizione dinamica).

Al di là dell'interesse per le questioni di Astronomia che incuriosirono prima i Caldeo-Babilonesi e poi i Greci, lo studio della Matematica fino al VI sec. a.C. era finalizzato alla ricerca di proprietà utili e curiose e non al rigore delle inferenze logiche.

In Talete (VI sec. a.C.) prima e nei suoi successori dopo (in particolare nella *Scuola Pitagorica*), è possibile trovare le prime dimostrazioni della

geometria, riassunte, poi, nel III sec. a.C. da Euclide negli "*Elementi*". E' questo il momento considerato centrale per lo sviluppo della Matematica.

Dal punto di vista della "*Storia della Matematica*", la civiltà greca viene distinta in due periodi: periodo classico, dal 600 al 300 a.C.; periodo ellenistico (o alessandrino), dal 300 a.C. al 600 d.C.

Le fonti della conoscenza della Matematica greca sono, stranamente, meno attendibili e meno autentiche di quelle di cui disponiamo per la Matematica Babilonese e per la Matematica Egiziana, perché non ci è pervenuto alcun manoscritto originale dei matematici greci più importanti; uno dei motivi è che il papiro su cui scrivevano i greci è deperibile, contrariamente all'argilla usata nella maggior parte dei documenti Babilonesi ed Egiziani (Casolaro F., Pisano R. 2006).

La ricostruzione della storia della matematica greca, basata sulle fonti citate, è stata un'impresa enorme e complicata, in quanto non è possibile sapere quali cambiamenti i traduttori possono aver apportato o quanto bene essi abbiano compreso i testi originali.

3 La civiltà greca e le Scuole filosofiche

Si presuppone che l'origine della civiltà greca risalga al 2800 a.C., periodo in cui i greci si stabilirono in Asia Minore (probabile luogo d'origine), nella Grecia moderna, nell'Italia meridionale, in Sicilia, a Creta, a Rodi, a Delo e nell'Africa settentrionale. La supposizione di tale origine si evince dall'*Iliade* e dall'*Odissea* di Omero e dalla decifrazione degli scritti antichi e delle ricerche archeologiche.

Intorno al 775 a.C., i greci sostituirono i vari sistemi geroglifici di scrittura fino ad allora usati con l'alfabeto fenicio che era usato anche dagli ebrei; a tal proposito, Morris Kline, nella "*Storia del pensiero matematico*" (ed. Einaudi, pag.33 vol. I) dice "*i greci divennero più letterati*", in quanto l'adozione di un alfabeto proprio gli permise di registrare la loro storia e le loro idee.

I principali commentatori che hanno studiato e tradotto i testi greci, sono *Pappo* (fine III sec. d.C.) e *Proclo* (410-485 d.C.), per cui, oltre alle versioni di alcuni classici, le due fonti principali per la conoscenza della matematica greca sono "*La Collezione matematica*" di Pappo ed "*Il Commentario*" di Proclo. Pappo è stato un profondo cultore di geometria ed aveva anche scritto "*Il tesoro dell'analisi*". Anche *Boezio* (480-524) aveva tradotto le opere di Euclide ma, nelle sue traduzioni, si riscontrano alcune imprecisioni perché, non essendo Boezio propriamente un matematico, si ritiene che spesso non capisse ciò che traduceva.

La matematica greca nel periodo classico si sviluppò in numerosi *Centri* (le cosiddette *Scuole*) che si susseguirono l'un l'altro. In ogni *Centro* un gruppo di studiosi portava avanti la propria attività sotto la guida di un (o più) *grande*

maestro. In un *Centro* che nasceva dopo, per la ricerca scientifica, si sfruttavano anche i risultati delle opere dei predecessori.

La prima di queste Scuole, la *Ionica*, fu fondata da *Talete* (\approx 640-546 a.C.) a *Mileto*. Allievi di Talete furono *Anassimandro* (\approx 610-547 a.C.), *Anassimene* (\approx 550-480 a.C.) e si suppone che anche *Pitagora* (\approx 585-497 a.C.) abbia imparato la Matematica da Talete.

