ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35

Поступила в редакцию 16.12.2019
Received 16.12.2019

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Как уже было доказано ранее (теорема Массеры) скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, т. е. таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения. Для разностных уравнений с дискретным временем сильная нерегулярность означает, что период уравнения является взаимно простым по отношению к периоду его решения. Известно, что в случае дискретных уравнений упомянутый результат полного аналога не имеет.

Цель настоящей работы – исследовать возможность реализации аналога теоремы Массеры для некоторых классов разностных уравнений. Для этого рассматривается класс линейных разностных уравнений. Доказано, что линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от постоянных.

Ключевые слова: периодические разностные линейные уравнения, периодические последовательности, сильно нерегулярные периодические решения

Для цитирования. Деменчук, А. К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного дискретного уравнения первого порядка / А. К. Деменчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 30–35. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON STRONGLY IRREGULAR PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENEOUS DISCRETE EQUATION OF THE FIRST ORDER

Abstract. As is proved earlier (the Massera theorem), the first-order scalar periodic ordinary differential equation does not have strongly irregular periodic solutions (solutions with a period incommensurable with the period of the equation). For difference equations with discrete time, strong irregularity means that the equation period and the period of its solution are relatively prime numbers. It is known that in the case of discrete equations, the mentioned result has no complete analog.

The purpose of this paper is to investigate the possibility of realizing an analog of the Massera theorem for certain classes of difference equations. To do this, we consider the class of linear difference equations. It is proved that a linear nonhomogeneous non-stationary periodic discrete equation of the first order does not have strongly irregular non-stationary periodic solutions.

Keywords: difference linear periodic equations, periodic sequences, strongly irregular periodic solutions

For citation. Demenchuk A. K. On strongly irregular periodic solutions of the linear nonhomogeneous discrete equation of the first order. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 30–35 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35

Введение. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел, $y=(y_n)=\big(y(n)\big)$, $n\in\mathbb{N}$ – скалярная функция (последовательность), определенная на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}$, т. е. $y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Множество таких последовательностей обозначим через S^1. Далее будем считать, что пустые суммы и произведения членов последовательности $\big(y(n)\big)$ равны соответственно 0 и 1, т. е. для $k\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{Z}$, $k>m$, имеем

$$\textstyle\sum_{j=k}^{m} y_j = 0,\quad \prod_{j=k}^{m} y_j = 1.$$

Определение 1. *Функция* $y \in S^1$ *называется периодической с периодом* $\omega \in \mathbb{N}$ (ω-*периодической*), *если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство* $y_{n+\omega} = y_n$.

Естественно, что период функции определяется не однозначно. Так, если число ω – период последовательности y, то по меньшей мере его кратные также будут периодами этой последовательности, т. е. для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем $y(n + m\omega) = y(n)$. Поэтому в дальнейшем под периодом последовательности, как правило, будем понимать ее так называемый основной (базисный) период [1, с. 1], т. е. наименьший из периодов этой последовательности. В частности, в таком случае всякая постоянная последовательность будет 1-периодической. Множество периодических последовательностей с наименьшим периодом ω обозначим через PS_ω^1.

Периодические последовательности при определенных условиях могут быть решениями дискретных (разностных) уравнений. Проблеме существования и построения периодических решений дискретных уравнений посвящено достаточно большое число работ [1–5] и др., где в основном изучались решения, период которых совпадает с периодом самого уравнения. Хотя полученные в этом направлении результаты во многом аналогичны соответствующим результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее в некоторых случаях имеются значительные различия. Отметим одно из них.

Как известно [6–11], системы обыкновенных периодических дифференциальных уравнений могут допускать периодические решения, период которых несоизмерим по отношению к периоду системы. Такие периодические решения названы сильно нерегулярными, а описываемые ими колебания – асинхронными. Асинхронные колебания реализуются в достаточно сложных технических устройствах [12–14] и др.

Однако Х. Масера показал [6], что нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных сильно нерегулярных периодических решений. Более того, Н. П. Еругиным в работе [8] было доказано, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений.

Представляется интересным исследовать подобные вопросы для дискретных уравнений. С этой целью рассмотрим уравнение

$$x_{n+1} = X(x_n, n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

правая часть которого является ω-периодической, т. е. существует такое наименьшее $\omega \in \mathbb{N}$, что для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $X(\alpha, n+\omega) = X(\alpha, n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее под периодом уравнения вида (1) будем понимать период его правой части.

По аналогии с терминологией для обыкновенных дифференциальных уравнений [7] введем

Определение 2. *Периодическое решение с периодом* Ω *уравнения* (1)*, такое что числа* ω *и* Ω *взаимно просты, будем называть сильно нерегулярным*.

