

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.958:537.311.1;621.315.592

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

Поступила в редакцию 15.01.2020

Received 15.01.2020

Н. А. Поклонский, А. Н. Деревяго, С. А. Вырко*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ МИГРАЦИИ СВОБОДНЫХ И ПРЫГАЮЩИХ МЕЖДУ АКЦЕПТОРАМИ ДЫРОК В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ**

Аннотация. В диффузионно-дрейфовом приближении построена феноменологическая теория сосуществующих миграции дырок v -зоны и миграции дырок посредством прыжков с водородоподобных акцепторов в зарядовом состоянии (0) на акцепторы в зарядовом состоянии (-1). Рассматривается кристаллический полупроводник p -типа при постоянной температуре, к которому приложено внешнее стационарное электрическое поле. В линейном приближении впервые получены аналитические выражения для длины экранирования статического электрического поля и длины диффузии дырок v -зоны и дырок, квазилокализованных на акцепторах. Представленные соотношения как частные случаи содержат известные выражения. Показано, что прыжковая миграция дырок по акцепторам приводит к уменьшению и длины экранирования, и длины диффузии.

Ключевые слова: полупроводник p -типа, водородоподобные примеси, прыжки дырок, длина экранирования, длина диффузии

Для цитирования. Модель стационарной миграции свободных и прыгающих между акцепторами дырок в кристаллическом полупроводнике / Н. А. Поклонский [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 92–101. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

Nikolai A. Poklonski, Aliaksandr N. Dzeraviah, Sergey A. Vyrko*Belarusian State University, Minsk, Belarus***MODEL OF STATIONARY MIGRATION OF FREE AND HOPPING VIA ACCEPTORS HOLES IN A CRYSTALLINE SEMICONDUCTOR**

Abstract. In the diffusion-drift approximation, we have constructed a phenomenological theory of the coexisting migration of v -band holes and holes by means of hopping from hydrogen-like acceptors in the charge state (0) to acceptors in the charge state (-1). A p -type crystalline semiconductor is considered at a constant temperature, to which an external stationary electric field is applied. In the linear approximation, analytical expressions for the screening length of the static electric field and the length of the diffusion of v -band holes and the holes quasilocated on acceptors are obtained for the first time. The presented relations, as special cases, contain well-known expressions. It is shown that the hopping migration of holes via acceptors leads to a decrease in the screening length and in the diffusion length.

Keywords: p -type semiconductor, hydrogen-like impurities, hopping of holes, screening length, diffusion length

For citation. Poklonski N. A., Dzeraviah A. N., Vyrko S. A. Model of stationary migration of free and hopping via acceptors holes in a crystalline semiconductor. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 92–101 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

Введение. Полупроводники с дырочным механизмом электрической проводимости наряду с микроэлектроникой находят применение в биомедицине и термометрии. Так, легированные атомами бора алмазы p -типа используются в качестве внедряемых в мозговую ткань человека электродов для детектирования активности нейронов [1]. Алмазы с дырочной электропроводностью применяются также в электрохимии при решении проблем очистки воды [2]. Трансмутационно легированные атомами галлия кристаллы германия p -типа используются в качестве прецизионных терморезисторов в области температуры жидкого гелия [3]. При этом для оптимального сопряжения полупроводниковых материалов с электрической цепью важна температура, при которой проявляется прыжковая электропроводность (см., напр., [4]).

При исследовании температурной зависимости электропроводности ковалентных полупроводниковых кристаллов p -типа на постоянном токе в работе [5] введена температура T_j , при которой в отсутствие внешнего фотовозбуждения удельная электропроводность σ_p , обусловленная дырками в валентной зоне (v -зоне), приблизительно равна удельной прыжковой электропроводности σ_h за счет миграции дырок напрямую между акцепторами.

Конкретно в работах [5, 6], исходя из теоремы вириала (см., напр., [7]), установлено, что для кристаллического полупроводника p -типа с водородоподобными примесями

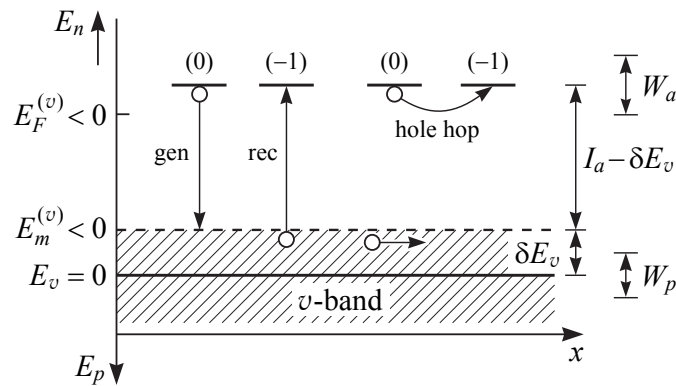
$$T_j = \frac{0,728}{k_B} \frac{e^2}{4\pi\epsilon} (KN)^{1/3}, \quad (1)$$

