Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2015

Maria Elisabete Gomes de Oliveira Amaral

Isometrias – Uma abordagem interdisciplinar no 8º ano de escolaridade

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2015

Maria Elisabete Gomes de Oliveira Amaral

Isometrias – Uma abordagem interdisciplinar no 8º ano de escolaridade

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didática – especialização em Matemática para professores do 3º CEB/Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Isabel Cabrita, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar Da Universidade de Aveiro

Doutora Sónia Isabel Vieira Mortágua Pais de Aquino
Professora Adjunta do Instituto Politécnico de Leiria

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar Da Universidade de Aveiro

agradecimentos

aos alunos que tornaram este trabalho possível

à minha orientadora, Doutora Isabel Cabrita, pela constante disponibilidade, pela sua compreensão nos meus momentos de silêncio e distância, pelo apoio constante com que me orientou nesta tarefa, pelas questões pertinentes e pelas reflexões sugeridas que me ajudaram, incentivaram a seguir e, tornaram possível a concretização deste trabalho.

palavras-chave isometrias; GeoGebra; interdisciplinaridade; criatividade; gestão curricular.

resumo

A sociedade atual requer indivíduos preparados para apresentar soluções inovadoras aos problemas encontrados nas mais variadas situações, sendo a criatividade considerada, na última década, uma competência essencial para o progresso. Neste contexto, emerge a necessidade da escola fomentar o seu desenvolvimento em qualquer área, e em particular, na Matemática. Por outro lado, não será alheio a este facto a promoção de um ensino, também ele, criativo. Tal ensino exige desde logo uma original, fluente e flexível gestão curricular envolvendo uma adequada seleção e ou (re) criação de tarefas relevantes, criteriosamente sequenciadas e autonomamente resolvidas pelos alunos, numa lógica de interdisciplinaridade e com recurso a tecnologia. No caso especifico das transformações geométricas isométricas, uma abordagem interdisciplinar reforçada com o recurso a ambientes de geometria dinâmica poderá constituir uma mais-valia nesse processo. Assim, desenvolveu-se este estudo, com o objetivo de avaliar o impacto de uma abordagem interdisciplinar, potenciada com o GeoGebra, no desenvolvimento de competências geométricas relacionadas com as isometrias, frisos e rosáceas, e em simultâneo, no desenvolvimento da criatividade e representações da mesma, de alunos do oitavo ano de escolaridade. Para isso desenvolveu-se um estudo de caso, centrado em três pares de alunos, que resolveram um conjunto de tarefas de natureza exploratória, com recurso ao GeoGebra e envolvendo a disciplina de Educação Visual. A análise dos dados recolhidos foi, essencialmente, de natureza qualitativa, tendo sido a observação, a inquirição e a análise documental,as principais técnicas de recolha de dados. A análise de conteúdo a que foram submetidos os dados, permitiu concluir que a implementação de uma abordagem interdisciplinar, centrada numa sequência de tarefas e aliada ao GeoGebra, potenciou a apropriação dos conhecimentos geométricos em causa e a sua aplicação. Contribuiu, também, para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à matemática e à geometria em particular. Por outro lado, os dados sugerem que tal abordagem permite obter indícios do desenvolvimento da criatividade nos alunos e de alterações a algumas das suas representações.

keywords isometries, GeoGebra, interdisciplinarity, creativity, curricular management.

abstract

Modern society requires a panel of trained individuals capable of presenting and sharing innovative solutions to problems encountered in different situations. In the last decade, creativity has been faced as an essential skill for progress. In this context, there is the need of improving school intervention in any area and, in particular, in mathematics. On the other hand, this fact is associated to the promotion of a creative learning. In the last decade, the world has coming to assist to a demand of creativity, because it is understood to be the best way to achieve progress and this is also applied in the area of education. Thus, not least is the action of promoting a creative education and training. Such system of education requires, first of all, a fluent, flexible and natural curriculum management, involving an appropriate selection and or re()creation of relevant tasks, sequenced accurately and solved autonomously by students, held with the aim of facilitating interdisciplinarity, by resorting to technology. In the specific case of isometric geometric transformations, an interdisciplinary approach enhanced with the use of dynamic geometry environments, can bring added value to this process. Thus, this study was carried out in order to evaluate the impact of a interdisciplinary approach, greatly backed up through GeoGebra, in the development of geometric skills, related to isometries, friezes and rosettes, as well as the development of creativity and the representations performed by students of the eighth grade. For this study, we developed a case study focused on three pairs of students who solved a set of exploratory tasks, using the GeoGebra and involving the course of Arts Education. An analysis of qualitative data was collected and the main data collection techniques, used during this process, were observation, inquiry and document analysis. On one hand, the content analysis, in which data were submitted, concluded that the implementation of an interdisciplinary approach to entry into a sequence of tasks and coupled with GeoGebra, potentiated the appropriation of geometric knowledge in question, as well as its application. Furthermore, it contributed to develop favourable attitudes toward mathematics and, particularly, in geometry. On the other hand, the data suggest that this approach allows to obtain indications about the development of creativity in students and changes to some of its representations

INDÍCE GERAL

INDÍCE DE FIGURAS

Fig. 139 – Comparação do friso 3 com o friso 8 pelo par Alexandre e Diogo 170

INDÍCE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

1. Problemática do estudo

Com a globalização e o desenvolvimento tecnológico, a sociedade tem sofrido grandes mudanças, levando o indivíduo a procurar novas formas de pensar e de agir. Face à quantidade de informação disponibilizada, são requeridas novas habilidades e competências que capacitem o indivíduo para as exigências de um mundo em constante transformação. No padrão de vida atual, a capacidade de construir novos conceitos, avaliar novas situações e lidar com o inesperado torna-se a habilidade mais importante (Morelatti, 2001; Gontijo, 2006). As mudanças na sociedade exigem que o indivíduo seja cada vez mais criativo e que seja capaz de encontrar soluções inovadoras e multifacetadas nos mais diversos contextos. Estas mudanças implicam novas formas de conceber e praticar a educação pelo que se torna urgente repensá-la (Coto, Neto & Pacheco, 2009; Eça, 2010; Eger, 2008).

Compete então à escola, enquanto instituição, promover as competências e as aprendizagens, de forma integradora, que permitam inserir indivíduos dotados para as novas exigências da sociedade em rápida mutação (Menezes, 2004). Na atual conjuntura, caracterizada pela mudança e transição, a escola não deve restringir-se a metodologias que enfatizem a memorização e resolução de tarefas rotineiras fechadas nas próprias disciplinas (Coto, Neto & Pacheco, 2009). Deve-se promover uma sólida educação com base em ambientes nos quais o aluno é agente ativo no processo de aprendizagem, sustentado na realização de tarefas significativas e contextualizadas, mobilizando competências desenvolvidas no seio de várias áreas disciplinares (Morelatti, 2001).

No entanto, a escola ainda está longe de, efetivamente, realizar um trabalho vantajoso no sentido de desenvolver a criatividade, sendo vários os fatores que constituem barreira para o seu desenvolvimento, nomeadamente, a representação que os alunos têm sobre a criatividade bem como a dificuldade que os professores têm em praticar um ensino motivador (Alencar & Fleith, 2003; Alencar, Fleith & Virgolim, 1995). Neste contexto, Portugal tem assistido, nos últimos anos, a sucessivas reformas no sistema educativo, principalmente no que diz respeito à Matemática. Em 2007, foi aprovado um Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) que introduziu diversas mudanças nas orientações curriculares, designadamente na área da Geometria (área revitalizada da Matemática), e em particular nas transformações geométricas no plano euclidiano. No entanto, apesar deste programa ter sido revogado em 2013, é nele que esta investigação se baseia, por ser o programa que se encontrava em vigor à data da realização do trabalho empírico.

2. Questões e objetivos da investigação

É neste contexto que surge esta investigação, norteada pela questão principal – Em que medida uma abordagem interdisciplinar das isometrias, mediada por um software de geometria dinâmica, pode contribuir para melhorar a aprendizagem das isometrias, desenvolver a criatividade bem como as representações em relação à mesma.

Tendo por base as mais recentes orientações curriculares bem como o conhecimento da importância de uma adequada gestão do currículo, desenvolveu-se um estudo com o objetivo de – Analisar a influência de uma abordagem interdisciplinar das isometrias, integrando Matemática e Educação Visual, e operacionalizada através de uma sequência de tarefas, mais ou menos abertas, com recurso ao GeoGebra:

(i) numa mais sólida apropriação e aplicação de conceitos geométricos envolvidos;

(ii) no desenvolvimento de atitudes mais favoráveis relativamente à Matemática, no geral, e à Geometria em particular;

(iii) no desenvolvimento da criatividade, ao nível quer de representações quer de manifestações.

3. Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se estruturada em quatro capítulos principais. Introduz-se o tema do trabalho desenvolvido e apresenta-se a problemática do estudo, as finalidades e objetivos da investigação bem como a estrutura da dissertação.

No primeiro capítulo faz-se o enquadramento teórico das principais dimensões presentes neste estudo: gestão interdisciplinar do currículo, criatividade, e transformações geométricas isométricas. Relativamente à primeira dimensão, gestão interdisciplinar do currículo, apresentam-se algumas perspetivas de vários autores sobre gestão curricular e interdisciplinaridade. Quanto à segunda dimensão, criatividade, começa-se por indicar algumas propostas de definição de criatividade encontrada na literatura e em seguida sugerem-se estratégias para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. E em relação à última, transformações geométricas isométricas, faz-se um enquadramento do estudo de transformaçõeas geométricas isométricas no plano euclidiano, no que respeita ao 3º ciclo do ensino básico, e faz-se referência ao processo ensino e aprendizagem das mesmas.

No segundo capítulo, apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas adotadas neste estudo. Segue-se o esquema de investigação onde são indicadas as principais etapas de investigação bem como as técnicas e os instrumentos de recolha de dados. Posteriormente faz-se uma caracterização geral da população escolar à qual pertencem os participantes no estudo, das técnicas e dos instrumentos de recolha de dados. Por fim, apresenta-se a proposta didática implementada, descrevem-se as atividades desenvolvidas em cada sessão e o processo de tratamento a que foram submetidos os dados e como serão apresentados no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, procede-se à descrição e análise dos dados de três pares de alunos, em particular, relativamente à construção e aplicação de conhecimento no que respeita às transformações geométricas isométricas, representações e manifestações da criativiadade.

No quarto capítulo, apresentam-se as principais conclusões que resultam dos resultados obtidos e tecem-se algumas considerações finais.

Para finalizar, apresenta-se a bibliografia consultada e os anexos

CAPÍTULO I

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

O estudo que se propõe desenvolver é enquadrado, teoricamente, por três eixos principais – gestão interdisciplinar do currículo, criatividade e transformações geométricas isométricas no plano euclidiano. É a eles que as próximas páginas serão dedicadas.

1. Gestão interdisciplinar do currículo

Numa escola como a que conhecemos hoje, o professor deve adotar uma prática multifacetada e reflexiva no sentido de que todos os alunos possam ter sucesso nas suas aprendizagens. É necessário que o professor seja capaz de gerir e implementar um currículo dinâmico e integrado, que favoreça a criação de contextos significativos e diferencie estratégias e instrumentos de ensino. Neste contexto, o professor tem hoje novos desafios e responsabilidades acrescidas como gestor do currículo, na medida em que é ele que decide o tipo de tarefas que os alunos vão realizar, a sua sequência, a sua duração, bem como os recursos e as metodologias de ensino e de aprendizagem, que podem ser determinantes no âmbito de um ensino criativo e para a criatividade, recentemente considerados uma das mais valias para o progresso. No caso da Matemática, um dos temas que se tem revelado mais desafiador ao nível da sua abordagem é a Geometria e, dentro dela, o tópico das transformações geométricas que, recentemente, sofreu profundas alterações do ponto de vista matemático, didático e curricular.

1.1. Currículo e gestão curricular

O currículo, sendo um conceito polissémico tem evoluido ao longo dos tempos. Tendo por referência três fatores: a evolução da sociedade, a evolução do conhecimento científico e a evolução económica. Significa isto que a evolução do currículo depende da forma como estes três fatores se articulam e influenciam (Pombo, 1993).

Consultando literatura especializada, são várias e contraditórias as definições de currículo. Como sublinha Abrantes (1994), o termo currículo pode referir apenas os nomes e a sequência das disciplinas que constituem um curso e também os assuntos que são leccionados nelas ou, num sentido mais alargado, significar o leque de acções educativas que a escola planeia com uma dada intenção, incluindo as desenvolvidas fora das aulas habituais. Pode, ainda, assumir um outro significado quando se identifica com tudo o que os alunos aprendem, quer o que resulta do ensino formal (com a ajuda de professores) quer o que advém de processos informais e não previstos. O termo currículo tem sido usado com diferentes significados.

A ambiguidade do conceito de currículo é reconhecida por Ribeiro (1995) ao defender que existe uma diversidade de definições e de conceitos, em função das perspetivas que se adotam, e que se traduz, por vezes, numa imprecisão acerca da natureza e âmbito do currículo. Este autor identifica a definição de currículo segundo duas perspetivas distintas: a mais comum considera o currículo como elenco e sequências de matérias ou disciplinas, isto é, um plano de estudos que inclui a organização dos temas de ensino e respetivas cargas horárias, referentes a um ciclo de estudos, nível de ensino ou curso e a outra que traduz currículo como uma listagem, esquema ou sumário de temas e tópicos para uma disciplina ou área disciplinar, podendo integrar orientações metodológicas para tratar os conteúdos programáticos. Também Pacheco (1996), apresenta duas perspectivas. Na primeira, o currículo é identificado como um plano estruturado e organizado de acordo com determinados objectivos, conteúdos e actividades consoante a natureza das disciplinas, cuja elaboração segue duas regras fundamentais: a previsão e a precisão de resultados. O currículo corresponde, assim, a um plano geral que se pretende que seja posteriormente implementado respeitando as suas intenções iniciais. Na segunda perspectiva, o currículo representa o conjunto de experiências educativas vividas pelos alunos, possuindo, por isso, um elevado grau de indeterminação, identificando-se com a ideia de projeto, de edifício em permanente construção e reformulação. Deste modo, o currículo, embora inclua um plano de acção pedagógica previamente definido, permanece em aberto e dependente das condições da sua aplicação, não correspondendo a uma estrutura determinada.

Ponte, Matos & Abrantes (1998) propõem outro tipo de abordagem ao conceito, considerando diversos níveis de abrangência. Num sentido mais restrito, o currículo corresponde ao leque e sequência de disciplinas que compõem um determinado curso, podendo incluir também os programas disciplinares. Num sentido um pouco mais amplo, o currículo incluirá também as atividades que a escola planifica, de forma deliberada, para oferecer aos seus alunos, que podem ou não ser contempladas pelos programas disciplinares. Num sentido ainda mais amplo, o currículo pode ser identificado como o conjunto global das aprendizagens dos alunos, seja em consequência do ensino formal ou em virtude de processos informais e não previstos. Roldão (1999) define currículo como *"o conjunto de* *aprendizagens que, por se considerarem socialmente necessárias num dado tempo e contexto, cabe à escola garantir e organizar (p.24)".* Alonso (2000) partilha da visão de currículo como processo dinâmico, ao considerar que este se vai transformando, enriquecendo, reconstruindo e, por vezes, deteriorando e desvirtuando. Para Canavarro (2003), o currículo "*tanto pode significar o programa estruturado de conteúdos disciplinares prescrito por alguém, como o conjunto de todas as experiências que o aluno realmente vive na escola (p. 112) ".* No primeiro caso, o foco é sobre o que o professor deve ensinar sobre um conteúdo específico; no segundo, é sobre o que os alunos realmente aprendem, independentemente do conteúdo a que se refere. Serrazina & Oliveira (2005) defendem que o que transforma um conjunto de aprendizagens em currículo é a sua finalização, intencionalidade, estruturação coerente e sequência organizadora. Mais recentemente, e tendo em conta o ênfase colocado nas múltiplas conceções de currículo, Gaspar & Roldão (2007) apresentam uma síntese em torno de quatro características para a construção do seu conceito. Assim, o conceito de currículo aparece centrado nos resultados da aprendizagem, nos conteúdos a ensinar, nos processos de aprendizagem e nos meios ou materiais para a aprendizagem.

Face à complexidade que caracteriza o conceito de currículo sobressai a ideia de currículo como projeto dinâmico partilhado por toda a comunidade educativa, um processo de construção de conhecimento, aberto e flexível, influenciado pelos conteúdos que se quer fazer aprender e características dos participantes desse projeto. Esta é a conceção de currículo que orienta este estudo.

A forma como o professor olha o currículo oficial e o valor que o professor reconhece às orientações curriculares marca decisivamente a forma como o vai, ou não, pôr em prática junto dos seus alunos.

Mas, independentemente do grau de identificação com as propostas curriculares, em qualquer prática educativa escolar está sempre presente um determinado modo de concretizar, uma opção de gestão curricular, uma opção sobre o que se ensina, como se organiza a aprendizagem e como se avaliam os seus resultados (Roldão, 1999).

O conceito de gestão curricular surge muitas vezes associado ao de flexibilização curricular. Segundo Roldão (1999), flexibilizar significa deslocar e diversificar os centros de decisão curricular. Para Abrantes (2001), flexibilizar o currículo está relacionado com diferenciar e adequar o currículo. Diferenciar significa que é necessário procurar caminhos, que são necessariamente diversos, para que todos e cada aluno tenha sucesso, no sentido de incluírem tipos e sequências de atividades e a articulação dos saberes em função da diversidade de cada população escolar. Adequar significa procurar maneiras ajustadas para que todos os alunos aprendam, isto é, o professor adequa as suas opções às características pessoais dos alunos, tendo como referentes as aprendizagens que todos devem alcançar (Roldão,1999). Promover a adequação curricular acentua o papel do professor como gestor do currículo, ao assegurar uma equidade de aprendizagens para todos os alunos, independentemente das situações de partida.

Para Ponte (2005), a gestão curricular tem a ver com o modo como o professor interpreta e (re) constrói o currículo, tendo em conta as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho. Esta gestão curricular assenta em dois elementos: um deles é a seleção e/ou (re) criação e sequenciação de tarefas que permitam que as aprendizagens dos alunos sejam mais significativas e o outro é a estratégia posta em prática pelo professor (id).

A relação com as outras disciplinas ou áreas disciplinares é outro aspeto que o professor deve ter em atenção quando desenvolve o currículo, não apenas a nível macro (quando planifica o ano letivo, um período ou unidade didática) mas também a um nível micro (quando planifica uma aula).

A publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico, CNEB. (ME – DEB, 2001) fez emergir, na comunidade educativa um novo entendimento sobre o conceito de currículo, introduzindo a noção de diferenciação e construção do currículo em função dos alunos. No quadro de autonomia concedida às escolas, este diploma define os princípios orientadores da organização e da gestão curricular e estabelece que as estratégias de desenvolvimento do currículo nacional, visando adequá-lo ao contexto de cada escola, deverão ser objeto de um projeto curricular de escola, desenvolvido em função do contexto de cada turma, num projeto curricular de turma.

Foram realizados estudos em Portugal em torno do currículo e da gestão curricular. Costa et al. (2002) conduziu um estudo que pretendia investigar a implementação do Projeto de Gestão Flexível do Currículo numa escola básica com segundo e terceiro ciclos; Martins (2005) desenvolveu um estudo que pretendia avaliar a forma como os professores se apropriaram da abordagem curricular perspetivada no desenvolvimento de competências, particularmente para as Ciências Físicas e Naturais do terceiro ciclo. Concluiram que continua a predominar uma cultura curricular pouco autónoma, marcada pela preocupação do cumprimento formal do que é preconizado no programa e no manual, bem como algumas dificuldades de operacionalização no que concerne ao projeto curricular de turma. Apesar de se verificarem melhorias em termos de colaboração docente, não se verificam mudanças significativas nas práticas pedagógicas ao nível da articulação curricular.

1.2. Interdisciplinaridade: conceitos e termos afins

Atualmente, já não é possível encontrar respostas e soluções para os problemas de forma isolada e, ainda que se encontrem, a discussão não fica restrita a apenas uma área do conhecimento. Esta forma de entender e enfrentar os problemas instiga a que se reflita, designadamente, sobre o papel da escola, e é neste contexto que se pode inserir a interdisciplinaridade na prática de ensino e de aprendizagem.

Pombo (1993) enumera três razões para o recurso à interdisciplinaridade no seio do meio escolar que se prendem com a necessidade de se combater a fragmentação do conhecimento, a rutura entre a tecnociência e o cidadão comum. Também Klein (2010) identifica quatro eixos principais impulsionadores da interdisciplinaridade: a complexidade inerente da natureza e da sociedade; o desejo de explorar problemas e questões que não se limitam a uma área do conhecimento; a necessidade de resolver problemas sociais e o poder das novas tecnologias.

Interdisciplinaridade faz parte de uma longa família de palavras que têm como raiz comum a palavra *disciplina* (Pombo, 2003). Tal raiz comum pode ter, pelo menos, três grandes significados: como ramo do saber, como componente curricular, como conjunto de normas ou leis que regulam uma determinada atividade ou comportamento de um determinado grupo. Podemos afirmar que qualquer uma das palavras, pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade trata de algo que está relacionada com disciplina (Pombo, 2003; Roldão,2000).

No âmbito deste trabalho, interessa particularmente considerar disciplina como componente curricular. Neste contexto, disciplina é uma maneira de organizar, de delimitar, de representar uma seleção de conteúdos a explorar em função de objetivos definidos, com o apoio de um conjunto de procedimentos didáticos e metodológicos para o seu ensino, aprendizagem e avaliação (Morin, 2003). As disciplinas impõem e refletem, assim, uma determinada forma de pensar e agir. Quanto mais familiarizado estiver um indivíduo com determinada teoria e com o seu modo de pensar e atuar, mais difícil lhe será adotar uma teoria rival que implique uma maneira diferente de ser e de estar (Santomé, 1998). O caráter disciplinar do ensino formal dificulta a aprendizagem do aluno, não estimula o desenvolvimento da inteligência e da resolução de problemas, nem o estabelecimento de conexões entre factos e conceitos (Morin, 2003). Ainda segundo este autor, a fragmentação do ensino só servirá para isolar os objetos do seu meio e as partes de um todo. A educação deve romper com essa atomização para evidenciar as correlações entre os saberes, a complexidade da vida e dos problemas que hoje existem. Caso contrário, será sempre ineficiente e insuficiente para os indivíduos do futuro.

Do ponto de vista etimológico, pode não fazer sentido distinguir entre *pluri* (vários) e *multi* (muitos). Talvez por isso, muito frequentemente, o conceito de multidisciplinaridade é dado como equivalente ao de pluridisciplinaridade (Pombo, 1993; Klein, 2010; Lavaqui & Batista, 2007; Spelt et al.,2009). No entanto, alguns autores consideram que tais prefixos se distinguem, considerando que o primeiro remete para uma lógica aditiva e o segundo para uma maior implicação das disciplinas. Assim, a ideia é a de que as palavras pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade, todas da mesma família, devem ser pensadas num *continuum* que vai da adição à coordenação, à combinação e desta à fusão (figura 1). Se se juntar a esta continuidade um *crescendum* de intensidade, poder-se-á ir do paralelismo *pluridisciplinar* ao perspetivismo e convergência *interdisciplinar* e, desta, ao holismo e unificação *transdisciplinar* (Pombo, 2003).

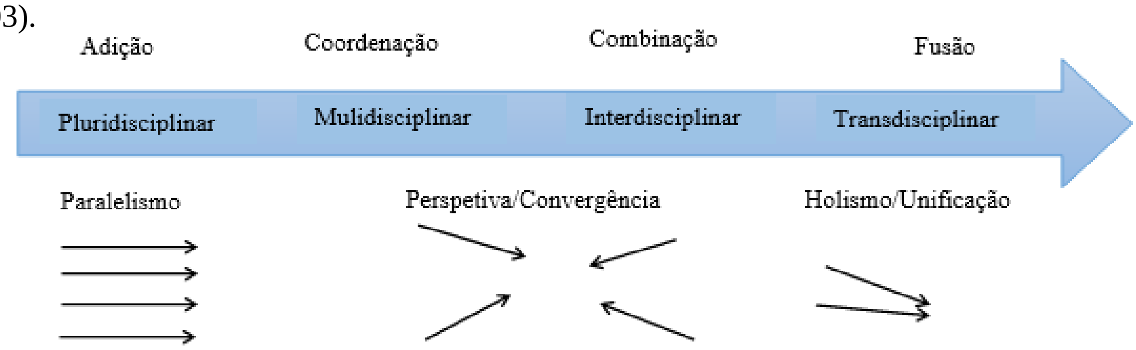


Fig. 1 – Sintese da proposta terminológica para pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade (adaptado de Pombo, 2003)

Pode-se, portanto, entender por pluridisciplinaridade o primeiro nível de associação entre duas ou mais disciplinas, que implica pôr em paralelo, ao lado umas das outras, estabelecendo uma coordenação mínima. Em contexto educacional, este conceito não exige alterações na forma e organização do ensino, exige apenas um mínimo de coordenação entre professores que pode traduzir-se, por exemplo, numa simples organização temporal do processo de ensino e de aprendizagem de alguns conteúdos programáticos. Para Zaman *et al.* (2010), resulta de uma simples agregação de diferentes disciplinas que preservam as suas perspetivas específicas. Compartilham uma relação que não é interativa mas cumulativa e podem trabalhar juntas para criar cooperativamente uma imagem mais complexa da realidade.

À medida que se avança para a multidisciplinaridade, evolui-se na lógica da coordenação e da colaboração. Pombo (1993) e Zaman *et al.* (2010) consideram que a interdisciplinaridade emerge do processo de combinar e integrar duas ou mais disciplinas, bem como as suas metodologias e premissas. Trata-se de cruzar fronteiras tradicionais entre as disciplinas e misturar as suas técnicas na busca de um objetivo comum. No contexto educacional, este conceito exige uma reorganização do processo de ensino e aprendizagem e exige, também, um trabalho continuado de colaboração dos professores envolvidos. Essa reorganização pode traduzir-se na transposição de conceitos, terminologias, tipos de discurso e argumentação, cooperação metodológica e instrumental, transferência de conteúdos, problemas, resultados, exemplos, aplicações, etc (Pombo, 2003). Para Serenato (2008), na interdisciplinaridade, as relações ocorrem em dois níveis, com relações e influências recíprocas, aonde a colaboração entre as diversas disciplinas conduz a uma interação; um diálogo que caminha para uma estruturação de conceitos, englobando todo o conhecimento envolvido numa síntese (figura 2). De acordo com esta abordagem ter-se-ão, inicialmente, olhares diferentes para um mesmo objeto, que resultarão em diferentes modificações no modo de ver esse objeto, com enriquecimentos epistemológicos para todos.

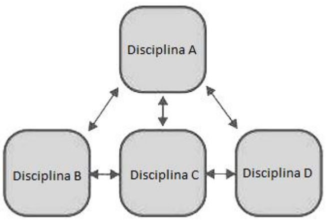


Fig. 2 – Interdisciplinaridade. Existe cooperação e diálogo entre as disciplinas. (adaptado de Serenato,2008)

Relativamente ao conceito de transdisciplinaridade, Pombo (2003) e Zaman *et al.* (2010) propõem que se entenda a fusão unificadora de duas ou mais disciplinas tendo por base a explicitação dos seus fundamentos comuns, a construção de uma linguagem comum, a identificação de estruturas e mecanismos comuns de compreensão do real, a formulação de uma visão unitária e sistemática de um setor mais alargado do saber. Fundem-se numa outra coisa que transcende a todas as disciplinas, visando uma abordagem holística (Zaman *et al*, 2010). É o nível máximo de integração disciplinar possível de alcançar num sistema educativo porque rompe as fronteiras entre as disciplinas envolvidas. Para Pombo (2003), a transdisciplinaridade pode ser útil em determinadas situações mas, na maioria das circunstâncias, pode ser excessiva, pelo que aponta a interdisciplinaridade, espaço intermédio positivo, como o caminho a seguir, pois faz valer-se dos valores de convergência, de complementaridade e de cruzamento. A interdisciplinaridade é considerada como uma solução para os efeitos adversos que a especialização excessiva pode gerar (Zaman *et al*, 2010).

A palavra interdisciplinaridade, que surgiu na literatura educacional apenas na primeira metade do século passado (Garcia, 2012; Pombo, 2003), é usada indiscriminadamente em muitos contextos (ensino, investigação, exercício profissional, novos meios de comunicação, congressos ou seminários) sem um significado comum aceite pela comunidade de professores e pesquisadores (Paviani, 2004; Pombo, 2003; Zaman *et tal*, 2010).

Segundo Japiassu (1976), a interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade das trocas entre os especialistas e pelo grau de interação real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa. Para Palmade (1979), deve entender-se por interdisciplinaridade a integração interna e conceptual que rompe a estrutura de cada disciplina para construir uma axiomática nova e comum a todas elas, com o fim de dar uma visão unitária de um sector do saber. Boix Mansilla *et al.* (2000), propuseram como definição a capacidade de integrar conhecimentos e modos de pensar em duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento, estabelecida para produzir um avanço cognitivo, tais como explicar um fenómeno, resolver um problema ou criar um produto de uma forma que teria sido impossível ou improvável através de meios disciplinares individuais. Para Paviani (2004), a interdisciplinaridade é vista como uma teoria epistemológica ou como uma proposta metodológica de ação pedagógica ou de investigação científica, podendo constituir-se como sintoma ou como solução para a fragmentação excessiva do conhecimento. Reis (2009) considera a interdisciplinaridade como um exercício da recuperação da ideia de unicidade do conhecimento humano que, com o avanço da ciência, se foi especializando de tal forma que as partes parecem não estar ligadas ao todo.

1.3. Perspetiva integradora da interdisciplinaridade

Apesar de não se saber ao certo o que identifica as práticas interdisciplinares, qual a fronteira exata a partir da qual uma determinada experiência pode ser identificada como interdisciplinar e não multidisciplinar, Spelt *et al*. (2009) referem que, ao contrário da pluri ou multidisciplinaridade que são aditivas, com maior ou menor grau de coordenação, a interdisciplinaridade é integrativa: o conhecimento das diferentes disciplinas é evidenciado e muda pela integração. Esta integração ou síntese é vista como a caraterística que define a interdisciplinaridade (Pombo, 2003; Serenato, 2008; Spelt *et al*. ,2009).

Assim, a interdisciplinaridade tem inspirado importantes transformações no contexto escolar, denunciando a fragmentação do currículo e a necessidade de transformar a natureza dos processos de aprendizagem (Garcia, 2012). Não é uma nova proposta pedagógica, surge na escola como uma "aspiração" emergente no seio dos próprios professores (Pombo, 1993). São os professores que, por iniciativa própria, realizam experiências de ensino que visam alguma integração dos saberes disciplinares e implicam algum tipo de trabalho de colaboração entre duas ou mais disciplinas. Fazem-no sem modelos, sem qualquer tipo de apoio (ib,id.). A propósito, Reis (2009) considera que a interdisciplinaridade na escola é uma proposta bastante difícil para qualquer professor trabalhar considerando que a sua formação inicial é realizada de forma compartimentada, abstrata e distante da realidade.

A abordagem interdisciplinar para o ensino e a aprendizagem centra-se nas metodologias, ferramentas de interpretação e linguagem de várias disciplinas sobre um tema central. Os alunos envolvidos são mais propensos a adquirir perspetivas integradas e estratégias focadas na solução em vez do conhecimento específico derivado de uma única disciplina. Spelt *et al*. (2009) denomina esta aprendizagem de aprendizagem interdisciplinar, que se caracteriza pela integração de conhecimentos multidisciplinares através de um tema ou foco central (Ivantskaya *et al*., 2002; Spelt *et al*., 2009) e o conhecimento é o resultado desta aprendizagem.

Assim, a interdisciplinaridade estimula a criatividade (Holley, 2009) porque tem por finalidade estabelecer uma relação que leve o aluno a compreender, processar, pensar, criticar e incorporar os diferentes conteúdos e as ligações entre as disciplinas, indispensáveis ao desenvolvimento da fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração, pensamento convergente e pensamento divergente. Seguidores da educação interdisciplinar argumentam que os alunos estão mais motivados, mais capazes de lidar com questões e problemas complexos e mais imersos em pensamentos de nível mais alto (Klein, 2010).

Para consolidar e ampliar um conceito matemático é importante que o aluno o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. Assim, não se deve trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do quotidiano do aluno. Também se deve proporcionar o contato com formas diferenciadas de entender o conceito.

O trabalho na escola é naturalmente multidisciplinar, no sentido em que faz apelo ao contributo de diferentes disciplinas. Os interesses próprios de cada disciplina são preservados, conservando-se a sua autonomia e os seus objetos particulares (Machado, 1993). O professor tem a flexibilidade suficiente para, em função das circunstâncias concretas que se lhe apresentam, dos alunos, em particular, que lhe são confiados, fazer apelo a elementos provenientes de outras disciplinas capazes de permitir uma contextualização compreensiva dos conteúdos em estudo na sua disciplina (Pombo, 2003).

No CNEB (ME – DEB, 2001), aparecem definidas orientações gerais de reorganização curricular: a necessidade de procurar estabelecer uma articulação horizontal e vertical das áreas e conteúdos programáticos; o sentido da dimensão global de formação a que deve aspirar qualquer reorganização curricular; a realização de aprendizagens significativas e a formação integral dos alunos, através da articulação e contextualização dos saberes.

Neste estudo, considera-se que a abordagem interdisciplinar foi realizada na ótica de Zaman et al. (2010) e Serenato (2008). A relação Matemática e Educação visual foi integradora no sentido em que a investigadora explicitou à docente de Educação Visual o que pretendia que os alunos realizassem, a qual confirmou ser exequível de acordo com o consignado nas orientações curriculares para aquela disciplina, implicando alterações à sua planificação inicial e diferente abordagem. Assim, a docente de Educação Visual, de acordo com as ferramentas utilizadas nesta disciplina, proporcionou a realização de um trabalho envolvendo conceitos subjacentes à Matemática sobre isometrias e simetrias. Desta interação, resultou um trabalho realizado pelos alunos que foi posteriormente explorado na aula de Matemática e que serviu de base para este estudo.

2. Criatividade (em) Matemática

A complexidade da vida e a procura de novas soluções para problemas antigos requerem um tipo de pensamento mais criativo e, é neste sentido, que Torre (2005) refere que a riqueza de um país não está apenas nos seus recursos naturais, mas também na capacidade inovadora e criativa das gerações mais jovens. Não admira que a criatividade tenha sido proposta como uma competência primordial (Morais, 2011a) a ser incluída na educação do século XXI; enfatizado o desenvolvimento do raciocínio criativo dos alunos nos currículos (Kattou, 2011); tenha sido reconhecida, nas últimas décadas, como um dos aspetos mais relevantes do desenvolvimento humano, e vista como um instrumento indispensável para qualquer sociedade (Adams, 2010; Fleith & Alencar, 2005); seja considerada um fator de satisfação e contribua para o bem estar emocional do indvíduo (Alencar, 2007).