В работе [15] показано, что при определенных условиях скалярное дискретное уравнение может допускать сильно нерегулярное периодическое решение. Действительно, пусть ω – произвольное нечетное число и $(h_n) \in PS_\omega^1$. Тогда дискретное скалярное ω-периодическое уравнение $x_{n+1} = -x_n - (1 - x_n^2)h_n$ будет иметь сильно нерегулярное периодическое решение $x_n = (-1)^n$ с наименьшим периодом $\Omega = 2$, который взаимно прост с числом ω.

Как видим, теорема Массеры [6] об отсутствии сильно нерегулярных периодических решений у скалярного обыкновенного уравнения для разностных уравнений, вообще говоря, полного аналога не имеет. В связи с этим возникает вопрос о возможности реализации аналога упомянутой теоремы для более узких классов уравнений вида (1). В этом направлении в работе [16] получен аналог теоремы Массеры для линейных однородных разностных уравнений первого порядка. Отметим, что отсутствие периодических решений у однородного линейного уравнения вовсе не исключает наличие таких решений у неоднородного уравнения.

Постановка задачи. Сформулируем вопрос: может ли линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение иметь сильно нерегулярные периодические решения, отличные от постоянных. Настоящее исследование посвящено выяснению этой проблемы.

Основной результат. Рассмотрим линейное неоднородное периодическое нестационарное дискретное уравнение первого порядка

$$x_{n+1} = a_n x_n + f_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in PS^1_\omega, \quad f \in PS^1_\omega, \tag{2}$$

где хотя бы одна из функций (a_n), (f_n) отлична от постоянной. Будем интересоваться сильно нерегулярными периодическими решениями уравнения (2). Приведем аналог теоремы Массеры для линейного неоднородного дискретного уравнения. Справедлива

Т е о р е м а. *Скалярное линейное неоднородное периодическое нестационарное дискретное уравнение* (2) *первого порядка не имеет нестационарных сильно нерегулярных периодических решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно укажем для неоднородного уравнения (2) выражение решения (x_n) через коэффициенты. Если при любом $j \in \mathbb{N}$ имеем $a_j \neq 0$, то решение уравнения (2) запишем в виде суммы его некоторого частного решения $x^{(nh)}$ и общего решения $x^{(h)}$ соответствующего однородного уравнения. Выпишем общее решение соответствующего уравнению (2) однородного уравнения

$$x_n^{(h)} = c\prod_{j=1}^{n-1} a_j, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $x_1^{(h)} = c$ – произвольная вещественная постоянная. Частное решение $x^{(nh)}$ неоднородного уравнения (2) на основе метода вариации произвольной постоянной будем искать в виде

$$x_n^{(nh)} = c(n)\prod_{j=1}^{n-1} a_j, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, подставляя частное решение в уравнение (2), получим равенства

$$c(n) - c(n-1) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j\right)^{-1} f_{n-1}, \quad c(n-1) - c(n-2) = \left(\prod_{j=1}^{n-2} a_j\right)^{-1} f_{n-2}, \ldots, c(2) - c(1) = (a_1)^{-1} f_1, \tag{4}$$

из которых находим

$$c(n) = c(1) + \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j\right)^{-1} f_{n-1} + \left(\prod_{j=1}^{n-2} a_j\right)^{-1} f_{n-2} + \ldots + (a_1)^{-1} f_1, \quad c(1) - \text{const}.$$

В итоге получим решение неоднородного уравнения (2)

$$x = x^{(nh)} + x^{(h)} = c\prod_{j=1}^{n-1} a_j + \left(c(1) + \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j\right)^{-1} f_{n-1} + \left(\prod_{j=1}^{n-2} a_j\right)^{-1} f_{n-1} + \ldots + f_1 \right)\prod_{j=1}^{n-1} a_j,$$

которое запишем в виде

$$x_n = c'\prod_{j=1}^{n-1} a_j + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \left(\prod_{s=j+1}^{n-1} a_s\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $c' = c + c(1)$ – произвольная вещественная постоянная.

В случае, когда среди коэффициентов a_j уравнения (2) имеются нулевые, можно также указать алгоритм непосредственного построения общего решения. Пусть $n_1 \le n_2 \le \ldots$ – неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что $a_{n_i} = 0$ и $a_n \neq 0$ для $n \neq n_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Отметим, что в силу ω-периодичности коэффициента a можно указать первые члены последовательности n_i из отрезка $[1, \omega]$. Тогда остальные ее члены получаются из указанных добавлением кратных периода ω.

Сначала находим

$$x_1 = c, x_2 = a_1 c + f_1, x_3 = a_2 a_1 c + a_2 f_1 + f_2, \ldots, x_{n_1} = c\prod_{j=1}^{n_1-1} a_j + \sum_{s=1}^{n_1-1} f_s \left(\prod_{j=s+1}^{n_1-1} a_j\right), \tag{6}$$

где c – произвольная вещественная постоянная. Заметим, что если $n_1 = 1$, то формула (6) принимает вид $x_1 = c$.