где k_B – постоянная Больцмана, e – элементарный заряд, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ – низкочастотная абсолютная диэлектрическая проницаемость кристаллической матрицы ($\epsilon_r = 5,7$ для алмаза, $\epsilon_r = 15,4$ для германия), ϵ_0 – электрическая постоянная, $N = N_0 + N_{-1}$ – концентрация акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) в единицах элементарного заряда, KN – концентрация доноров, полностью находящихся в зарядовом состоянии (+1). Степень компенсации $0 < K < 1$ определяется как отношение концентрации неосновных (компенсирующих) примесей к концентрации основных (легирующих) примесей. При температуре $T > T_j$ прыжковый механизм переноса дырок не реализуется. Но при низких температурах, когда температура $T < T_j$, концентрация дырок в v -зоне пренебрежимо мала, электрическая проводимость определяется только прыжками дырок по акцепторам. Типичные значения температуры T_j для кристаллических ковалентных полупроводников варьируются в широком диапазоне. Так, для умеренно ($0,1 < K < 0,5$) компенсированного атомами азота (как водородоподобными донорами) алмаза p -типа, легированного атомами бора (как водородоподобными акцепторами) $T_j \approx 300$ К при $K \approx 0,25$ и $N \approx 1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ [6, 8]; концентрация бора, соответствующая низкотемпературному переходу алмаза из изоляторного состояния в металлическое (переходу Мотта), $N_M \approx 4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ [9]. Для сравнения в кристаллах p -Ge:Ga при степени компенсации $K \approx 0,35$ атомами галлия (как акцепторы) атомами мышьяка (как донорами) температура $T_j \approx 6$ К при концентрации атомов галлия $N \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$ [5]; концентрация галлия, соответствующая переходу Мотта, $N_M \approx 1,85 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ [10].

Цель работы – расчет длины экранирования внешнего стационарного электрического поля и длины диффузии как дырок v -зоны, так и дырок, прыгающих по неподвижным водородоподобным акцепторам, в ковалентных кристаллических полупроводниках p -типа в условиях сосуществования зонной и прыжковой электропроводностей, т. е. при температуре $T \approx T_j$.

Постановка задачи. Рассмотрим однородный полупроводник p -типа с водородоподобными атомами примесей в состоянии термодинамического равновесия, когда выполняется условие электрической нейтральности $p + KN = N_{-1}$, где p – концентрация дырок v -зоны (каждая с зарядом $e > 0$), KN – концентрация компенсирующих акцепторы положительно заряженных доноров, N_{-1} – концентрации отрицательно заряженных акцепторов. В соответствии с рисунком полагаем, что обмен дырками между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) осуществляется как через v -зону (переход дырки от электрически нейтрального акцептора в v -зону с последующим переходом на акцептор в зарядовом состоянии (-1)), так и посредством термически активированного туннелирования дырки между акцепторами (прыжковый переход (0) \rightarrow (-1)). В результате этих переходов дырок зарядовые состояния (0) и (-1) неподвижных акцепторов мигрируют по кристаллу. Согласно [11–13], в термодинамическом равновесии концентрация прыгающих по водородоподобным акцепторам дырок есть $N_h = N_0 N_{-1} / (N_0 + N_{-1})$.

Уточним используемые термины. При дрейфе и диффузии дырок валентной зоны (т. е. делокализованных электронных вакансий в ковалентных химических связях атомов кристалла) мигрирует положительный заряд. При переходе дырок, квазилокализованных на акцепторах в зарядовом состоянии (0), на акцепторы в зарядовом состоянии (-1) в кристаллической матрице как бы мигрирует отрицательный заряд ионов.



Энергия электрона E_n и энергия дырки E_p в зависимости от координаты x на одноэлектронной зонной диаграмме кристаллического полупроводника p -типа; $E_v = 0$ – потолок валентной зоны нелегированного кристалла: «gen» – тепловой выброс дырки из акцептора в зарядовом состоянии (0) в v -зону; «rec» – захват дырки v -зоны на акцептор в зарядовом состоянии (-1), показана миграция дырки v -зоны (зонная электропроводность); «hole hop» – термически активированный прыжок дырки между акцепторами (0) \rightarrow (-1) (прыжковая электропроводность); $I_a > 0$ – энергия термической ионизации одиночного (уединенного) акцептора; $E_F^{(v)} < 0$ – уровень Ферми, отсчитанный от потолка v -зоны ($E_v = 0$); $E_m^{(v)} < 0$ – порог подвижности для дырок v -зоны (относительно $E_v = 0$); $\delta E_v = -E_m^{(v)} > 0$ – сдвиг потолка v -зоны в глубь запрещенной зоны полупроводника из-за наличия примесей; W_a и W_p – среднеквадратичные флуктуации уровней энергии акцепторов и потенциальной энергии дырок v -зоны

The electron energy E_n and the hole energy E_p as a function of the x coordinate in the p -type crystalline semiconductor single-electron band diagram; $E_v = 0$ is the top of the valence band of an undoped crystal: “gen” is a thermal emission of the hole from the acceptor in the charge state (0) into the v -band; “rec” is a capture of the v -band hole on the acceptor in the charge state (-1), the migration of the v -band hole (band-like electrical conductivity) is shown; “hole hop” is a thermally activated hole hop between acceptors (0) \rightarrow (-1) (hopping conductivity); $I_a > 0$ is the energy of the thermal ionization of a single acceptor; $E_F^{(v)} < 0$ is the Fermi level counted from the top of the v -band ($E_v = 0$); $E_m^{(v)} < 0$ is the mobility edge for the v -band holes (relative to $E_v = 0$); $\delta E_v = -E_m^{(v)} > 0$ is the shift of the top of the v -band into the semiconductor band gap due to the presence of impurities; W_a and W_p are the mean-square fluctuations of the energy levels of acceptors and the potential energy of the v -band holes