2.1. Conceitos e dimensões da criatividade

De entre os primeiros conceitos associados à criatividade, destaca-se a sua conceção como um dom presente em apenas alguns indivíduos (Alencar, 2003). Para Weisberg (1988), mencionado por Silver (1997), a criatividade é definida como raros talentos mentais, atos criativos dos génios, produzidos por indivíduos excecionais. Nesta perspetiva, a criatividade não era suscetível de ser influenciada pela educação uma vez que o processo criativo estava dependente de rasgos ocasionais introspetivos (Silver, 1997).

No entanto, uma nova visão de criatividade, que tem emergido de pesquisas contemporâneas, contrasta com o ponto de vista de apanágio de "génios". Pode ser desenvolvida nas escolas, não estando apenas ao alcance de alguns indivíduos excecionais (Silver, 1997). Para este autor, a criatividade está intimamente relacionada com o conhecimento profundo e flexível no domínio dos conteúdos, associada a longos períodos de trabalho e reflexão.

Também, segundo Pehkonen (1997), a criatividade não é uma característica exclusiva dos artistas e cientistas, mas algo que faz parte do nosso quotidiano, podendo apresentar-se através de distintas formas e em diversos graus, considerando relevante o contexto educacional (Alencar, 2007). Para Mitjáns Martinez (2002), a criatividade é a expressão de sujeitos concretos que, em determinado momento e em determinadas condições, são capazes de produzir algo original com determinado valor. Para Zamir & Leikin (2011) é uma característica pessoal que pode ser desenvolvida. Apontam a valorização da criatividade na sala de aula e para o desenvolvimento da mesma em cada aluno, bem como em cada professor.

A centralidade da criatividade no desenvolvimento da criança está enraizada em Vygotsky (Zamir & Leikin, 2011). Este autor considera que uma criança ativa a criatividade quando liga conceitos novos aos já conhecidos, organizando as construções conhecidas e desenvolvendo ideias abstratas. Assim, a criatividade é um dos mecanismos básicos que permite o desenvolvimento de novos conhecimentos (id)

Considerando a criatividade como uma característica que pode ser desenvolvida em ambiente escolar, pode fazer-se a distinção entre criatividade relativa e criatividade absoluta. Para Leikin (2009), a criatividade absoluta está associada a grandes obras históricas, a descobertas a nível global e a invenções como a de Fermat, Hilbert, Riemann e outros matemáticos proeminentes. A criatividade relativa refere-se a descobertas realizadas por um indivíduo ou grupo de referência específico, fruto da imaginação que cria algo novo.

No caso concreto da Matemática, a criatividade é, para Gontijo (2007*), "a capacidade de apresentar várias possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspetos distintos do problema e/ou formas diferentes de solucioná-lo, especialmente formas incomuns"* (p.37). Assim, a criatividade está intimamente relacionada com a resolução e a formulação de problemas em Matemática (Silver, 1997).

Para o cidadão comum, a Matemática e a criatividade nada terão em comum, mas muitos autores discordam desta visão. Pehkonen (1997) e Sriraman (2004), ao mencionarem a complementaridade do pensamento criativo e do pensamento analítico, defendem a relação entre criatividade e Matemática. De acordo com Silver (1997), a investigação tem mostrado que a resolução e a formulação de problemas em Matemática estão intimamente relacionados com a criatividade. A par da resolução de problemas, a formulação dos mesmos é uma atividade de importância inquestionável numa aula de Matemática, pois contribui, não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos mas também para a compreensão dos processos originados pela sua resolução. Sugere, ainda, que se pode promover a criatividade em Matemática devendo ter-se em atenção o tipo de ensino utilizado, e que deve ser sempre alargado a todos os alunos.

Guilford (1967) considera também o pensamento convergente e o pensamento divergente como aspetos importantes relacionados com a inteligência, pensamento crítico e resolução de problemas. Este autor define o pensamento convergente como a capacidade de encontrar soluções a partir do conhecimento, experiência e raciocínio lógico. Este pensamento é orientado no sentido de encontrar uma única resposta, a correta. Pelo contrário, o pensamento divergente, ou flexível, implica a exploração cognitiva de várias soluções diferentes para o mesmo problema. Neste tipo de pensamento, a intuição sobrepõe-se às operações mentais lógico dedutivas que caracterizam o pensamento convergente. Pehkonen (1997) refere que a experiência de Kiesswetter (1983) lhe permitiu concluir que o pensamento flexível, é uma das características da criatividade mais importante que um solucionador bem-sucedido deve ter.

Subjacentes ao conceito de criatividade estão as dimensões de fluência, flexibilidade originalidade e elaboração (Guilford, 1967; Gontijo, 2007; kattou, 2011; Leikin, 2009; Levenson, 2011; Mann, 2005; Martins, 2000; Zamir & Leikin, 2011). A fluência é caracterizada pela abundância ou quantidade de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto; a flexibilidade pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas; a originalidade, pela apresentação de respostas pouco frequentes ou incomuns; e a elaboração pela quantidade de detalhes relativos a uma ideia. Na literatura encontram-se sugestões de critérios para avaliar a criatividade em Matemática. A este respeito, Gontijo (2007), indica habilidades a serem avaliadas: (1) formular hipóteses Matemáticas avaliando relações de causa e efeito em situações Matemáticas; (2) considerar e avaliar ideias Matemáticas não usuais, refletindo sobre as suas consequências em situações Matemáticas; (3) perceber problemas a partir de uma situação Matemática e formular questões que possam responder a esses problemas; (4) procurar soluções para problemas matemáticos; (5) elaborar modelos para solucionar situações Matemáticas. Leikin (2009) propõe um modelo para avaliar a criatividade em Matemática através de tarefas com múltiplas soluções *(multiple solution tasks)*, nas quais se pretende que o aluno resolva um problema matemático de várias maneiras. Para a autora, as soluções para o mesmo problema são consideradas diferentes se se basearem em diferentes representações de alguns conceitos matemáticos envolvidos na tarefa; diferentes propriedades, teoremas ou definições de objetos matemáticos; ou propriedades diferentes de um objeto em âmbitos diferentes.

2.2. Ensino criativo para a criatividade

Sendo a criatividade uma componente base de construção do conhecimento, o ensino com e para a criatividade pode intensificar o processo de aprendizagem. Os professores são essenciais para desenvolver a criatividade Matemática em cada um dos alunos. Um professor criativo motiva os seus alunos, incentiva a construção do conhecimento e promove a criatividade (Morais & Azevedo, 2011b; Zamir & Leikin, 2011). A propósito, Alencar (2002) ressalta que não se promove a criatividade dos alunos simplesmente expondo-os a exercícios de criatividade. Defende que é necessária uma abordagem que contemple os aspetos pessoais, motivacionais, emocionais e sociais da criatividade. Mitjáns Martinez (2002) alerta que a utilização do espaço da sala de aula para o desenvolvimento da criatividade não pode reduzir-se à utilização de ações isoladas e pontuais, como se a criatividade fosse uma habilidade suscetível de ser desenvolvida a partir de estratégias relativamente simples. Tal processo deve ser contínuo porque segundo Munari (1987), *"a pessoa que não exercita a criatividade acaba por ser uma pessoa incompleta, cujo pensamento não consegue defrontar os problemas que se lhe apresentam"(*p.15).

A importância da criatividade em contexto escolar tem sido reconhecida nos documentos oficiais a longo do tempo. A Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE) publicada em 1986, ainda em vigor, refere como um dos propósitos do ensino básico *"assegurar uma formação geral comum a todos os portugueses que lhes garanta a descoberta e o desenvolvimento dos seus interesses e aptidões, capacidade de raciocínio, memória e espírito crítico, criatividade, sentido moral e sensibilidade estética".* Quanto ao CNEB (ME – DEB, 2001), define que no final do ensino básico o aluno "*deve realizar atividades de forma autónoma, responsável e criativa"(p.24),* operacionalizadas na identificação, seleção e aplicação de métodos de trabalho, numa perspetiva crítica e criativa, bem como na valorização de atividades intelectuais, artistas e motoras, que envolvam esforço, persistência, iniciativa e criatividade (id).

Vários estudos têm apontado a sala de aula (Alencar, 2002; Alencar & Fleith, 2003; Amabile, 1989) como essencial para o desenvolvimento da criatividade em contexto escolar. Tal como referem Fleith & Alencar (2005), *"O indivíduo precisa de um ambiente que encoraje e reconheça suas ideias criativas. O indivíduo pode ter todas as condições internas necessárias ao desenvolvimento do pensamento criativo, mas sem o estímulo do ambiente, sua criatividade nunca se manifestará"* (p.87). Também Jeffrey & Craft (2004) defendem que, por recurso ao ensino criativo, imaginativo, dinâmico e com abordagens inovadoras, muitas vezes estimula-se a imaginação dos alunos e o aparecimento de novas ideias que conduzem ao ensino para a criatividade.

Apesar do desenvolvimento da criatividade estar regulado nos documentos oficiais, poucas são as discussões sobre as orientações e estratégias pedagógicas a adotar para a promover nos alunos, e o professor não a tem, de um modo geral, estimulado nos alunos, seja por deficiência na sua formação, desconhecimento de técnicas, procedimentos e metodologias incentivadoras da criatividade, seja pela extensão do currículo a cumprir (Oliveira, 2010). Seguindo esta linha de raciocínio, Vale & Barbosa (2015) referem que *"Os programas de formação de professores devem ser repensados, discutindo de forma sistemática o modo como os professores podem desenvolver os seus conhecimentos matemáticos e didáticos no sentido de melhorar a criatividade dos seus alunos e consequentemente o seu desempenho em Matemática." (p.8)*. Para Gontijo (2007), torna-se necessário incluir, nos objetivos educacionais, estratégias para desenvolver atitudes e habilidades criativas. Há indícios de que a criatividade pode ter significado importante para o bem estar emocional e, consequentemente para a saúde dos indivíduos, resultando numa melhoria na qualidade de vida (Alencar, 2002; Mijáns Martinez, 2002).

Aprender depende fortemente dos professores e o que os alunos aprendem é largamente influenciado pelas tarefas que lhes são dadas (Vale *et al.*, 2009; Vale *et al.*, 2012). No entanto, no contexto educacional persistem elementos que dificultam e, muitas vezes inibem o desenvolvimento e a expressão da capacidade de criar, como a ênfase na reprodução do conhecimento e na memorização de ensinamentos, a indicação de apenas uma resposta correta para um problema e a pouca ênfase à imaginação e fantasia (Alencar & Fleith, 2003). Nesta perspetiva situa-se Virgolim (2007) que chama a atenção para a dificuldade que o contexto educacional apresenta em organizar-se de maneira mais flexível e criativa no atendimento aos alunos, de modo a romper com uma estrutura tradicional na maneira de ensinar e aprender.

Para que um aluno desenvolva a criatividade, é necessário que o professor seja fluente, flexível, original, atento, e sensível, isto é, o professor tem de ser criativo. Um professor criativo incentiva a construção do conhecimento e promove a criatividade. As novas práticas pedagógicas devem ser caracterizadas pela mudança na visão estática da criatividade, como característica individual que não pode ser alterada, para uma visão dinâmica, como característica de desenvolvimento pessoal (Leikin, 2009; Morais & Azevedo, 2011b; Zamir & Leikin, 2011).

Segundo Silver (1997), para promover a criatividade em Matemática, deve-se ter em atenção o tipo de ensino praticado e envolver ativamente todos os alunos.

O ensino criativo relaciona-se com a prática docente, na utilização de abordagens criativas para tornar a aprendizagem mais interessante, enquanto o ensino para a criatividade destaca o aluno, incentiva e proporciona oportunidades para o desenvolvimento da criatividade. As duas práticas estão interligadas e são indispensáveis no quadro da pedagogia criativa (Lin, 2011). A criatividade dos jovens é mais suscetível de ser desenvolvida num ambiente em que as capacidades criativas dos professores estão envolvidas (Jeffrey & Craft, 2004).

Para Jeffrey & Craft (2004), ensino criativo e ensino para a criatividade são parte integrante um do outro. O primeiro é inerente ao segundo e o primeiro conduz diretamente ao segundo. No entanto, para estes autores, deve ficar claro que: (i) os professores ensinam de forma criativa e ensinam para a criatividade em função das circunstâncias que consideram adequadas e, por vezes fazem as duas coisas ao mesmo tempo; (ii) é mais provável que o ensino para a criatividade surja a partir de contextos em que os professores ensinam de forma criativa, uma vez que os alunos se adaptam às abordagens do professor; (iii) nos casos em que os professores não tenham planificado especificamente para a criatividade, o ensino para a criatividade pode surgir espontaneamente.

Também para Morris (2006), o ensino para a criatividade requer o ensino criativo. Este autor defende que ensinar de forma criativa e para a criatividade inclui todas as caraterísticas de um ensino de qualidade: motivação, expectativas, capacidades de escutar, comunicar e motivar. Os professores criativos estão dispostos a experimentar, mas reconhecem a necessidade de aprender com a experiência (id.).

O Programa de Matemática do Ensino Básico, PMEB, (Ponte *et al.*, 2007) refere a necessidade de, para além da realização das tarefas propriamente ditas, a atuação didática prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações Matemáticas, pois a fase do confronto das diferentes soluções das tarefas, apresentadas pelos alunos, contribui significativamente para um incremento da originalidade (Martins, 2012).

Para Zamir & Leikin (2011), os professores devem ser *fluentes* na gestão da aula, incluindo as explicações Matemáticas que fornecem aos seus alunos; devem ser *flexíveis* no ajuste do plano de aula, de acordo com as respostas e observações dos alunos e na adequação de conteúdos, isto é, devem ter flexibilidade pedagógica; devem ser *originais*, ter a capacidade de surpreender os seus alunos aumentando o grau de motivação e criar tarefas Matemáticas para além das que se encontram no manual didático. As autoras consideram a fluência como característica principal do conhecimento e proficiência dos professores.

Vale (2012) considera importante que os professores se tornem eles próprios criativos. Os professores devem, também, analisar as suas práticas de ensino, procurar materiais curriculares e estratégias, adequados para desenvolver a criatividade Matemática. Para conseguir isso, os professores devem propor tarefas que envolvam os alunos de forma criativa e também ser matematicamente competentes para analisar as resoluções dos seus alunos. Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), uma tarefa é boa quando serve para introduzir ideias Matemáticas fundamentais, constitui um desafio intelectual para os alunos e permite diferentes abordagens.

Para Ponte (2005), um ensino motivador e mais interessante implica *"a criação de tarefas, a partir das quais os alunos se possam envolver em actividades matematicamente ricas e produtivas*" (p.1). O autor define duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. A primeira está intimamente relacionada com a perceção da dificuldade de uma tarefa, variando entre desafio "reduzido" e desafio "elevado". A segunda, traduz o grau de indeterminação no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. Interessa destacar as tarefas relativamente abertas e menos complexas, designadas por tarefas de *exploração*. A diferença entre estas e a tarefas de investigação reside no grau de desafio. Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, tratar-se-á de uma tarefa de investigação.

O esquema que segue (figura 3) relaciona os diversos tipos de tarefas em termos do seu grau de desafio e de abertura.

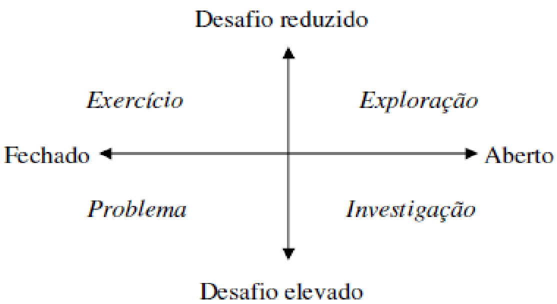


Fig. 3 – Tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura. Fonte: Ponte, 2005

Assim, as tarefas devem ser desafiantes (Vale, 2011), podendo assumir a forma de resolução e formulação de problemas, explorações Matemáticas e investigações, dado que este tipo de tarefas requerem normalmente pensamento criativo. Existe muitas vezes a ideia de que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la (Ponte, 2005). Para o autor, esta é uma ideia errada pois os alunos aprendem fora do contexto escolar e são capazes de mobilizar esse conhecimento na aula de Matemática.

Para além de proporcionar tarefas desafiantes e motivadoras, um professor criativo deve promover a autoconfiança, curiosidade, persistência, desbloquear o medo de errar, medo de se sentir criticado, sentimentos de inferioridade e insegurança dos seus alunos (Fleith & Alencar, 2003).

A aprendizagem é entendida como um processo de construção individual e social, designadamente, mediado pelos professores, assente num trabalho estruturado (Serrazina & Oliveira, 2009; Pires, 2010). Na concessão de uma inervenção pedagógica, é necessário em primeiro lugar, identificar as ideias centrais geradoras de aprendizagens futuras e estabelecer “caminhos de aprendizagem” para desenvolvê-las (Simon, 1995; Serrazina & Oliveira, 2005; Pires, 2010). Ao percorrer esses caminhos, os alunos passam muitas vezes através de uma sequência de níveis de pensamento. Estas progressões em desenvolvimento podem basear-se em trajetórias hipotéticas de aprendizagem (figura 4), designação dada por Simon (1995), dado que, ao professor, não é possível conhecê-la antecipadamente, antes corresponde a uma “tendência expectável”, a uma previsão que o professor faz em relação ao desenvolvimento que a aprendizagem pode tomar (Serrazina & Oliveira, 2010).

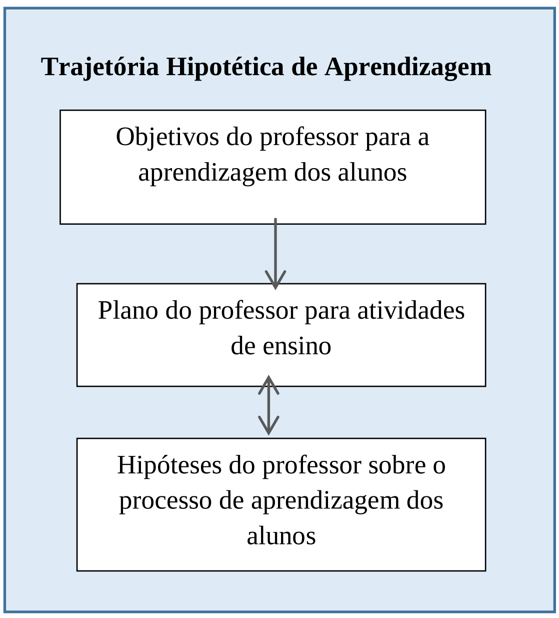


Fig. 4 – Trajetória hipotética de aprendizagem.Fonte: Serrazina & Oliveira, 2010

Apesar disso, Simon (1995) considera que há uma certa regularidade na aprendizagem individual e que os alunos da mesma sala podem beneficiar da mesma tarefa Matemática.

O *objetivo de aprendizagem* (tópico de Matemática a aprender), a *progessão no desenvolvimento* (percurso de aprendizagem através do qual os alunos se movem nos níveis de pensamento e desenvolvem compreensão e competências num tópico) e o ensino expresso num *conjunto de tarefas* (que ajuda os alunos a caminharem através daquele percurso), constituem os elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem (Pires, 2010; Serrazina & Oliveira, 2010; Simon, 1995).

No planeamento de uma unidade, as escolhas que o professor faz em cada situação de ensino bem como as decisões que toma face à compreensão dos alunos são configuradas pela trajetória de aprendizagem e as tarefas a propor são tão importantes quanto as trajetórias de aprendizagem (Cabrita, *et al*., 2008; Serrazina & Oliveira, 2010).

No processo em que o professor reflete sobre a sua prática profissional, é colocada a dúvida sobre como pode ampliar a compreensão dos alunos ou como podem os alunos progredir num dado tópico matemático. Várias investigações têm sido feitas sobre os processos de pensamento dos alunos, o que compreendem e como compreendem a Matemática (ver, por exemplo, Confrey, 1991; Hart, 1981; Hiebert & Carpenter, 1992; Kieren, 1988; Kieren & Pirie, 1991; Sierpinska, 1994), através de estudos onde os alunos são ouvidos e avaliados. Em Portugal, desde o início dos anos 90 do século passado, foram realizados diversos estudos, particularmente relacionados com a aprendizagem de conceitos, de que se destaca o projeto AMECC (*Aprendizagens em Matemática: estudo sobre a construção de conceitos*) e, mais recentemente, em 2008, o projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares,* de Brocardo, Serrazina & Rocha .

Os resultados de estudos desta natureza começam a ter reflexos nos currículos de Matemática e no desenho de tarefas Matemáticas, como é sublinhado pelo NCTM (2007), o que também se verifica no Programa de Matemática do Ensino Básico, PMEB, (Ponte *et al.*, 2007). Neste programa, sublinha-se a importância de desenvolver a compreensão Matemática relacionando-a com o entendimento do significado dos conceitos, dos algoritmos e procedimentos de rotina, com o reconhecimento de regularidades e de relações e com a análise de um raciocínio ou estratégia matemática.

No que respeita ao tópico da geometria e, mais especificamente das isometrias, o PMEB (Ponte *et al*., 2007) refere que o estudo do tema das isometrias, iniciado no 1.º ciclo e retomado no 2.º ciclo, é aprofundado no 3º ciclo com o estudo da translação. Este tópico compreende uma abordagem geométrica e uma abordagem vetorial, podendo a primeira ser acentuada através da análise de exemplos ligados às artes decorativas.

3. Transformações Geométricas Isométricas

Para descrever, analisar e compreender o mundo físico recorre-se, muitas vezes, à geometria, e as transformações geométricas designadas isométricas do plano euclidiano, aparecem implicitamente, a partir do momento em que se começa a desenvolver capacidades relacionadas com o sentido espacial (Oliveira, 2010). O seu estudo inicia de forma intuitiva no 1º ciclo, com progressiva formalização até ao 3º ciclo (Ponte *et al*., 2007).

Como exemplo de transformações geométricas tem-se: reflexão, reflexão deslizante, rotação, translação, homotetia, semelhança em espiral, alongamento e inversão (Franco, 1997; Veloso, 2012). No âmbito deste estudo, adota-se a definição de transfomações geométricas, dada por Franco (1997), como aplicações bijetivas do plano no plano. Por outras palavras, uma transformação é uma aplicação, ***T***, do plano no plano que tem a propriedade de qualquer ponto P´ ser o transformado por ***T*** de um e um só ponto P, ou o que é equivalente, ***T*** transforma pontos distintos em pontos distintos e o conjunto de todos os seus transformados cobre o plano (Breda *et al*., 2011; Veloso, 2012):

- Se P e Q são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes P´e Q´ são também distintos;
- Se U é um ponto qualquer do plano, existe sempre um ponto V do plano tal que o seu correspondente pela transformação geométrica ***T*** é U.

O ponto P´ é a imagem ou transformado de P por meio de ***T*** e o ponto P é o original, ou objeto de P´por meio de ***T***. Significa isto que P´= ***T***(P). De uma forma geral, os pontos designados por P´, Q´, R´ … serão as imagens dos pontos P,Q, R … por uma transformação geométrica ***T***.

Por outro lado, uma figura plana F é por definição um conjunto de pontos do plano pelo que, a imagem ou transformada de F por meio de ***T*** é por definição F´, formada pelas imagens dos pontos de F e escreve-se F´= ***T***(F).

A aplicação que a cada ponto P´ do plano associa um ponto P é uma transformação que se designa por transformação inversa de ***T*** e representa-se por $\boldsymbol{T}^{-1}$. Significa que $\boldsymbol{T}^{-1}$(P´) = P se e somente se ***T*** (P) = P´. Assim, para cada transformação geométrica ***T***, existe uma transformação geométrica inversa $\boldsymbol{T}^{-1}$ (Breda *et al.*, 2011; Veloso,2012).

Sejam ***S*** e ***T*** duas transformações geométricas do plano e P um ponto qualquer. Seja P´ a imagem de P por ***T*** e P´´ a imagem de P´ por ***S***. A correspondência que associa P a P´´ é designada por transformação composta de ***S*** após ***T*** e representa-se por ***S*** *o* ***T***.

A transformação geométrica do plano que faz corresponder a cada ponto o mesmo ponto, ou seja, a imagem de cada ponto é o próprio ponto, designa-se por identidade, ***I***. Assim, qualquer que seja o ponto P, ***I*** (P) =P. Significa que P é ponto fixo de ***T*** se e somente se P é ponto fixo de $\boldsymbol{T}^{-1}$. Para qualqur transformação geométrica ***T***, tem-se $\boldsymbol{T}^{-1} o\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\ o\ \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I}$ (Breda *et al.*, 2011; Veloso,2012).

Para Breda *et al.* (2011) uma transformação de semelhança é uma transformação do plano no plano que preserva a razão das distâncias entre quaisquer dois pontos distintos do plano e os respectivos transformados. Dito de outra forma, se ***T*** é uma transformação de semelhança, as distâncias entre P e Q e entre ***T***(P) e ***T***(Q) são diretamente proporcionais, isto é, existe uma constante positiva k (designada por razão de semelhança) tal que, quaisquer que sejam os pontos P e Q do plano se tem dist(***T***(P), ***T***(Q)) = k dist(P,Q), onde "dist" designa a distância euclidiana usual entre pontos do plano. De entre as diversas propriedades das transformações de semelhança são âmbito de estudo as seguintes: (1) preservação da relação "estar situado entre", o que permite concluir, de imediato, que se preserva a colinearidade de pontos; (2) preservação das amplitudes dos ângulos; (3) transformação de retas em retas; semirretas em semirretas; segmentos de reta em segmentos de reta; triângulos em triângulos semelhantes; retas paralelas em retas paralelas; retas perpendiculares em retas perpendiculares (Breda *et al.*, 2011; Franco, 1997; Veloso, 2012). Uma transformação de semelhança de razão um chama-se isometria (Breda *et al.*, 2011).

No âmbito deste estudo, foram consideradas as transformações de semelhança de razão de semelhança um – as isometrias.

3.1. Isometrias

Quando se movimenta um objeto, sem o deformar, a distância entre quaisquer dois pontos do objeto, antes e depois do movimento, permanece a mesma, embora a localização dos pontos possa ser diferente. A extensão da noção de invariância da distância entre pontos de um objeto para a invariância da distância entre quaisquer dois pontos do plano após uma ação (movimento) que os envolva pode ser modelada, em termos matemáticos, por transformações geométricas de semelhança designadas isometrias. Diz-se que a transformação geométrica T é uma isometria quando e só quando dist(T (P), T (Q)) = dist(P,Q) (Breda *et al.*, 2011; Franco, 1997; Veloso, 2012).

Sendo as isometrias do plano um subconjunto do conjunto das transformações geométrias de semelhança do plano, podemos concluir que as isometrias do plano constituem um grupo – o grupo das transformações isométricas do plano. Verifica-se que a tranformação identidade é uma isometria, a composição de duas isometrias é uma isometria e a transformação inversa é uma isometria. Pelo facto de serem transformações geométricas e preservarem as distâncias entre pontos, resultam propriedades importantes para as isometrias: preservam as noções de situado entre, ponto médio, segmento, semirreta, reta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularidade (Breda *et al.*, 2011; Franco, 1997; Veloso, 2012).

Se uma isometria fixar dois pontos, P e Q, fixa necessariamente a reta PQ, fixando-a ponto a ponto devido à preservação da distância entre pontos. No caso de três pontos não colinerares, P, Q e R, a isometria fixará pontualmente as retas PQ, PR e QR e, por conseguinte, o triângulo [PQR] também sê-lo-á (Franco, 1997; Veloso, 2012).

Se uma isometria transforma um ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado positivamente (negativamente) então transforma qualquer ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado positivamente (negativamente). Neste caso a isometria diz-se direta (Breda *et al.*, 2011). Se a isometria transformar um ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado negativamente (positivamente) então transforma qualquer ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado neagativamente (positivamente), e neste caso diz-se que é uma isometria inversa ou oposta (Breda *et al.*, 2011).

Intuitivamente, pode afirmar-se que uma isometria preserva ou conserva a “forma” e a “grandeza” das figuras. Em linguagem mais dinâmica e sugestiva, dir-se-ia que uma delas se obtem da outra a partir de um *movimento rígido*. No plano euclidiano existem apenas quatro tipos de isometrias: a reflexão, a translação, a rotação e a reflexão deslizante, que permitem que uma figura e a sua transformada sejam congruentes (Franco, 1997).

A primeira isometria a apresentar é a reflexão por ser uma das isometrias fundamental do plano. Podemos obter qualquer isometria do plano por composição de reflexões (Breda *et al*., 2011) como se verá mais adiante.

Reflexão

Dada uma reta *l*, define-se reflexão de eixo *l*, R, a transformação geométrica que deixa invariantes os pontos de *l* e que a cada ponto P do plano, não pertencente a *l*, faz corresponder o ponto P´= R(P), tal que a reta *l* é a mediatriz do segmento de reta [PP´]. Relembre-se que a mediatriz de um segmento de reta [AB] é formada pelos pontos do plano que estão a igual distância dos pontos A e B sendo portanto, perpendicular ao segmento de reta [AB]. A reflexão verifica as seguintes condições:

- Se P pertence a *l*, P = P´.
- Se Q não pertence a *l*, a mediatriz do segmento de reta [QQ´] é a reta *l*, sendo Q´o transformado de Q por R. Q´está situado na reta perpendicular a *l* que passa por Q e que está a uma distância do ponto de interseção das duas retas igual à distância a que Q está desse mesmo ponto.

A figura 5 ilustra pontos do plano e seus transformados, considerando posições diferentes da reta *l* : horizontal, vertical ou oblíqua.

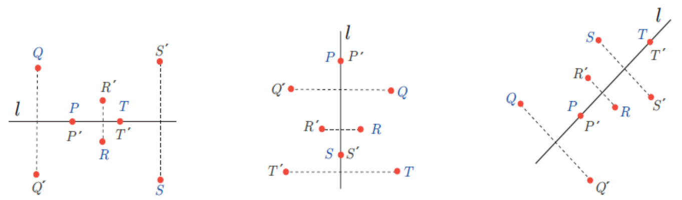


Fig. 5 – Pontos do plano e seus transformados por reflexões.
Fonte Breda et al., 2011

Se se considerar uma figura F, o conjunto de todas as imagens dos pontos dessa figura por uma reflexão R forma uma figura F´. Na figura 6 pode observar-se o caso em que a figura é um triângulo.

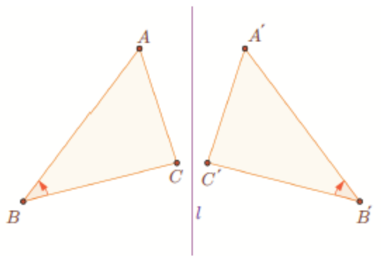


Fig. 6 – Exemplo de uma reflexão do triângulo [ABC] associada ao eixo l
Fonte: Breda et al., 2011

A reflexão verifica as propriedades seguintes:

- inverte a orientação dos ângulos;
- um ponto e o seu transformado estão numa mesma reta perpendicular ao eixo;
- a distância de um ponto e respetivo transformado ao eixo é a mesma;
- fixa os pontos do eixo de reflexão e por conseguinte o eixo de reflexão ;
- a reflexão de eixo *l* coincide com a sua inversa, $R_l = R_l^{-1}$;

Translação

À translação está associado um movimento retilíneo, estando subjacente a noção de segmento orientado.

Sejam dois pontos quaisquer do plano, M e N. Podem considerar-se, a partir dos pontos M e N, dois segmentos de reta orientados diferentes que terão a mesma direção e a mesma medida de comprimento, diferindo apenas no sentido, que serão opostos. Quando dois segmentos de reta orientados têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma medida de comprimento, são considerados equivalentes ou equipolentes.

Define-se vetor como a classe de todos os segmentos orientados equipolentes. O vetor é designado $\overrightarrow{MN}$ e poderá escrever-se com uma só letra, por exemplo $\vec{u}$.

Designa-se por translação segundo o vetor $\vec{u}$ a transformação $T_{\vec{u}}$ do plano que a cada ponto P do mesmo faz corresponder o ponto P´, tal que P´= P + $\vec{u}$. Na figura que se segue, apresenta-se um triângulo [ABC] e a sua imagem [A´B´C´], obtida pela translação associada ao vetor $\vec{u}$. Por simples observação da figura 7 verifica-se que o triângulo [ABC] se deslocou no sentido, direção e medida de comprimento correspondente ao vetor $\vec{u}$.

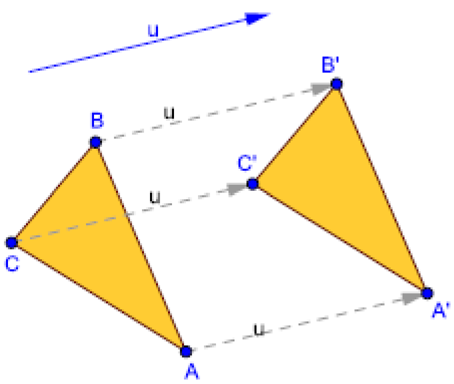


Fig. 7 – Exemplo de uma translação do triângulo [ABC] pela translação $T_{\vec{u}}$
Fonte: Breda et al., 2011

Para além das propriedades comuns a todas as isometrias, mencionadas anteriormente, na translação associada ao vetor $\vec{u}$ verifica-se que:

- a orientação dos ângulos é preservada;
- não há pontos fixos.

Uma reta pode ser transformada nessa reta se o vetor tiver a mesma direção da reta. No entanto os seus pontos não ficam fixos (Cabrita *et al.*, 2008). A translação associada ao vetor nulo, translação identidade, é uma exceção, pois todos os pontos permanecem fixos.

Se considerarmos uma figura F cuja imagem F´é obtida por uma translação, então existe uma translação que transforma a figura F´na figura F. Esta translação está associada ao vetor com a mesma direção e a mesma medida de comprimento do vetor $\vec{u}$ e com sentido contrário a este. Neste caso diz-se que o vetor é simétrico a $\vec{u}$ e designa-se por $-\vec{u}$ (Veloso, 2012).

Rotação

Para definir rotação deve-se recordar a noção de ângulo orientado pois uma rotação é caracterizada por um centro de rotação O e por um ângulo orientado α.

Um ângulo orientado é um ângulo onde se identifica o lado origem do ângulo, o lado extremidade do ângulo e a orientação (sentido) escolhida. A orientação será positiva se o sentido for contrário ao dos ponteiros do relógio e será negativa se o sentido for o dos ponteiros do relógio (figura 8). Ao usar-se a notação ∠ BAC significa que o lado BA é o lado origem e o lado AC é o lado extremidade (Breda *et al.*, 2011, Veloso, 2012).

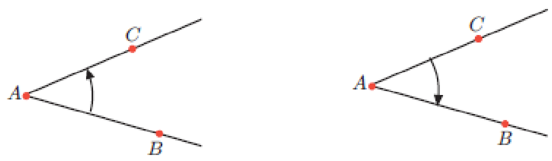


Fig. 8 – Ângulos orientados ∠BAC (no sentido positivo) e ∠CAB (no sentido negativo). Fonte: Breda *et al.*, 2011.