Далее, в предположении $n_i \neq n_{i+1} - 1$, находим x_{n+1} для $n \in [n_i, n_{i+1} - 1)$:

$$x_{n_i+1} = f_{n_i}, x_{n_i+2} = a_{n_i+1} f_{n_i} + f_{n_i+1}, x_{n_i+3} = a_{n_i+2} a_{n_i+1} f_{n_i} + a_{n_1+2} f_{n_i+1} + f_{n_i+2}, \ldots,$$

$$x_{n_{i+1}} = \sum_{s=1}^{n_{i+1}-n_i-1} f_{n_i+s} \left(\prod_{j=s+1}^{n_{i+1}-n_i-1} a_{n_i+j}\right), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Если для некоторых $l \in \mathbb{N}$ окажется, что $n_{l+1} - n_l = 1$, то полагаем

$$x_{n_{l+1}+1} = f_{n_{l+1}}. \tag{8}$$

В итоге формулы (6)–(8) будут давать решение неоднородного уравнения (2) в случае наличия среди коэффициентов a_n нулевых.

Допустим, что при некотором фиксированном значении $c' = c^*$ соотношения (5) либо (6)–(8) определяют отличную от постоянной Ω-периодическую функцию φ, т. е. уравнение (2) имеет Ω-периодическое решение

$$x = \varphi, \quad \varphi \in PS_\Omega^1. \tag{9}$$

Исследуем далее поведение правой части уравнения (2) вдоль этого решения, используя подход [6, 9]. Для этого возьмем произвольное $n_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку для любого натурального числа d найдутся такие целые числа k и m, $n_0 + m\Omega \geq 1$, что $d = k\omega + m\Omega$, то выполняется равенство

$$A = a_{n_0+d}\varphi_{n_0} + f_{n_0+d} = a_{n_0+k\omega+m\Omega}\varphi_{n_0} + f_{n_0+k\omega+m\Omega},$$

откуда в силу ω-периодичности функций a и f имеем

$$A = a_{n_0+m\Omega}\varphi_{n_0} + f_{n_0+m\Omega}.$$

Так как по предположению функция (6) является Ω-периодической, то $\varphi_{n_0} = \varphi_{n_0+m\Omega}$. Поэтому

$$A = a_{n_0+m\Omega}\varphi_{n_0+m\Omega} + f_{n_0+m\Omega}.$$

Функция φ удовлетворяет уравнению (2), в частности при $n = n_0 + m\Omega + 1$, а также в силу Ω-периодичности при $n = n_0 + 1$. Значит,

$$A = \varphi_{n_0+m\Omega+1} = \varphi_{n_0+1} = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0\Omega}.$$

Таким образом, при любом фиксированном $n_0 \in \mathbb{N}$ для произвольного $d \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$a_{n_0+d}\varphi_{n_0} + f_{n_0+d} = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0},$$

откуда в силу произвольности d следует, что

$$a_n\varphi_{n_0} + f_n = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0} = \text{const}. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что при всяком фиксированном значении φ_0 решения (9) правая часть уравнения (2) является постоянной, т. е. $a_n\varphi_0 + f_n = \text{const}$.

Согласно предположению последовательность (9) отлична от постоянной и имеет период Ω. Поэтому $\Omega \geq 2$. В таком случае по меньшей мере для некоторого $l \in \mathbb{N}$ найдутся натуральные числа $p_1, p_2 \in [l, l+\Omega-1]$, в которых функция (9) принимает различные значения, т. е. $\varphi_{p1} \neq \varphi_{p2}$. Это означает, что хотя бы одно из этих значений отлично от нуля. Пусть для определенности $\varphi_{p1} \neq 0$.

Как вытекает из равенства (10), вдоль значений φ_{p1}, φ_{p2} Ω-периодического решения (9), т. е. при $\varphi = \varphi_{p1}$ и $\varphi = \varphi_{p2}$, правая часть уравнения (2) будет постоянной

$$a_n\varphi_{p1} + f_n = \alpha_1, \quad a_n\varphi_{p2} + f_n = \alpha_2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где α_1, α_2 – некоторые вещественные постоянные. Из системы (11) находим

$$a_n(\varphi_{p1} - \varphi_{p2}) = \alpha_1 - \alpha_2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку $\varphi_{p1} \neq \varphi_{p2}$, то

$$a_n = (\alpha_1 - \alpha_2)/(\varphi_{n1} - \varphi_{n2}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность (a_n) является постоянной. Тогда из системы (11) получаем, что

$$f_n = (-\alpha_1\varphi_{n2} + \alpha_2\varphi_{n1})/(\varphi_{n1} - \varphi_{n2}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность (f_n) также является постоянной.