Система нелинейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим миграцию дырок в полупроводниковом образце p -типа при приложении к нему стационарного электрического поля напряженностью E . Выберем декартову систему координат (x, y, z) , в которой вектор напряженности внешнего электрического поля направлен вдоль оси x . Считаем, что длина образца вдоль оси x много больше и средней длины свободного пробега дырки v -зоны, и средней длины прыжка дырки между акцепторами. Пренебрегаем краевыми эффектами и считаем, что все рассматриваемые величины не зависят от пространственных координат y и z (однородный случай). В диффузионно-дрейфовом приближении зонный [14, 15] и прыжковый [13, 16] перенос дырок, а также их тепловой выброс в v -зону с акцепторов в зарядовом состоянии (0) и захват из v -зоны на ионизированные акцепторы описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 J_p(x) &= ep(x)\mu_p E(x) - eD_p \frac{dp(x)}{dx}, \\
 J_h(x) &= eN_h(x) \left[M_h E(x) - D_h \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{N_0(x)}{N_{-1}(x)} \right) \right], \\
 \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [p(x) - N_{-1}(x) + KN], \\
 \frac{dJ_p(x)}{dx} &= e[\beta N_0(x) - \alpha p(x)N_{-1}(x)], \\
 \frac{dJ_p(x)}{dx} + \frac{dJ_h(x)}{dx} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $p(x) = p + \delta p(x)$ – концентрация дырок в ν -зоне; p – концентрация дырок ν -зоны в равновесии (в отсутствие внешнего электрического поля и токов); $\delta p(x)$ – изменение концентрации дырок ν -зоны при отклонении системы от равновесия; $N_h(x) = N_0(x)N_{-1}(x)/N$ – концентрация прыгающих между акцепторами дырок; $N_{-1}(x) = N_{-1} + \delta N_{-1}(x)$, $N_0(x) = N_0 + \delta N_0(x)$ – неравновесные концентрации акцепторов в зарядовых состояниях (-1) , (0) ; N_0 и N_{-1} – концентрации акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) в равновесии; $\delta N_0(x)$ и $\delta N_{-1}(x) = -\delta N_0(x)$ – изменения концентраций акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) в неравновесных условиях; $dN_0(x)/dx = -dN_{-1}(x)/dx$; $E(x)$ – напряженность внешнего электрического поля в кристалле; x – координата, вдоль оси которой направлен вектор напряженности внешнего электрического поля; $J_p(x)$ – плотность тока дырок ν -зоны с дрейфовой подвижностью μ_p и коэффициентом диффузии D_p ; $J_h(x)$ – плотность прыжкового тока дырок по акцепторам с дрейфовой подвижностью M_h и коэффициентом диффузии D_h ; α – коэффициент захвата дырки ν -зоны на акцептор в зарядовом состоянии (-1) ; $\beta = \alpha p N_{-1}/N_0$ – коэффициент выброса дырки с электрически нейтрального акцептора в ν -зону под действием тепловых колебаний атомов и равновесного электромагнитного излучения.

В работах [12, 13, 16] показано, что отношения коэффициентов диффузии дырок ν -зоны D_p и дырок, прыгающих по акцепторам, D_h к их дрейфовым подвижностям суть соотношения Нернста – Таунсенда – Эйнштейна – Смолуховского:

$$D_p/\mu_p = \xi_p k_B T/e; \quad D_h/M_h = \xi_h k_B T/e, \quad (3)$$

где $k_B T$ – тепловая энергия. Безразмерные параметры $\xi_p \geq 1$ и $\xi_h \geq 1$ характеризуют влияние флуктуаций электростатического потенциала в кристалле на состояния дырок [6]. (Здесь отметим, что $\xi_p = \xi_h = 1$ при $(W_p + W_a) \ll k_B T$, т. е. когда сумма среднеквадратичных флуктуаций уровней энергии акцепторов W_a и потенциальной энергии дырок ν -зоны W_p много меньше тепловой энергии; см. рисунок.)

Отклонение системы от состояния термодинамического равновесия определяется величинами $\delta N_{-1}(x) \ll N_{-1}$, $\delta N_0(x) \ll N_0$, $\delta p(x) \ll p$; $E(x)$, $J_p(x)$ и $J_h(x)$.

Решение линеаризованной системы уравнений. Линеаризуем систему (2) вблизи равновесного состояния. При этом все члены выше первого порядка, например $\delta p(x)\delta N_{-1}(x)$, $\delta N_0(x)E(x)$, $\delta N_{-1}(x)E(x)$, $\delta p(x)E(x)$, отбрасываются. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} J_p(x) &= e p \mu_p E(x) - e D_p \frac{d[\delta p(x)]}{dx}, \\ J_h(x) &= e N_h M_h E(x) + e D_h \frac{d[\delta N_{-1}(x)]}{dx}, \\ \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [\delta p(x) - \delta N_{-1}(x)], \\ \frac{dJ_p(x)}{dx} &= -e \alpha N_{-1} \delta p(x) - e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x), \\ \frac{dJ_h(x)}{dx} &= -\frac{dJ_p(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma_p = e p \mu_p$ – удельная электрическая проводимость дырок ν -зоны; $\sigma_h = e N_h M_h = e N_0 N_{-1} M_h / N$ – удельная электрическая проводимость мигрирующих по акцепторам дырок; $\delta N_{-1}(x) = -\delta N_0(x)$, так как $N_0(x) + N_{-1}(x) = N = \text{const}$.