Pitagora fondò la sua Scuola *Pitagorica* nell'Italia Meridionale. Verso la fine del VI secolo a.C., *Xenofane di Colofone in Ionia* fondò in Sicilia (ad *Elea*, dove risiedevano *Parmenide* e *Zenone*, nel V sec. a.C.) la Scuola *Eleatica*.

Ma la più celebre di tutte le Scuole è l'*Accademia* di *Platone* (427-347 a.C.) ad *Atene*, di cui fu allievo *Aristotele* (384-322 a.C.).

L'*Accademia*, fondata intorno al 347 a.C., ha avuto una grandissima importanza per il pensiero greco in quanto i suoi allievi furono i più grandi filosofi, matematici ed astronomi della propria epoca. Sulla scia dell'*Accademia*, *Aristotele* fondò una nuova Scuola ad *Atene*, il *Liceo*, detta anche *Scuola peripatetica*.

Atene era già stata sede di una *Scuola*, “la *Sofistica*” (\approx V sec. a.C.), che comprendeva maestri di *Grammatica*, di *Retorica*, di *Dialettica*, di *Morale*, ma anche di *Geometria*, *Astronomia* e *Filosofia*.

La *Scuola Platonica* succedette a quella *Sofistica* nella leadership delle attività matematiche. I principali esponenti della *Sofistica* sono stati i pitagorici *Teodoro di Cirene* (nato \approx 470 a.C.) e *Archita di Taranto* (428-347 a.C.), che furono entrambi maestri di Platone: si ritiene che *i loro insegnamenti siano stati la causa della profonda influenza pitagorica su tutta la Scuola Platonica* (Morris Kline pag. 53).

Platone non era un matematico, ma il suo entusiasmo per la disciplina e la sua convinzione dell'importanza della Matematica per la Filosofia e per la comprensione dell'Universo incoraggiava i matematici a proseguirne lo studio. Infatti, quasi tutto il lavoro matematico (di una certa importanza) del quarto secolo è stato fatto da amici ed allievi di Platone.

Egli affermò con forza la necessità di una organizzazione deduttiva della conoscenza:

Il compito della Scienza è quello di scoprire la struttura della natura e di articolarla in un sistema deduttivo.

Platone fu il primo a sistematizzare le regole della dimostrazione rigorosa e si suppone che i suoi seguaci abbiano disposto i teoremi secondo un ordine logico. Nella *Scuola Platonica* furono migliorate le *definizioni* e furono dimostrati anche nuovi teoremi di *geometria piana*. Inoltre i platonici diedero un notevole impulso alla *geometria solida*, ritenuta la base per lo studio dell'Astronomia. Nella sezione 528 del libro VII de “*La Repubblica*” (Morris Kline, pag. 58) si evince quello che oggi diciamo “il

Pensiero politico-sociale” di Platone. Ed è questa parte della sua opera che lo accosta alle ideologie stataliste della società moderna. Così si esprimeva Platone in proposito:

Prima di poter prendere in considerazione l'Astronomia, che studia il moto dei solidi, è necessaria una scienza di tali solidi. Ma questa scienza è stata finora trascurata e gli studiosi di figure solide non hanno ricevuto un adeguato aiuto dallo Stato.

La scoperta più significativa della Scuola platonica è stata quella delle *sezioni coniche*. Eratostene attribuiva i risultati ottenuti all'astronomo *Menecmo*, allievo di Eudosso e membro dell'Accademia platonica, vissuto nel IV sec. a.C.

Intorno al 300 a.C., il centro guida per la Matematica si spostò ad Alessandria e l'Accademia proponeva come nucleo centrale la Filosofia. La vita della Scuola durò fino al 529 d.C quando l'imperatore *Giustiniano* la chiuse perché vi “*si insegnavano dottrine pagane e perverse*” (Casolaro F. and Paladino L. 2012).

I platonici studiavano la metodologia del ragionamento per cui si occuparono delle *dimostrazioni* e migliorarono le *definizioni*.