A rotação de centro no ponto O e ângulo orientado α é a transformação do plano, R_O^α, fixa O, e transforma cada ponto P distinto de O, num ponto P´= R_O^α (P), situado na circunferência de centro O e raio dist(O,P). Assim, na figura 9 o triângulo [A´B´C´] é o transformado do triângulo [ABC] pela rotação $R_O^{60°}$.

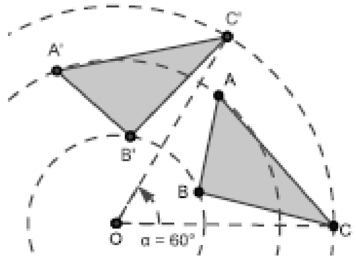


Fig. 9 – Exemplo de uma rotação de centro O e medida de amplitude 60º do triângulo [ABC]. Fonte: Breda et al., 2011.

Na isometria rotação, verifica-se que:

- preserva a orientação dos ângulos;
- admite um ponto fixo, o centro de rotação;
- para um ângulo α cuja medida de amplitude é múltipla de 360^0 obtem-se a transformação identidade.

Duas rotações com o mesmo centro e ângulos que difiram de um múltiplo inteiro de 360º são a mesma transformação geométrica. Uma rotação de 180º chama-se meia-volta (Veloso, 2012).

Reflexão deslizante

A reflexão deslizante é uma isometria que se obtem da composição de uma reflexão associada a uma reta r com uma translação segundo um vetor $\vec{u}$, não nulo, com a direção de r (Cabrita *et al.*, 2008). A ordem pela qual se aplicam as duas transformações é indiferente uma vez que se obtem a mesma imagem.

Na isometria reflexão deslizante verifica-se que

- a orientação dos ângulos não é preservada;
- não tem pontos fixos. Todos os pontos se deslocam, embora a reta *r* fique globalmente invariante.

Na figura 10 pode observar-se um exemplo de reflexão deslizante. Facilmente se verifica que o vetor $\vec{u}$ associado à translação é paralelo à reta *r* (eixo de reflexão).

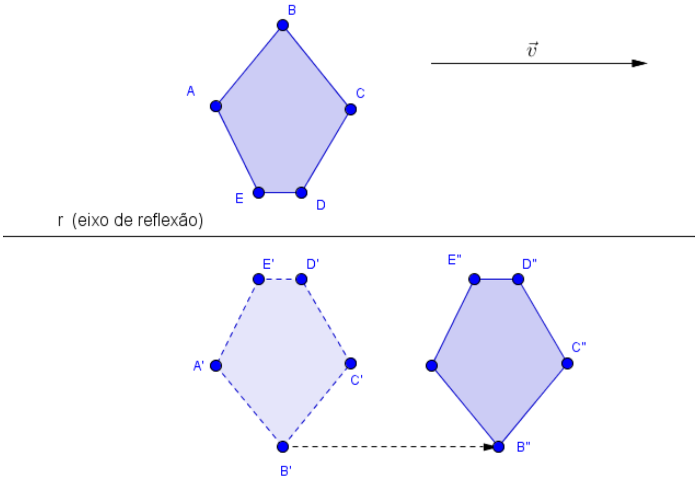


Fig. 10 – Reflexão deslizante (adaptado de Franco, 1997)

Verifica-se que existem diferenças entre as isometrias caracterizadas. Por um lado, a translação e a rotação são isometrias que preservam a orientação dos ângulos, e, por outro, a reflexão e a reflexão deslizante não a preservam. No esquema que se segue (figura 11), apresenta-se a classificação das isometrias do plano euclidiano tendo em conta o número de pontos que fixam e a orientação dos ângulos.

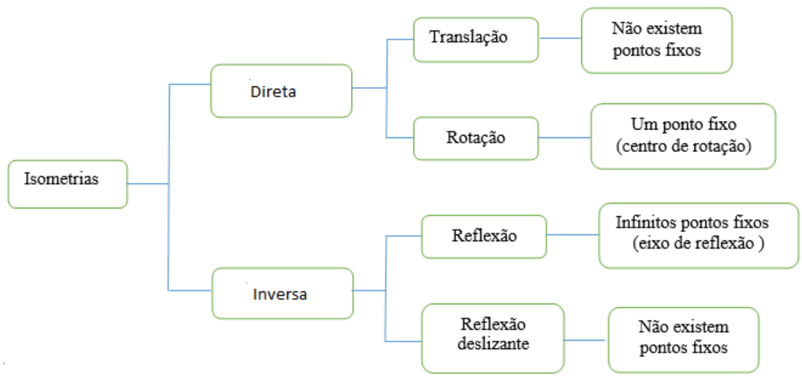


Fig. 11 – Classificação das isometrias (adaptado de Cabrita *et al.*, 2008)

3.2. Composição de isometrias

Ao introduzir a definição de transformação geométrica do plano, definiu-se também uma operação binária, a composição. Como já foi referido, as isometrias são uma categoria de transformações geométricas do plano que preservam as distâncias. Considere-se o conjunto de todas as isometrias do plano. Relativamente à composição de isometrias, verificam-se as seguintes propriedades (Bastos, 2007; Breda *et al.*, 2011; Franco, 1997; Veloso, 2012):

- *Associatividade*: (S∙T) ∙ R = S∙ (T∙ R);
- *Propriedade do fecho*: Se S e T são isometrias também S∙T e T∙S são isometrias;
- *Existência de inversa*: Se a transformação T é uma isometria, a sua inversa T^{-1} também o é;
- *Identidade*: a transformação identidade é uma isometria.

Diz-se que um conjunto tem uma estrutura de grupo, relativamente a uma operação binária definida entre os seus elementos, se as quatro propriedades referidas anteriormente se verificam. Podemos então concluir que o conjunto de todas as isometrias do plano é um grupo relativamente à composição de transformações. No caso das transformações geométricas, a associatividade verifica-se sempre, e a composição de uma transformação com a sua inversa é a identidade. Bastará então verificar que um conjunto qualquer de transformações geométricas é um grupo se for fechado para a composição, e que a inversa de qualquer elemento desse conjunto ainda pertence ao conjunto (Veloso, 2012).

Continuando o estudo das isometrias, interessa agora mostrar que quando se compoem duas isometrias, o resultado é ainda uma isometria. Um dos resultados interessantes desta análise, é sem dúvida o papel fundamental que a reflexão desempenha, pois qualquer das outras três isometrias do plano, translação, rotação e reflexão deslizante, pode ser obtida a partir da composição de reflexões (Breda *et al*., 2011, Veloso, 2012).

Composição de duas reflexões

Na composição de duas reflexões há a considerar a composição quando os eixos são paralelos, e a composição quando os eixos são concorrentes. Considerando o caso particular de duas reflexões de eixos paralelos coincidentes, ter-se-á a transformação identidade.

A composição de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação cujo vetor tem direção perpendicular à direção dos eixos, medida de comprimento igual ao dobro da distância entre os dois eixos e sentido do primeiro para o segundo (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008), como podemos verificar na figura 12.

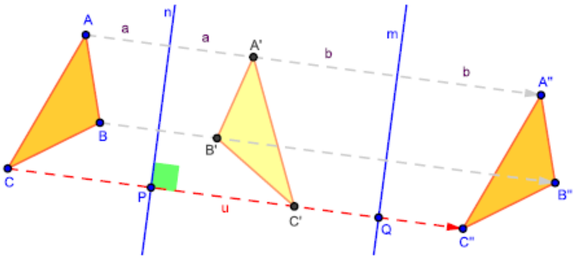


Fig. 12 – Exemplo da composição de duas reflexões de eixos paralelos.
Fonte: Breda et al., 2011

Considerando a composição de duas reflexões de eixos concorrentes (ver figura 13), obter-se-á uma rotação cujo centro de rotação é o ponto de interseção dos eixos e a medida da amplitude de rotação é igual a duas vezes a medida de amplitude do ângulo formado pelos eixos (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008).

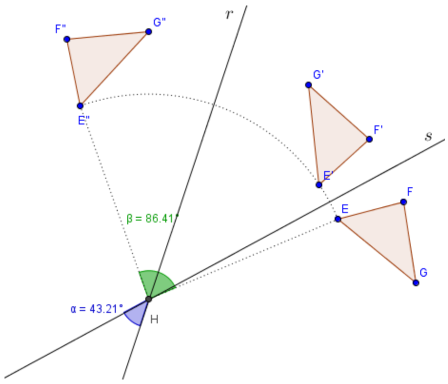


Fig. 13 – Composição de duas reflexões de eixos concorrentes
(adaptado de Veloso, 2012)

Se os eixos forem perpendiculares, a rotação em torno de O é uma meia volta. Daqui resulta que a composição de duas reflexões de eixos concorrentes não é uma reflexão, pois não verifica a propriedade do fecho e, por conseguinte, o conjunto de todas as reflexões não é grupo (Palhares, 2004; Veloso, 2012).

Composição de duas rotações

Quanto à composição de duas rotações devem considerar-se dois casos: a composição com o mesmo centro, e a composição de centros distintos.

No primeiro caso, quaisquer que sejam as medidas de amplitude das rotações e o sentido, obter-se-á uma rotação com o mesmo centro e cujo ângulo tem medida de amplitude igual à soma das medidas de amplitude de cada um dos ângulos associados às rotações consideradas, como se pode observar na figura 14.

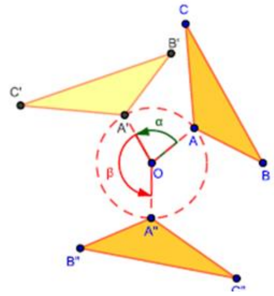


Fig. 14 – Exemplo de composição de duas rotações com o mesmo centro.
Fonte: Breda et al., 2011

Conclui-se, portanto, que neste caso é verificada a propriedade do fecho. Para além desta existe também o elemento nulo, correspondente à rotação de medida de amplitude 0º e um inverso para cada elemento, correspondente à rotação com o mesmo centro e de amplitude simétrica à dada.

Analisar-se-á agora o caso da composição de duas rotações de centros distintos. Considerem-se quaisquer duas rotações de centros distintos: rotação de centro O2 e amplitude de rotação α e a seguir uma rotação de centro O1 e amplitude de rotação β. Obter-se-á uma rotação de centro O e amplitude de rotação $\alpha + \beta$, se $\alpha + \beta$ não for múltiplo de 360º (Franco, 1997; Veloso, 2012). O centro O é obtido a partir da interseção das mediatrizes dos segmentos AA´´ e BB´´ (figura 15).

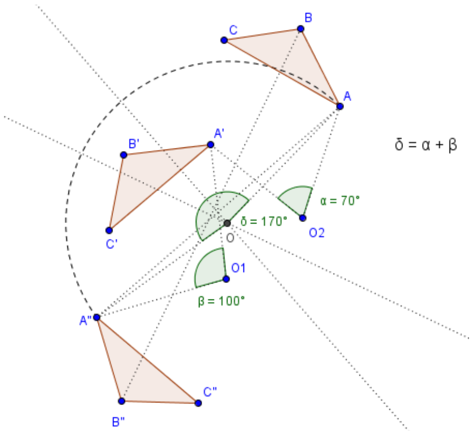


Fig. 15 – Exemplo de composição de duas rotações com centros distintos, com $\alpha+\beta$ diferente de múltiplo de 360° (adaptado de Veloso, 2012)

Veja-se agora, figura 16, o caso de $\alpha + \beta$ ser múltiplo de 360º. Neste caso obtem-se uma translação cujo vetor é definido pelo segmento orientado AA´´ sendo A´´obtido pela rotação de centro O2 seguida da rotação de centro O1.

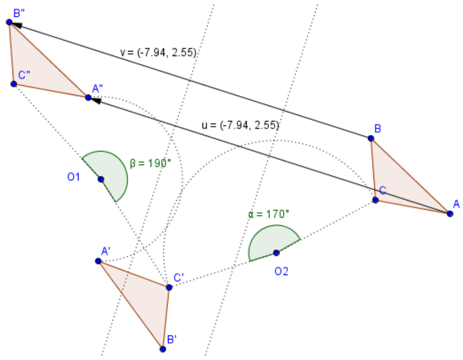


Fig. 16 – Exemplo de composição de duas rotações com centros distintos, com $\alpha+\beta$ múltiplo de 360° (adaptado de Veloso, 2012)

Retira-se então que, a composição de duas rotações de centros distintos será uma rotação se $\alpha + \beta$ não for múltiplo de 360º, e será uma translação no caso de $\alpha + \beta$ ser múltiplo de 360º. Daqui resulta que a composição de duas rotações nem sempre verifica a propriedade do fecho e, por conseguinte, o conjunto de todas as rotações não é grupo (Palhares, 2004; Veloso, 2012).

3.3. Simetrias

A simetria, na linguagem corrente não escolarizada, é um conceito vago que significa harmonia de proporções, qualquer coisa de indefinido que torna os objetos e as figuras visualmente agradáveis (Veloso, 2012). Em Portugal, tem-se adotado a designação simetria axial para a transformação reflexão (Bastos, 2006; Veloso, 2012). Por isso, o ponto $P'=R_l(P)$ costuma chamar-se ponto simétrico de P em relação ao eixo de reflexão.

No entanto, o ponto $P'= R_l(P)$ deve chamar-se de ponto transformado (ou imagem) de P por meio da reflexão de eixo *l* (Veloso, 2012). Para *Breda et al.* (2011) e Veloso (2012), uma isometria S é uma simetria para a figura plana F se fixa (deixa invariante) essa figura, isto é, se S(F)=F. Portanto, quando se fala de simetria fala-se de simetria de uma figura (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008; Veloso, 2012). Assim, encontrar as simetrias de uma figura plana corresponde a encontrar as isometrias do plano que fixam ou deixam invariante essa figura, isto é, consiste em procurar cada uma das isometrias do plano – translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante – bem como composições destas (Veloso, 2012).

Qualquer que seja a figura, existe sempre uma transformação geométrica que a deixa invariante, a identidade. Uma vez que a composição de duas simetrias de uma dada figura F é ainda uma simetria de F e que a transformação inversa de uma simetria de F é ainda uma simetria de F, o conjunto constituído por todas as simetrias de F munido da operaçãoo composição de funções, constitui o grupo das simetrias de F (Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

De acordo com Breda *et al.* (2011) e Veloso (2012), quando a reflexão numa reta *l* faz parte do grupo de simetrias de uma figura F, diz-se que a figura possui simetria axial e que *l* é um eixo de simetria dessa figura. Ainda para estes autores, uma figura F possui simetria de rotação de ordem n (n >1) quando o grupo de simetrias dessa figura possui n rotações com centro num mesmo ponto (centro de rotação) e de amplitudes $\left(\frac{360 \times k}{n}\right)$, k = 1, ..., n. Ainda neste âmbito, os mesmos autores defendem que uma figura possui simetria central se a rotação de amplitude 180º faz parte do grupo de simetrias dessa figura. Por sua vez, diz-se que uma figura tem simetria de translação quando é possível deslocar todos os seus pontos segundo um mesmo vetor, não nulo, e ela permanecer invariante.

Face à enorme variedade de exemplos de simetrias, artísticas ou não, este trabalhio centra-se apenas nos grupos de simetrias discretos: os grupos de padrões do plano, os grupos das figuras que se repetem numa só direção e os grupos finitos. Segundo Bellingeri *et al.* (2003) e Veloso (2012) os grupos discretos dividem-se em três grandes categorias:

(1) frisos – grupos infinitos que contêm translações numa só direção;

(2) rosáceas – grupos finitos que não contêm translações;

(3) “papel de parede”– grupos infinitos que contêm translações em direções diferentes.

Serão objeto de estudo as simetrias em composições de isometrias, em frisos e em rosáceas. As opções curriculares tomadas têm em vista o estudo de transformações geométricas que torne possivel a sua exploração, em conformidade com o estabelecido no PMEB (Ponte *et al.*, 2007).

Frisos

Em Matemática, o termo padrão é usado quando se pretende procurar ordem ou estrutura, e por isso os termos regularidade, repetição e simetria estão muitas vezes presentes (Vale, 2012). Os padrões, pela sua natureza constituem o contexto privilegiado para trabalhar a Matemática, e a forma de encorajar os alunos a explorar ideias importantes como sejam a conjetura e a generalização (NCTM, 2007; Vale, 2009).

A exploração de padrões, mais do que uma característica da Matemática é uma componente transversal que permite estabelecer conexões entre vários conceitos matemáticos. São vários os investigadores que reconhecem a importância da descoberta de padrões como uma atividade que proporciona experiências de aprendizagens significativas e motivantes para os alunos (Beker & Rivera, 2005; Vale *et al.*, 2006; Vale & Barbosa, 2009; Vale, 2009).

No que respeita ao PMEB (2007), a palavra padrão aparece várias vezes tanto no contexto numérico como no contexto geométrico. No tema Geometria, é feita referência aos padrões geométricos no 1º ciclo, onde é sugerido que os alunos devem desenhar figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical, construir frisos, identificar simetrias e construir pavimentações com polígonos. No 2º ciclo, as orientações sugerem que os alunos devem completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias, identificar as simetrias de frisos e rosáceas bem como construi-los. Para o 3º ciclo, refere que os alunos devem explorar aspetos relacionados com simetrias, bem como usar transformações geométricas para construir frisos, rosáceas e pavimentações.

A palavra padrão no campo geométrico está associada à repetição, de forma regular, de uma figura inicial, denominada de motivo ou elemento do padrão, obedecendo a uma determinada disposição que caracteriza o padrão (Veloso, 2012).

Palhares (2004) define friso da seguinte forma*: "Se considerarmos uma figura, seja ela qual for, e a repetirmos sucessivamente, por aplicação tanto de* $T_{\vec{u}}$ *como por* $T_{-\vec{u}}$ *, obtemos uma sucessão de figuras na mesma direção. Se a isto impusermos que nunca exista uma primeira ou uma última, esta sucessão de figuras permanece invariante face à aplicação de* $T_{\vec{u}}$ *(ou de* $T_{-\vec{u}}$ *). A este tipo de figura global chama-se um friso. Trata-se de uma figura que permanece invariante por efeito de uma translação em particular (ou da sua inversa)* "(p.341).

Segundo Breda *et al.* (2011), *"Um friso é uma figura que tem por grupo de simetrias um conjunto de isometrias do plano que fixam uma recta, dita centro do friso, e em que as* *translações deste grupo constituem um subgrupo cíclico infinito, ou seja, as translações têm todas a mesma direção"* (p. 101).

Veloso (2012) define friso como *"qualquer figura plana cujo conjunto de simetrias verifique a seguinte condição: existe uma simetria de translação T de módulo mínimo ≠ 0, tal que as simetrias de translação da figura são todas as potências de expoente inteiro de T. Daqui resulta imediatamente que as simetrias de translação de um friso têm todas uma única direcção"* (p.75).

Da combinação das quatro simetrias possíveis nos frisos, podem definir-se sete tipos de frisos diferentes (Martin, 1982; Breda *et.al*., 2011; Cabrita *et al*., 2008; Veloso, 2012). Têm sido propostas diferentes notações para os frisos (Veloso, 2012), sendo a adotada por Breda *et al.* (2011) a que é utilizada no livro de referência de Washburn and Crown e que se descreve a seguir. A cada tipo de friso é atribuído um conjunto de quatro símbolos pxyz, do seguinte modo (Breda *et al*., 2011; Veloso, 2012):

(1) A primeira letra é sempre p

(2) x = m, se o friso tiver simetrias de reflexão de eixo vertical

x = 1, se o friso não tiver simetrias de reflexão de eixo vertical

(3) y = m, se o friso tiver uma simetria de reflexão de eixo horizontal

y = a, se o friso tiver simetrias de reflexão deslizante

y = 1, se não se verificar nenhum dos dois casos anteriores

(4) z = 2, se o friso tiver simetrias de meia volta

z = 1, se o friso não tiver simetrias de meia volta

O Fluxograma de Washburne and Crowe, e que se encontra ilustrado na figura 17 permite determinar o tipo de um dado friso.

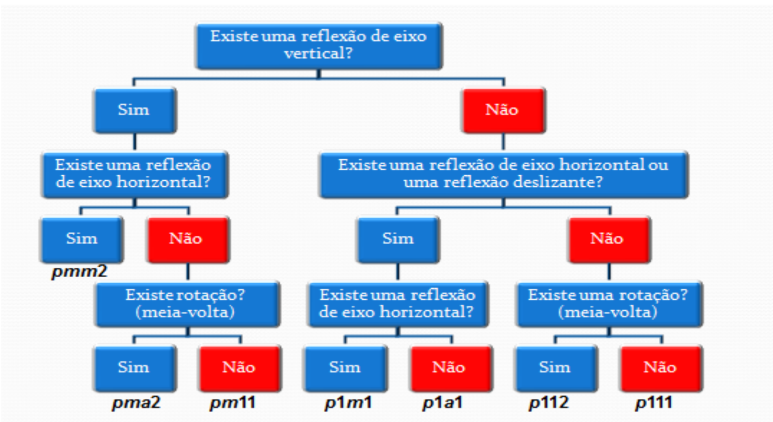


Fig. 17 – Fluxograma de Washburn and Crowe para a determinação do tipo de um dado friso

A seguir apresenta-se um exemplo de cada tipo de friso (imagens retiradas de Breda *et al.* , 2011) e faz-se uma breve descrição da sua construção.

- Friso do grupo p111 (figura 18): É o friso mais simples e contém apenas simetrias de translação. É gerado pela translação, $T_{\vec{u}}$, ou seja, é o conjunto constituído por $T_{\vec{u}}$, por $T_{-\vec{u}}$ e por todas as translações obtidas por composição destas.

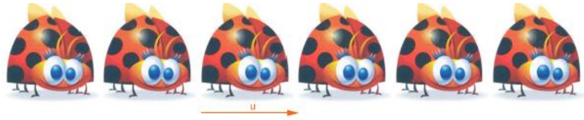


Fig. 18– Exemplo de um friso do tipo p111 (Breda *et al., 2011:102)*

- Friso do grupo p112 (figura 19): O grupo é gerado pela translação $T_{\overrightarrow{2u}}$ e pela rotação de centro em P e amplitude 180º. O friso pode ser obtido pelas translações segundo $\overrightarrow{2u}$ e segundo $-\overrightarrow{2u}$, e por todas as tanslações que são composição destas.

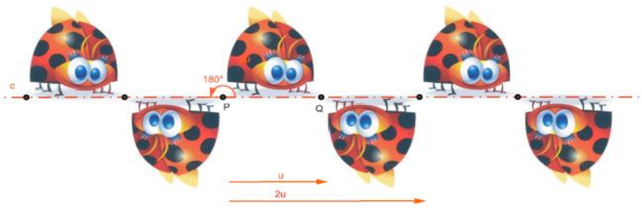


Fig. 19 – Exemplo de um friso do tipo p112 (Breda *et al.,2011:103)*

- Friso do grupo p1a1 (figura 20): O grupo é gerado pela reflexão deslizante de eixo c e segundo $\overrightarrow{2u}$. O friso pode ser obtido pelas translações segundo $2\vec{u}$ e segundo $-\overrightarrow{2u}$, e por todas as translações que são composição destas.

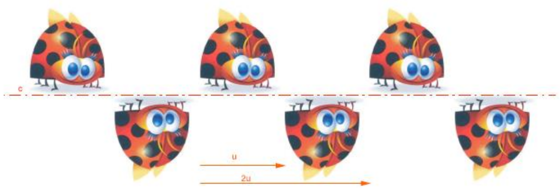


Fig. 20 – Exemplo de um friso do tipo p1a1(Breda *et al., 2011:104)*

- Friso do grupo p1m1: O grupo é gerado pela reflexão de eixo *c* e pela translação segundo $\vec{u}$ (figura 21). O friso pode ser obtido pelas translações segundo $\vec{u}$ e segundo $-\vec{u}$, e por todas as tanslações que são composição destas.

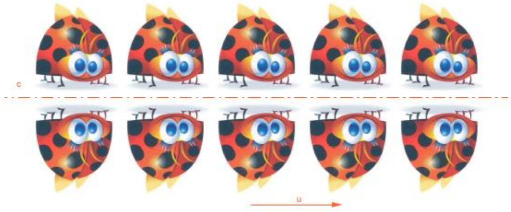


Fig. 21 – Exemplo de um friso do tipo p1m1(Breda *et al., 2011:104)*

- Friso do grupo pm11 (figura 22): O grupo é gerado pela reflexão de eixo *l* e pela translção segundo $\vec{u}$. Assim, as simetrias deste tipo de friso são para além da reflexão de eixo *l* e das translações segundo $\vec{u}$ e segundo $-\vec{u}$, e por todas as isometrias que são composições destas.

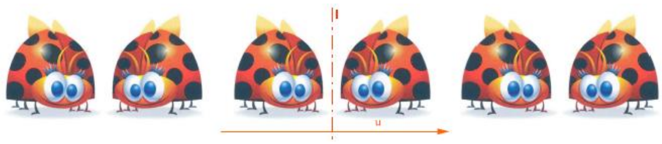


Fig. 22 – Exemplo de um friso do tipo pm11(Breda *et al., 2011:106)*

- Friso do grupo pma2 (figura 23): O grupo é gerado pela rotação de centro *m* e amplitude 180º, pela reflexão de eixo *l* e pela translação segundo $\overrightarrow{2u}$. As simetrias deste tipo de friso são para além da rotação de centro *m* e amplitude 180º, da reflexão de eixo *l* e das translações segundo $\overrightarrow{2u}$ e segundo $-\overrightarrow{2u}$ e por todas as isometrias que são composições destas.

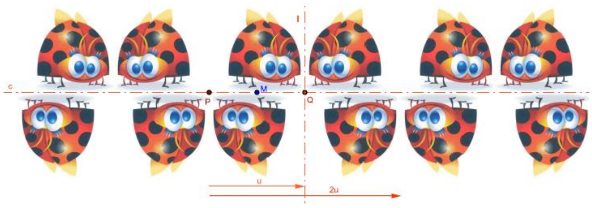


Fig. 23 – Exemplo de um friso do tipo pma2(Breda *et al., 2011:107)*

- Friso do grupo pmm2 (figura 24): O grupo é gerado pelas reflexões de eixo *l* e eixo *c* e pela translação segundo $\vec{u}$. As isometrias que fazem parte deste grupo são as translações segundo $\vec{u}$ e segundo $-\vec{u}$, reflexões de eixo *l* e eixo c e todas as obtidas por composição destas. É de observar que do grupo de simetrias deste grupo fazem parte rotações de amplitude 180º (meias voltas).

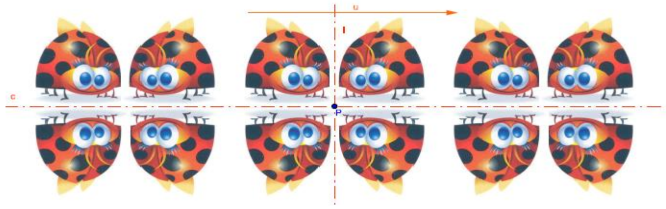


Fig. 24 – Exemplo de um friso do tipo pmm2 (Breda *et al., 2011:105)*

Rosáceas

Breda *et al.* (2011) e Veloso (2012) definem uma rosácea como uma figura plana, cujo conjunto de simetrias é finito e não tem simetrias de translação nem de reflexão deslizante. Tem por grupo de simetria o grupo cíclico C_n ($n \geq 1$, n rotações) ou o grupo diedral D_n ($n \geq 1$, n rotações e n reflexões).

Uma forma simples de obter uma rosácea com grupo de simetrias cíclico C_n (figura 25), é partir da divisão de um círculo em n setores congruentes.

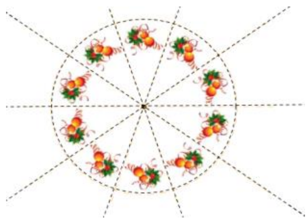


Fig. 25 – Exemplo de uma rosácea com grupo de simetria C_{10} (Breda *et al., 2011:100)*

Para construir uma rosácea com grupo de simetrias D_n (figura 26), divide-se um círculo em 2n setores congruentes, considerando as 2n semirretas fronteira dos n setores.

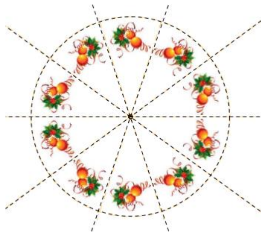


Fig. 26 – Exemplo de uma rosácea com grupo de simetria D_5 (Breda *et al., 2011:100)*

3.4. O processo de ensino e aprendizagem das isometrias

Educar para esta sociedade significa dominar e transcender os recursos tecnológicos, desenvolver a capacidade de questionar, de analisar criticamente e tomar decisões, de desenvolver competências para enfrentar situações inesperadas, permitindo ao indivíduo, harmonizar os conteúdos aprendidos na escola com a cultura de um mundo globalizado (Morelatti, 2001). De uma educação que enfatiza a transmissão de conteúdos deve-se evoluir para uma educação que cria ambientes de aprendizagem em que o aluno é agente ativo deste processo, selecionando informação, processando e construindo o seu conhecimento por meio da realização de atividades significativas e contextualizadas (Morelatti, 2001).

Sendo a Matemática usada de forma crescente e extensível a qualquer setor da sociedade, a escola não pode deixar de a abordar de forma adequada, promovendo uma relação positiva com a disciplina e a confiança dos alunos nas suas capacidades pessoais de trabalhar com ela (Ponte *et al.*, 2007).

A Geometria tem sido considerada, em Portugal, um parente pobre da Álgebra Linear devido ao pouco interesse para o prosseguimento de estudos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 67). A escola não tem dado a devida relevância a esta área (Abrantes, 2005; Cabrita *et al.*, 2009; NCTM, 2007) e, tal como referem Breda *et al.* (2011), tem sido, normalmente, relegada para segundo plano, dando pouco espaço à ação dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos. No entanto, a Geometria tem vindo a afirmar-se como um dos temas principais do currículo da Matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da Matemática (NCTM, 2007). Breda *et al.* (2011) referem que *"a Geometria contribui com um vocabulário geométrico que se vai adquirindo, mas, a par disso, espera-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão dos conceitos e suas relações, da análise da informação, de resolução de problemas, de comunicação, mas também de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações."* (p.15).

No ensino e na aprendizagem da Geometria, as transformações geométricas desempenham um papel importante e o seu estudo justifica-se, por um lado, pela relevância que elas têm tido na história da Matemática recente e, por outro, porque constituem um campo rico de conexões e uma ferramenta para demonstrar e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço (Bastos, 2007). O NCTM (2007) preconiza que os alunos devem aprofundar, ao longo dos anos de escolaridade obrigatória, conhecimentos sobre transformações geométricas, explorando alguns dos "movimentos" que se associam às translações, reflexões, reflexões deslizantes e rotações, tornando-os gradualmente mais formais e sistematizados. As transformações revelam-se igualmente úteis para ajudar os alunos a compreender a semelhança e a simetria. O uso de software de geometria dinâmica pode contribuir para ampliar as representações dos alunos, sendo a sua utilização recomendada por diversos autores (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2009; NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007; Ribeiro, 1996; Veloso, 2012). A tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações ao fornecer um meio de visualizar noções geométricas sob múltiplas perspetivas (NCTM, 2007).

O paradigma construtivista tem subjacente a ideia de que o conhecimento é construído pelo aluno, fruto de experimentação e pesquisa, podendo ser induzido por intermédio do estímulo à dúvida e não pelo fornecimento de respostas, por parte do professor (Ribeiro, 2005). O pilar fundamental deste paradigma assenta em ambientes de aprendizagem contextualizados, que permitem que o aluno seja agente ativo no processo de aprendizagem, na interação com o saber e com os outros, de preferência mediada pela tecnologia (Mergel, 1998; Morelatti, 2001; Mucha & Cruz, 2004; Ribeiro, 2005; Ribeiro & Cabrita, 2006).

A conceção construtivista está a ganhar adeptos devido às reformas e transformações que estão a decorrer na área educativa em vários países (Carreteiro, 1997; Ribeiro, 2005). Valoriza-se a atividade criativa dos alunos e as suas descobertas pessoais, acredita-se nas suas motivações intrínsecas, enfatiza-se o valor do erro chegando a considerá-lo útil na medida em que, por essa via, se criam situações e oportunidades de discussão, reflexão, contestação, negociação e aceitação, processos que conduzem a aprendizagens com significado (Ribeiro, 2005). Assim, deixa de fazer sentido atuações pedagógicas de sentido único – do professor, emissor, para o aluno recetor, defendendo-se que ambos se assumam como EMEREC´s: emissores/recetores permanentes de sinais, estímulos e informação, sobre a qual o indivíduo constrói o conhecimento (Cloutier, 1975). O Emerec é o ponto de partida e o ponto de chegada da informação. Não é apenas informado, ele próprio informa e se informa (Cloutier, 1975).

A influência do paradigma construtivista é visível no PMEB (Ponte *et al.*, 2007). Com efeito, concebe-se a Matemática como um processo de imersão dos alunos em ambientes ricos, e defende-se que, por intermédio de atividades significativas, integradoras e socializadoras, se promovem aprendizagens que lhes sejam significativas e úteis do ponto de vista prático, formativo, cultural e de cidadania (Ponte *et al.*, 2007).

O mesmo documento refere ainda, que, o recurso a programas computacionais de geometria dinâmica favorece a compreensão dos conceitos e relações geométricas no 2º ciclo e deve ser utilizado em tarefas exploratórias e de investigação no 3º ciclo. As indicações curriculares dão ênfase especial à utilização de tecnologia em sala de aula, sendo o seu uso *"particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados"(*Ponte *et al., 2007*,p.9).

Laborde (2000) defende que o uso da tecnologia permite, a todos os alunos, visualizar fenómenos matemáticos, fazer conexões, manipular e realizar experiências: *"The possibility of real manipulation allowed by technology offers an acces to mathematics to more students"(id, p.11).* Várias investigações realizadas (Guzman, 2003; Junqueira, 2001; Ponte, 2003; Ribeiro & Cabrita, 2006) permitem concluir que a geometria é uma das áreas da Matemática onde se pode ter mais sucesso quando se pretende uma abordagem mais criativa, autónoma e rica sob o ponto de vista de resolução de problemas e de investigação.

Subjacente à utilização das tecnologias na sala de aula, nomeadamente do computador, está um paradigma de construção de conhecimento que Papert (1991) denominou de construcionista. Papert usou esse termo para mostrar outro nível de construção do conhecimento. Quando o aluno constrói um objeto de seu interesse, como uma obra de arte, um relato de experiência ou um programa de computador, constrói algo para o qual está bastante motivado e, como diversos autores defendem, o envolvimento afetivo torna a aprendizagem mais significativa (Valente, 1997). Na interatividade do aluno com o computador, é o discente que assume o comando do processo de construção do seu conhecimento, tendo o professor um papel de facilitador e mediador de aprendizagens, respeitando o estilo e o ritmo de cada um (Papert, 1991).