В первых двух уравнениях системы (4) перенесем градиенты концентраций в левую часть и выразим отношения коэффициентов диффузии к подвижностям через соотношения (3). Получаем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\delta p(x)]}{dx} &= \frac{e}{\xi_p k_B T} p E(x) - \frac{J_p(x)}{e D_p}, \\
 \frac{d[\delta N_{-1}(x)]}{dx} &= -\frac{e}{\xi_h k_B T} N_h E(x) + \frac{J_h(x)}{e D_h}, \\
 \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [\delta p(x) - \delta N_{-1}(x)], \\
 \frac{dJ_p(x)}{dx} &= -e \alpha N_{-1} \delta p(x) - e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x), \\
 \frac{dJ_h(x)}{dx} &= e \alpha N_{-1} \delta p(x) + e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

В линеаризованной системе уравнений (5) сделаем замену переменных:

$$y_1 = \xi_p \delta p(x)/p, \quad y_2 = \xi_h \delta N_{-1}(x)/N_h, \quad y_3 = e E(x)/k_B T, \quad y_4 = \xi_p J_p(x)/e D_p p, \quad y_5 = \xi_h J_h(x)/e D_h N_h.
 \tag{6}$$

В обозначениях (6) система (5) из пяти уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= y_3 - y_4, & \frac{dy_2}{dx} &= -y_3 + y_5, \\
 \frac{dy_3}{dx} &= \frac{e^2 p}{\xi_p \varepsilon k_B T} y_1 - \frac{e^2 N_h}{\xi_h \varepsilon k_B T} y_2, \\
 \frac{dy_4}{dx} &= -\frac{\alpha N_{-1}}{D_p} y_1 - \frac{\xi_p \alpha N_{-1}}{\xi_h D_p} y_2, \\
 \frac{dy_5}{dx} &= \frac{\xi_h \alpha p N_{-1}}{\xi_p D_h N_h} y_1 + \frac{\alpha p N_{-1}}{D_h N_h} y_2.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Запишем линейную систему (7) в матричном виде:

$$\frac{dy}{dx} = Ay,
 \tag{8}$$

где элементы вектора y и матрицы A обозначены так:

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \\ y_5(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= e^2 p / \xi_p \varepsilon k_B T, & a_{32} &= -e^2 N_h / \xi_h \varepsilon k_B T, & a_{41} &= -\alpha N_{-1} / D_p, \\
 a_{42} &= -\xi_p \alpha N_{-1} / \xi_h D_p, & a_{51} &= \xi_h \alpha p N_{-1} / \xi_p D_h N_h, & a_{52} &= \alpha p N_{-1} / D_h N_h.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Согласно [17], решение системы (8) определяется решением характеристического уравнения на собственные значения $\det[A - \lambda \mathbf{1}] = 0$, которое для матрицы A из (9) имеет вид

$$\lambda^5 - b\lambda^3 + (d/4)\lambda = 0,
 \tag{10}$$

где $b = a_{31} - a_{32} - a_{41} + a_{52}$, $d = 4[a_{32}(a_{41} - a_{51}) - a_{42}(a_{31} - a_{51}) + a_{52}(a_{31} - a_{41})]$.

Уравнение (10) имеет следующие корни (собственные значения):

$$\lambda_1 = 0, \quad -\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}, \quad -\lambda_4 = \lambda_5 = \frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Рассмотрим порознь два случая: 1) все собственные значения матрицы A различны; 2) среди собственных значений матрицы A имеются кратные (т. е. равные между собой).

1) Найдем решение линеаризованной системы уравнений (7), когда нет кратных собственных значений, т. е. все собственные значения попарно различны. Это эквивалентно выполнению условий: $b^2 \neq d$, $b \neq 0$ и $d \neq 0$. Тогда общее решение системы (7) имеет вид [17]

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{e}_1 + C_2 \mathbf{e}_2 \exp(-\lambda_3 x) + C_3 \mathbf{e}_3 \exp(\lambda_3 x) + C_4 \mathbf{e}_4 \exp(-\lambda_5 x) + C_5 \mathbf{e}_5 \exp(\lambda_5 x), \quad (12)$$

где $\lambda_3 = \{[b + (b^2 - d)^{1/2}]/2\}^{1/2} > 0$, $\lambda_5 = \{[b - (b^2 - d)^{1/2}]/2\}^{1/2} > 0$ определены по (11), \mathbf{e}_i – собственный вектор (для собственного значения λ_i);

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -B_2 \lambda_3 \\ -(\lambda_3^2 - B_1) \lambda_3 \\ a_{32} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_3^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} B_2 \lambda_3 \\ (\lambda_3^2 - B_1) \lambda_3 \\ a_{32} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_3^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} -B_2 \lambda_5 \\ -(\lambda_5^2 - B_1) \lambda_5 \\ a_{32} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_5^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} B_2 \lambda_5 \\ (\lambda_5^2 - B_1) \lambda_5 \\ a_{32} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_5^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$B_1 = a_{31} - a_{41}, \quad B_2 = a_{32} - a_{42}, \quad B_3 = a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41}, \quad B_4 = a_{32} - a_{52}.$$

Граничные условия определяют коэффициенты C_1, \dots, C_5 общего решения (12) системы дифференциальных уравнений (7). Например, пусть на границах полупроводникового образца по оси x расположены два плоских металлических электрода (контакта). Электроды могут служить как обкладками заряженного плоского электрического конденсатора, между которыми размещен образец без возбуждения в нем тока, так и омическими контактами к образцу для возбуждения в нем стационарного электрического тока.