Ma è con la Scuola di Aristotele che si discute in modo profondo il concetto di definizione:

“*nome di un insieme di parole*”

che deve essere data in termini di

“*qualche cosa che è antecedente alla cosa definita*”.

Aristotele fa notare che una definizione ci dice ciò che qualcosa è, ma non che qualcosa esiste. L'esistenza delle cose definite deve essere dimostrata, eccetto che per poche cose primitive, quali il punto e la retta, la cui esistenza deve essere assunta insieme con i primi principi o assiomi. A tal proposito, egli distingue gli assiomi, che sono verità comuni a tutte le scienze, dai postulati, che sono i primi principi accettabili di ogni singola scienza. Pertanto, il punto e la retta non possono essere definiti, e critica la definizione “*un punto è ciò che non ha parti*” perché le parole “*ciò che*” non dicono a cosa fanno riferimento, per cui la definizione non è corretta. Egli sostiene la necessità di termini non definiti perché deve esserci un punto di partenza nella serie di definizioni, ma i matematici successivi persero di vista questa necessità fino alla fine del secolo XX (sistematizzazione di Hilbert).

La parte migliore dell'opera dei matematici del periodo classico è negli “Elementi” di Euclide e ne “Le coniche” di Apollonio (262 - 190 a.C.).

Gli “Elementi” di Euclide rappresentano ancora oggi il più potente strumento di Logica a disposizione dei docenti di Matematica per la formazione dei propri allievi e, per secoli, ha identificato la geometria utilizzata nelle scienze applicate.

I risultati degli ultimi due secoli hanno però evidenziato che, dal punto di vista applicativo per lo studio dell'Universo che ci circonda, il modello euclideo è insufficiente (Casolaro, F. 2014): di fatto l'Ottica moderna si avvale della Geometria Proiettiva, l'Architettura della Geometria Descrittiva (Casolaro F. and Rotunno A. 2015) e la Teoria della Relatività generale è sistemata su un Modello delle cosiddette "geometrie non euclidee" sullo spazio curvo (Casolaro F. and Santarossa R. 1997).

Lo studio de "Le coniche" di Apollonio è alla base dei più grossi risultati di Astronomia ed Architettura.

Nei tre secoli prima della nascita di Cristo e nei primi secoli d.C. si rilevano:

- i grossi risultati nella geometria nella meccanica e nell'ottica, di colui che è forse il più grande genio della nostra storia, Archimede (287-212 a.C.);

- il calcolo della lunghezza della circonferenza della terra di Eratostene (284-192 a.C.) che si è rilevato non distante da quello determinato oggi con i mezzi moderni. Eratostene, oltre che matematico, era filosofo, storico, poeta, filologo.

- l'invenzione della proiezione ortogonale in cui "i raggi di luce proiettano la terra su un piano" dovuta ad Ipparco (la cui morte è intorno al 125 a.C.).

Negli anni che risalgono ai primi due secoli d.C., i risultati di maggior importanza sono stati quelli di Menelao (70 circa - 140 circa) in Trigonometria ed Astronomia e di Claudio Tolomeo (morto intorno al 168 d.C.) che dichiara di basare la sua Astronomia sui procedimenti incontrovertibili dell'Aritmetica e della Geometria.

Nel periodo greco, ebbe anche origine un gruppo di ricerche i cui risultati costituiscono "l'Ottica degli antichi", che nasceva dal desiderio di studiare fenomeni luminosi allo scopo di distinguere ciò che è "apparenza" da ciò che è "realtà". Con l'Ottica degli antichi si cercava di dare una caratterizzazione razionale all'arte attraverso la rappresentazione (Casolaro F. 2003).

Partendo dal postulato che "*la luce si propaga in linea retta*", vengono stabiliti molti teoremi (per lo più da Euclide) che ancora oggi sono ritenuti tra i fondamenti della trattazione matematica della luce; altre proposizioni, invece, vengono ritenute inaccettabili essendo conseguenza del principio - sostenuto da Platone ma ripudiato come falso dalla Fisica contemporanea - che la visione avvenga per effetto di raggi emananti, non dall'oggetto che si contempla, ma dall'occhio dell'osservatore.

Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento per l'arte pittorica si evince da alcuni passi di Vitruvio (Marco Vitruvio Pollone, vissuto probabilmente nel I sec. a.C.) che si può

considerare il più significativo trattatista di Architettura del mondo latino. Di Vitruvio si sa poco, addirittura si mette in dubbio l'originalità della sua opera "il *De Architectura*" (27 a.C.) in cui egli descrive la Basilica di Fano, di cui sarebbe stato il costruttore (I cap. - V libro).

Il *De Architectura* di Vitruvio fu preso a modello da tutti i trattatisti di Architettura del Rinascimento che vi attinsero nozioni e notizie e spesso ne adottarono schemi e criteri. E' però nel sec. XII, con l'*Architettura gotica*, che si incomincia ad intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale; *il problema principale che poneva l'Architettura gotica era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture* (Casolaro F. 2003).

4 Il periodo romano e l'oscurantismo culturale

Dal 300 al 1100 d.C. in Europa non vi fu alcun progresso in ambito scientifico; si hanno solo tracce di traduttori delle opere di Euclide, Aristotele e degli antichi greci. Il più importante traduttore fu Severino Boezio (citato da Dante nel Par. X, 125-129) che, nella sua opera, traduce le definizioni ed i teoremi di Euclide ma non ne dà le dimostrazioni. Le traduzioni erano tutte in latino, lingua ufficiale della Chiesa che impose il suo potere sulla Cultura. Nel 380 Teodosio dichiarò il Cristianesimo religione ufficiale dell'Impero, proibì i culti pagani e nel 394 abolì le Olimpiadi, per cui il Latino diventò la lingua internazionale dell'Europa e, quindi, la lingua della Matematica e della Scienza. Tra il 150 a.C e il 364 d.C. (il periodo più probabile è considerato intorno al 250 d.C.) è vissuto ad Alessandria un grande matematico, Diofanto, il quale raccolse e risolse problemi che compendì in un unico trattato "*l'Arithmetica*" costituito da tredici libri, di cui solo sei sopravvissero agli eventi del medioevo perché gli altri sette furono distrutti dagli eventi successivi.

Infatti, durante i secoli che separano Euclide da Diofanto, Alessandria era considerata la capitale intellettuale del mondo civilizzato, ma per tutto questo periodo la città fu ripetutamente minacciata da eserciti stranieri. Il primo grande assalto si ebbe nel 47 a.C., quando Giulio Cesare cercò di abbattere il regno di Cleopatra incendiando la flotta di Alessandria nei cui pressi era situata la Biblioteca che prese fuoco e centinaia di migliaia di volumi furono distrutti. Cleopatra decise di riportare la Biblioteca al suo antico splendore; fu aiutata in tale operazione da Marco Antonio che marciò sulla città di Pergamo dove era stata fondata una grande Biblioteca e trasportò tutti i volumi di Pergamo ad Alessandria (in Egitto).

Nei quattro secoli successivi la Biblioteca, che Cleopatra custodiva nel Tempio di Serapide, continuò ad accumulare libri finché nel 389 d.C.

l'imperatore cristiano Teodosio ordinò al vescovo di Alessandria Teofilo di distruggere tutti i monumenti pagani compreso il Tempio di Serapide. I dotti pagani che cercarono di salvare sei secoli di conoscenze furono massacrati

dalla plebaglia cristiana. Poche copie dei volumi più importanti che erano sopravvissute alla devastazione furono distrutti da un attacco mussulmano nel 642 del califfo Omar perché alcuni ritenuti contrari al Corano ed altri ritenuti superflui.

I manoscritti vennero utilizzati per alimentare le caldaie dei bagni pubblici e la Matematica greca andò in fumo.