Por outro lado, o recurso ao computador, em geral, e a ambientes dinâmicos de geometria dinâmica, ADGD, em particular, contribuem para uma abordagem mais experimental, mais centrada na resolução de problemas e investigações onde a exploração de conceitos, a formulação e a verificação de conjeturas, sustentadas na comunicação e na argumentação se consideram o núcleo central da atividade dos alunos (Guzman, 2003; Moreira, 2001). A existência de ambientes capazes de proporcionar a manipulação dos entes matemáticos e a realização de tarefas com um grau de complexidade superior às que eram executadas em ambientes clássicos (Laborde, 2001) trouxe para a sala de aula uma variedade de possibilidades, na medida em que alargou a escala de problemas acessíveis aos alunos e reduziu o tempo de execução de tarefas rotineiras, alargou o tempo para a concetualização e modelação (NCTM, 2007).

Neste estudo, a proposta didática implementada junto dos alunos integrou o paradigma construcionista de Papert. De acordo com as orientações dadas pelo NCTM (2007), realçando que os alunos poderão aprender as características principais das transformações geométricas isométricas com recurso ao ADGD, escolheu-se o GeoGebra por constituir um excelente recurso para o estudo da geometria. Este software para além de ser gratuito, possibilita aos alunos visualizar, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos, de forma interativa, atrativa e intuitiva.

CAPÍTULO II

MÉTODO

Neste capítulo apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas adotadas neste estudo. É apresentado, num esquema, o *design* de investigação e as respetivas técnicas e instrumentos de recolha de dados; procede-se à caracterização geral da população à qual pertencem os participantes no estudo e, mais em particular, dos alunos caso; caracterizam-se as técnicas e os intrumentos de recolha de dados e descreve-se o estudo; Para finalizar explicita-se a forma como foram tratados os dados e serão apresentados no capítulo seguinte.

1. Opções metodológicas

A opção por um método deve fazer-se em função da natureza do problema a estudar (Pacheco, 2005; Serrano, 2004), pelo que, de acordo com os objetivos pretendidos, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa.

Um modelo de investigação qualitativa reveste-se de cinco características essenciais (Bogdan & Biklen, 1994), a que se procurou atender no âmbito deste trabalho: (1) os dados são recolhidos no ambiente natural dos participantes, sendo o investigador o instrumento principal desses dados; (2) os dados recolhidos são de natureza descritiva; (3) há preferência pelos processos em detrimento dos resultados ou produtos; (4) a análise dos dados é indutiva; (5) dá-se importância às perspetivas dos participantes.

Numa investigação qualitativa, os dados recolhidos são ricos em fenómenos descritivos (Bogdan & Biklen, 1994), sendo o objetivo de uma investigação dessa natureza perceber os fenómenos na íntegra e no contexto em que ocorrem (Coutinho, 2011). O investigador qualitativo deve compreender, de forma aprofundada, o que os sujeitos pensam, o que implica que o investigador passe períodos de tempo alargados com os sujeitos, no seu contexto natural, propondo questões de natureza aberta e garantindo os registos das suas respostas (Barbosa, 2009) e, para a obtenção e análise dos dados utiliza, de preferência, técnicas de observação, cujo objetivo é recolher os dados no meio natural em que ocorrem, sendo a sua participação ativa (Coutinho, 2011).

Na perspetiva desta *abordagem* qualitativa, a presente investigação orientou-se por um *design* de estudo de caso. Este tipo de *design* de investigação (Ponte, 1994,

2003) tem vindo a ser cada vez mais utilizado no campo da investigação em educação por oferecer inúmeras possibilidades de estudo, compreensão e melhoria das realidades social e profissional (Serrano, 2004). Para Ponte (2003), o estudo de caso utiliza-se para compreender melhor a particularidade de uma dada situação ou um fenómeno em estudo e a sua escolha no campo educativo tem como intuito, explicar, descrever, explorar e compreender em profundidade contextos de ensino e de aprendizagem (Bodgan & Biklen, 1994; Yin, 2005); foca-se numa unidade particular, necessariamente inserida num determinado contexto (Ponte, 2003; Serrano, 2004) e sobre a qual há pretensão de responder a questões do tipo *"como"* ou *"porquê"*, nos aspetos que interessam ao investigador (Ponte, 2003; Yin, 2005;).

A característica que melhor identifica e diferencia um estudo de caso é o fato de envolver o estudo pormenorizado de uma identidade bem definida que, poderá ser um indivíduo, um pequeno grupo, uma comunidade, um processo, uma política ou um acontecimento imprevisto (Coutinho & Chaves, 2002), Pardal & Lopes, 2012): o caso. Esta linha também é seguida por Ponte (2003), que considera que o estudo de caso é *"uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse"* (p.2).

O presente trabalho será enquadrado num estudo de caso múltiplo com características essencialmente exploratórias, realizado no seu contexto natural – a sala de aula, com o intuito de compreender e interpretar o processo que envolve a interação dos alunos com a proposta didática.

2. Esquema de investigação

As principais etapas da investigação e as respetivas técnicas e instrumentos de recolha de dados estão sintetizadas na figura 27, e que serão, adiante, alvo, de uma descrição mais promonerizada.

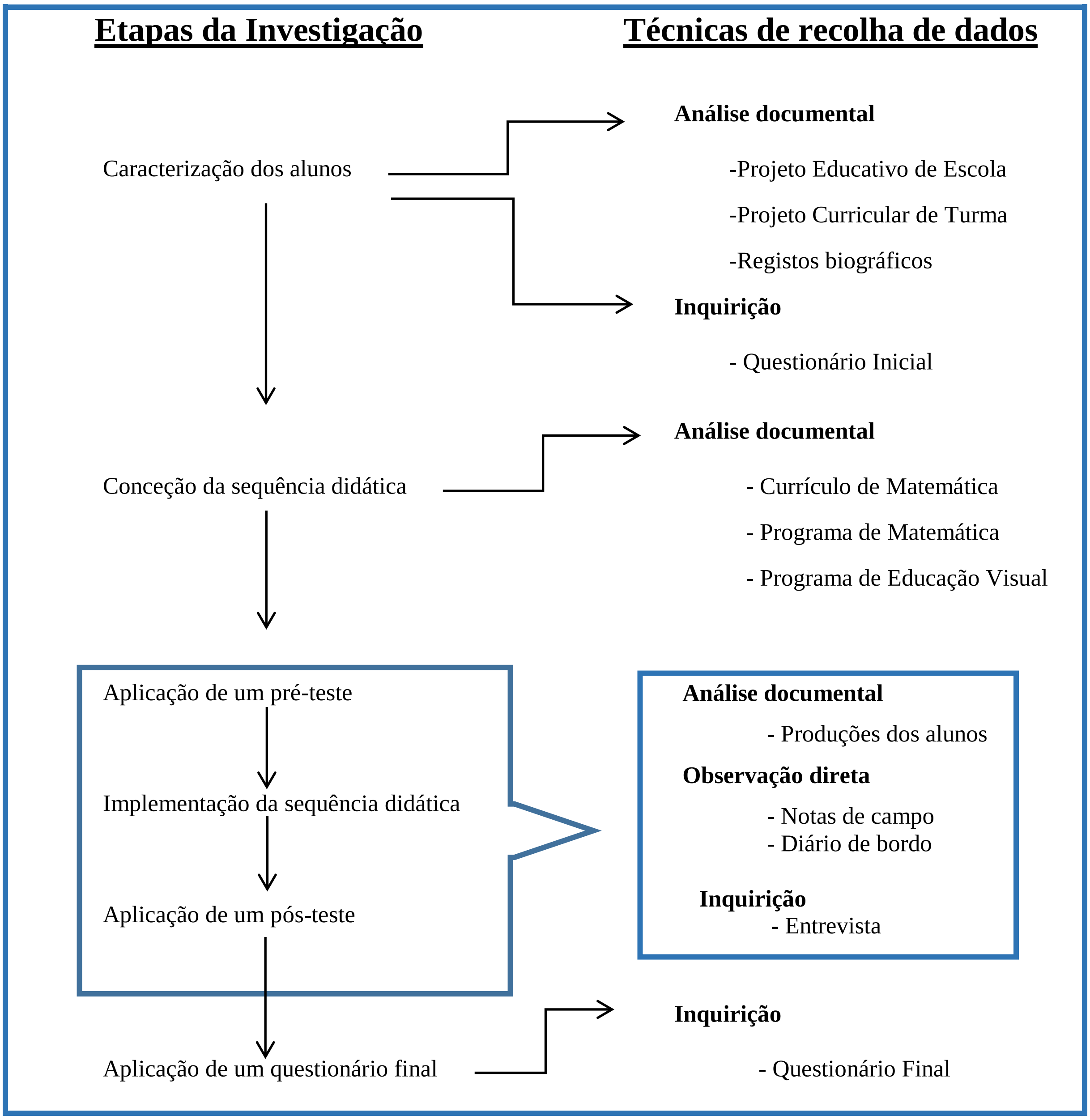


Fig. 27 – Esquema representativo do design de investigação

3. Participantes no estudo

Este estudo foi desenvolvido numa turma do 8.º ano de escolaridade de uma escola secundária com terceiro ciclo, sede de um agrupamento de escolas do distrito de Viseu no ano letivo 2011/2012. Neste contexto, foram considerados como participantes a professora/investigadora, os alunos da turma e, em particular, os alunos caso cujo desempenho, em pormenor, foi objeto de estudo. A professora/investigadora teve uma participação ativa, dado que planeou e conduziu todos os acontecimentos decorrentes desta investigação.

3.1. Caracterização da escola e do meio envolvente

Para caracterizar a escola e o meio envolvente reorreu-se ao Projeto Educativo da Escola. O agrupamento de escolas situa-se num concelho predominantemente rural, com fraca densidade populacional e com forte tendência para a emigração. A economia baseia-se na agricultura de subsistência, pequeno comércio, construção civil e serviços. A pouca indústria existente está relacionada com o mobiliário, o granito e os alumínios. Há uma percentagem significativa da população que emigra sazonalmente.

As crianças e jovens que frequentam as escolas do agrupamento provêm de estratos sociais diferenciados, registando-se casos com carências alimentares, afetivas e familiares, e forte tendência para o abandono escolar. Alguns encarregados de educação desvalorizam a educação e o estudo, pelo que não acompanham o percurso escolar dos seus educandos.

No final do ano letivo de 2010/2011, ano letivo anterior ao que se reporta este estudo, foi feita a fusão da escola secundária com as restantes escolas do concelho.

À data do estudo, o agrupamento tinha cerca de 800 alunos, distribuídos do pré escolar ao 12º ano: 5 turmas com educação pré-escolar e 1º ciclo; 6 turmas do 2º ciclo; 8 turmas do 3º ciclo; 5 turmas do ensino secundário e 2 turmas do ensino profissional.

As 8 turmas do 3º ciclo estavam distribuídas por dois edifícios: Escola Básica dos 2º e 3º ciclos do Ensino Básico e Escola Secundária com 3º Ciclo do Ensino Básico. Na Escola Secundária, escola onde se desenvolveu o estudo, os alunos do 3º ciclo encontravam-se distribuídos por duas turmas do oitavo ano e duas turmas do nono ano, e na Escola Básica, duas turmas do sétimo ano e duas turmas do oitavo ano.

Como já foi referido, um dos problemas concretos da escola prende-se com as dificuldades de aprendizagem da maioria dos alunos e a falta de acompanhamento dos alunos por parte dos encarregados de educação. Estes problemas repercutem-se no sucesso escolar dos alunos, na maior parte das disciplinas, verificando-se insucesso já ao nível do 2º ciclo, incluindo a Matemática.

As atividades letivas na escola sede concentravam-se num único pavilhão. Cada sala possuía um computador, ligado à internet, e um videoprojetor, fruto da implementação do plano tecnológico, o que permitia a utilização dos meios informáticos para apoio às respetivas atividades. Duas das salas possuíam também quadro interativo. Na escola existia ainda uma sala equipada com sete computadores, destinada prioritariamente ao grupo de informática mas que poderia ser requisitada, com a devida antecedência, por docentes de outros grupos disciplinares; outra sala equipada com nove computadores ligados à internet e que podiam ser utilizados quer para a realização de atividades letivas quer para atividades lúdicas, por parte dos docentes e discentes; e na biblioteca da escola, estavam disponíveis cinco computadores para a realização de trabalhos com recurso a pesquisa que necessitasse de suporte informático, ou ainda no desenvolvimento de atividades lúdicas.

3.2. A turma

A escolha da turma não obedeceu a um critério específico pelo facto de ser a única turma do 3º ciclo do ensino básico atribuída à investigadora, que estava bastante familiarizada com a mesma, dado que era a diretora de turma desde o sétimo ano. Tal fato revelou-se favorável ao desenvolvimento deste trabalho, pois para uma investigação de natureza qualitativa, torna-se necessário que o investigador faça parte ou esteja familiarizado com o contexto em estudo.

Para caraterizar a turma recorreu-se ao registo biográfico dos alunos, ao projeto curicular de turma e aos dados obtidos no questionário inicial (anexo 1). A turma era constituída por 14 alunos, 10 rapazes e 4 raparigas, e a média das idades era 13 anos. À exceção de um aluno, todos os outros frequentavam o 8º ano pela primeira vez, havendo um com uma retenção ao longo do seu percurso escolar. Todos os alunos residiam em localidades próximas da escola, deslocando-se a pé ou de autocarro até à escola. No que respeita às aspirações académicas, a maior parte pretendia prosseguir estudos, um que pretendia frequentar até ao 12º ano, e dois indecisos.

Os alunos desta turma eram considerados empenhados e trabalhadores, mas conversadores e pouco competitivos. Não participavam, por iniciativa própria, em competições ao nível de escola ou a nível nacional. Quando a investigadora informou a turma que pretendia levar a cabo um estudo sobre isometrias e que seriam os principais intervenientes, sentiu-se alguma apreensão. A reação imediata foi perguntar se outros alunos iriam ter acesso ao que iam executar. Depois da explicação dada pela investigadora, os alunos aceitaram de bom grado o desafio.

À exceção de dois alunos, os restantes eram colegas de turma desde o 5º ano, o que proporcionava uma grande cumplicidade entre eles. Dada a faixa etária dos alunos no ano letivo a que se reporta este estudo, os seus interesses e as motivações divergiam dos objetivos académicos, no entanto, dada a dimensão reduzida da turma, a maior parte das vezes as situações eram controladas. Preferiam trabalhar em grupo na sala de aula; aulas com recurso às novas tecnologias; não gostavam de aulas expositivas e agradava-lhes a interação professor/aluno e aluno/aluno. Todos os alunos tinham um computador portátil e, na maioria das vezes, utilizavam-no para atividades lúdicas. Alguns dos alunos tinham por hábito utilizar o seu portátil na sala de aula, em atividades propostas pelos vários docentes do conselho de turma, nomeadamente a Matemática.

Alguns dos alunos evidenciavam ter feito uma leitura prévia antes de os conteúdos serem abordados na aula de Matemática. Relativamente à Geometria, os alunos indiciavam conceitos bem consolidados e facilidade em realizar conexões. No que respeita à opinião dos alunos sobre Matemática, apenas quatro a indicavam como sendo a preferida, e sete como sendo a disciplina onde sentiam mais dificuldade. Destes sete alunos, destacam-se duas alunas com bom desempenho a Matemática.

No item do questionário direcionado para a Matemática, a maior parte revelou gostar da disciplina (apesar de não ser a preferida), não sendo evidente a falta de ansiedade nas aulas. A geometria é uma área apreciada por pouco mais de metade dos alunos, sendo no entanto, considerada relevante em termos de importância (tabela 1).

Tabela 1 – Relação com a Matemática

	Não tenho opinião	discordo totalmente	não concordo	concordo	concordo totalmente
Gosto de Matemática	1	1	2	6	4
Gosto de geometria	2	2	1	3	6
A geometria não serve para nada	1	10	3	0	0
Nas aulas de Matemática sinto-me ansioso	6	5	3	0	0

Indagou-se quanto ao significado que os alunos atribuiam a *"ser criativo"*, tendo surgido respostas comuns como: "ter imaginação", "ter ideias" e "criar coisas" e outras, como "ter talento" e "nasce com alguns" (tabela 2). Apenas cinco dos alunos se consideraram criativos apresentando como justificação o facto de *"criar coisas diferentes", "ter ideias originais", ter ideias diferentes dos colegas" e " ter imaginação".*

Tabela 2 – Significado atribuído a *"criatividade"*

Ter imaginação	3	Criar coisas diferentes	2
Ter ideias originais	2	Ter ideias novas	1
Ter ideias diferentes	2	Ter talento	1
Criar coisas novas	2	Nasce com alguns	1

Quanto às disciplinas onde os alunos consideram poderem ser criativos, indicam a Matemática, na geometria; Educação Visual, na criação dos desenhos; Educação Tecnológica, na criação de novos objetos; e Língua Portuguesa na elaboração dos textos ou das poesias (tabela 3)

Tabela 3 – Dsciplinas onde é possível ser criativo

Educação Visual	7
Educação Tecnológica	3
Matemática	2
Língua Portuguesa	2

No entanto, a maior parte dos alunos não consegue identificar um professor criativo, como se pode observar na tabela que se segue.

Tabela 4 – “*Tens, ou tiveste, algum professor que consideres ser criativo?”*

Nenhum	11
Professor(a) de Educação Visual	2
Professor(a) de Teatro	1

Foi averiguado de que forma poderiam os alunos ser criativos em Matemática, tendo sido a resposta “*fazendo desenhos ou esquemas* “ a mais frequente (tabela 5).

Tabela 5 – *“ Como pode um aluno ser criativo em Matemática?”*

Fazer desenhos ou esquemas	5	Ser autónomo	1
Resolução de problemas de várias maneiras	3	Fazer materiais manipuláveis	1
Não sei	3	Só os melhores conseguem	1

Quanto à questão “ *De que forma um professor de Matemática poder ser criativo*”, cinco alunos respondem não saber. As respostas dadas encontram-se na tabela 6 .

Tabela 6 – *“ De que forma pode um professor de Matemática ser criativo”*

Não sei	5	Nas aulas onde são realizadas composições geométricas	1
Não sei o que é um professor criativo	1	Tentando ensinar de forma diferente	1
Não sendo tão prático	1	Dando aulas mais alegres	1
Utilizando exemplos criativos	1	Apresentando diferentes maneiras de resolver um probema	1
Mostrando outros assuntos para além dos da aula	1	Poderia ser criativo se a Matemática fosse mais prática	1

Quanto à criatividade em Matemática, a maior parte considera-a criativa na resolução de problemas e na elaboração de desenhos/esquemas. Para a generalidade dos alunos, ser criativo não significa ser sobredotado, no entanto, ficam divididos quanto a ser criativo em Matemática ser um dom, e um número significativo de alunos assinala a opção *"não tenho opinião"* quanto à relação entre ser bom a Matemática e ser criativo. Mais de metade dos alunos considera não ser possível avaliar a criatividade em Matemática, e a maioria não sabe se é possível estimulá-la nas escolas. Metade dos alunos considera no entanto, que, aulas de Matemática criativas podem estimular a aprendizagem dos alunos e que não é relevante estar em grupo ou sozinho para se ser criativo (tabela 7).

Tabela 7 – Representações de criatividade (em) Matemática

	Não tenho opinião	discordo totalmente	não concordo	concordo	concordo totalmente
Ser criativo a Matemática é ser sobredotado.	2	4	8	0	0
Ser bom a Matemática é ser criativo.	9	0	2	3	0
Em Matemática não é possível avaliar a criatividade dos alunos.	5	6	2	1	0
A criatividade em Matemática pode ser estimulada nas escolas.	10	0	0	1	3
Sou mais criativo(a) a Matemática quando trabalho com outros colegas.	4	1	2	5	2
A Matemática é só números, não permite a criatividade.	1	5	4	2	2
Não consigo ser criativo(a) a Matemática quando trabalho sozinho(a).	4	4	4	2	0
A Matemática é criativa quando fazemos *desenhos*	3	0	2	6	3
Gostava mais de Matemática se as aulas fossem criativas.	4	3	2	2	3
A Matemática não se pode ser criativo, é aquilo e aquilo mesmo	0	5	4	3	2
Aulas de Matemática criativas estimulam a aprendizagem dos alunos.	5	2	0	5	2
Ser criativo a Matemática é um dom.	5	2	3	2	2
Podemos ser criativos a Matemática porque podemos resolver os problemas de várias maneiras.	3	0	0	7	4
Não é possível ser criativo(a) em Matemática como se é a educação visual	2	1	4	3	4

Na parte do questionário direcionada para a articulação de conteúdos, os alunos revelam dúvida quanto à criatividade em Matemática ser diferente da de educação visual e a maioria considera que estabelecer relações entre as duas disciplinas desenvolve a criatividade em Matemática, não tendo, porém, tanta certeza quanto ao desenvolvimento de novas ideias; consideram que a Matemática ajuda a compreender outros conceitos, e o contrário não é possível para a generalidade dos alunos, como se pode ver na tabela que se segue.

Tabela 8 – Representações sobre a aprendizagem e articulação de conteúdos

	Não tenho opinião	discordo totalmente	não concordo	concordo	concordo totalmente
Nas aulas de Matemática expositivas aprendo melhor.	6	1	2	2	3
Não é possível transferir a criatividade em Matemática para as aulas de educação visual	1	4	5	1	3
Educação visual pode ajudar-me a entender melhor a Matemática	1	6	2	1	0
A Matemática ajuda-me a ententender melhor os conceitos de outras disciplinas	5	0	0	6	3
A geometria da Matemática é mais difícil do que a de educação visual	2	6	1	2	3
Uma forma de desenvolver a criatividade em Matemática é estabelecer relações com outras disciplinas, como educação visual	5	0	0	7	2
Aplicar os conceitos aprendidos em educação visual nas aulas de Matemática estimula a imaginação e promove o desenvolvimento de novas ideias	7	0	0	4	3

3.2. A professora/investigadora

A professora/investigadora é licenciada em Engenharia Química pela Unversidade de Coimbra desde 1994, tendo iniciado o seu percurso como docente numa escola profissional privada ainda nesse ano, lecionando Física e Química. Em 2000 ingressa no ensino público, e frequenta a profissionalização em serviço para a docência de Matemática. A professora passou por várias escolas do distrito de Viseu, por ser o quadro de zona pedagógica a que pertence, lidando com realidades escolares diferentes. Lecionou Matemática a turmas do 3º ciclo do ensino básico, ensino secundário e ensino profissional da escola pública.

O facto de a investigadora ser simultaneamente professora, e ter lecionado na turma no ano transato ao do estudo empírico, permitiu que o ambiente em sala de aula, no decorrer das sessões, fosse o mais natural possível. Outro aspeto a realçar está relacionado com a utilização dos computadores e, mais especificamente, a utilização do GeoGebra. Tal como já foi referido anteriormente, os alunos estavam familiarizados com as aulas onde podiam desenvolver um trabalho em grupo, o mais autónomo possível. No que respeita ao GeoGebra, o *software* não constituiu novidade por ter sido utilizado nas aulas de Matemática no sétimo ano. Apesar de não conhecerem as ferramentas relativas às transformações geométricas, a adaptação foi rápida. Não foi necessária uma sessão de esclarecimento, e as dúvidas que foram surgindo foram esclarecidas entre os alunos e quando necessário interveio a professora. Assim, a professora, assumiu-se como o principal instrumento de recolha de dados, num ambiente salutar e o mais natural possível.

3.3. Os casos

Para Yin (2005), a seleção do número de casos considerado relevante para a investigação é um problema que deve ser objeto de análise em termos do número de replicações teóricas e descritivas que o investigador esperaria ter. O verdadeiro objetivo do estudo de caso, segundo Stake (2007), é a particularização, não a generalização. Segundo este autor, seleciona-se um caso particular não tanto por aquilo em que difere dos outros, mas pelo que é, pelo que faz. A ênfase é colocada na singularidade e isso implica o conhecimento de outros casos diferentes, mas a primeira ênfase é posta na compreensão do próprio caso. O mesmo autor refere, ainda, que não se estuda um caso com o objetivo primário de entender outros casos. A primeira intenção é compreender esse caso específico.

Surge, então, a questão de que caso, ou casos, selecionar para esta investigação. Tendo como objetivo principal obter informação relevante a respeito das questões de investigação, delinearam-se dois critérios principais: modo de execução e exploração das tarefas e alguma facilidade em comunicar ideias, na forma oral ou escrita.

Na realização de tarefas de natureza diferentes, entre as quais as de investigação e de exploração, o trabalho em grupo é mais vantajoso que o individual, uma vez que os alunos podem discutir as suas descobertas e partilhá-las com o seu par e, posteriormente, com a sua turma, sendo esta ideia defendida por diversos autores (Junqueira, 1995; Ponte, 1997; Candeias, 2005). Assim, todas as tarefas da sequência didática foram previstas para serem trabalhadas a pares. A turma foi dividida em sete pares, que foram definidos previamente (tabela 9), ao critério dos alunos, tendo permanecido juntos ao longo de todo o estudo.

Tabela 9 – Pares de alunos

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Catarina *Duarte*	*Adriana* *Sofia*	*João* *Vasco*	*Rui* *Tomás*	*Alexandre* *Diogo*	*Bárbara* *Marcelo*	*Pedro* *Bruno*

Os nomes atribuídos são fictícios, uma vez que o anonimato dos alunos foi assegurado aos encarregados de educação aquando do pedido de autorização (anexo 10) para a participação neste estudo. Dos sete pares, a escolha recaiu nos pares P2, P4 e P5.

Relativamente ao par P2, a Adriana era uma menina muito educada, tímida e esperava sempre pela sua vez para falar. Era empenhada, muito organizada e responsável. Fazia todos os trabalhos propostos de forma cuidada. A aluna denotava um trabalho sistemático em casa, evidenciando por vezes ter feito uma leitura sobre conteúdos ainda não abordados na aula de Matemática. A Adriana indicava como disciplina preferida Educação FÍsica e como uma das disciplinas com mais dificuldades, Matemática, apesar do nível cinco à disciplina. Aprendia novos conteúdos com facilidade. Quanto à Sofia, um pouco mais extrovertida, não gostava de ser o alvo das atenções. A Sofia era uma aluna atenta e responsável, mas pouco participativa por entender que a sua resposta nunca era a correta. Indicava como disciplina preferida Educação Física e, Matemática como disciplina onde sentia mais dificuldade. De salientar que a Sofia era aluna de nível três a Matemática.

Quanto ao par P4, o Rui era um rapaz sempre bem-disposto. O Rui era educado, extrovertido e muito participativo. Era dos poucos alunos que gostava de participar em outras atividades da escola e não se importava com os fracassos, pois segundo ele "*era uma maneira de aprender*". Era empenhado, organizado, responsável e denotava um trabalho sistemático em casa. Aprendia e aplicava novos conceitos com alguma facilidade. O Rui indicava como disciplina preferida Educação Física e como uma das disciplinas com mais dificuldades, inglês. O aluno mantinha o nível três a Matemática desde o 7º ano. Quanto ao Tomás, rapaz introvertido, não gostava de ser solicitado. Era um aluno pouco atento, mas responsável. Indicava como disciplina preferida Educação Física e, Matemática como disciplina onde sentia mais dificuldade. Era pouco persistente e necessitava de ajuda constante na execução das tarefas. Apresentava grandes dificuldades a Matemática, sendo muito inconstante.

No que concerne ao par P5, o Alexandre, de estatura mediana, era um aluno muito tímido e introvertido. Levantava sempre o braço para falar e quando o fazia falava muito baixo. Era um aluno empenhado, persistente e organizado. O aluno referia a Matemática como disciplina preferida e era aluno de nível quatro à mesma. O Diogo, franzino para a idade, também era muito tímido e introvertido, atento e empenhado. Referenciava História como a sua disciplina preferida e era aluno de nível três a Matemática.

4. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Dada a natureza da investigação, a metodologia seguida foi baseada na recolha de dados qualitativos. As técnicas utilizadas foram a análise documental, inquirição e observação direta. Para a sua operacionalização recorreu-se diversos documentos: questionário (inicial e final), teste, diário de bordo, produções dos alunos e entrevista, na tentativa de ilustrar, o mais completo possível, as situações de experiências dos alunos.

4.1. Inquirição

Relativamente à técnica de inquirição, os instrumentos utilizados foram questionários e entrevista.

4.1.1. Questionários Inicial e Final

Os questionários são instrumentos utilizados com o objetivo de recolher informação que não pode ser observada de forma direta (Barbosa, 2007), podendo as questões ser abertas ou fechadas (Bogdan & Biklen, 1994; Pardal & Correia, 2012). O primeiro instrumento a ser utilizado foi o Questionário Inicial (anexo 1) cujo intuito principal foi recolher informação acerca das representações dos alunos sobre o tema criatividade em Matemática. O questionário está organizado em quatro partes: (1) Caracterização – Apresenta questões abertas, relativas ao nome e à idade; (2) Relação com a Matemática – Apresenta uma questão fechada relativa ao desempenho a Matemática, e outra que apresenta um conjunto de afirmações relacionadas com a Matemática e Geometria, de acordo com uma escala de Likert com cinco opções – não tenho opinião, discordo totalmente, não concordo, concordo e concordo totalmente; (3) Representações acerca da criatividade em Matemática – Apresenta seis questões abertas para recolher informação acerca das representações que os alunos detinham sobre criatividade e uma questão com um conjunto de afirmações relativas a criatividade em Matemática, de acordo com a escala de Likert apresentada anteriormente; (4) Articulação de conteúdos entre Matemática e Educação Visual - Apresenta um conjunto de afirmações para recolher a opinião dos alunos sobre a importância da articulação de conteúdos na melhoria das aprendizagens, de acordo com a escala de Likert já referida.

Com o Questionário Final (anexo 9) pretendeu-se recolher a opinião dos alunos acerca do processo de aplicação da sequência didática, nomeadamente no que se refere à articulação de conteúdos entre Matemática e Educação Visual, bem como inferir da evolução das representações acerca da criatividade e dos conceitos trabalhados. Este instrumento encontra-se dividido em cinco partes: (1) Identificação do aluno – Solicita apenas o nome; (2) Interdisciplinaridade entre Matemática e Educação Visual – Apresenta uma tabela com três afirmações onde devem manifestar o grau de concordância sobre a abordagem efetuada ao tema das isometrias; (3) Criatividade em Matemática – Apresenta três questões abertas sobre a temática; (4) Capacidades específicas e transversais – Apresenta cinco afirmações onde os alunos devem manifestar o seu grau de concordância quanto às aprendizagens realizadas e uma questão de escolha múltipla sobre as dificuldades sentidas quanto ao tipo de tarefas apresentadas.

4.1.2. Entrevista

As entrevistas são uma das fontes mais importantes de informação para o estudo de caso, e que podem tomar a forma de conversas guiadas (Yin, 2010). Podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise documental e outras técnicas (Bogdan & Biklen, 1994). Assumem um papel fundamental na investigação permitindo ao investigador *"perceber os significados que os indivíduos atribuem às experiências"* (Barbosa, 2010; p.106). Para Coutinho (2011), o grau e estruturação de uma entrevista dependem dos objetivos do estudo: (1) não estruturada se o objetivo for conhecer o ponto de vista dos partipantes sobre determinado assunto; (2) semiestruturada se o objetivo for a obtenção de dados comparáveis de diferentes participantes.

Neste estudo pode considerar-se que a investigadora realizou entrevistas não estruturadas ao tentar perceber os raciocínios feitos pelos pares escolhidos na resolução das tarefas 5 e 6 (anexos 7 e 8, respetivamente). A investigadora recorreu, neste caso, a gravações áudio, permitindo um registo fiel dos dados, e posterior trancrição dos registos.

4.2. Análise documental

A recolha de informação a partir da análise documental é importante pois serve, por vezes, para substituir os registos das atividades que o investigador não teve oportunidade de observar diretamente (Stake, 2007).

Numa primeira fase, foi recolhida informação a partir de documentos que orientam e regulam o trabalho nas escolas, como é o caso do currículo nacional de Matemática, do projeto educativo da escola, das planificações de escola e do projeto curricular de turma. Estes documentos serviram de orientação para a planificação e elaboração da sequência didática, tendo os registos biográficos dos alunos permitido recolher informações sobre os mesmos no que respeita ao percurso escolar e enquadramento social.

No entanto, os principais instrumentos utilizados foram as produções dos alunos, quer nas tarefas desenvolvidas ao longo da implementação da sequência didática, quer no teste (modalidade pré e pós).

4.2.1. Teste

O teste (anexo 2) foi elaborado tendo em conta os objetivos do estudo e, por base, os objetivos definidos no Currículo e no Programa de Matemática para o oitavo ano de escolaridade. Foi sujeito a validação prévia por parte de duas docentes de Matemática que lecionam o terceiro ciclo do ensino básico e por parte de uma especialista doutorada em Didática da Matemática. Assim, o teste apresenta quatro questões, três das quais orientadas para os conteúdos programáticos relacionados com as isometrias, e a quarta questão mais orientada para a criatividade, estando implícita nesta, a articulação de conteúdos entre Matemática e Educação Visual. A aplicação do teste, no início e no final do estudo, teve dupla finalidade – analisar os conhecimentos que os alunos detinham sobre o tema (mesmo que construídos para além do contexto formal, em contextos não formais ou mesmo informais), e avaliar a evolução do desempenho dos alunos, após a intervenção didática.

A primeira questão, constituída por três alíneas, visa aferir os conhecimentos dos alunos sobre as isometrias reflexão, reflexão deslizante e translação. Solicia-se que completem dois frisos e, identifiquem e caracterizem as isometrias. Por último, solicita-se que seja descrita a construção de cada friso por dois processos diferentes. Pretende-se aqui, reforçar a capacidade de comunicação Matemática bem como a criatividade do aluno.

Quanto à segunda questão, com duas alíneas, e de natureza idêntica à primeira, visa aferir conhecimentos sobre as isometrias – reflexão e rotação. Solicia-se que identifiquem e caracterizem as isometrias referidas, em duas rosáceas. Por fim, e à semelhança do que aconteceu na questão anterior, solicita-se a descrição da construção de cada rosácea, por dois processos diferentes.

Na questão três, pretende-se que sejam identificadas e caracterizadas as simetrias em quatro desenhos de Escher, procurando, também, reforçar a criatividade do aluno.

Para finalizar, a quarta questão do teste, orientada para a criatividade e articulação de conteúdos entre Matemática e Educação Visual, foi formulada no sentido de dar liberdade e espaço aos alunos na criação de uma composição geométrica. Para tal, foram dadas orientações para a criação de um módulo inicial, que poderiam manipular, e na composição, deveriam utilizar pelo menos duas simetrias diferentes.

4.2.2. Outras produções dos alunos

Como já foi referido, a análise documental recaiu, essencialmente, sobre as produções dos alunos, recolhidas em formato digital e em suporte de papel, decorrentes da resolução das tarefas propostas ao longo das aulas e que constam dos anexos 3 a 8.

4.3 Observação

É através da observação que o investigador acede às perspetivas dos participantes e entende o que motivou as reações observadas, bem como o seu significado naquele momento (Barbosa, 2010). A observação é uma técnica essencial de recolha de dados em estudos de caso tendo as notas de campo e o diário de bordo constituído os instrumentos privilegiados pela investigadora.