Следуя работе [18], выразим собственные значения λ_i по (11) через длину экранирования Λ_s электрического поля и длину диффузии Λ_d дырок (как свободных, так и прыгающих от акцептора к акцептору) в виде

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2} \pm [(\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2})^2 - 4 \Lambda_s^{-2} \Lambda_d^{-2} Y_s Y_d]^{1/2} \}^{1/2}, \quad i = 2, \dots, 5, \quad (14)$$

где введены обозначения: $Y_s = (p + N_h)/(\tilde{p} + \tilde{N}_h)$; $Y_d = (\tilde{p} D_p + \tilde{N}_h D_h)/(p D_p + N_h D_h)$; $\tilde{p} = p/\xi_p$; $\tilde{N}_h = N_h/\xi_h$; $Y_s \geq 1$; $0 < Y_d \leq 1$; $Y_s Y_d > 0$; $\xi_p \geq 1$, $\xi_h \geq 1$. Отметим, что при $\xi_p = \xi_h = \xi$ произведение $Y_s Y_d = 1$, и тогда собственные значения $-\lambda_2 = \lambda_3 = \Lambda_s^{-1}$, $-\lambda_4 = \lambda_5 = \Lambda_d^{-1}$, что согласуется с результатами работы [11].

Сравнивая (11) и (14), устанавливаем, что

$$b = \Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2}; \quad d = 4 \Lambda_s^{-2} \Lambda_d^{-2} Y_s Y_d. \quad (15)$$

Длина экранирования Λ_s и длина диффузии Λ_d определяются по (15) с учетом (9) и (11) так:

$$\Lambda_s = (a_{31} - a_{32})^{-1/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{e^2(\tilde{p} + \tilde{N}_h)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{e^2[(p/\xi_p) + (N_h/\xi_h)]}}, \quad (16)$$

$$\Lambda_d = (a_{52} - a_{41})^{-1/2} = \sqrt{\frac{N_0 D_p D_h}{\alpha N(p D_p + N_h D_h)}}. \quad (17)$$

Здесь отметим, что формула (16) была получена в работе [12], исходя только из уравнения Пуассона [см. третье уравнение в системе уравнений (2)]. Там же отмечено, что коэффициент $\xi_p = e D_p / \mu_p k_B T \geq 1$ показывает, насколько отношение коэффициента диффузии к дрейфовой подвижности для свободных дырок превышает классическое значение $k_B T / e$. Физический смысл величины $\xi_h = e D_h / M_h k_B T \geq 1$ при реализации только прыжковой электропроводности (для температуры $T < T_j$) впервые определен в работе [13]. Величину $(p/\xi_p) + (N_h/\xi_h) = \tilde{p} + \tilde{N}_h$ в рамках теории Дебая – Хюккеля [19] можно трактовать как полную концентрацию подвижных дырок, участвующих в экранировании внешнего электростатического поля.

Сосуществование в полупроводнике токов J_p и J_h приводит к общему коэффициенту биполярной диффузии свободных дырок по состояниям ν -зоны и прыгающих по акцепторам дырок (ср. с биполярной диффузией электронно-дырочных пар, генерируемых светом на поверхности, в глубь полупроводника [20, 21]). Определим коэффициент биполярной диффузии так:

$$D_j = \frac{D_p D_h (p + N_h)}{p D_p + N_h D_h}. \quad (18)$$

Исходя из (17) и (18), определяем среднее время биполярной диффузионной рекомбинации дырок ν -зоны с отрицательно заряженными акцепторами:

$$\tau_d = \frac{\Lambda_d^2}{D_j} = \frac{N_h}{\alpha N_{-1}(p + N_h)}, \quad (19)$$

где $p + KN = N_{-1}$; $N_h = N_0 N_{-1} / N$; $N = N_0 + N_{-1}$.

Из формулы (19) при $p \ll N_h$ следует известное выражение для времени жизни дырки ν -зоны по отношению к захвату ее на отрицательно заряженный акцептор: $\tau_d \rightarrow 1/\alpha N_{-1}$ (см., напр., [22, 23]). При $p \gg N_h$ из (19) следует: $\tau_d \rightarrow N_h / \alpha p N_{-1}$. Для $N_h \approx N_0$ (при $N_{-1} \approx N$ и $N_0 \ll N_{-1}$) имеем $\tau_d \rightarrow 1/\beta$, что можно трактовать как время жизни акцептора в зарядовом состоянии (0) по отношению к выбросу с него дырки в ν -зону [24]. При максимально возможном значении концентрации прыгающих дырок $N_h = N/4$ (когда $N_{-1} = N_0 = N/2$) время жизни $\tau_d \rightarrow 1/2\alpha p$. Отметим, что из формулы (17) видно, что прыжки дырок по акцепторам уменьшают длину диффузии дырок Λ_d .

Среднее время биполярной дрейфовой релаксации есть $\tau_s = \Lambda_s^2 / D_j$, где Λ_s и D_j определяются по (16) и (18) соответственно. Отношение τ_d / τ_s определяет реакцию полупроводника p -типа на внешнее постоянное электрическое поле [25]: релаксационного (при $\tau_s > \tau_d$) или рекомбинационного (при $\tau_d > \tau_s$) типа.