Последние два факта вступают в противоречие с предположением о непостоянстве одной из функций a либо φ. Значит, решение (9) системы (2) не может иметь период Ω. Теорема доказана

Замечание. В формулировке теоремы требование нестационарности уравнения (2) существенно. Действительно, стационарное уравнение $x_{n+1} = -x_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$ имеет 2-периодическое решение $x_1 = c$, $x_2 = -c + 1$, $x_3 = c$, $x_4 = -c + 1, \ldots$.

Заключение. Для линейного неоднородного нестационарного периодического дискретного уравнения первого порядка имеет место аналог теоремы Массеры об отсутствии у скалярного периодического обыкновенного дифференциального уравнения периодических решений таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований НАН Беларуси «Исследование свойств спектров дискретных систем при возмущениях их коэффициентов».

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Special Project of Fundamental and Applied Scientific Research of the National Academy of Sciences of Belarus "Investigation of the properties of the spectra of discrete systems under perturbations of their coefficients".

Список использованных источников

1. Popenda, J. The oscillation of solution of difference equations / J. Popenda // Comput. Math. Appl. – 1994. – Vol. 28, № 1/3. – P. 271–279. https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00115-4

2. Agarwal, R. P. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations / R. F. Agarwal, J. Popenda // Math. Comput. Modelling. – 1995. – Vol. 22, № 1. – P. 11–19. https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k

3. Agarwal, R. P. Advanced Topics in Difference Equations / R. P. Agarwal, P. J. Y. Wong. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 1997. – 509 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8899-7

4. Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations / S. Elaydi. – New York: Springer, 1999. – 568 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3110-1

5. Janglajew, K. R Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations / K. R. Janglajew, E. L. Schmeidel // Adv. Differ. Equ. Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol. 2012, № 1. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195

6. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.

7. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. мат. журн. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

8. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.

9. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.

10. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrucken: Lambert Academic Publ., 2012. – 186 с.

11. Борухов, В. Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решений с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В. Т. Борухов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 585–591.

12. Papaleksi, N. D. On a particular case of parametrically coupled systems / N. D. Papaleksi // J. Phys. – 1939. – Vol. 1, № 5/6. – P. 373–379.

13. Пеннер, Д. И. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия / Д. И. Пеннер, Я. Б. Дубошинский, Д. Б. Дубошинский // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1065–1066.

14. Ланда, П. С. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии / П. С. Ланда, Я. Б. Дубошинский // Успехи физ. наук. – 1989. – Т. 158, вып. 4. – С. 729–742.

15. Ласунский, А. В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А. В. Ласунский // Тр. Карел. науч. центра РАН. – 2012. – № 5. – С. 44–48.

16. Деменчук, А. К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного однородного дискретного уравнения первого порядка / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 263–267. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267

References

1. Popenda J. The oscillation of solution of difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 1994, vol. 28, no. 1–3, pp. 271–279. https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00115-4

2. Agarwal R. P., Popenda J. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 1995, vol. 22, no. 1, pp. 11–19. https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k

3. Agarwal R. P., Wong P. J. Y. *Advanced Topics in Difference Equations*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publ., 1997. 509 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8899-7

4. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*. New York, Springer, 1999. 568 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3110-1

5. Janglajew K., Schmeidel E. L. R Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2012, vol, 20012, no. 1. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195

6. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

7. Kurzweil J., Veivoda O. On periodic and almost periodic solutions of the ordinary differential systems. *Chekhoslovatskii matematicheskii zhurnal = Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).

8. Erugin N. P. *Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients*. Minsk, Publishing House of the Academy of Sciences of the BSSR, 1963. 272 p. (in Russian).

9. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurable periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

10. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrucken, LAP Lambert Academic Publ., 2012. 186 p. (in Russian).

11. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces of nonautonomous linear periodic systems and their solutions with a period incommensurate with the period of the system. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 578–585. https://doi.org/10.1134/s0012266118050026

12. Papaleksi N. D. On a particular case of parametrically coupled systems. *Journal of Physics*, 1939, vol. 1, no. 5–6, pp. 373–379.

13. Penner D. I. Oscillations with a self-regulating interaction time. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066 (in Russian).

14. Landa P. S., Duboshinskiĭ Ya. B. Self-oscillating systems with high-frequency power sources. *Soviet Physics Uspekhi,* 1989, vol. 32, no. 8, pp. 723–731. https://doi.org/10.1070/pu1989v032n08abeh002750

15. Lasunskii A. V. On the period of solutions of the discrete periodic logistic equation. *Trudy Karelskogo nauchnogo centra RAN = Transactions of Karelian research centre of Russian Academy of Science*, 2012, no. 5, pp. 44–48 (in Russian).

16. Demenchuk A. K. Strongly irregular periodic solutions the first-order linear homogeneous discrete equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 263–267 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Information about the author

Aleksandr K. Demenchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Chief Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganova Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by