As observações efetuadas no âmbito deste estudo incidiram, particularmente, nas sessões de trabalho em torno das tarefas da sequência didática. Enquanto professora da turma, a investigadora coordenou os trabalhos e prestou apoio, quando necessário, aos alunos na execução das tarefas.

Desta forma, as informações consideradas relevantes foram registadas e as produções dos alunos foram recolhidas.

Para Bogdan & Biklen (1994), é típico que o investigador, depois de voltar de cada observação, entrevista, ou qualquer outra sessão de investigação, passe para o computador o que aconteceu. Com efeito, as notas e apontamentos recolhidos pela investigadora foram registados no diário de bordo e, no final do dia, por não ser possível fazer esse registo no decorrer das sessões, elaborou uma síntese da aula com base nas notas que ia registando durante a mesma e que passava para o computador, retratando o mais fiel possível os acontecimentos mais significativos.

5. Descrição do estudo

Neste ponto descreve-se a implementação da sequência didática por forma a fornecer uma ideia global do trabalho desenvolvido em sala de aula.

Numa primeira fase procedeu-se a um pedido de autorização aos encarregados de educação (anexo 10), em reunião previamente agendada pela investigadora (enquanto docente acumulava as funções de diretora de turma), onde foram esclarecidas as características gerais do estudo.

Num primero momento, e após autorização escrita dos encarregados de educação, os alunos responderam ao questionário inicial, descrito anteriormente (anexo 1), numa aula de quarenta e cinco minutos, tendo ficado apreensivos quanto ao tempo disponibilizado para o seu preenchimento. A este respeito a investigadora informou-os que, se não conseguissem finalizar nos quarenta e cinco minutos previstos, lhes seria facultada a aula seguinte. No entanto, veio a verificar-se que o tempo previsto foi o suficiente, não tendo os alunos demonstrado dificuldades na interpretação das questões.

Num segundo momento, foi aplicado um teste de avaliação durante uma aula de noventa minutos (anexo 2), na modalidade "pré-teste", alguns dias antes da implementação da sequência didática. A totalidade do teste foi resolvido individualmente.

Foi sentido algum desconforto por parte de alguns alunos por não conseguirem responder às questões propostas. A professora tranquilizou-os, explicando que se tratava de um teste inicial, com características diagnósticas, e que teriam oportunidade de consolidar os conceitos solicitados ao longo de uma sequência didática, incentivando-os a responder da forma que considerassem ser a mais adequada.

As tarefas propostas tiveram por base o documento sobre Geometria de Breda *et al.*(2011) e houve a preocupação de ir ao encontro das orientações curriculares preconizadas no programa de Matemática *(*Ponte *et al.*, *2007)*, bem como nas normas internacionais (NCTM, 2007). Tendo em conta as recomendações que realçam a importância do professor diversificar, e adaptar, a avalição às novas metodologias utilizadas, foi proposto um tipo de avaliação adequado ao trabalho de pares e utilizando o GeoGebra.

Numa fase posterior, e ao longo de seis sessões, os alunos realizaram a pares, um conjunto de tarefas organizadas em seis atividades: as quatro primeiras para explorar os conteúdos referentes às isometrias no plano euclidiano, recorrendo ao uso do GeoGebra e as duas seguintes, com padrões digitalizados, concebidos pelos alunos na disciplina de Educação Visual. A formação dos pares, foi deixada ao critério dos alunos, de acordo com as dinâmicas de trabalho da turma e que se mantiveram ao longo de todo o estudo.

Finalizada a implementação da sequência didática, seguiu-se a realização de uma entrevista não estruturada aos pares; e de forma individual, a realização do teste na modalidade pós e do questionário final.

Apesar do planemanto feito no início do ano letivo, foi necessário proceder a alguns ajustes em termos de calendarização. Por um lado teve de se atender à calendarização de atividades previstas pelo Departamento de Matemática e Ciências Experimentais bem como às datas previstas pelo Projeto Testes Intermédios do GAVE (gabinete de avaliação educacional), ao qual aderiu o agrupamento. É de referir, também, a pouca importância dada ao tema "Isometrias" pelos docentes do agrupamento que lecionavam Matemática ao oitavo ano, tendo a investigadora optado por lecionar o tema no terceiro período. Ao longo desta indefinição, no que respeita à calendarização para o início da implementação didática, houve sempre o cuidado de manter a docente de Educação Visual a par das decisões tomadas, tendo esta sido flexível na sua planificação por forma a ir de encontro ao pretendido pela investigadora.

No que concerne à observação das aulas da implementação da sequência didática, a investigadora assumiu um papel participante, procurando inteirar-se do trabalho dos alunos e por isso prestou apoio sempre que necessário lamentando, no entanto, não ter podido estar presente nas aulas de Educação Visual, envolvidas no processo.

Note-se que esta abordagem das isometrias pode considerar-se de cariz criativo, pois foram adotadas formas diferentes das geralmente utilizadas em sala de aula. Assim, não foi tida em conta a sequência de qualquer manual, pelo facto de a maioria tratar este tema de forma descontextualizada e com tarefas isoladas apelando, quase em exclusivo, a métodos tradicionais e a processos de memorização. Os conceitos são apresentados de forma resumida não exigindo aos alunos que os trabalhem ou analisem, nem se envolvam no processo de criação. Quanto ao recurso a A(D)GDs, remetem para sugestão de trabalho não dando orientações específicas para a sua aplicação. Veja-se o caso dos manuais para o oitavo ano das principais editoras:

Faria *et al.* (2011, p. 44-63), Porto Editora; Conceição & Almeida (2011, p. 12-31), Areal Editores e Pereira & Pimenta (2011, p. 61 a 81), Texto Editora.

Assim, o estudo das isometrias baseou-se numa sequência didática que se pensa ter sido motivadora por ter decorrido num ambiente de A(D)GD, tal como sugerido por alguns autores (Breda *et al.*, 2007, NCTM, 2007).

5.1. Os conteúdos de Matemática e de Educação Visual

Neste ponto explicitam-se os conteúdos que fazem parte da abordagem interdisciplinar e na figura 28, um esquema representativo da mesma.

Matemática

- Propriedades das isometrias:Translação, rotação reflexão e reflexão deslizante;
- Simetrias: axial, rotacional e translacional;
- Frisos
- Rosáceas

Educação visual

- Estruturas bidimensionais: Módulo geométrico e padrão geométrio
- Design axial
- Simetria
- Rotação e translação
- Alternância de cor e forma

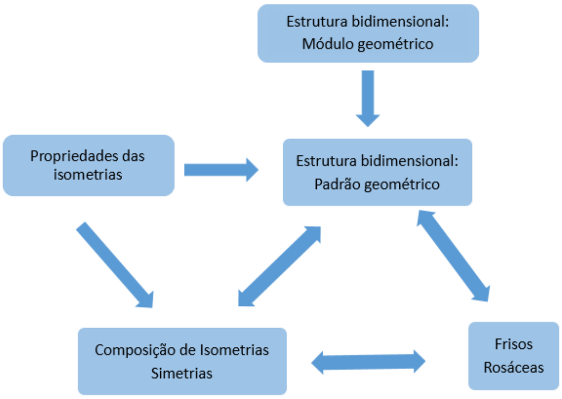


Fig. 28 – Esquema representativo da abordagem interdisciplinar Matemática e Educação Visual

5.2. As tarefas

Na seleção/criação das tarefas implementadas procuraram-se situações que envolvessem o processo ensino-aprendizagem exploratório, cuja característica principal é a de "*que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento para os alunos realizarem"* (Ponte, 2005; p.13). Corporizam uma sequência didática, e visam a introdução e exploração do tópico das isometrias no plano euclidiano. Para além de se perseguir uma sólida apropriação do referido tópico, espera-se que os alunos desenvolvam a sua criatividade. Foram elaboradas seis tarefas que, em seguida, serão descritas de forma pormenorizada.

As quatro primeiras tarefas foram perspetivadas no sentido de lecionar os conteúdos programáticos num ambiente construtivista e construcionista, e intentaram descobrir e explorar propriedades das isometrias, estabelecer conexões na Geometria e perseguir os seguintes objetivos: resolver problemas, fazer conjeturas, procurar generalizações, comunicar as descobertas e justificar. As tarefas são constituídas por um conjunto de instruções tendo em atenção a relação entre o ensino e a aprendizagem da Geometria, mediada pelo computador e mais concretamente pelo A(D)GD – GeoGebra. A primeira tarefa, "Explorar propriedades das isometrias" (anexo 3) teve como objetivo a lecionação dos conteúdos programáticos previstos para o oitavo ano sobre isometrias. As tarefas 2 e 3, "Composição de duas reflexões" e "Composição de duas rotações" (anexos 5 e 6, respetivamente), visam aplicar conhecimentos adquiridos na tarefa anterior, e explorar propriedades sobre a composição de isometrias. Quanto à tarefa 4, "Simetrias" (anexo 6), visa o estudo das simetrias e sua relação com as isometrias. Relativamente às duas restantes, "Simetrias – Frisos" e "Simetrias – Rosáceas", tarefas 5 e 6, respetivamente, tencionou-se que os alunos explorassem os frisos e as rosáceas produzidas pelos próprios em Educação Visual, interligando desta forma os conceitos de isometria e simetria (anexos 7 e 8, respetivamente). Visaram, também, a obtenção de um *produto* concebido pelos alunos (frisos e rosáceas), onde foram aplicados conceitos inerentes à disciplina de Educação Visual, sendo o mesmo utilizado, posteriormente, para explorar conceitos matemáticos sobre isometrias e simetrias.

Na primeira sessão verificou-se um ligeiro atraso para iniciar a tarefa por ter sido necessário recorrer a fichas triplas para ligar os portáteis dos alunos. Uma das alunas da turma não tinha o GeoGebra bem instalado, tendo um dos alunos ajudado na sua instalação. Enquanto isso, os restantes alunos iniciaram o processo abrindo o GeoGebra, explorando os comandos para as transformações geométricas e, quando surgia alguma dúvida, entreajudaram-se. Ao longo deste tempo a investigadora limitou-se a observar o comportamento dos alunos intervindo quando solicitada. Como já foi referido, os alunos trabalharam a pares ao longo da implementação das tarefas da sequência didática.

Em seguida dá-se a conhecer os aspetos específicos de cada uma das tarefas desenvolvidas na aula, bem como um dos possíveis processos de resolução. A forma como foi implementada cada uma das tarefas será descrita no próximo capítulo.

5.1.1. Tarefa 1 – Explorar propriedades das isometrias

A tarefa 1 (anexo 3) é constituída por quatro questões com as quais se pretendia que os alunos explorassem propriedades das quatro isometrias do plano: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante, utilizando o GeoGebra. A tarefa foi construida no sentido de permitir aos alunos experimentar, visionar, relacionar, comparar, conjeturar e assumir um papel ativo na exploração de propriedades das isometrias. Os alunos deveriam efetuar construções geométricas, formular hipóteses, confrontar a resolução e as conjeturas com o grupo turma. Para que as conjeturas fossem testadas e validadas, os alunos teriam de manipular as próprias construções. Cada questão é constituída por uma sequência de passos a seguir, e a concretizar no ambiente dinâmico, que os ajudaria a formular as conjeturas e tirar conclusões quanto às propriedades das isometrias, a partir das medidas e relações, que se mantêm invariantes.

O trabalho dos alunos para a execução da questão 1 da tarefa 1 – Com a ajuda do GeoGebra explora propriedades da translação – consistituiu em utilizar o menu e as ferramentas do GeoGebra para desenhar um quadrilátero [ABCD], traçar um vetor e posteriormente, determinar o respetivo transformado pela translação associada ao vetor criado. Tal como referido anteriormente, não foi disponibilizado qualquer apoio escrito aos alunos para aceder ao menu e às ferramentas do GeoGebra. Os alunos, enquanto grupo turma, foram explorando o menu e manipulando as ferramentas. Quando surgiam dúvidas iam sendo esclarecidas entre eles, e só quando necessário a professora/investigadora intervinha.

Obtido o transformado, foram medidos os lados, os ângulos do quadrilátero desenhado e do respetivo transformado (figura 29).

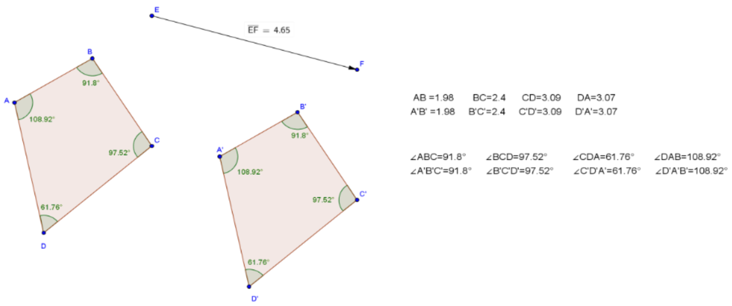


Fig. 29 – Tarefa 1 – Questão 1, alíneas 1.4 e 1.5

Em seguida, os alunos deveriam manipular o quadrilátero original, alterando-lhe a forma, para verificarem se as medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos se mantinham invariantes e se a orientação dos ângulos era preservada (figura 30).

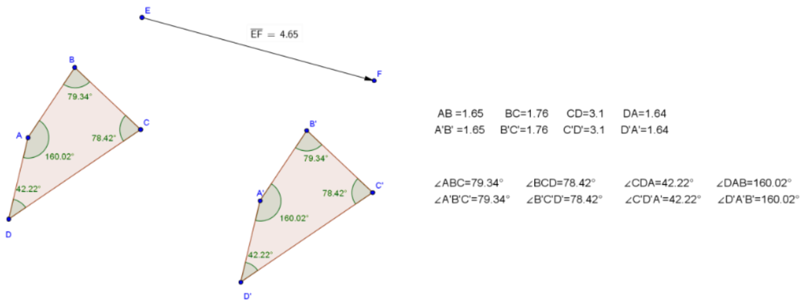


Fig. 32 – Tarefa 1 – Questão 1, alínea 1.6

Continuando a resolução da tarefa, deveriam alterar as características do vetor, manipulando-o (figura 31). Com base nas relações que se mantêm quanto às medidas de comprimento dos lados e quanto ao sentido dos ângulos quando se manipula a figura, os alunos deveriam enunciar propriedades da translação e preencher a tabela disponibilizada no final da ficha de trabalho.

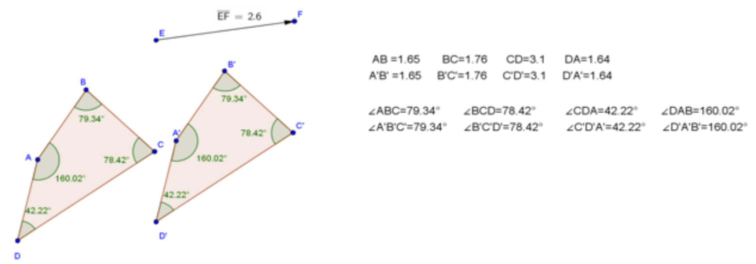


Fig. 35 – Tarefa 1 – Questão 1, alínea 1.7

Quanto à questão 2 – Com a ajuda do GeoGebra explora propriedades da rotação – os alunos deveriam explorar as potencialidades dinâmicas do GeoGebra para manipular as figuras desenhadas e procurar invariantes nas construções (figura 32).

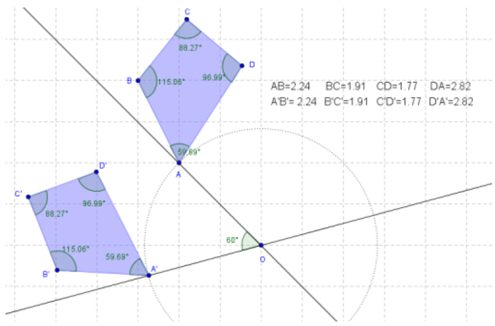


Fig. 38 – Tarefa 1 – Questão 2, alínea 2.4 e 2.5

Relativamente ao trabalho dos alunos nesta questão, foi em tudo semelhante à anterior: foram manipulados os objetos geométricos para investigar relações, descobrir e explorar propriedades, procurar regularidades (figuras 33 e 34). No final as conclusões foram registadas na tabela.

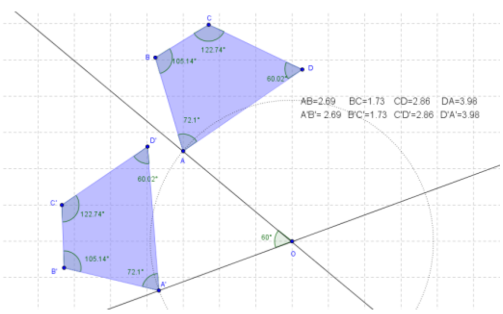


Fig. 41 – Tarefa 1 – Questão 2, alínea 2.6

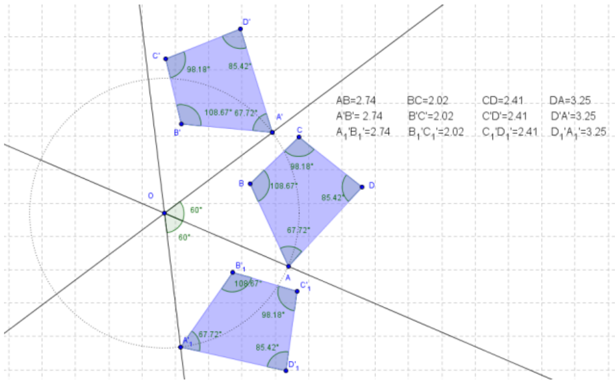


Fig. 44 – Tarefa 1 – Questão 2, alíneas 2.7 e 2.8

As questões 3 e 4 – Com a ajuda do GeoGebra explora propriedades da reflexão e Com a ajuda do GeoGebra explora propriedades da reflexão deslizante, respetivamente – foram organizadas de forma análoga às questões anteriores. É proposto a manipulação das construções no GeoGebra no sentido de apoiá-los na identificação de propriedades da reflexão e da reflexão deslizante.

O procedimento para responder às questões foi análogo ao solicitado para as anteriores. No caso da reflexão os alunos deveriam obter o transformado de um polígono desenhado no GeoGebra, recorrendo à ferramenta para o efeito, efetuar medições quanto aos lados, quanto à amplitude dos ângulos internos dos polígonos, e quanto à distância de cada vértice dos polígonos ao eixo de reflexão, quer para o original quer para o transformado (figura 35).

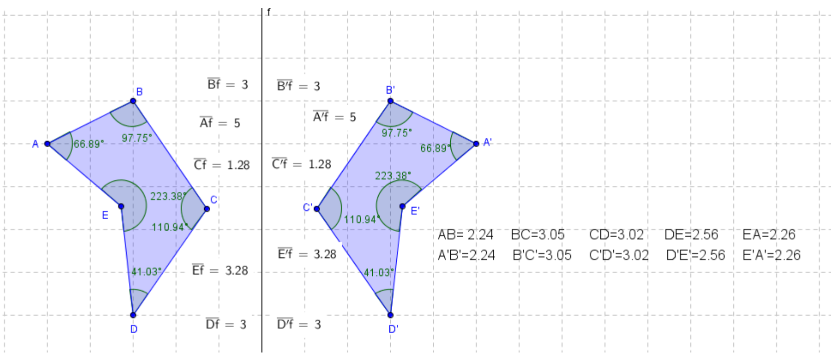


Fig. 47 – Tarefa 1 – Questão 3, alínea 3.3

Em seguida os alunos deveriam manipular a construção no sentido de alterar a forma do polígono original e observar as alterações nas medições feitas na alínea anterior; Manipular novamente a construção alterando a posição do eixo de reflexão, comparar as medições, formular conjeturas para verificar se as medidas efetuadas se mantinham invariantes e se a orientação dos ângulos era preservada (figura 36)

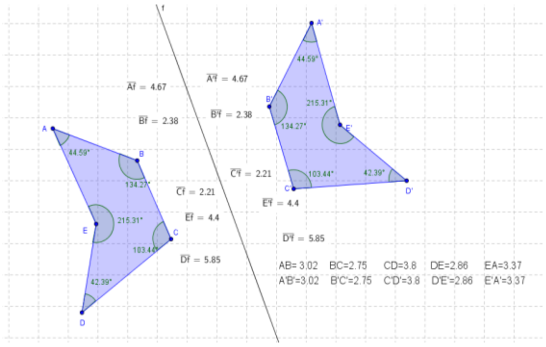


Fig. 50 – Tarefa 1 – Questão 3, alíneas 3.4 e 3.5

Quanto à questão 4, para além de desenhar um polígono e obter o seu transformado por reflexão, os alunos deveriam traçar um vetor de direção paralela ao eixo; obter por translação, associada ao vetor traçado, o transformado do primeiro transformado e, por fim ocultar o primeiro transformado. Para averiguar as propriedades da reflexão deslizante os alunos procederiam de forma semelhante às questões anteriores: medição do comprimento dos lados e das amplitudes dos ângulos internos, comparando e efetuando conjeturas (figura 37)

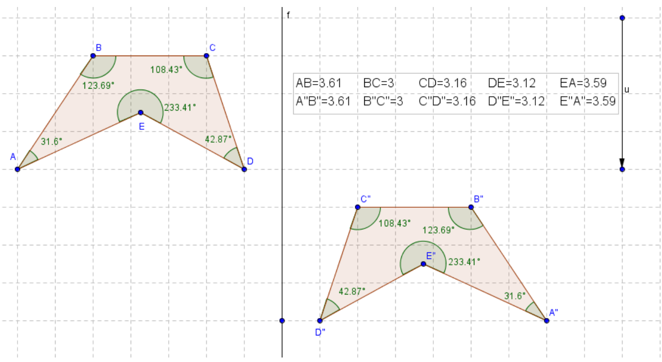


Fig. 53 – Tarefa 1 – Questão 4

Finalizada a tarefa 1, os alunos deveriam preencher a tabela que se segue (tabela 10) com as seguintes conclusões:

Tabela 10 – Conclusões sobre propriedades das isometrias

Isometria	Translação	Rotação	Reflexão	Reflexão deslizante
Comprimento dos segmentos	Mantém	Mantém	Mantém	Mantém
Amplitude dos ângulos	Mantém	Mantém	Mantém	Mantém
Pontos fixos	Não existem	Um ponto (centro de rotação)	Infinitos (eixo de reflexão)	Não existem
Orientação dos ângulos	Mantém	Mantém	Não mantém	Não mantém

5.1.2. Tarefa 2 – Composição de duas reflexões

Com a tarefa 2 (anexo 4) pretendia-se que os alunos investigassem a composta de duas reflexões. Para isso teriam de analisar dois casos: o primeiro, para dois eixos de reflexão paralelos, e o segundo, para dois eixos de reflexão concorrentes. Para o primeiro caso deveriam inferir que a composta de duas reflexões de eixos paralelos (figura 38) é uma translação associada a um vetor de direção perpendicular aos dois eixos, com sentido da primeira para a segunda e com comprimento igual a duas vezes a distância entre os dois eixos (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008).

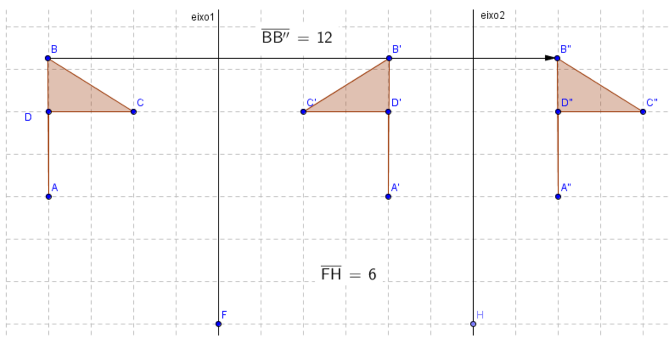


Fig. 56 – Tarefa 2 – Questão 1 (eixos paralelos)

Também aqui os alunos deveriam realizar construções geométricas com o GeoGebra, e a partir da exploração e sequência de procedimentos, manipulá-las, formular conjeturas e validar conclusões.

Para o segundo caso, que remete para a composição de duas reflexões de eixos concorrentes, foi proposto em primeiro lugar (figura 39) que averiguassem o caso em que os eixos concorrentes fossem perpendiculares.

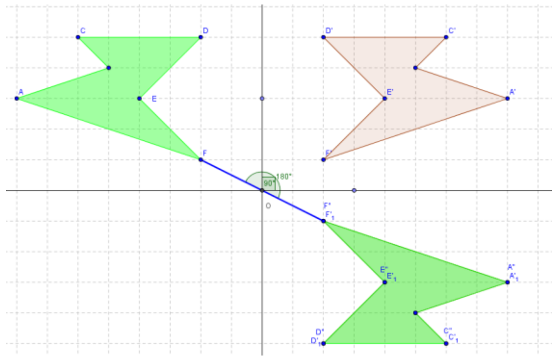


Fig. 59 – Tarefa 2 – Questão 2 (eixos perpendiculares)

Tal como para o caso anterior, os alunos realizariam um conjunto de procedimentos e manipulariam a construção geométrica, para inferir que a composta de duas reflexões de eixos concorrentes perpendiculares é uma rotação de centro no ponto de interseção dos eixos concorrentes perpendiculares e de medida de amplitude 180º (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008). Pretendia-se também com a realização desta tarefa preparar os alunos para o caso seguinte.

Na composta de duas reflexões de eixos concorrentes não perpendiculares (figura 40), era esperado que os alunos descobrissem a medida da amplitude do ângulo de rotação, utilizando as ferramentas do GeoGebra e escolhendo os procedimentos necessários.

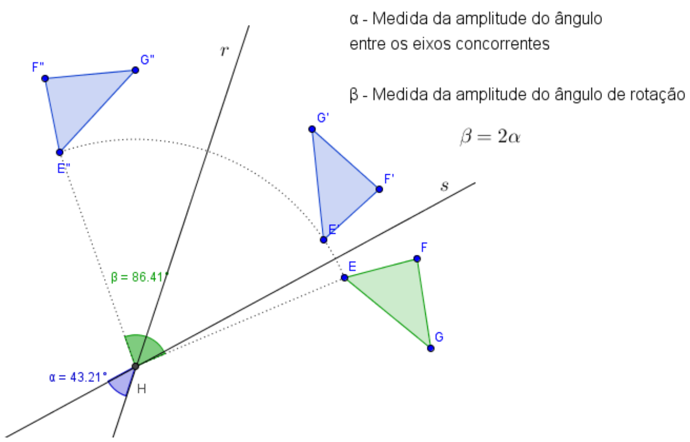


Fig. 62 - Tarefa 2 – Questão 2 (eixos concorrentes não perpendiculares)

Os alunos deveriam concluir que a composta referida é uma rotação de centro no ponto de interseção dos eixos e de medida de amplitude igual a duas vezes a amplitude do ângulo formado pelos dois eixos (Breda *et al.*, 2011; Cabrita *et al.*, 2008).

5.1.3 Tarefa 3 – Composição de duas rotações

Para a realização da tarefa 3 (anexo 5), foi proposto a exploração de dois casos: composição de duas rotações com o mesmo centro e composição de duas rotações com centros distintos. Para o primeiro caso, os alunos deveriam realizar uma construção geométrica com a ajuda das ferramentas do GeoGebra, cujo centro de rotação e medidas das amplitudes de rotação fossem escolhidas pelos alunos. Propôs-se, à semelhança de todas as tarefas anteriores, uma sequência de procedimentos que encaminhasse o aluno para a confirmação da conjetura de que se continua a obter uma rotação com o mesmo centro, cuja medida da amplitude do ângulo de rotação é igual à soma das medidas da amplitude para cada uma das rotações consideradas (figura 41).

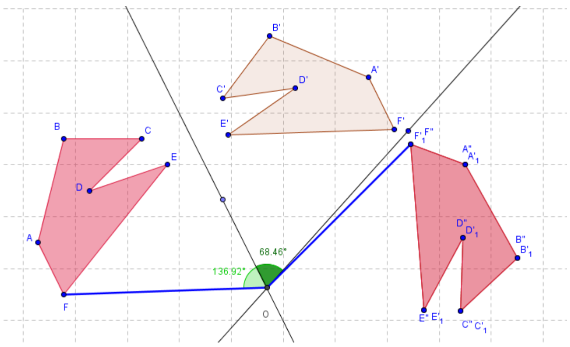


Fig. 65 – Tarefa 2 – Questão 3 (rotações com o mesmo centro)

A execução desta tarefa possibilitava diferentes caminhos para a realização da exploração no que respeita à medida da amplitude do ângulo de rotação. Com o GeoGebra os alunos tinham a possibilidade de explorar diferentes casos, isto é, o caso das rotações terem o mesmo sentido (figura 42), ou não (figura 43).

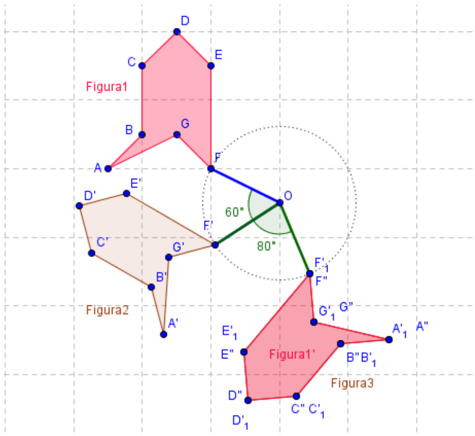


Fig. 68 – Tarefa 3 – Questão 1 (rotações no mesmo sentido)

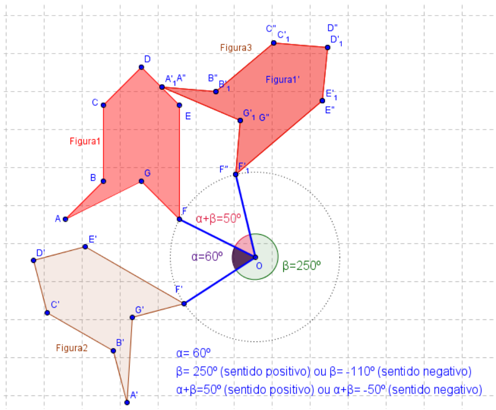


Fig. 71 – Tarefa 3 – Questão 1 (rotações com sentidos diferentes)

Com a segunda questão desta tarefa, que remete para a exploração da composição de duas rotações de centros de rotação distintos, pretendia-se que os alunos concluissem que neste caso nem sempre se obtem uma rotação. No caso da soma das medidas das amplitudes dos ângulos de rotação não ser múlipla de 360º, a composta é uma rotação (figura 44);

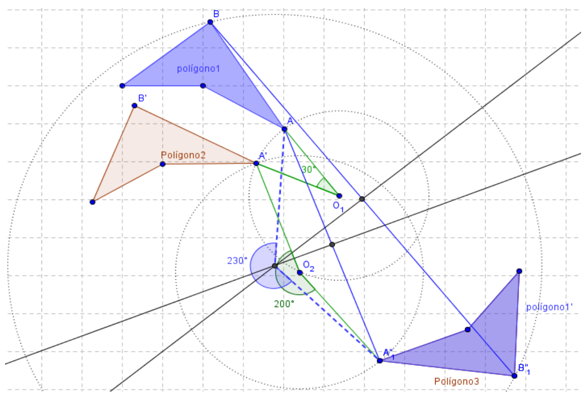


Fig. 74 – Tarefa 3 – Questão 2, alínea 2.5, centros de rotação distintos com ($\alpha + \beta$) diferente de múltiplo de 360º

No caso da soma das medidas das amplitudes dos ângulos de rotação ser múltipla de 360º é uma translação (figura 45).

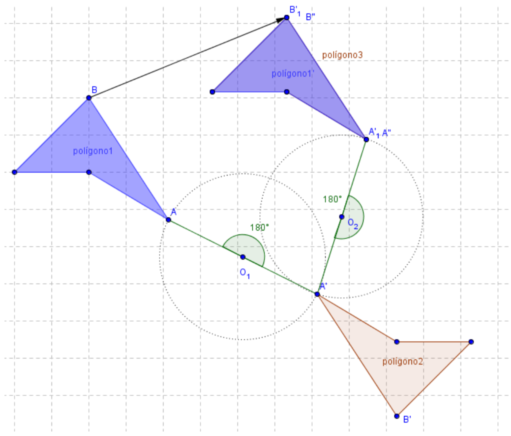


Fig. 75 – Tarefa 3 – Questão 2,alínea 2.6, centros de rotação distintos com $(\alpha + \beta)$ múltiplo de 360º

5.1.4. Tarefa 4 – Simetrias

Na tarefa 4, os alunos deveriam explorar o conceito de simetria (anexo 6) a partir de figuras geométricas básica. Na primeira questão pretendia-se que os alunos descobrissem simetrias em triângulos e quadriláteros, recorrendo ao GeoGebra, e as classificassem. Para o caso dos triângulos, foi solicitada a identificação de simetrias num triângulo equilátero, num triângulo isósceles e num triângulo escaleno. Para isso os alunos deveriam desenhar os triângulos com recurso às ferramentas do GeoGebra, e em seguida identificar as simetrias.

No caso do triângulo equilátero (figura 47), os alunos deveriam identificar três simetrias de reflexão.

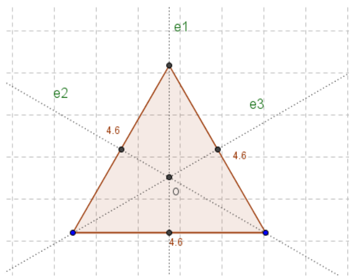


Fig. 78 – Tarefa 4 – Triângulo equilátero
(3 simetrias de reflexão e 3 simetrias de rotação)

Deveriam traçar três retas que passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos a cada um dos vértices; e três simetrias de rotação, identificando o circuncentro O (ponto de interseção das três retas traçadas anteriormente) como o centro de rotação e, utilizando as ferramentas necessárias para efetuar rotações e medições, identificar as medidas de amplitudes de rotação: 120º, 240º e 360º.

Quanto ao triângulo isósceles (figura 47), o procedimento seria o mesmo, tendo os alunos que identificar uma simetria de reflexão, cujo eixo de simetria é a bissetriz do ângulo não congruente aos outros dois, e a outra simetria, a transformação identidade.

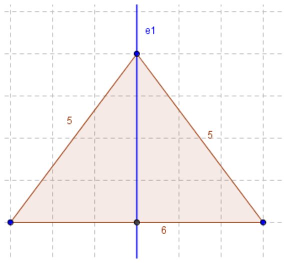


Fig. 81 – Tarefa 4 – Triângulo isósceles
(1 simetria de reflexão e transformação identidade)

No caso do triângulo escaleno, os alunos deveriam concluir que o triângulo apenas possui a transformação identidade (figura 48).