2) Найдем решение линеаризованной системы уравнений (7), когда есть кратные собственные значения, т. е. когда некоторые (или все) собственные значения равны между собой.

Из (11) при $b^2 = d \neq 0$ следует, что имеются один однократный корень $\lambda_1 = 0$ и два корня кратности два: $\lambda_2 = \lambda_4 = -\sqrt{b/2}$; $\lambda_3 = \lambda_5 = \sqrt{b/2}$.

Собственный вектор \mathbf{e}_1 для $\lambda_1 = 0$ есть решение системы $(A - \lambda_1 \mathbf{1})\mathbf{e}_1 = A\mathbf{e}_1 = 0$ (для компактности здесь и далее матрицы-столбцы \mathbf{e}_i вида (5×1) представлены как матрицы-строки \mathbf{e}_i^T вида (1×5)):

$$\mathbf{e}_1^T = (0, 0, 1, 1, 1).$$

Собственный вектор \mathbf{e}_2 для $\lambda_2 = -\sqrt{b/2}$ определяется системой уравнений $(A - \lambda_2 \mathbf{1})\mathbf{e}_2 = 0$ и имеет вид

$$\mathbf{e}_2^T = (-B_2\lambda_2, -\lambda_2(\lambda_2^2 - B_1), -(a_{32}\lambda_2^2 - B_3), -(a_{42}\lambda_2^2 - B_3), \lambda_2^4 - a_{52}\lambda_2^2 + B_3).$$

Присоединенный вектор \mathbf{e}_4 для λ_2 находим из системы $(A - \lambda_2 \mathbf{1})\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_4^T = (0, -2\lambda_2^2, -(a_{32}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2, -(a_{42}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2, -(\lambda_2^4 + a_{52}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2).$$

Решая систему уравнений $(A - \lambda_3 \mathbf{1})\mathbf{e}_3 = 0$ для собственного значения $\lambda_3 = \sqrt{b/2}$, находим его собственный вектор:

$$\mathbf{e}_3^T = (B_2\lambda_3, \lambda_3(\lambda_3^2 - B_1), a_{32}\lambda_3^2 - B_3, a_{42}\lambda_3^2 - B_3, -\lambda_3^4 + a_{52}\lambda_3^2 - B_3).$$

Аналогично из системы $(A - \lambda_3 \mathbf{1})\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_3$ вычисляем один из присоединенных векторов для собственного значения λ_3 :

$$\mathbf{e}_5^T = (0, 2\lambda_3^2, (a_{32}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3, (a_{42}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3, (\lambda_3^4 + a_{52}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3).$$

Итак, при $b^2 = d \neq 0$ общее решение системы (8) имеет вид

$$y = C_1 \mathbf{e}_1 + (C_2 \mathbf{e}_2 + C_4 x \mathbf{e}_4) \exp(-\lambda_2 x) + (C_3 \mathbf{e}_3 + C_5 x \mathbf{e}_5) \exp(\lambda_3 x).$$

Отметим, что выполнение условия $b^2 = d \neq 0$ дает, согласно (15), связь между длиной экранирования и длиной диффузии: $(\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2})^2 = 4\Lambda_s^{-2}\Lambda_d^{-2}Y_s Y_d$. Откуда находим соотношение:

$$(\Lambda_s/\Lambda_d)^2 = (\Lambda_d/\Lambda_s)^2 = 2Y_s Y_d - 1 \pm 2\sqrt{Y_s^2 Y_d^2 - Y_s Y_d},$$

где $Y_s Y_d = D_j(\tilde{p}D_p + \tilde{N}_h D_h) / [D_p D_h(\tilde{p} + \tilde{N}_h)]$; имеют место равенства $\Lambda_s = \Lambda_d$; $\tau_s = \tau_d$; $Y_s Y_d = 1$.

Наконец заметим, что кратные корни (собственные значения) λ математически возможны еще в двух случаях ($b^2 \neq 0, d = 0$ и $b^2 = d = 0$). Но поскольку длины экранирования Λ_s и диффузии Λ_d по физическому смыслу задачи не могут быть бесконечно большими, то из (15) следует, что $b \neq 0$ и $d \neq 0$.

Заключение. Рассмотрена стационарная диффузионно-дрейфовая модель зонной миграции свободных дырок (дырок v -зоны) и прыжковой миграции зарядовых состояний водородоподобных акцепторов (посредством перехода дырки от акцептора в зарядовом состоянии (0) на акцептор в зарядовом состоянии (-1)) в полупроводнике p -типа. Записана система дифференциальных уравнений для тока дырок v -зоны и тока прыжковой миграции дырок по акцепторам, уравнения Пуассона и уравнений непрерывности для этих токов. В линейном приближении впервые получены явные решения этой системы и найдены аналитические выражения для длины экранирования электростатического поля и длины диффузии дырок при сосуществовании зонной (по состояниям v -зоны) и прыжковой их миграции при постоянной температуре в отсутствие внешнего фотовозбуждения полупроводникового кристалла. Получены формулы для стационарного времени жизни дырки v -зоны относительно ее захвата на акцептор в зарядовом состоянии (-1) и времени жизни электрически нейтрального акцептора относительно выброса с него дырки в v -зону. В предельных случаях эти формулы переходят в известные.