Nei mille anni successivi, in Occidente non c'è stato alcun interesse per la Matematica. Essa è sopravvissuta per merito degli Indiani e degli Arabi che copiarono le formule dai manoscritti greci sopravvissuti e reinventarono molti teoremi che erano stati perduti.

Dal III secolo fino all'XI secolo non si riscontra in Europa alcun risultato significativo sia nell'ambito delle scienze che nella letteratura e nella filosofia. Nel frattempo gli arabi avevano dato una struttura allo studio dell'algebra, i cui risultati si sono conosciuti in Europa dall'XI secolo in poi (periodo della rifioritura economica), per merito principalmente di Leonardo Pisani (1170-1250) detto Fibonacci perché figlio del mercante Bonacci.

Fibonacci era nato a Pisa, ma era stato educato in Africa ed aveva viaggiato in Europa ed in Asia Minore per seguire il padre; ed è durante questi viaggi che aveva racimolato manoscritti che contenevano gran parte dei risultati di algebra ottenuti dagli arabi. Nel 1202 scrisse il *Liber Abaci*, di cui venne in possesso Dante Alighieri che era molto attento alla cultura scientifica del suo tempo e da bambino frequentava le lezioni di Pietro Hispano (1220-1277) dove apprendeva il metodo euristico nella scienza. Oggi, l'interesse di Dante per la cultura scientifica è oggetto di approfondimento da parte degli storici della Matematica che ritengono, dall'analisi dei brani della Divina Commedia, che egli sia stato un buon matematico. Siamo ormai nel XIII secolo. Da questo momento (e nei tre secoli successivi) l'interesse dei matematici è rivolto principalmente all'Architettura che si svilupperà ancora con l'arte ma diventerà ufficialmente una scienza, con le regole della Prospettiva e delle Trasformazioni geometriche attraverso la Geometria Proiettiva (Casolaro, F. and Eugeni, F. 1996), (Casolaro, F. and L. Cirillo and R. Prosperi 2015). La descrizione di ciò sarà oggetto di un prossimo lavoro.

Bibliografia

Kline Morris (1991). "Storia del pensiero matematico" - Einaudi Editori.

Casolaro, F. (2002). "Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo".

Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo". Bergamo 2002.

Casolaro, F. and Eugeni, F. (1996). "Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebra reali doppie". Ratio Matematica n. 1, 1996.

F. Casolaro F. and Cirillo L. (1996). "Le trasformazioni omologiche". Congresso Nazionale Mathesis: "I fondamenti della matematica per la sua didattica e nei suoi legami con la scienza contemporanea" - Verona, 1996.

Casolaro F. and Santarossa R. (1997) "Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche". Congresso nazionale Mathesis, Caserta, 1997.

Casolaro F. (2003). "Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica". Convegno internazionale "Arte e Matematica" - Vasto, 10-12 aprile 2003.

Casolaro F. Pisano R. (2006) "Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività", Congresso SISFA, Facoltà di Architettura "Valle Giulia" della Università di Roma "La Sapienza"

Casolaro F. (2008) "L'evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull'osservazione del mondo fisico". 1° Convegno AIF, Aversa 2008.

Casolaro F. and Pisano R. (2011) "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)" History Research - Vol. 1, Number 1, 2011.

Casolaro and Pisano R. (2012) "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part two)" History Research - Vol. 2, Number 1, 2012.

Casolaro F. and Paladino L. (2012) "Evolution of the geometry through the Arts"- 11th International Conference APLIMAT 2012 Slovak University of Technology in Bratislava, 2012.

Casolaro, F. (2014). "L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?". Science&Philosophy Journal of Epistemology, Volume 2, Numero 1, 2014.

Casolaro, F. and L. Cirillo and R. Prosperi (2015). "Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie". Science &Philosophy n. 1, 2015.

Casolaro F. and Rotunno A. (2015) "Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations". Third International Conference - Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models (RTSS), Brno, Czech Republic 2015.

Casolaro F. and Cirillo L., and Prosperi R. (2016) "Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube". Ratio-Matematica, Journal of Mathematics, Statistics, and Applications Volume 31, 2016.