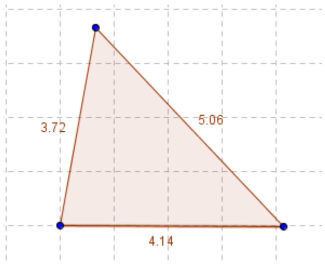


Fig. 82 – Tarefa 4 – Triângulo escaleno
(apenas transformação identidade)

Relativamente aos quadriláteros, e à semelhança dos triângulos, esperava-se que os alunos identificassem e classificassem as simetrias. Assim, para o caso do quadrado (figura 49), deveriam identificar quatro simetrias de reflexão correspondentes às retas que passam por pares de vértices opostos e pelos pontos médios de pares de lados paralelos, e as quatro simetrias de rotação de centro O (o ponto de interseção das quatro retas) e medidas de amplitudes de rotação 90º, 180º, 270º e 360º.

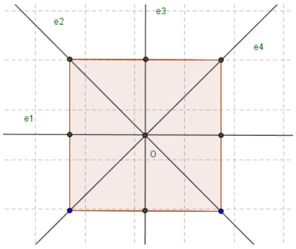


Fig. 85 – Tarefa 4 – Quadrado
(4 simetrias de reflexão e 4 simetrias de rotação**)**

Para o retângulo (figura 50), os alunos deveriam identificar duas simetrias de reflexão correspondentes às retas que passam pelos pontos médios de lados não consecutivos, e duas simetrias de rotação de centro em O (ponto de interseção das suas diagonais) e de amplitudes, 180º e 360º.

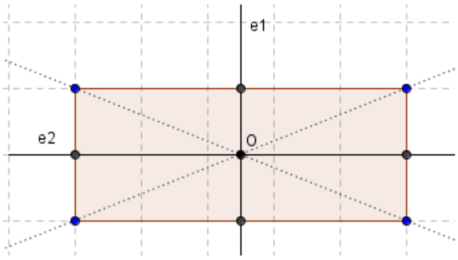


Fig. 88 – Tarefa 4 – Retângulo
(2 simetrias de reflexão e 2 simetrias de rotação)

Quanto ao trapézio, os alunos deveriam representar diferentes trapézios (escaleno, isosceles e retângulo), classificá-los, para em seguida proceder à identificação de simetrias (figura 51). Assim, era esperado que os alunos identificassem apenas simetria de reflexão no trapézio isósceles na reta que passa pelos pontos médios dos lados opostos, e a transformação identidade para cada um deles.

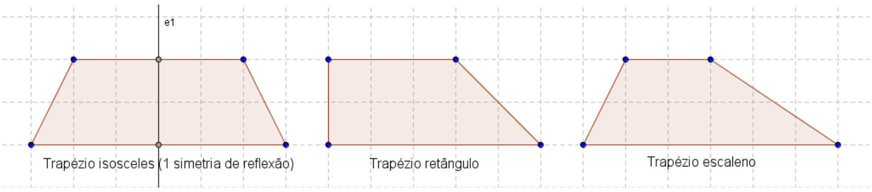


Fig. 91 – Tarefa 4 – Trapézio (transformação identidade)

A segunda questão intentava a identificação de simetrias em polígonos regulares. Para que os alunos efetuassem conjeturas, deveriam explorar as simetrias num pentágono regular (figura 52) e em seguida num hexágono regular (figura 53). A partir da exploração de simetrias para estes dois polígonos regulares, em comparação com o triângulo equilátero e o quadrado, os alunos deveriam formular conjeturas e realizar conclusões. Desta forma, deveriam concluir que um polígono regular de *n* lados é constituído por *n* reflexões e *n* rotações com centro no centro do polígono (centro na circunferência inscrita no polígono).

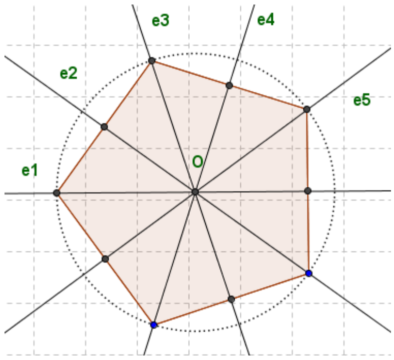


Fig. 94 – Tarefa 4 – Pentágono regular
(5 simetrias de reflexão e 5 simetrias de rotação)

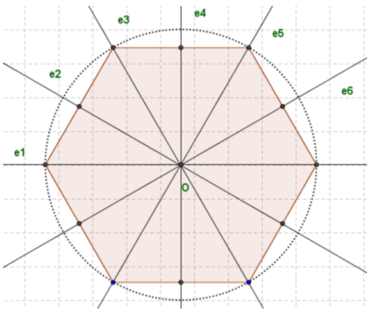


Fig. 97 – Tarefa 4 – Hexágono regular
(6 simetrias de reflexão e 6 simetrias de rotação)

O estudo das simetrias constitui uma aplicação interessante das isometrias, pois permite ampliar o conhecimento destas transformações geométricas bem como o estudo de padrões. A clarificação do conceito de simetria nesta tarefa serviu de base para a exploração das composições de isometrias, dos frisos, e das rosáceas, construídos pelos alunos na disciplina de Educação Visual.

5.1.5. Tarefa 5 – Frisos

A tarefa 5 (anexo 7) foi prevista no sentido de serem os alunos a construir frisos na disciplina de Educação Visual que, posteriormente, seriam analisados na perspetiva da Matemática no que concerne às isometrias.

Após terem sido introduzidas as tarefas relativas à exploração de propriedades das isometrias, já referidas neste capítulo, os alunos procederam à criação de um elemento geométrico em Educação Visual que *movimentaram* para construirem um padrão, neste caso, uma composição com isometrias ou um friso. O *movimento* do elemento consistiu na aplicação das isometrias para obter o padrão. A criação do elemento geométrico teve como base uma malha quadriculada, e em seguida, foi utilizado o papel vegetal para observarem as diferentes posições do elemento ao aplicarem uma reflexão, uma reflexão deslizante, uma rotação ou uma translação. A partir desta observação os alunos construiram o padrão utilizando instrumentos de desenho adequados.

Das composições apresentadas pelos alunos optou-se por um conjunto que apresentasse diversidade nas isometrias aplicadas e que de alguma forma representassem frisos. As composições escolhidas (nem todas são frisos) foram analisadas pelos alunos na disciplina de Matemática. Num momento anterior à exploração das composições, houve uma explicação prévia aos alunos sobre os sete tipos de frisos possíveis e como poderiam ser obtidos a partir de um módulo de repetição. Pretendia-se com esta tarefa que os alunos fossem descobrindo diferentes padrões, resultantes das diferentes posições, ou *movimentos*, do módulo e que se poderiam prolongar até ao infinito. Por outro lado poderiam identificar e descrever diferentes possibilidades de construir um friso.

Na primeira questão foi solicitado que os alunos identificassem as isometrias que permitiram obter a composição ou o friso e, na segunda, que descrevessem por dois processos diferentes a construção de cada uma das composições ou dos frisos.

5.1.6. Tarefa 6 – Rosáceas

Relativamente à tarefa 6 (anexo 8), a partir do elemento criado para a tarefa anterior, os alunos construiram as rosáceas na disciplina de Educação Visual. Também aqui foi utilizado o papel vegetal para observarem o *movimento* do elemento geométrico. Os alunos começaram por considerar um polígono regular, definindo o seu centro; posicionaram o módulo sobre a linha que define o polígono e *movimentaram-no*, havendo a possibilidade de considerarem reflexões. Ao longo dos sucessivos *movimentos*, os alunos observavam a posição relativa do elemento ao centro de rotação, verificando se daria para obter, ou não, a linha poligonal regular fechada. Caso obtivessem uma rosácea cuja posição dos módulos obrigasse a uma grande distância do centro, os alunos optavam por outro polígono regular, definindo deste modo o número de módulos de cada rosácea. Das composições apresentadas pelos alunos (nem todas são rosáceas) optou-se por um conjunto que apresentasse diversidade e que de alguma forma também representassem rosáceas. As composições escolhidas foram analisadas pelos alunos na disciplina de Matemática.

Tal como verificado para os frisos, o potencial desta tarefa reside na descoberta de diferentes padrões de acordo com a posição do módulo relativamente ao centro de rotação. Também neste caso houve explicação prévia sobre o tipo de rosáceas que se podem considerar: com grupo de simetrias cíclico, C_n, e com grupo de simetrias diedral, D_n (neste caso haverá tantas reflexões quantas as rotações). Os alunos poderiam verificar que nas rosáceas não existem translações e que o padrão obtido é finito. Em seguida, procederam à sua análise na disciplina de Matemática.

A tarefa era constituída por duas questões, de forma idêntica à tarefa anterior. Na primeira questão era solicitado que os alunos identificassem as isometrias que permitiram construir a rosácea, e na segunda, que descrevessem por dois processos diferentes a construção de cada rosácea.

Ao longo das sessões, foi sendo elaborado um diário de bordo onde a investigadora registou informação relevante sobre o desenrolar do estudo, e foram recolhidas as produções dos alunos nas tarefas 5 e 6.

Após terminar a aplicação e exploração da sequência didática, procedeu-se a nova aplicação do teste de avaliação, agora na modalidade “pós-teste”, que foi aplicado de forma idêntica à primeira, não tendo surgido dúvidas que obrigassem à intervenção da investigadora.

Por último, procedeu-se à aplicação do questionário final, preenchido individualmente pelos alunos na sala de aula, durante aproximadamente quarenta e cinco minutos.

6. Tratamento e apresentação dos resultados

Este ponto prende-se com o tratamento e a apresentação dos dados obtidos a partir de diversas técnicas, sustentadas por diferentes instrumentos selecionados para o desenvolvimento deste estudo empírico.

Os dados de natureza qualitativa foram alvo de análise de conteúdo, orientados por categorias de análise, decorrentes dos objetivos/questões de investigação e ou que emergiram dos próprios dados. Assim, foram definidas categorias sobre: a) Conhecimento geométrico – isometrias e simetrias, em composições geométricas, em frisos e em rosáceas; b) atitudes face à Geometria e à Matemática; c) Criatividade.

No que respeita ao conhecimento geométrico, visou-se identificar o conhecimento construído, e a capacidade dos alunos em resolver problemas geométricos que envolvessem as isometrias e as simetrias; relativamente às atitudes, intentou-se detetar reações emocionais dos alunos face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular; e no que concerne à criatividade procuraram-se aspetos relativos a representações e manifestações de criatividade, tendo por base as dimensões – fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração.

Os dados serão apresentados no capítulo seguinte de forma descritiva seguindo-se tanto quanto possível, uma interpretação dos mesmos, evidenciando-se as afirmações feitas com digitalizações de produções dos alunos, transcrições do diário de bordo, transcrição dos registos áudio decorrente da entrevista semi estruturada, bem como dos questionários inicial e final.

CAPÍTULO III

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, para cada caso, descreve-se e tenta-se interpretar os processos relativos ao desenvolvimento de competências geométricas e da criatividade. Mais concretamente, respeitantes ao conhecimento e capacidades relacionados com as isometrias, os frisos e as isometrias; atitudes em relação à Geometria; representações e manifestações da criatividade.

1. O par Adriana e Sofia

O par, Adriana e Sofia, costumava trabalhar em conjunto nas aulas de Matemática e, tal como já foi referido, ambas denotavam empenho nas atividades.

1.1. Competências geométricas

Este ponto contempla os conhecimentos, as capacidades, e as atitudes face à Matemática em geral, e à Geometria em particular, desenvolvidos ao longo da experiência pelo par Adriana e Sofia.

1.1.1. Conhecimentos e capacidades

Abordam-se, sob este título, o conhecimento e as capacidades desenvolvidos pelo par em relação às isometrias e à simetria, em particular os frisos e as rosáceas.

Isometrias

A Tarefa 1 – Explorar propriedades das isometrias (anexo 3) – foi iniciada pelo par com o traçado de um quadrado que acabaria por apagar, construindo um trapézio.

O par revelou alguma dificuldade no domínio do GeoGebra, o que motivou apreensão na execução da tarefa. A primeia dúvida surgiria no traçado do vetor, o que também aconteceu com o grupo turma. A investigadora relembrou o conceito de segmento de reta orientado e explicou o procedimento no GeoGebra. Ainda foi solicitado a outro par da turma que explicasse como o havia feito. Relativamente à direção, sentido e comprimento do vetor, ficaria à consideração de cada par.

Prosseguindo nas construções, o par e o grupo turma deparou-se com outra dificuldade, na medição da amplitude de um ângulo:

> ***Adriana e Sofia:*** *Stora, não conseguimos medir… Não percebemos nada!!*

A investigadora recorreu à noção de ângulo orientado, introduzida no sétimo ano de escolaridade, e explicou o procedimento a adotar no GeoGebra.

Em seguida o par foi inquirido quanto ao verificado no item 6 da tarefa:

> ***Investigadora:*** *O que verificaram quando deformaram a figura?*
> ***Sofia:*** *Os comprimentos dos lados são sempre iguais...*
> ***Adriana:*** *Os ângulos são congruentes, não são Stora?*
> ***Investigadora:*** *O que queres dizer com isso?*
> ***Adriana:*** *Então Stora, por exemplo, aqui os ângulos correspondentes medem o mesmo…*
> ***Investigadora:*** *Isso acontece com todos os ângulos?*
> ***Adriana:*** *Sim, é o que está aqui.*
> ***Investigadora:*** *O que acontece quando aumentam o tamanho do vetor?*
> ***Sofia:*** *(utiliza o rato e aumenta o vetor, observando o que acontece.)*
> ***Adriana:*** *As figuras afastam-se...*
> ***Investigadora:*** *Que distância é essa?*
> ***Adriana:*** *Não é igual ao tamanho do vetor?*
> ***Investigadora:*** *Não sei. É?*
> ***Adriana:*** *Acho que sim.*
> ***Investigadora:*** *Como é que me podem mostrar isso?*

A Sofia, que era quem detinha o rato, uniu de imediato os pontos da figura inicial aos respetivos pontos no transformado. No entanto, o par não conseguiu realizar as medições necessárias. A investigadora deixou que o par refletisse sobre o procedimento e, com a ajuda de outros pares, efetuaram a medição dos respetivos segmentos.

No preenchimento do quadro resumo, surgiram dúvidas quanto à "*orientação dos ângulos*" e "*pontos fixos*". A investigadora colocou questões de modo a orientar a turma:

> ***Investigadora:*** *Vamos lá ver… a palavra "orientação"… O que vos vem à cabeça?*
> ***Grupo Turma:*** *Rodar, se calhar?*
> ***Investigadora:*** *Rodar? Quer dizer que o ângulo vai rodar?*
> ***Grupo Turma:*** *Não! Tem a ver para o lado que vai … Se vai para a direita ou para a esquerda…*
> ***Adriana:*** *Não tem a ver com aquilo que fizemos para medir os ângulos?*
> ***Investigadora:*** *Explica melhor a tua ideia, Adriana.*
> ***Adriana:*** *O ângulo ficava para dentro ou para fora… tinha a ver com o lado que nós escolhíamos primeiro…*
> ***Investigadora:*** *Sim.*

Após alguns fracassos, o par percebeu o processo e verificou que a orientação dos ângulos se mantinha. Quanto aos pontos fixos, a dúvida inicial foi rapidamente dissipada:

> ***Investigadora:*** *Percebem o que significa pontos fixos?*
> ***Grupo Turma:*** *Eu percebi!*
> ***Investigadora:*** *Então diz lá o que estás a pensar…*
> ***Grupo Turma:*** *Então… Se é fixo quer dizer que não muda, não é?*
> ***Investigadora:*** *Não sei... Será?*
> ***Adriana:*** *Mas ó Stora, se não muda o que nós fizemos está mal !!*

> **Investigadora:** *Está mal? Não estou a perceber…*
> **Grupo Turma:** *Não Adriana, a Stora só quer saber se os pontos mudam ou não…*
> **Adriana:** *AAAH…Então não tem pontos fixos. É isso?*

Para finalizar, o par identificou as propriedades da translação e registou-as no quadro síntese.

Verificou-se, ao longo desta tarefa, que o processo de ensino e de aprendizagem em que o aluno é agente ativo na construção do conhecimento é mais moroso do que no ensino tradicional, onde o professor expõe a matéria e o aluno, passivamente, escuta o que o professor diz. No entanto, o facto de os alunos demorarem mais tempo na construção e procedimentos, por vezes fracassando, favorece a compreensão e consolidação dos conceitos.

No que respeita à exploração das propriedades da rotação, o par não teve dificuldade em efetuar a rotação de acordo com o procedimento apresentado na tarefa. Facilmente conjeturaram sobre a medida do comprimento dos lados do polígono, bem como sobre a medida da amplitude dos ângulos, para a figura inicial e o seu transformado. Para alterar a medida da amplitude do ângulo de rotação, no sentido positivo e no sentido negativo, o par não sabia como proceder pois aparecia "*sentido horário*" e "*sentido anti-horário*" no GeoGebra. Dada a explicação da investigadora, o par continuou as construções e preencheu o quadro resumo:

> **Investigadora:** *Quantos pontos fixos tem a rotação?*
> **Sofia:** *É para fazer o mesmo da translação?*
> **Investigadora:** *Sim...*
> **Adriana:** *Então é fácil... é só o centro, não é?*

Quanto à reflexão e à reflexão deslizante, o par não revelou dificuldades no que respeita às questões relacionadas com as medidas do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos, dada a confiança crescente no domínio do software. No entanto, a primeira dúvida recaíu, de novo, na orientação dos ângulos:

> **Sofia:** *Pode chegar aqui Stora?*
> **Investigadora**: *Alguma dúvida?*
> **Sofia**: *É aqui, ao medir os ângulos…*
> **Investigadora:** *Sim, estou a ver…*
> **Adriana**: *Ó Stora!! Se fizermos o mesmo sentido para a figura original e para a outra, os ângulos não são iguais… Ficam para fora… (muito desiludida).*
> **Investigadora**: *Na figura obtida por reflexão a medida da amplitude do ângulo fica para fora…. E o que pensas que deves fazer?*
> **Sofia:** *Eu acho que temos de medir ao contrário…*

Investigadora: *Ao contrário?*
Adriana:*???*
Sofia: *Sim, olha! Em vez de começarmos no A´ temos de começar no C´ para ficar para dentro…*
Investigadora: *O que é que pensam que está a acontecer?*
Adriana: *Não sabemos Stora…*

A investigadora abordou o grupo turma sobre o assunto, tendo um par apresentado, corretamente, as suas conclusões. Em seguida, a investigadora questionou o grupo turma quanto às características do vetor associado à translação na reflexão deslizante:

Adriana: *O nosso é horizontal….*
Grupo Turma: *(ouve-se o desabafo de um par) SHIIII! Só nós é que temos vertical?*
Investigadora: *E porquê? Vai ver a construção do teu colega... (dirigindo-se à Adriana e Sofia)*

As alunas levantaram-se e foram ver a construção do outro par, regressando ao lugar:

Sofia: *Têm a construção ao contrário...*
Investigadora: *Ao contrário?*
Adriana: *Nós temos na horizontal e eles na vertical...*
Investigadora: *O que concluem?*
Adriana: *Não sei...*
Sofia: *(encolhe os ombros)*
Investigadora: *Comparem a vossa construção com a dos vossos colegas…*

O par voltou a levantar-se para observar, de novo, a construção do par que tinha colocado o vetor na vertical. Ao regressar ao lugar o par discutiu o que observou:

Investigadora: *Já chegaram a alguma conclusão?*
Sofia: *Penso que sim, Stora… Nós temos a construção na horizontal e eles têm para cima…*
Investigadora: *Para cima?*
Adriana: *É na vertical Stora…*
Investigadora: *E quanto ao vetor de translação?*
Adriana: *Acho que é ao contrário da construção.*
Investigadora: *Explica o que queres dizer com "ao contário".*
Sofia: *O nosso está na horizontal porque o nosso "desenho" está na horizontal e o deles está na vertical…*
Investigadora: *Então, digam-me qual é a posição do vetor em relação ao eixo que traçaram para a reflexão?*
Sofia: *(olhando interogativamente para a Adriana) Paralelo?*

Tendo outros pares concluido corretamente, a investigadora solicitou que explicassem a conjetura. Para finalizar a tarefa 1, o par registou as propriedades analisadas no quadro síntese.

Na resolução da Tarefa 2 – Composição de duas reflexões (anexo 4) – verificou-se que o par começava a discutir, mais frequentemente, as construções realizadas, bem como os aspetos geométricos do trabalho desenvolvido, confrontando as descobertas com o grupo turma. Para o caso 1 – Composiçao de duas reflexões de eixos paralelos, como estratégia para perceber o que estava a acontecer, coloriram o polígono, o que aconteceu no resto da turma: *"Já conseguiste fazer a reflexão da figura?"*; *"A mim só me dá um triângulo..., não tenho tudo como tu!"*. Os alunos que sabiam o procedimento para obter a figura completa explicavam aos colegas. A investigadora não interferiu neste processo.

O par, Adriana e Sofia, ouviu atentamente o que os outros pares iam comentando. Por várias vezes, solicitou ajuda aos restantes pares, por não dominarem o software. A investigadora não interferiu por ter sido evidente a persistência do par para conseguir obter o mesmo resultado. Relativamente à relação entre os eixos e o vetor, facilmente concluiram que o vetor que define a translação tem de medida de comprimento o dobro da distância entre os eixos.

A investigadora questionou o grupo turma para perceber se tinham de facto apreendido uma das propriedades da translação e da reflexão – a orientação dos ângulos:

> ***Investigadora:*** *Já verificaram, utilizando o GeoGebra, que da figura 1 para a 3 há uma translação, certo?*
> ***Grupo Turma:*** *Sim, as figuras ficaram uma em cima da outra…*
> ***Investigadora:*** *Também reparei que tiveram em conta as cores das figuras e que verificaram que não se mantinham na mesma posição quando havia uma reflexão. E se a figura não fosse colorida?*
> ***Grupo Turma:****???*
> ***Investigadora:*** *Se não tivessem cores, como é que iam saber se tinha ocorrido translação ou reflexão?*

A investigadora solicitou que analisassem a tabela da tarefa 1, com as propriedades das isometrias estudadas. O par Adriana e Sofia não conseguiu perceber a relação. Tendo outro par conseguido, a investigadora solicitou que expusesse o raciocínio à turma.

Para o caso 2 – Composição de duas reflexões de eixos concorrentes – , verificou-se que, na primeira parte da tarefa, relativa a eixos perpendiculares, o par teve dificuldade em delinear um procedimento para obter o transformado da figura inicial por rotação de centro C. Tal como já tinham feito numa tarefa anterior, uniram os pontos correspondentes. *" Atenção ao ponto C!".* Verifica-se, então, que traçaram uma ou várias circunferências de centro em C e a passar pelos pontos correspondentes. O par observou com atenção o que aparecia no ecrã, discutiu, apontou novamente para o ecrã, verificou se os colegas já tinham chegado a uma conclusão e comparou com o que tinham:

> ***Sofia:*** *180, não?*
> ***Adriana:*** *Sim, parece…. Mede.*

A Sofia efetuou a medição e o par confirmou que a medida da amplitude do ângulo de rotação é de 180º.

No item da tarefa para explorar a composição de duas reflexões de eixos concorrentes sem serem perpendiculares, o par procedeu a nova construção, adotou o procedimento efetuado para o caso anterior, não tendo tido dificuldade em concluir que corresponde a uma rotação cuja medida da amplitude do ângulo é o dobro da medida do ângulo entre os eixos de reflexão.

A Tarefa 3 – Composição de duas rotações (anexo 5) – permitiu verificar que os procedimentos adotados diferiam nos pares com maior domínio do software. Estes pares, após obterem os transformados a partir da rotação 1 e rotação 2, respetivamente, ocultavam o primeiro transformado e só depois mediam a amplitude do ângulo de rotação da figura final a partir da original. Os alunos que possuíam menor domínio mantinham as construções todas visíveis.

Para a resolução desta tarefa, o par Adriana e Sofia traçou a(s) circunferência(s) tal como em tarefas anteriores, mantendo todas as construções visíveis. Para testar a conjetura no caso 1 – Composição de duas rotações com o mesmo centro, o par procedeu a nova construção comparando os valores obtidos para a medida de amplitude dos ângulos. Na execução desta tarefa, a investigadora atuou como agente facilitador da aprendizagem, intervindo quando solicitada e, principalmente, para auxiliar os alunos com menor domínio do software. As evidências recolhidas, relativas à resolução das tarefas por este par sugerem que o uso do software promoveu a obtenção de generalizações, apesar de alguma dificuldade na sua manipulação. O número de construções efetuadas, embora algumas delas sem sucesso, permitiu concluir que o conhecimento construído, a apropriação do conceito de rotação bem como a composição de rotações com o mesmo centro não constituíram dificuldade para o par.

A segunda parte da tarefa, caso 2 – Composição de duas rotações com centros de rotação distintos, suscitou grandes dúvidas, provavelmente pelo seu caráter mais aberto. A resolução desta tarefa antevia diferentes processos de exploração pelo que, a partir do sugerido na ficha de trabalho e atendendo a todo o trabalho exploratório realizado até à execução desta tarefa, seria de esperar que o par explorasse as construções com ângulos de diferentes amplitudes, o que não aconteceu.

Os pares continuaram a interagir entre si, verificando que as construções eram muito diferentes:

> ***Adriana:*** *Estivemos a ver o que fizemos nas outras aulas… Aqui não podemos aplicar a translação?*
> ***Investigadora:*** *Porquê?*
> ***Sofia:*** *(aponta para o ecrã) Se pusermos aqui os vetores, vai dar igual… mas a "eles" dá uma rotação…*
> ***Investigadora:*** *E os ângulos … compararam?*

O par revelou dificuldade em relacionar a medida de amplitude dos ângulos das construções de outros pares com o a sua. Tal poderá dever-se à falta de familiaridade com tarefas de exploração. Também ficou evidente que, a partir do que era visionado no ecrã, os alunos interagiam entre si, levando-os a pensar em novas estratégias, o que contribuíu para as conclusões finais. O conhecimento foi emergindo à medida que os alunos foram comunicando, e em particular, após a discussão em grande grupo.

Simetria – Frisos

Relativamente à Tarefa 4 – Simetrias (anexo 6) – o par apenas identificou as simetrias de reflexão nos polígonos apresentados na primeira questão, tendo mostrado surpresa quando outros pares focaram a rotação.

> ***Sofia:*** *Também era preciso ver isso?*

De novo, as evidências sugerem que o par tem alguma dificuldade em delinear estratégias na exploração de tarefas de caráter mais aberto. Quanto à segunda questão, que focava a simetria em polígonos regulares, o par facilmente identificou todas as simetrias.

Para a Tarefa 5 – Frisos (anexo 7) – o par deveria identificar e caracterizar as isometrias em cinco composições. Das oito composições selecionadas pela investigadora do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nos frisos/composições 1, 2 5, 6 e 8, apresentados no anexo 7. Posteriormente, deveriam descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderiam construir cada uma das composições escolhidas.

No friso 1, não houve dificuldade em identificar as isometrias que deixam a figura invariante, tendo o par focado a questão das cores (figura 54).

Fig. 98 – Análise do friso 1 pelo par Adriana e Sofia

Para clarificar o raciocínio e o conhecimento do par sobre isometrias e simetrias, a investigadora inquiriu-o. Inicialmente, o par mostrou pouco à vontade e algum receio sobre o tipo de questões que poderiam ser feitas:

Adriana: *Nós não percebemos nada disto Stora …*

A investigadora sossegou o par, informando que apenas queria esclarecer algumas dúvidas que foram surgindo durante a análise das respostas dadas (figura 55).

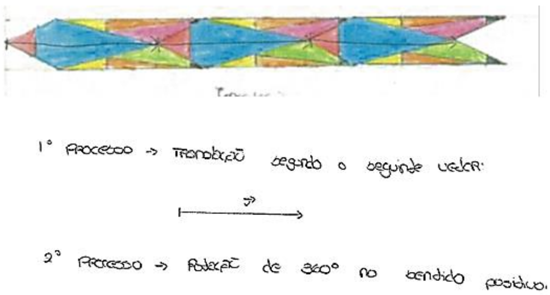


Fig. 101 – Processos de construção para o friso 1 do par Adriana e Sofia

Investigadora: *Na translação, só podem utilizar este vetor?(aponta para o vetor)*
Sofia: *Só.*
Investigadora: *Só, como?*
Adriana: *Não, depois há mais vetores!*
Sofia: *Estão aqui, três vetores.*
Investigadora: *Três vetores? São diferentes?*
Adriana e Sofia: *Não, são iguais.*
Investigadora: *Conseguiam fazer a translação doutra forma?*
Sofia: *Não*
Investigadora: *Só com esse vetor…*
Sofia: *Mas ... uma translação que ficasse igual a esta?*
Investigadora: *Sim*
Adriana: *Não...*

Esperava-se, com esta questão, que o par identificasse, por exemplo, um vetor de sentido contrário ao vetor apresentado ou outro múltiplo qualquer, o que não aconteceu.

Nos processos de construção do friso 1 (figura 55) , o par identificou uma rotação de 360º não havendo indícios de terem testado esta possibilidade na sua análise:

> ***Investigadora:*** *Nos processos de construção referem "rotação de 360º…".*
> ***Adriana:*** *Pareceu-nos…*
> ***Investigadora:*** *É pertinente considerar essa rotação?*
> ***Adriana:*** *Não Stora…*
> ***Investigadora:****Pois não! Uma rotação de 360º existe sempre.*

Quanto ao friso 2, o par identificou o eixo vertical associado à reflexão identificada e o vetor associado a uma translação, como se pode observar na figura 55.

Fig. 104 – Análise do friso 2 pelo par Adriana e Sofia

Quanto ao processo de construção, o par limitou-se a referir que o friso é construído a partir de várias "simetrias" (figura 57), pelo que foi questionado o seu significado.

Fig. 107 – Processo de construção do friso 2 do par Adriana e Sofia

Para o par, simetria está principalmente associada à simetria de reflexão, cujos eixos foram representados (figura 57). Verificando-se a representação de um vetor, foi solicitado ao par que referisse outro processo de construção do friso:

> ***Adriana:*** *Se fosse translação, tinha de ser daqui para aqui. Da primeira para a terceira*
> ***Investigadora:*** *Então e a segunda como a iríamos obter?*
> ***Sofia:*** *Com uma reflexão da primeira…*
> ***Investigadora:*** *Então a esse bloco (1 e 2) é que íriamos aplicar a translação, certo?*
> ***Sofia:*** *Sim*

Questionado sobre outro possível processo de construção, o par respondeu categoricamente não saber.

Passando à construção 5, analisada pelo par (figura 57), este referiu que *"não há nenhuma simetria"*, especificando em seguida a simetria de rotação.

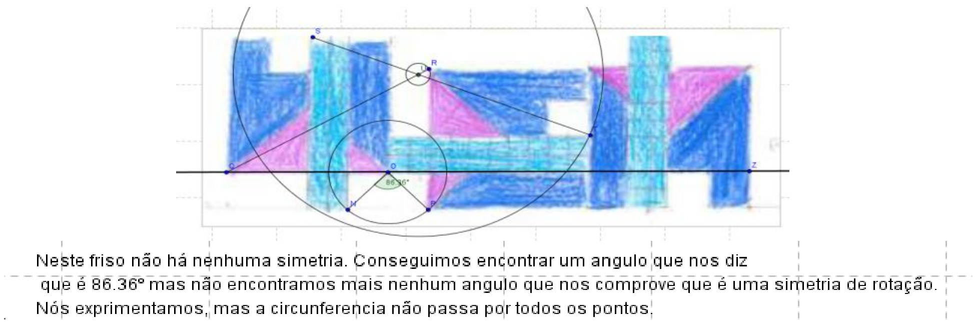


Fig. 110 – Análise da composição 5 pelo par Adriana e Sofia

O par tentou efetuar algmas rotações para suportar a sua afirmação. A professora encetou então, um diálogo no sentido de explicitar que nem todas as construções que fizeram em Educação Visual são realmente frisos.

Na descrição de processos de construção da composição (figura 59), verifica-se que o par teve grande dificuldade em fazê-lo. No entanto, o par conseguiu prolongar a construção aplicando sucessivas rotações de 90º.

Fig. 113 – Processos de contrução da composição 5 do par Adriana e Sofia

Por simples visionamento do elemento inicial, o par identificou uma rotação de 90º, não tendo, na análise feita, sido crítico quanto ao valor da medida de amplitude do ângulo obtido. O par foi questionado sobre o significado de *"sentido positivo"*, que não está coerente com o sentido representado na figura 58:

> ***Investigadora:*** *Dizem que o sentido de rotação é +90 graus. O sentido da rotação é positivo. O positivo é em que sentido?*

> ***Adriana:*** *É no sentido contrário aos ponteiros do relógio…*
> ***Investigadora:*** *O que é que vocês têm aqui?*
> ***Adriana:*** *AH!*

Verificou-se que o conceito sobre o sentido de rotação fora bem adquirido, apesar de não estar de acordo com o representado na resposta. A investigadora indagou o par se conseguiria identificar outro processo de construção, tendo o par respondido negativamente.

No que respeita ao friso 6 (figura 60), o par identificou erradamente uma rotação de 180^0. Questionado, referiu que tinha feito uma rotação do triângulo em Educação Visual. A investigadora aproveitou para inquirir se a rotação seria de 180º e o par constatou que não. Identificou também uma reflexão de eixo vertical para obter o módulo de repetição (figura 60) ao qual seria aplicado sucessivamente o vetor representado.

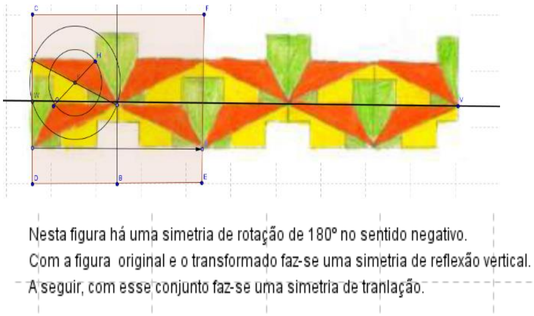


Fig. 116 – Análise do friso 6 pelo par Adriana e Sofia

Quando lhe foi solicitado que descrevesse diferentes processos de construção do friso (figura 61), o par referiu uma reflexão deslizante.