Благодарности. Работа поддержана программой «Физматтех» Республики Беларусь, Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф19РМ-054), а также Рамочной программой Европейского союза по развитию научных исследований и технологий Horizon 2020 (грант № H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Acknowledgements. The work was supported by the Belarusian National Research Programme “Fizmattekh”, the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. Ф19РМ-054), and by the European Union Framework Programme for Research and Innovation Horizon 2020 (Grant No. H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A diamond-based electrode for detection of neurochemicals in the human brain / K. E. Bennet [et al.] // *Front. Hum. Neurosci.* – 2016. – Vol. 10. – P. 102 (12 pp.). <https://doi.org/10.3389/fnhum.2016.00102>
2. Recent developments and advances in boron-doped diamond electrodes for electrochemical oxidation of organic pollutants / Y. He [et al.] // *Sep. Purif. Technol.* – 2019. – Vol. 212. – P. 802–821. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.11.056>
3. Шлимак, И. С. Нейтронное трансмутационное легирование полупроводников: наука и приложения / И. С. Шлимак // *Физика твердого тела.* – 1999. – Т. 41, № 5. – С. 794–798.
4. Ng, K. K. Complete guide to semiconductor devices / K. K. Ng. – New York: Wiley, 2002. – xxiv+740 p. <https://doi.org/10.1002/9781118014769>
5. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2011. – Vol. 110, № 12. – P. 123702 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
6. Ionization equilibrium at the transition from valence-band to acceptor-band migration of holes in boron-doped diamond / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2016. – Vol. 119, № 24. – P. 245701 (10 p.). <https://doi.org/10.1063/1.4954281>
7. Васильев, Б. В. Теорема вириала и некоторые свойства электронного газа в металлах / Б. В. Васильев, В. Л. Любошиц // *Успехи физ. наук.* – 1994. – Т. 164, № 4. – С. 367–374. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0164.199404f.0367>
8. Borst, T. H. Boron-doped homoepitaxial diamond layers: Fabrication, characterization, and electronic applications / T. H. Borst, O. Weis // *Phys. Status Solidi A.* – 1996. – Vol. 154, № 1. – P. 423–444. <https://doi.org/10.1002/pssa.2211540130>
9. Metal-insulator transition and superconductivity in boron-doped diamond / T. Klein [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 75, № 16. – P. 165313 (7 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165313>
10. Zabrodskii, A. G. Coulomb gap and the metal–insulator transition / A. G. Zabrodskii, A. G. Andreev, S. V. Egorov // *Phys. Status Solidi B.* – 1998. – Vol. 205, № 1. – P. 61–68. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-3951\(199801\)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3951(199801)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S)
11. Поклонский, Н. А. Модель прыжковой и зонной фотопроводимости на постоянном токе в легированных кристаллах / Н. А. Поклонский, С. Ю. Лопатин // *Физика твердого тела.* – 2000. – Т. 42, № 2. – С. 218–223.
12. Поклонский, Н. А. Экранирование электростатического поля в ковалентных кристаллах с точечными дефектами / Н. А. Поклонский // *Изв. вузов. Физика.* – 1984. – Т. 27, № 11. – С. 41–43.
13. Poklonski, N. A. Screening of electrostatic fields in crystalline semiconductors by electrons hopping over defects / N. A. Poklonski, V. F. Stelmakh // *Phys. Status Solidi B.* – 1983. – Vol. 117, № 1. – P. 93–99. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221170109>
14. Seeger, K. Semiconductor physics. An introduction / K. Seeger. – Berlin: Springer, 2004. – x+537 p.
15. Ансельм, А. И. Введение в теорию полупроводников / А. И. Ансельм. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
16. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Phys. Commun.* – 2018. – Vol. 2, № 1. – P. 015013 (14 p.). <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa8e26>
17. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
18. Поклонский, Н. А. Дрейф и диффузия электронов по двухуровневым (трехзарядным) точечным дефектам в кристаллических полупроводниках / Н. А. Поклонский, А. И. Ковалев, С. А. Вырко // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 37–43.
19. Дебай, П. К теории электролитов / П. Дебай, Э. Хюккель // *Избр. тр. / П. Дебай.* – Л.: Наука, 1987. – С. 163–202.
20. Грундман, М. Основы физики полупроводников. Нанопизика и технические приложения / М. Грундман. – М.: Физматлит, 2012. – 778 с.
21. Киреев, П. С. Физика полупроводников / П. С. Киреев. – М.: Высш. шк., 1975. – 584 с.
22. Смит, Р. Полупроводники / Р. Смит. – М.: Мир, 1982. – 560 с.
23. Hamaguchi, C. Basic semiconductor physics / C. Hamaguchi. – Berlin: Springer, 2017. – xxii+710 p.
24. Абакумов, В. Н. Безызлучательная рекомбинация в полупроводниках / В. Н. Абакумов, В. И. Перель, И. Н. Ясиевич. – СПб.: Петерб. ин-т ядерной физики им. Б. П. Константинова РАН, 1997. – 376 с.
25. Manificier, J. C. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors / J. C. Manificier, H. K. Henisch // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1980. – Vol. 41, № 11. – P. 1285–1288. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(80\)90166-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(80)90166-3)

References

1. Bennet K. E., Tomshine J. R., Min H.-K., Manciu F. S., Marsh M. P., Paek S. B., Settell M. L., Nicolai E. N., Blaha C. D., Kouzani A. Z., Chang S.-Y., Lee K. H. A diamond-based electrode for detection of neurochemicals in the human brain. *Frontiers in Human Neuroscience*, 2016, vol. 10, pp. 102 (1–12). <https://doi.org/10.3389/fnhum.2016.00102>
2. He Y., Lin H., Guo Z., Zhang W., Li H., Huang W. Recent developments and advances in boron-doped diamond electrodes for electrochemical oxidation of organic pollutants. *Separation and Purification Technology*, 2019, vol. 212, pp. 802–821. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.11.056>
3. Shlimak I. S. Neutron transmutation doping in semiconductors: Science and applications. *Physics of the Solid State*, 1999, vol. 41, no. 5, pp. 716–719. <https://doi.org/10.1134/1.1130856>
4. Ng K. K. *Complete Guide to Semiconductor Devices*. New York, Wiley, 2002. xxiv+740 p. <https://doi.org/10.1002/9781118014769>

5. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Zabrodski A. G. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 110, no. 12, pp. 123702 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
6. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Kovalev A. I., Zabrodski A. G. Ionization equilibrium at the transition from valence-band to acceptor-band migration of holes in boron-doped diamond. *Journal of Applied Physics*, 2016, vol. 119, no. 24, pp. 245701 (1–10). <https://doi.org/10.1063/1.4954281>
7. Vasil'ev B. V., Lyuboshits V. L. Virial theorem and some properties of the electron gas in metals. *Physics Uspekhi*, 1994, vol. 37, no. 4, pp. 345–351. <https://doi.org/10.1070/PU1994v037n04ABEH000018>
8. Borst T. H., Weis O. Boron-doped homoepitaxial diamond layers: Fabrication, characterization, and electronic applications. *Physica Status Solidi A*, 1996, vol. 154, no. 1, pp. 423–444. <https://doi.org/10.1002/pssa.2211540130>
9. Klein T., Achatz P., Kacmarcik J., Marcenat C., Gustafsson F., Marcus J., Bustarret E., Pernot J., Omnes F., Serneilius B. E., Persson C., Ferreira da Silva A., Cytermann C. Metal-insulator transition and superconductivity in boron-doped diamond. *Physical Review B*, 2007, vol. 75, no. 16, pp. 165313 (1–7). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165313>
10. Zabrodski A. G., Andreev A. G., Egorov S. V. Coulomb gap and the metal–insulator transition. *Physica Status Solidi B*, 1998, vol. 205, no. 1, pp. 61–68. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-3951\(199801\)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3951(199801)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S)
11. Poklonski N. A., Lopatin S. Yu. A model of hopping and band DC photoconduction in doped crystals. *Physics of the Solid State*, 2000, vol. 42, no. 2, pp. 224–229. <https://doi.org/10.1134/1.1131150>
12. Poklonski N. A. Screening of the electric field in covalent crystals containing point defects. *Soviet Physics Journal*, 1984, vol. 27, no. 11, pp. 945–947. <https://doi.org/10.1007/BF00902146>
13. Poklonski N. A., Stelmakh V. F. Screening of electrostatic fields in crystalline semiconductors by electrons hopping over defects. *Physica Status Solidi B*, 1983, vol. 117, no. 1, pp. 93–99. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221170109>
14. Seeger K. *Semiconductor Physics. An Introduction*. Berlin, Springer, 2004. x+537 p.
15. Anselm A. *Introduction to Semiconductor Theory*. Moscow, Mir Publ., 1981. x+646 p.
16. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Kovalev A. I., Dzeraviah A. N. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands. *Journal of Physics Communications*, 2018, vol. 2, no. 1, pp. 015013 (1–14). <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa8e26>
17. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. New York, Dover, 2000. xx+1130 p.
18. Poklonski N. A., Kovalev A. I., Vyrko S. A. Drift and diffusion of electrons via two-level (triple-charged) point defects in crystalline semiconductors. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 37–43 (in Russian).
19. Debye P., Hückel E. Zur theorie der elektrolyte. *Physikalische Zeitschrift*, 1923, vol. 24, no. 9, pp. 185–206 (in German).
20. Grundmann M. *The Physics of Semiconductors. An Introduction Including Nanophysics and Applications*. Berlin, Springer, 2016. xxxix+989 p.
21. Kireev P. S. *Semiconductor Physics*. Moscow, Mir Publ., 1978. 693 p.
22. Smith R. A. *Semiconductors*. Cambridge, Cambridge University Press, 1978. xvii+523 p.
23. Hamaguchi C. *Basic Semiconductor Physics*. Berlin, Springer, 2017. xxii+710 p.
24. Abakumov V. N., Perel V. I., Yassievich I. N. *Nonradiative Recombination in Semiconductors*. North Holland, Amsterdam, 1991. xvi+320 p.
25. Manificier J. C., Henisch H. K. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1980, vol. 41, no. 11, pp. 1285–1288. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(80\)90166-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(80)90166-3)

Информация об авторах

Поклонский Николай Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Деревяго Александр Николаевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: deralex@list.ru

Вырко Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyrko@bsu.by

Information about the authors

Nikolai A. Poklonski – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Aliaksandr N. Dzeraviah A. – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: deralex@list.ru

Sergey A. Vyrko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyrko@bsu.by