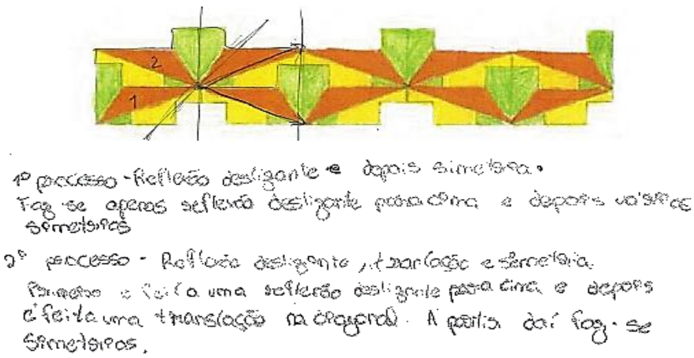


Fig. 119 – Processos de construção do friso 6 do par Adriana e Sofia

Questionado sobre isso e sobre os eixos de reflexão desenhados na figura, o par referiu que considerou um eixo "diagonal" por identificar uma reflexão deslizante A investigadora pediu então ao par que caracterizasse uma reflexão deslizante, para averiguar a apropriação do conceito. O par reconheceu que uma reflexão deslizante é caracterizada por uma reflexão e por uma translação, e que a ordem pela qual se realizam é indiferente. No entanto, nada foi referido sobre o vetor. A investigadora solicitou então que o par fizesse um esquema:

> ***Sofia:*** *Acho que é igual*
> ***Investigadora:*** *É igual, porquê?*
> ***Sofia:*** *Vai dar o mesmo… não?*
> ***Investigadora:*** *Podem desenhar se quiserem… Acabaram de dizer que iríamos obter o mesmo. Vocês não têm dúvidas?*
> ***Adriana:*** *Acho que não.*
> ***Investigadora:*** *Então façam lá isso. Como é que vocês fariam para me mostrar que realmente isto é verdade?*
> ***Adriana:*** *Ai!! Este é muito difícil!!! (referindo-se ao módulo do friso) Posso fazer um mais fácil?*

Os esquemas feitos representaram corretamente a reflexão deslizante, incluindo o vetor associado paralelo ao eixo de reflexão. De novo se verifica que o conceito adquirido não está de acordo com o que percecionam numa tarefa mais aberta e complexa. Coloca-se, em seguida, a questão da reflexão deslizante "para cima", referida no processo. Ao comparar os esquemas com o friso e o vetor traçado no friso, o par apercebe-se que estava errado:

> ***Sofia:*** *Pareceu-nos..*
> ***Adriana:*** *Pois… mas está mal…*

A propósito da "simetria" que o par referiu – "reflexão deslizante e depois simetria" – teceu-se o seguinte diálogo:

> ***Investigadora:*** *Vocês aqui falam em simetria. O que é que isso significa?*
> ***Sofia:*** *É necessário…*
> ***Adriana:*** *Como assim?(interrompendo a colega)*
> ***Investigadora:*** *O que significa para vocês "simetria"*
> ***Adriana:*** *"É quando existe um eixo de reflexão e os pontos estão ao mesmo…"*
> ***Sofia:*** *... distância ...*
> ***Adriana:*** *Distância do eixo dum lado e doutro.*

Tal como já se havia verificado, simetria é associada à simetria de reflexão.

No processo 2, é identificada uma "translação na diagonal" (figura 61), pelo que é solicitado o seu significado: *"É quando o vetor está na diagonal"*. O par indicou dois vetores diferentes: um para obter o transformado do triânglo identificado com 1 na figura 61 e outro para obter o transformado do elemento identificado com 2, na mesma figura. O par foi questionado sobre a translação para obter o friso, tendo respondido que deveria existir "*um vetor igual em todas as figuras"*:

> ***Investigadora****: Então mostrem-me lá, aí…*
> ***Adriana:*** *Que é igual?*

> ***Investigadora:*** *Sim, qual o vetor que tinham de considerar?*
> ***Adriana:*** *Na horizontal*
> ***Investigadora:*** *Identifiquem-me aí o vetor para a translação… na horizontal…*
> ***Adriana:*** *Só se considerarmos esta figura toda!*
> ***Sofia:*** *O módulo!*

O par foi autónomo na realização de todas estas tarefas e apenas solicitou ajuda na análise do friso 8 (figura 62), apesar da investigadora por várias vezes se ter aproximado do par e ter indagado sobre possíveis dúvidas na realização das mesmas.

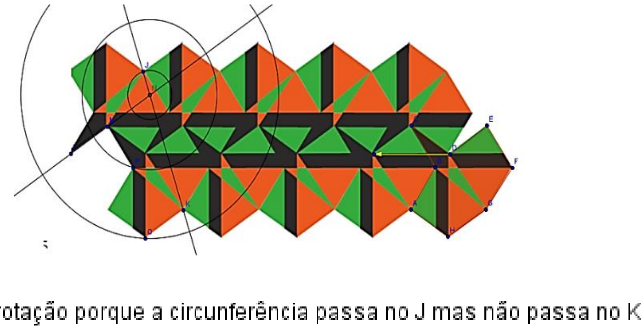


Fig. 122 – Análise do friso 8 pelo para Adriana e Sofia

Dada a complexidade do friso, a investigadora não o explorou exaustivamente.

> ***Adriana:*** *Stora, nós aqui não conseguimos ver que há uma rotação…*
> ***Investigadora:*** *Mas porquê? É obrigatório que haja uma rotação?*
> ***Adriana :*** *Não sei… não estamos a conseguir…*
> ***Investigadora:*** *Expliquem porque não estão a conseguir…*
> ***Sofia:*** *A circunferência não passa por todos os pontos…*
> ***Investigadora:*** *Verifiquem se o vosso procedimento está correto…*

De novo há indícios de não ter sido consolidado o procedimento para encontrar o centro de rotação a partir da figura original e seu transformado.

No processo de construção, o par não referiu qualquer processo, indicando o que é apresentado na figura 63.

Fig. 125 – Processo de construção para o friso 8 do par Adriana e Sofia

O par identificou uma reflexão deslizante bem como o vetor associado à translação Para perceber o raciocínio do par, este foi inquirido:

> ***Investigadora:*** *Podem explicar-me melhor a reflexão que identificam no friso?*
> ***Adriana:*** *Então… Temos aqui este eixo! Este aqui passa para aqui. Está aqui um vetor… e passa para ali.*
> ***Investigadora:*** *Não estou a perceber! Este módulo… o que é que acontece?*
> ***Adriana:*** *Sofre uma reflexão… com este eixo aqui, na horizontal…*
> ***Investigadora:*** *Na horizontal e aí? E depois?*
> ***Adriana:*** *E depois uma translação.*
> ***Investigadora:*** *Segundo que vetor?*
> ***Adriana:*** *Este*
> ***Investigadora:*** *Mas esse vetor vai ser aplicado onde? Aqui, no original?*
> ***Sofia:*** *Não, na refletida!*
> ***Investigadora:*** *Mas vai sofrer uma translação para onde?*
> ***Adriana:*** *Para aqui, assim.*
> ***Sofia:*** *Para cima*
> ***Adriana:*** *Não!!*
> ***Sofia:*** *Para a direita, não?*
> ***Investigadora:*** *Para a direita como?*
> ***Sofia:*** *Porque é o sentido do friso …*

O par apresentou um processo de construção que consiste em efetuar translações sucessivas do "módulo" na parte superior do friso e, em seguida aplicar uma reflexão deslizante para obter a parte inferior do friso. No entanto o processo apresentado está errado, não é possível obter reflexão deslizante associada ao eixo que o par indica. A continuação do friso era feita por translação do bloco obtido anteriormente. A investigadora dialogou com os alunos no sentido de os levar a identificar outro módulo, identificado na figura 63, ao qual fosse possível aplicar translações sucessivas para obter o friso.

Para cada um dos elementos do par , descrevem-se, em seguida, as respostas dadas no teste, versão pré e pós, na questão 1, de modo a dar uma ideia qualitativa da evolução do seu desempenho individual.

Relativamente ao item 1.1, verifica-se um ganho de pormenores nas respostas corretas da Adriana, da versão pré para a pós (figura 64) provavelmente aproveitando para assinalar elemenos referidos na alínea seguinte.

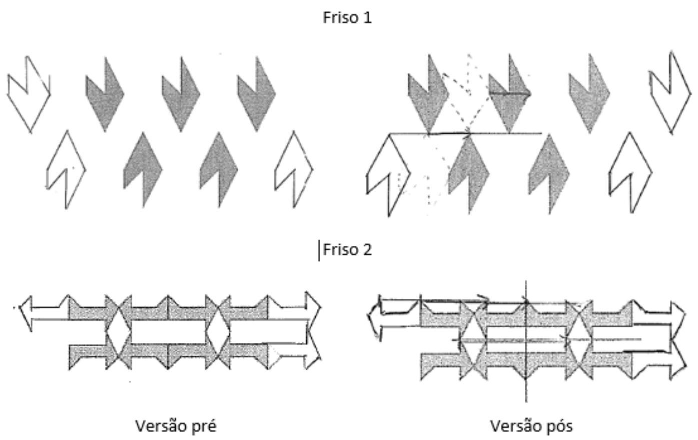


Fig. 128 – Resolução de Adriana da questão 1 item 1.1. do teste

Não se verifica grande diferença para as respostas da Sofia (figura 65) embora também estejam corretas em ambas as versões. Neste caso, apenas na versão pré se verifica o traçado do(s) vetor(es) de translação para o friso 1.

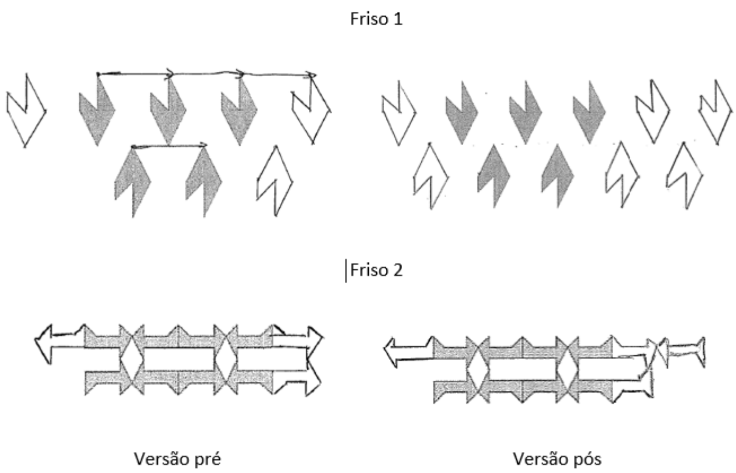
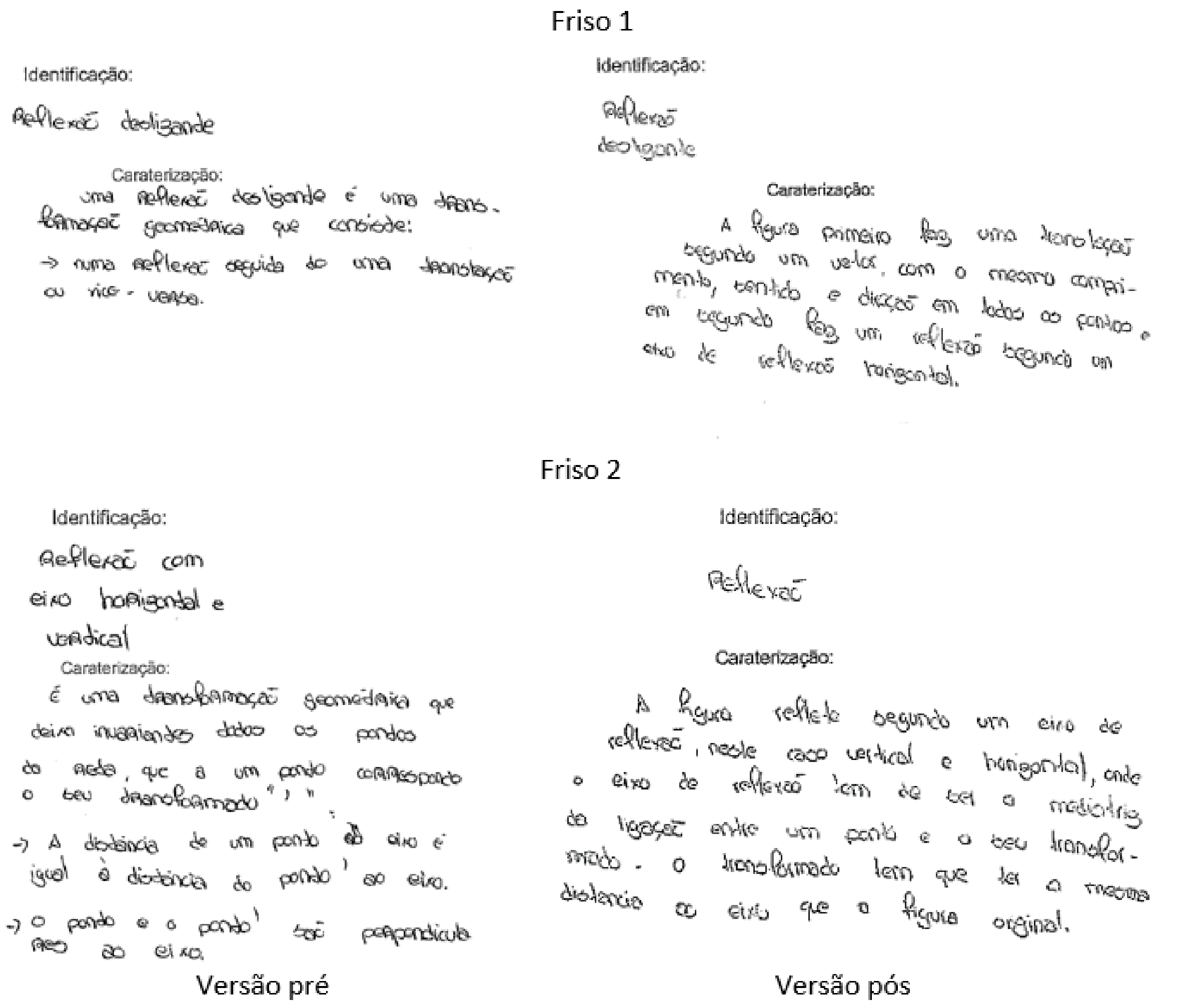


Fig. 131 – Resolução de Sofia da questão 1 item 1.1 do teste

Quanto ao item 1.2, o par identificou corretamente as isometrias em ambas as versões, embora a Sofia não tenha representado todos os elementos do friso 1 e não tenha representado qualquer elemento do friso 2.

No caso da Adriana, para o friso 1 (figura 66), verifica-se que a resposta, na versão pós, está mais completa pois referiu um "*vetor translação que se aplica em todos os pontos com o mesmo comprimento, direção e sentido",* e para a reflexão," *um eixo de reflexão* *horizontal"*. Tal é evidenciado no traçado do vetor, do eixo de reflexão e da imagem refletida, no esquema para a continuação do friso. Esta resposta sugere que a aluna identificou a reflexão deslizante como a composição de uma translação e uma reflexão, o que já se verificava na versão pré .


Friso 1

Identificação:
Reflexaõ deslizande

Caraterização:
uma reflexaõ deslizande é uma transformaçaõ geometrica que consiste:
→ numa reflexaõ seguida de uma translaçaõ ou vice-versa.

Identificação:
Reflexaõ deslizante

Caraterização:
A figura primeiro faz uma translaçaõ segundo um vetor, com o mesmo comprimento, sentido e dicçaõ em todos os pontos e em segundo faz um reflexaõ segundo um eixo de reflexaõ horizontal.

Friso 2

Identificação:
Reflexaõ com eixo horizontal e vertical

Caraterização:
É uma transformaçaõ geometrica que deixa invariantes todos os pontos da reta, que a um ponto corresponde o seu transformado " ' "
→ A distância de um ponto ao eixo é igual à distância do ponto ' ao eixo.
→ o ponto e o ponto' saõ perpendiculares ao eixo.

Identificação:
Reflexaõ

Caraterização:
A figura reflete segundo um eixo de reflexaõ, neste caso vertical e horizontal, onde o eixo de reflexaõ tem de ser a mediatriz da ligaçaõ entre um ponto e o seu transformado. O transformado tem que ter a mesma distancia ao eixo que a figura original.

Versão pré

Versão pós

Fig. 134 – Resolução de Adriana da questão 1 item 1.2 do teste

Quanto ao friso 2, a resposta indicia que foi efetuado um estudo prévio sobre as isometrias pois na versão pré a aluna indica propriedades da isometria reflexão. Já na versão pós, a Adriana refere os eixos, horizontal e vertical, como características da reflexão, ou das reflexões. Refere ainda o eixo de reflexão como mediatriz do segmento de reta que une um ponto da figura inicial com o seu transformado na figura refletida, apesar de não ter efetuado o seu traçado na continuação do friso.

Quanto à Sofia, para o caso da reflexão deslizante identificada no friso 1, na versão pós, caracterizou a translação, após ter efetuado uma reflexão, como o *movimento de duas quadrículas para o lado direito* (figura 67). Esta resposta indicia que a aluna identificou a reflexão deslizante como a composição de uma reflexão e uma translação, o que já se verificava na versão pré. Só nesta versão é que a Sofia representou o(s) vetor(es) associado(s) a uma translação. Em nenhuma delas representou o eixo de reflexão.

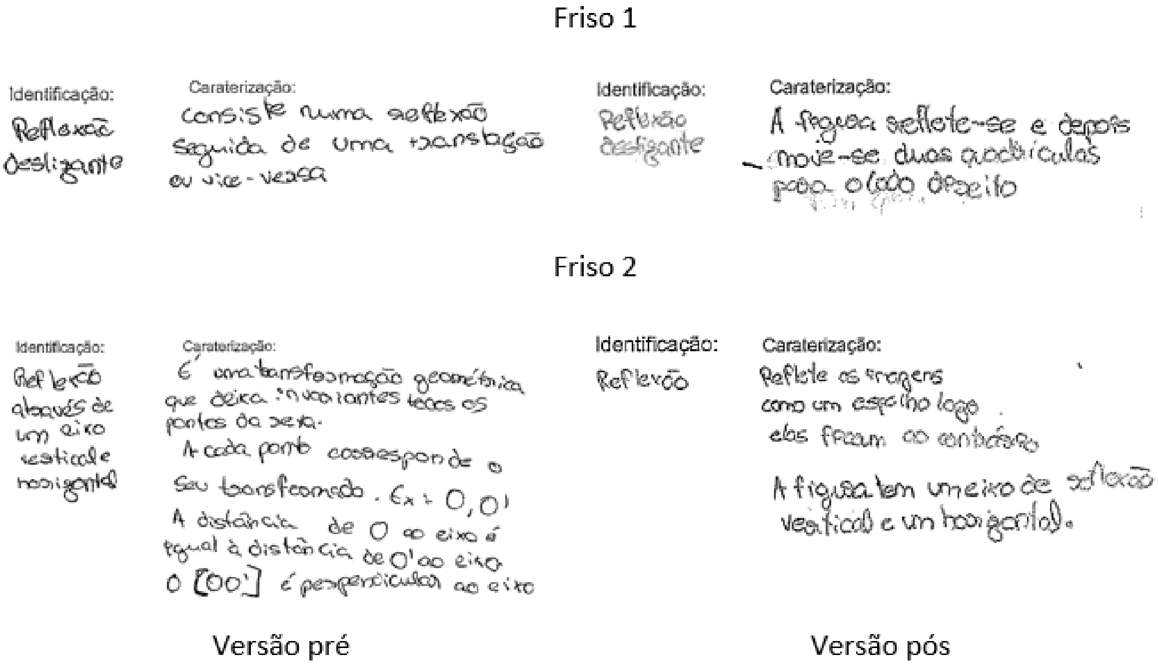
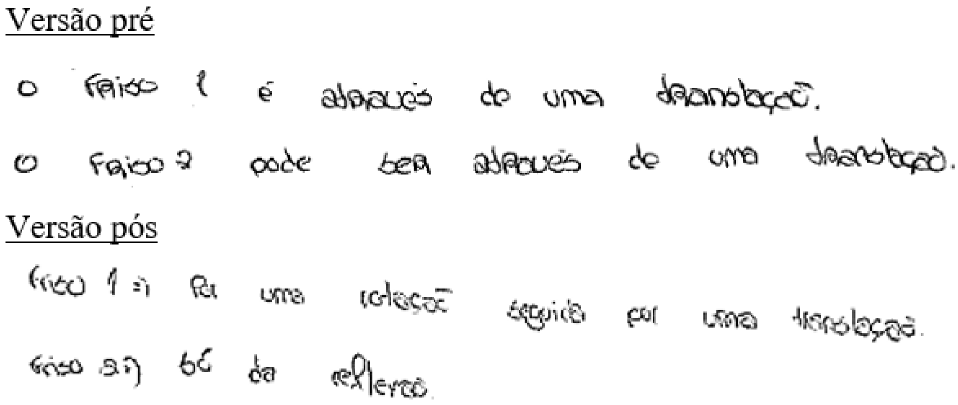


Fig. 137 – Resolução de Sofia da questão 1 tem 1.2 do teste

Quanto ao friso 2, tal como se verificou para a Adriana, a resposta sugere um estudo prévio sobre isometrias pois, na versão pré, a aluna indicou propriedades da isometria reflexão. Na versão pós, a Sofia referiu os eixos, horizontal e vertical, como características das reflexões, identificadas.

No item1.3, a Adriana indicou apenas um processo de construção para os frisos, referindo as isometrias que permitem obter cada um deles (figura 68). Para o friso 1, identificou a reflexão deslizante como isometria. No entanto, na versão pós, referiu uma rotação seguida de uma translação para a construção do friso, não fazendo qualquer menção à reflexão deslizante.


Versão pré

O friso 1 é através de uma translação.

O friso 2 pode ser através de uma translação.

Versão pós

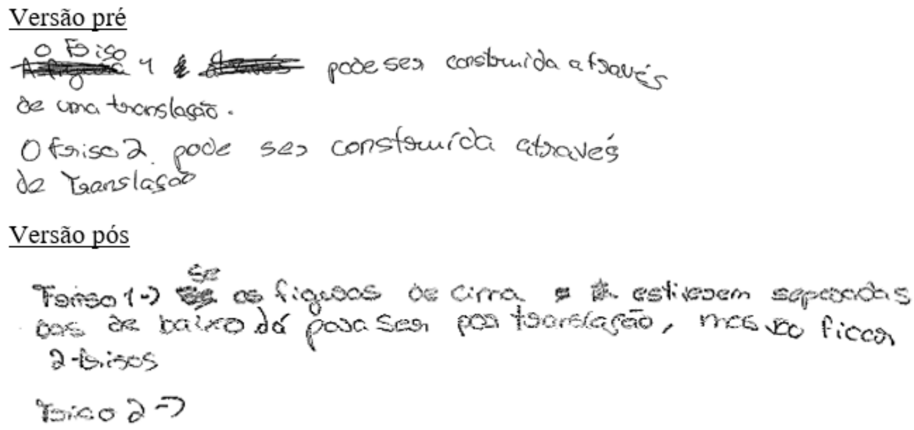
friso 1 => foi uma rotação seguida por uma translação.

friso 2 => só da reflexão

Fig. 140 – Resolução de Adriana da questão 1 item 1.3 do

Para o friso 2, a resposta apresentada está de acordo com a isometria identificada no item 1.2. Pode considerar-se que houve evolução da versão pré para a versão pós. Na versão pré, a aluna identificou a translação para a contrução do friso 2, e na versão pós identifica a reflexão, para além de referir processos diferentes para cada um dos frisos. Tal não se verificou na versão pré.

Quanto à Sofia, na versão pré (figura 69), referiu a translação como processo de construção para ambos os frisos. Na versão pós, referiu novamente a translação para a construção do friso 1 e interpretou a figura composta de dois frisos. Quanto ao friso 2, a aluna não respondeu. Pode considerar-se que não houve evolução da versão pré para a versão pós. A aluna identificou, em ambas as versões, a translação, deixando de a referir na versão pós para o friso 2. Por outro lado, a aluna referiu a possibilidade da figura 1 ser composta por dois frisos o que pode refletir falta de atenção na leitura do enunciado.


Versão pré

~~A figura~~ O friso 1 ~~é~~ ~~através~~ pode ser construída através de uma translação.

O friso 2 pode ser construída através da translação

Versão pós

Friso 1 -> se as figuras de cima estiverem separadas das de baixo dá para ser por translação, mas ficam 2 frisos

Friso 2 ->

Fig. 143 – Resolução de Sofia da questão 1 item 1.3 do teste

Simetria – Rosáceas

Para a Tarefa 6 – Rosáceas (anexo 8) – , o par deveria identificar e caracterizar as simetrias em cinco rosáceas. Das oito rosáceas selecionadas pela investigadora, do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nas rosáceas 1, 5, 6, 7 e 8 apresentadas no anexo 8. Posteriormente, deveriam descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderiam construir cada uma das rosáceas escolhidas.

Para a rosácea 1, o par identificou o centro de rotação e a medida de amplitude do ângulo de rotação, tendo sido traçadas três circunferências concêntricas (figura 70). O par analisou a medida de amplitude do ângulo de rotação obtida a partir do GeoGebra, concluindo que deveria ser de 90º e não 93,88º, não apresentando qualquer justificação.

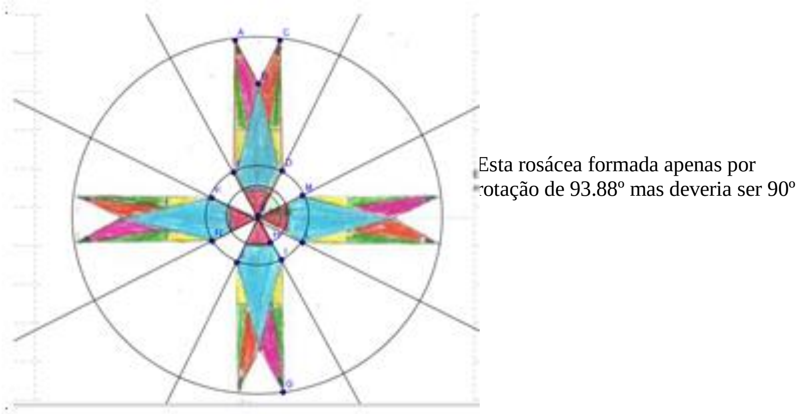


Fig. 147 – Análise da rosácea 1 pelo par Adriana e Sofia

Na descrição dos processos de construção para a rosácea 1, o par referiu dois (figura 71).

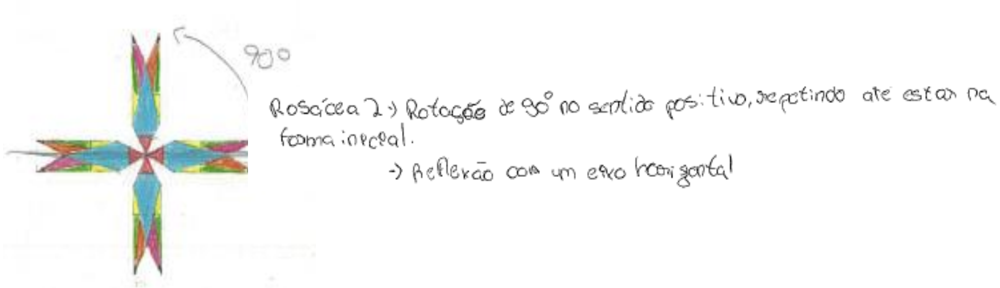


Fig. 149 – Processos de construção para a rosácea 1 do par Adriana e Sofia

A investigadora indagou sobre o significado da resposta: *repetindo até estar na forma inicial*:

> ***Sofia:*** *Até voltar ao mesmo ponto.*
> ***Investigadora:*** *Mas… voltar ao mesmo ponto, o quê?*

> ***Sofia:*** *O módulo.*
> ***Investigadora:*** *O módulo? Qual módulo?*
> ***Sofia:*** *O que considerarmos. Por exemplo, se consideramos este… até voltar aqui.*
> ***Investigadora:*** *Então este "repetir" aqui, significa o quê?*
> ***Adriana:*** *Quando faz a rotação*
> ***Sofia:*** *Rodar.*
> ***Investigadora:*** *Repetem então quantas vezes?*
> ***Adriana e Sofia:*** *Quatro.*
> ***Investigadora:*** *Qual é a amplitude do ângulo de rotação?*
> ***Sofia:*** *Noventa…*
> ***Investigadora:*** *Porquê noventa?*
> ***Adriana e Sofia:*** *Porque são quatro.*
> ***Investigadora:*** *Só é possível essa amplitude de rotação?*
> ***Adriana:*** *Acho que sim, se são quatro…*
> ***Investigadora:*** *Pensem bem!*

O par não conseguiu identificar outra simetria de rotação. Quando questionado sobre o eixo de reflexão horizontal que referiu no processo (figura 71), o par apercebeu-se que não o podia considerar:

> ***Investigadora:*** *Com o eixo de reflexão horizontal, iam obter a mesma rosácea?*
> ***Adriana:*** *Se fosse, assim, ao meio, como temos aqui, íamos.*
> ***Investigadora:*** *Tal e qual como está?*
> ***Adriana:*** *Com as cores não… a figura não é simétrica.*

Relativamente à rosácea 5 (figura 72), o par identificou o centro de rotação e a medida da amplitude de um ângulo de rotação adotando o procedimento das circunferências concêntricas. Neste caso, o par verificou que a medida de amplitude desse ângulo de rotação não corresponde ao que deveria obter, justificando com cálculos.

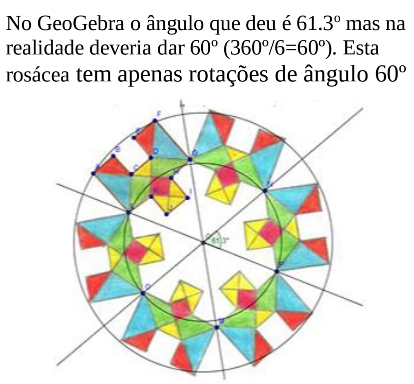


Fig. 153 - – Análise da rosácea 5 pelo par Adriana e Sofia

Quanto à descrição de processos para a construção da rosácea (figura 73), o par refere dois sucintamente. No primeiro refere, erradamente um eixo de reflexão; no segundo refere a medida da amplitude de um ângulo de rotação.

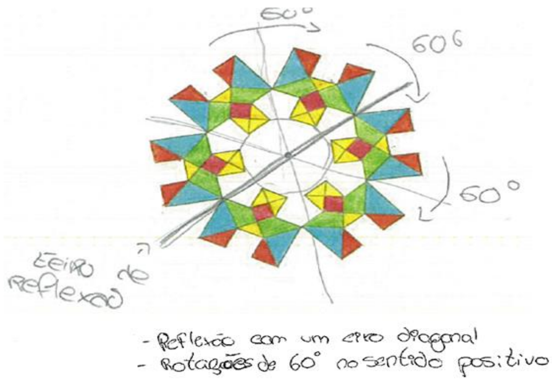


Fig. 155 – Processos de construção para a rosácea 5 do par Adriana e Sofia

Para clarificar o raciocínio, a investigadora inquiriu o par:

> ***Investigadora:*** *Referem "eixo de reflexão". Quero que me expliquem melhor como é que é obtida a rosácea a partir desse eixo.*
> ***Sofia:*** *Temos ali um eixo de reflexão…*
> ***Investigadora:*** *Sim, mas como é que constroem a rosácea a partir desse eixo de reflexão?* (O par ficou hesitante não sabendo o que responder). *O que é que pensaram quando escreveram "a partir desse eixo de reflexão"?*
> ***Sofia:*** *Tem vários eixos de reflexão… não?*

A aluna considerou a posiibilidade de maiexistir mais do que um eixo de reflexão e traça, erradamete, mais dois como se pode observar na figura 73. Verificando que o par não entende o solicitado, a investigadora direciona o par:

> ***Investigadora:*** *Escolham um módulo*
> ***Sofia:*** *Um ou dois?*
> ***Adriana:*** *Então, mas primeiro temos que fazer só com um módulo…Não é com os dois.*
> ***Investigadora:*** *Então expliquem-me.*
> ***Adriana:*** *Temos este módulo… Temos este eixo. Ele faz… aqui outro eixo… outro eixo…*
> ***Sofia:*** *E vamos refletindo… não é?*

A Sofia referiu então que "*quando traçámos o eixo de reflexão na rosácea foi para refletir três módulos",* segundo o eixo referido no processo de construção.

Esta resposta indicia que o par não viu a figura como rosácea mas apenas como uma composição de isometrias. A figura é obtida por simeria de reflexão associada ao eixo identificado na figura 73.

A investigadora ainda indagou o par sobre a existência de outros eixos de reflexão:

> ***Adriana:*** *Será o que divide ao meio, não …? Sei lá…*
> ***Investigadora:*** *O que divide ao meio o quê?*
> ***Adriana:*** *As figuras…*
> ***Investigadora:*** *As figuras? Porque é que consideram aí um eixo?*
> ***Adriana:*** *Porque as figuras são simétricas.*
> ***Investigadora:*** *Lembram-se como se designam as rosáceas que têm simetria de reflexão e simetria de rotação?*
> ***Adriana:*** *Não Stora* (a Sofia abana a cabeça dizendo não)

A investigadora dialogou com o par relembrando como poderiam se obtidas as roáceas diedrais.

Quanto à análise da rosácea 6, o par identificou a medida da amplitude de ângulo de rotação e o centro de rotação (figura 74) e tal como anteriormente, traçou circunferências concêntricas e justificou que a medida da amplitude do ângulo de rotação não corresponde ao que deveria obter, continuando, no entanto, a não indicar um motivo para o facto.

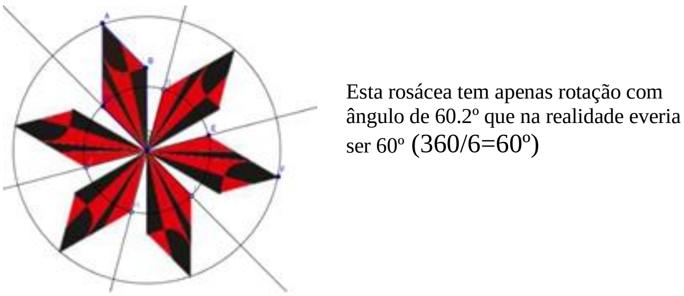
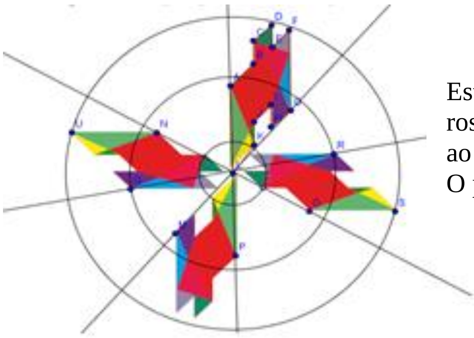


Fig. 157 – Análise da rosácea 6 pelo par Adriana e Sofia

Como processo de construção, referiu apenas um e de forma sucinta, como aconteceu para as anteriores (figura 75). Para este caso, o par não foi inquirido.

Fig. 159 – Processos de construção da rosácea 6 do par Adriana e Sofia

Relativamente à *rosácea* 7, assim apelidada pela investigadora para averiguar se os alunos consideravam a imagem como rosácea ou se aplicavam os conceitos adquiridos sobre as rosáceas. O par, Adriana e Sofia, aplicou o procedimento anterior para averiguar se existia rotação. Traçou de novo três circunferências concêntricas e concluiu, como se pode observar na figura 76, que não pode ser uma rosácea.



Esta figura nã é
rosácea pois o ponto S
ao rodá-lo ia dar
O ponto U e não L

Fig. 163 – Análise da composição 7 pelo par Adriana e Sofia

Existindo isometrias na figura construída em Educação Visual, também foi solicitada a descrição de processos. De novo, o par foi sumário na sua descrição (figura 77). Também para este caso o par não foi inquirido.

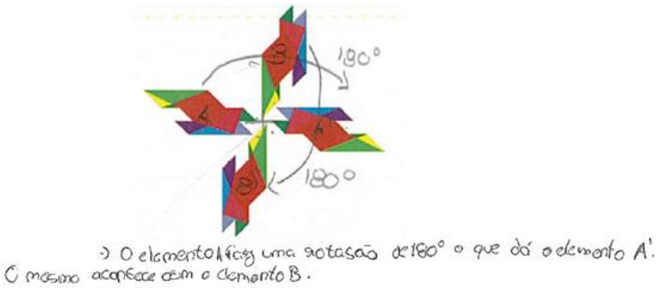
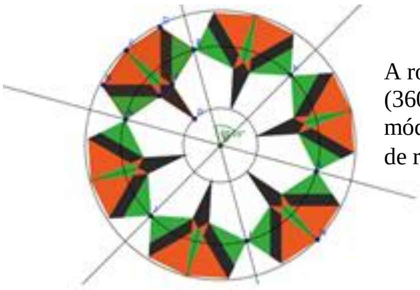


Fig. 165 – Processos de construção para a composição 7 do par Adriana e Sofia

No referente à rosácea 8, o par identificou a simetria de rotação e a simetria de reflexão. Para a simetria de rotação, o par traçou circunferências concêntricas e caracterizou uma única rotação, como se pode ver na figura 78, não fazendo qualquer alusão ao facto da medida da amplitude do ângulo de rotação estar bastante próxima da esperada. Para a simetria de reflexão identificada no módulo, o par não representa o(s) respetivo(s) eixo(s) de reflexão.



A rosácea é constituída por rotações de 60,08º (360/6=60). Se considerarmos metade do módulo também daria para obter uma simetria de reflexão.

Fig. 169 – Análise da rosácea 8 pelo par Adriana e Sofia

A descrição de processos para obter a rosácea mantém-se na linha do verificado para as rosáceas anteriores. O eixo de reflexão oblíquo está representado na figura 79, e o processo para obter a rosácea consiste em efetuar a reflexão de três módulos tal como para a rosácea 5.

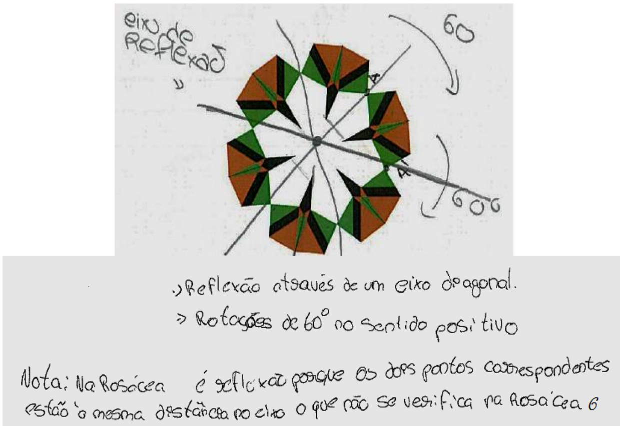


Fig. 171 – Processos de construção da rosácea 8 pelo par Adriana e

No entanto a *nota* deixa antever que o par associou aos pontos A e A' a reflexão, o que se veio a confirmar na inquirição:

Investigadora: *Conseguem identificar outra simetria?*
Adriana: *Se calhar a que divide ao meio.*
Investigadora: *Divide ao meio como? Explica.*
Adriana: *Então, a figura é simétrica…*
Investigadora: *Então continuamos a ter simetria de reflexão…*
Adriana: *Pois*
Investigadora: *Quantos eixos de reflexão é possível representar?*
Adriana: *Um para cada módulo… seis!*
Investigadora: *Conseguem identificar outra simetria?*
Adriana: *Outra simetria?*
Investigadora: *Sim, para além da que referiram.*
***Adriana**: Não. Aaah! (a Sofia tinha sussurrado o nome de outras simetrias: simetria de rotação e simetria de translação)*

O par referiu a simetria de rotação e caracterizou corretamente uma das possibilidades, tendo identificado que a medida de amplitude de um dos ângulo de rotação é de 60º e que o seu sentido poderia ser positivo ou negativo. A investigadora esclareceu o par quanto à possiblidade de existirem outras simetrias de rotação, com medidas de amplitude dos ângulos de rotação múltiplo de 60º. Ao questionar o par, a investigadora pretendia saber também se este identificava a rotação como uma simetria pois referia simetria quando se reportava à simetria de reflexão. Foi esclarecido, pelo par, que era a forma como designavam a simetria de reflexão em Educação Visual.

> ***Investigadora:*** *O que é que vocês querem dizer com "é reflexão porque os dois pontos correspondentes estão à mesma distância do eixo, o que não se verifica na rosácea 6"*
> ***Adriana:*** *Os dois pontos correspondentes, do tipo, A e A'.*
> ***Investigadora:*** *E o que é o ponto A e A'?*
> ***Sofia:*** *É o ponto de uma figura e o correspondente na outra…*
> ***Investigadora: "****o que não se verifica na rosácea 6"*
> ***Sofia****: Sim, aí não dá*
> ***Investigadora****: Não dá porquê?*
> ***Sofia****: Porque a figura não é simétrica…*
> ***Investigadora****: Mas vocês têm aí simetria de rotação. Têm de ter o original e o transf…*
> ***Sofia****: Mas não é simetria…*
> ***Adriana****: … de reflexão*
> ***Investigadora****: E por esse motivo não podem ter um A e um A'?*
> ***Adriana****: Podemos. Por simetria de rotação…*
> ***Investigadora****: E não têm aí simetria de rotação?*
> ***Adriana:*** *Temos, mas ao dizermos simetria, estávamos a referir-nos … à reflexão.*

O tipo de respostas obtido ao longo da execução das tarefas bem como na inquirição sugere que o par se sentiu pouco à vontade na execução de tarefa mais abertas. Por várias vezes, a investigadora teve de recorrer a questões de focalização, que induzisse o par a refletir sobre os conceitos que foram adquirindo ao longo da implementação da sequência didática para se certificar da aquisição de conhecimentos geométricos sobre o tema em apreço.

Para cada um dos elementos, descrevem-se, em seguida, as respostas dadas no teste, versão pré e versão pós, na questão 2, de modo a dar uma ideia qualitativa da evolução do seu desempenho individual.

Em relação à questão 2, item 2.1, veja-se a figura 80. A Adriana não apresenta melhoria no desempenho. Não apresentou o centro de rotação, em ambas as rosáceas, da versão pré para a versão pós.

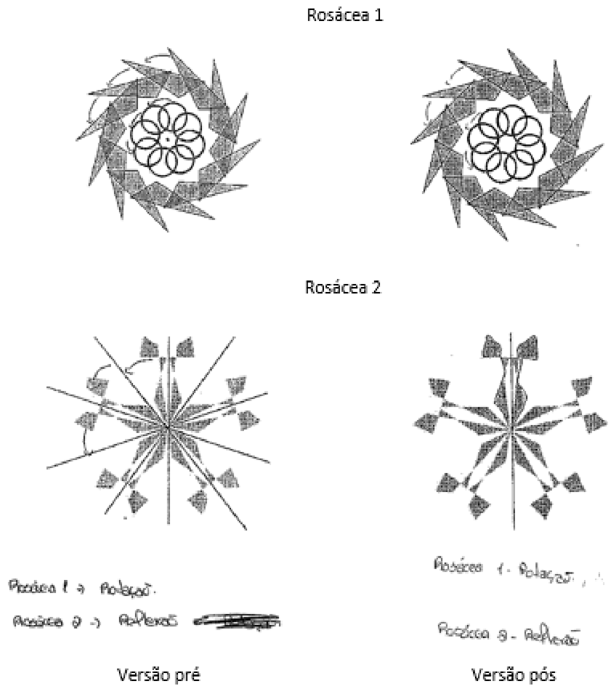


Fig. 174 – Resolução de Adriana da questão 2 item 2.1 do teste

Para a Rosácea 2, a aluna identificou, na versão pré, simetrias de reflexão e rotação, ainda que tenha estado indecisa nesta, acabando por riscar a resposta. Na versão pós, a Adriana identificou, apenas, um eixo de simetria, o que não aconteceu na versão pré, tal como se pode verificar na mesma figura, mas explicitou verbalmente uma rotação..

Quanto à resposta da Sofia, não apresenta qualquer detalhe na Rosácea 1 e, apesar de traçar eixos na Rosácea 2 (figura 81), identificou a simetria de rotação para ambas as rosáceas na versão pré. Na versão pós, a aluna voltou a identificar a simetria de rotação para a Rosácea 1 e identficou a simetria de reflexão na Rosácea 2, traçando um eixo de reflexão no elemento de repetição, o que não aconteceu na versão pré, tal como se pode verificar na figura 81. Por outro lado, na versão pós, os detalhes adicionados à Rosácea 2 sugerem que a aluna identificou a simetria de rotação, mesmo que não a tenha referido.

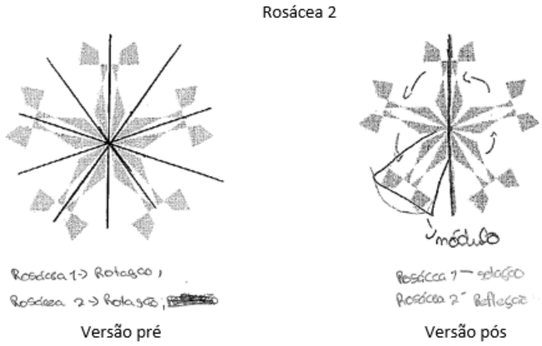


Fig. 177 – Resolução de Sofia da questão 2 item 2.1 do teste

O par não responde ao item 2.2, o que significa que não caracterizou as isometrias identificadas, quer na versão pré quer na versão pós do teste.

No que respeita aos processos de construção das rosáceas, item 2.3, a Adriana não respondeu na versão pré tendo apresentado a resposta que se segue (figura 82) na versão pós.

Rosácea 2 -> é uma reflexão, porque os elementos da esquerda refletem na direita.

Fig. 180 – Resolução de Adriana da questão 2 item 2.3 versão pós- teste

Quanto à Sofia, na versão pré, respondeu apenas para a Rosácea 2 (figura 83).

Através de Reflexões se considerar-mos metade da figura

Fig. 183 – Resolução de Sofia da questão 2 item 2.3 versão pré-teste

Na versão pós, a aluna apresentou dois processos de construção, muito breves, para cada uma das rosáceas (figura 84).

Rosácea 1: Rotação dos triangulos e dos circulos. Os triangulos rodam 40°

Rosácea 1: Pode ser através de uma translação se o vetor for na diagonal.

Rosácea 1

Rosácea 2: através de uma reflexão através eixo de reflexão vertical

Rosácea 2: através da rotação do módulo. Roda

Rosácea 2

Fig. 184 – Resolução de Sofia da questão 2 item 2.3 versão pós-teste

Para a Rosácea 1, a aluna identificou, erradamente, uma translação com um vetor obliquo, que não indica na rosácea, e para a Rosácea 2, identifica o elemento de repetição, o eixo de reflexão vertical e com *setas*, indica o movimento da rotação na rosácea como se verificou na figura 81.

Relativamente à questão 3 do teste, que consistia na análise de pavimentações de ESCHER, verifica-se que a Adriana, versão pré (figura 85), no caso da pavimentação com peixes identificou, corretamente, uma rotação de amplitude de rotação de 60º.

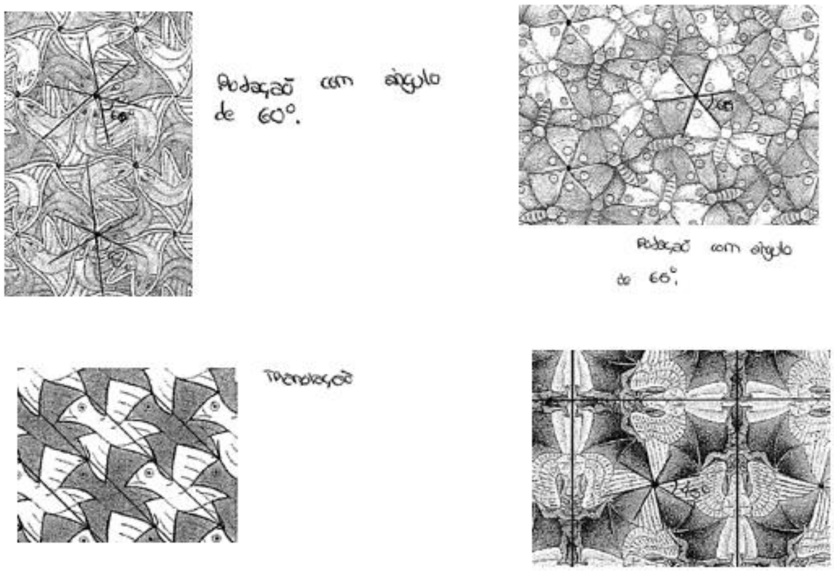


Fig. 187 – Resolução de Adriana da questão 3 versão pré do teste

Para a pavimentação com pássaros apresentou um dos vetores que permite obter a pavimentação. Para o caso da pavimentação com abelhas, o raciocínio não é diferente do efetuado para os peixes. A aluna referiu, erradamente, a medida da amplitude do ângulo de rotação de 60º. No caso dos anjos, referiu reflexões de eixos vertical e horizontal.

Na versão pós, a Adriana deixou de referir a isometria e identificou, com uma cruz , os elementos que se repetem (figura 86).

No entanto, nesta versão, a aluna realçou os elementos que vão repetir na pavimentação com peixes (neste caso 3). Para a pavimentação com pássaros, a resposta não difere da versão pré, a aluna continuou a apresentar o mesmo vetor de translação. No caso da pavimentação com abelhas, a resposta sugere que a aluna recorreu a material de desenho para indicar a amplitude do ângulo de rotação: na versão pré a aluna apresenta 60º e na versão pós

59º, não tendo, neste caso, criticado o valo obtido. No que concerne aos anjos, a aluna referiu apenas uma reflexão de eixo vertical, identificando, com uma cruz, os elementos envolvidos.

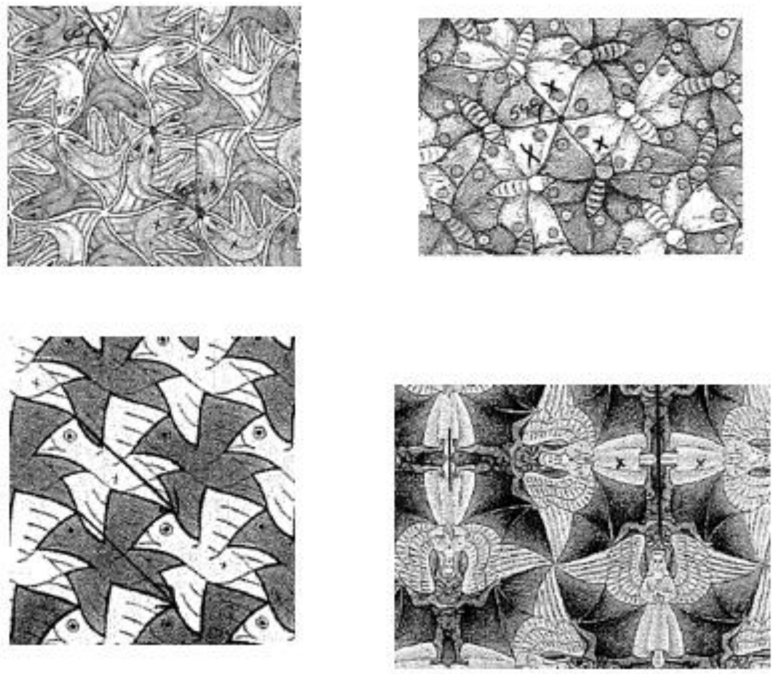


Fig. 190 – Resolução de Adriana da questão 3 versão pós do teste

Também a Sofia, na versão pré (figura 87), no caso das pavimentações com peixes identificou, corrretamente, a medida da amplitude do ângulo de rotação – 60º. Já no caso da pavimentação com borboletas, identificou, erradamente, a mesma medida de amplitude do ângulo de rotação. Para a pavimentação com pássaros, a aluna identificou um vetor horizontal. Quanto aos anjos, apenas referiu reflexões de eixo vertical e de eixo horizontal, que não identificou.

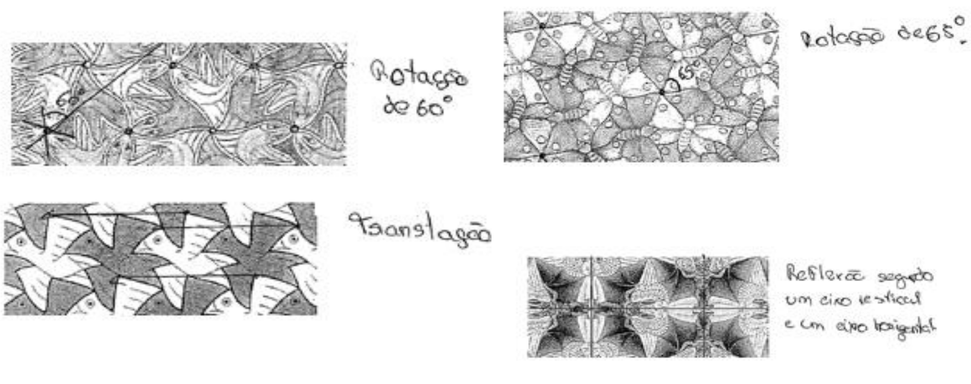


Fig. 193 – Resolução de Sofia da questão 3 versão pré do teste

Na versão pós, a Sofia deixou de referir qualquer isometria (figura 88) em todas as pavimentações.

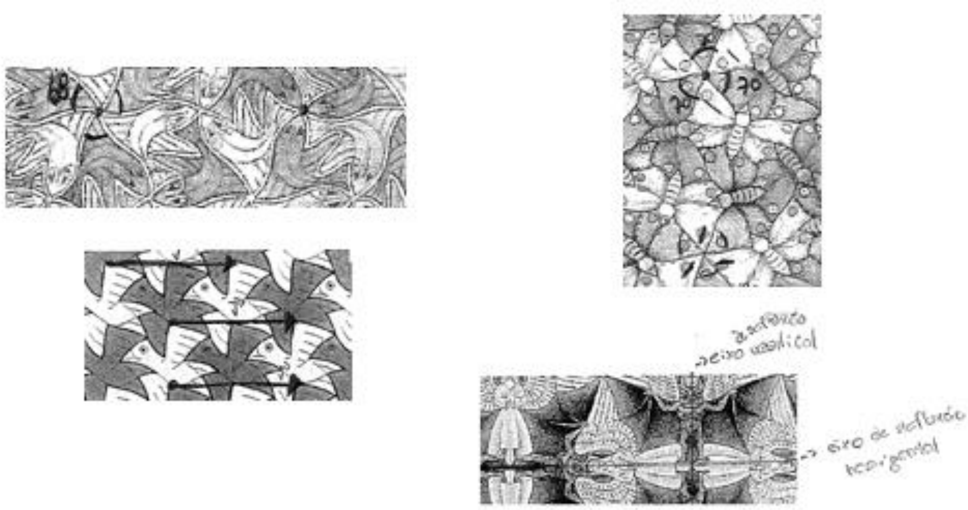


Fig. 196 – Resolução de Sofia da questão 3 versão pós do teste

No caso da pavimentação com peixes e com borboletas, a aluna identificou erradamente, a amplitude do ângulo de rotação – 68º e 70º, respetivamente, deixando antever falta de concentração na resolução, nesta versão. Para a pavimentação com pássaros, identificou um vetor horizontal, tal como na versão pré, que difere no sentido. Quanto aos anjos a resposta difere na identificação dos eixos de reflexão, o que não aconteceu na versão pré.

1.1.2. Atitudes

Foi evidente o pouco à vontade do par em descrever processos. A confiança nas respostas era visível quando se reportavam a respostas diretas sobre as isometrias, nomeadamente na sua caracterização. O pouco empenho na descrição dos processos de construção dos frisos foi uma constante para este par. Da análise dos dados, verifica-se que o par adquiriu conhecimentos essenciais sobre as isometrias a partir da intervenção didática. No entanto, o par apresentou alguma dificuldade em descrever processos por escrito, que por vezes, foram dissipadas na oralidade.

Na inquirição inicial, decorrente da aplicação do questionário inicial, num momento anterior à aplicação da sequência didática, o par concordou com a afirmação *"gosto de Matemática"* e referiu não ter opinião sobre "*Nas aulas de Matemática sinto-me ansioso(a)*" .

Apesar do par não gostar de Geometria, assinalou a opção *“não concordo”*, considerou-a importante. A Adriana *concordou plenamente* que *“ a Geometria da Matemática é mais difícil do que a de Educação Visual”* tendo a Sofia opinião contrária,” *discordo totalmente”*. O par concordou que as aulas de Matemática se podem relacionar com as de Educação Visual e que *“Educação Visual pode ajudar-me a entender melhor os da Matemática*”, no entanto, apenas a Sofia concordou que “*A Matemática pode ajudar-me a entender melhor os conceitos de outras disciplinas”*. Neste caso a Adriana assinalou a opção *“ não tenho opinião”*.

Ao longo da aplicação da sequência didática, a autonomia e a confiança do par foi aumentando. No entanto, ao longo dos diálogos encetados com a investigadora, verificou-se manifesta insegurança nas respostas dadas. O par não se empenhou, nem procurou outras possibilidades para além das referidas no papel, optando muitas vezes em responder apenas *“não sei”*. Tal atitude veio a ser clarificada no questionário final pois o par assinalou que *” não gostaria de repetir a experiência com outros conteúdos de Matemática”*, referindo que foi *“suficiente trabalhar isso, este ano, em Educação Visual”*, se bem que reconhecesse que a execução das tarefas em Educação Visual ajudou a entender melhor as isometrias. Assinalou a opção *“não concordo”*, para as afirmações *“A experiência tornou o tema das isometrias mais interessante”* e*“ tornou-me mais confiante nas execução das tarefas em Matemática”*.

Quanto ao desenvolvimento de competências Matemáticas, o par concordou que a execução das tarefas ajudaram na identificação, caracterização e construção de isometrias. Não acontecendo, porém, o mesmo quanto à exploração de frisos e de rosáceas. Ambas referem que ajudou na exploração dos frisos mas não ajudou na exploração das rosáceas. Esta resposta sugere que o par teve mais difiuladade nas tarefas que envolveram as rosáceas. Contudo, considerou importante a utilização do GeoGebra por *“ser mais fácil”*. Como difuldade na execução das tarefas, o par referiu apenas a afirmação *“pouco tempo disponível para a execução das tarefas”*. Ainda sobre o GeoGebra, refiram-se os frisos construídos pelo par com recurso a este software, sem ter sido solicitado pela investigadora, o que pode revelar o entusiasmo que a experiência didádica provocou no par, apesar da abordagem interdisciplinar não ter sido do seu agrado. Os frisos referidos são apresentados no título que se segue.

1.2. Criatividade

Neste ponto, faz-se a distinção entre representações e manifestações de criatividade do par. No que refere às representações, são apresentadas algumas das respostas obtidas nos questionários inicial e final. Quanto às manifestações, reportam-se a produções dos alunos.

1.2.1 Representações

Quando inquirida, no questionário inicial, sobre o significado de criatividade a Adriana referiu *" Ter muitas ideias e imaginação"* e a Sofia, *"Ser diferente nas ideias".* Ambas referiram que não se consideravam criativas. A Adriana porque *"não tenho ideias nem imaginação"*; a Sofia porque *" não tenho ideias diferentes das normais"* mas cada uma delas considerou ser mais criativa a Matemática quando trabalha com colegas. Quanto à disciplina onde consideram ser possível ser criativo, ambas referiram Educação Visual. Assinalaram a opção *"não tenho opinião*" quanto à *"... criatividade em Matemática poder ser estimulada nas escolas"*, bem como *"Em Matemática não é possível avaliar a criatividade dos alunos"*. Ambas concordaram que *"Em Matemática não se pode ser criativo – é aquilo e aquilo mesmo"* e se para a Adriana *" A Matemática é só números, não permite a criativiadade"*, a Sofia não concordou com a afirmação. A Adriana concordou que "*A Matemática é criativa quando fazemos desenhos"*, e a Sofia *não tem opinião.* Quanto às aulas terem de ser expositivas para aprenderem melhor, ambas assinalaram a opção *"não tenho opinião"*. Adriana considerou que *" não é possível ser criativa em Matemática como se é a Educação Visual"*, mas a Sofia teve opinião contrária, assinalando a opção *não concordo.* A Sofia concordou que, *"uma forma de desenvolver a criatividade em Matemática é estabelecr relações com ouras disciplinas, como Educação Visual"*, tendo a Adriana assinalado a opção *"não tenho opinião"*. Por outro lado, quanto a aplicar conceitos aprendidos em Educação Visual nas aulas de Matemática, e vice-versa, estimula a imaginação e promove o desenvolvimento de ideias, o par assinala a opção *"não tenho opinião"*.

Inquirido no questionário final, o par considerou que as tarefas não estimularam nem melhoraram a criatividade a Matemática, tendo sido a resposta lacónica – não. Contudo, reconheceu nesta fase do estudo que, a Matemática pode ser criativa quando *"há várias maneiras de resolver um problema"*. No final da experiência didática, a investigadora questionou o par quanto ao friso, ou rosácea, construído em Educação Visual, mais criativo.

Adriana: *(Sorri e não responde)*
Sofia: *O da Adriana…*
Investigadora: *Porquê?*
Sofia: *(risos) por causa da ´Stora´ de Educação Visual… porque falou nele…*

Esta resposta sugere novamente a falta de confiança nas respostas, provavelmente porque o par não está familiarizado com o tema

1.2.2. Manifestações

Sempre que as tarefas apresentavam caráter mais aberto, o par revelou dificuldade em proceder à sua exploração. As abordagens apresentadas na exploração de frisos e rosáceas não revelaram respostas diferentes das do grupo turma, mesmo nos detalhes apresentados. Recorreram, por várias vezes, a processos utilizados por outros pares, revelando-se pouco originais. Ao longo da experiência, revelaram-se pouco fluentes e flexíveis ao não apresentarem várias propostas e distintas de "ver" as composições. Foi visível o pouco à vontade do par em responder e em procurar abordagens diferentes, dando a entender preferir não responder a fracassar.

No que respeita à questão 4 do teste, orientada para a criatividade, verifica-se que a Adriana foi um pouco mais criativa na elaboração do módulo. Na versão pré, apenas considerou eixos de reflexão na horizontal e na vertical, tendo inserido eixos de reflexão oblíquos na versão pós, como se pode verificar na figura 89.

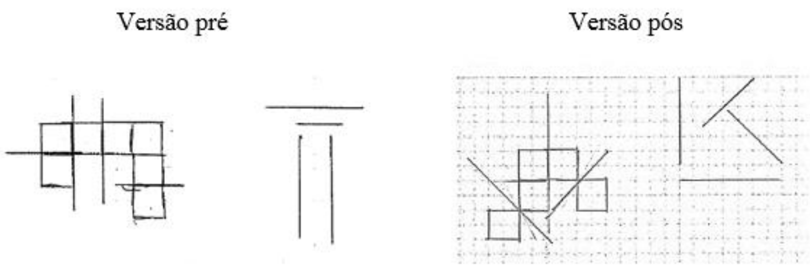


Fig. 199 – Resolução de Adriana da questão 4, item 4.1 do teste

Quanto à composição, na versão pré, a Adriana aplicou a reflexão e a translação para a composição geométrica (figura 90), tendo sido mais criativa ao aplicar a reflexão deslizante, seguida de uma translação, na versão pós. Refira-se que a Adriana foi original na elaboração da composição por ter sido a única aluna que aplicou uma reflexão deslizante na versão pós.

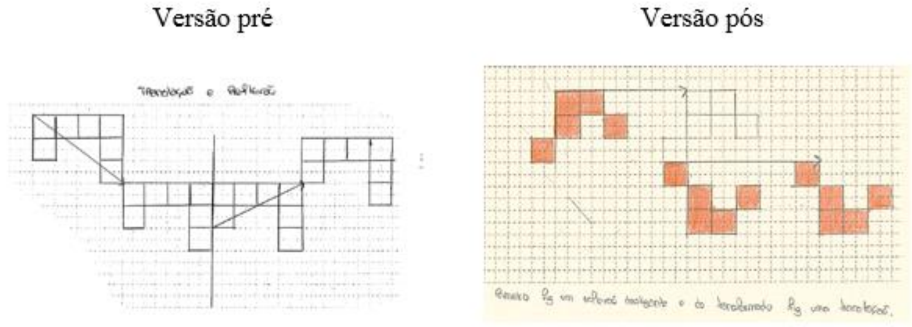


Fig. 202 – Resolução de Adriana da questão 4, item 4.2 do teste

Por sua vez, a Sofia também foi um pouco mais criativa, na versão pós do teste, na elaboração do módulo pois, na versão pré, apenas considerou eixos de reflexão na horizontal e na vertical, tendo inserido eixos de reflexão oblíquos, na versão pós (figura 91).

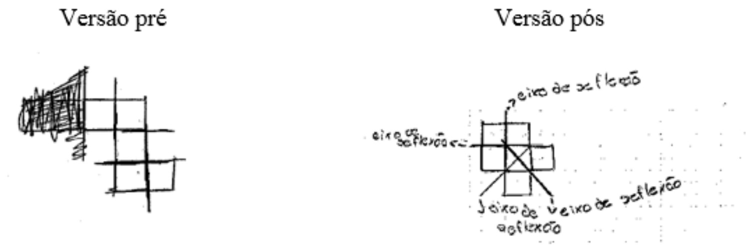


Fig. 205 – Resoução de Sofia da questão 4, item 4.1 do teste

Quanto à composição, na versão pré, a Sofia aplicou a reflexão e a translação para a composição geométrica (figura 92). Na versão pós, a aluna foi mais criativa. Aplicou de novo a reflexão e a translação, o que não se revelou muito original, mas apresentou maior fluência e elaboração. A composição geométrica sugere que integrou os conhecimentos de Educação Visual e Matemática para tentar criar um padrão.

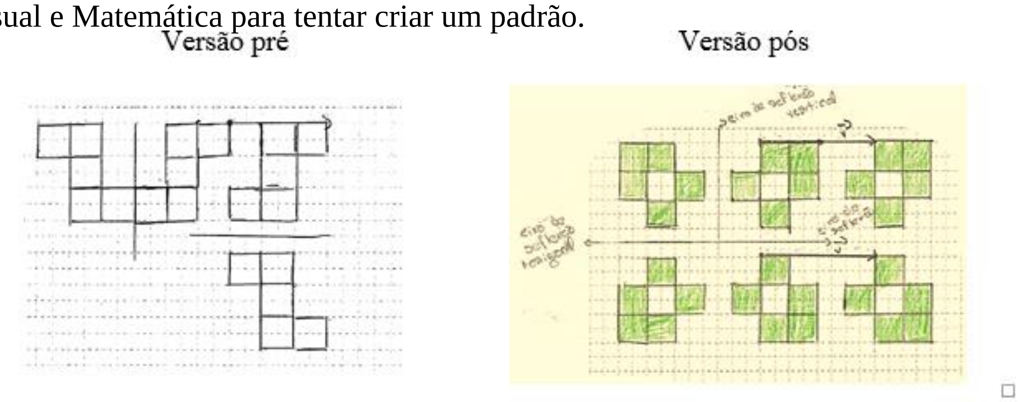


Fig. 208 – Resolução de Sofia da questão 4, tem 4.2 do teste

Após a aplicação do pós-teste, o par perguntou à investigadora se podia fazer construções no GeoGebra e enviá-los via e-mail, ao que a investigadora anuiu. Apesar das incorreções ao nível das designações apresentadas, também as composições geométricas apresentadas pelo par (figura 93), revelam integração de conhecimentos adquiridos em Matemática e em Educação Visual, bem como criatividade por parte do par, principalmente pelo caráter original e pela variedade de isometrias usadas. É interessante notar que, a primeira composição apresentada na figura, é semelhante à composição 5 da tarefa 5, explorada em Matemática. As composições foram contruídas a partir de rotações de amplitude 90º e, neste caso, o par referiu que não é um friso.

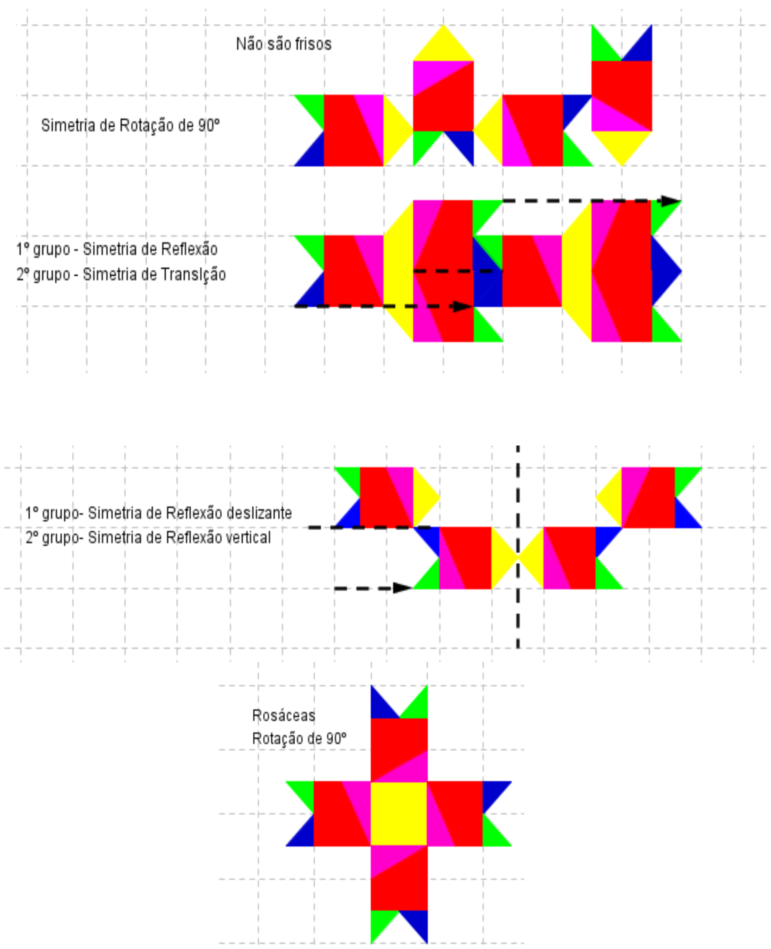


Fig. 209 – Exemplos de composições geométricas realizadas pelo par, Adriana e Sofia, no GeoGebra

O par gerou 5 dos 7 frisos possíveis, e cuja designação é apresentada na figura 94. Construiu o elemento de repetição aplicando conhecimentos de Educação Visual e, a partir desse elemento, gerou os frisos, aplicando conhecimentos de Matemática. Torna-se clara a integração de conhecimentos pelo par, proporcionada pela abordagem interdisciplinar.

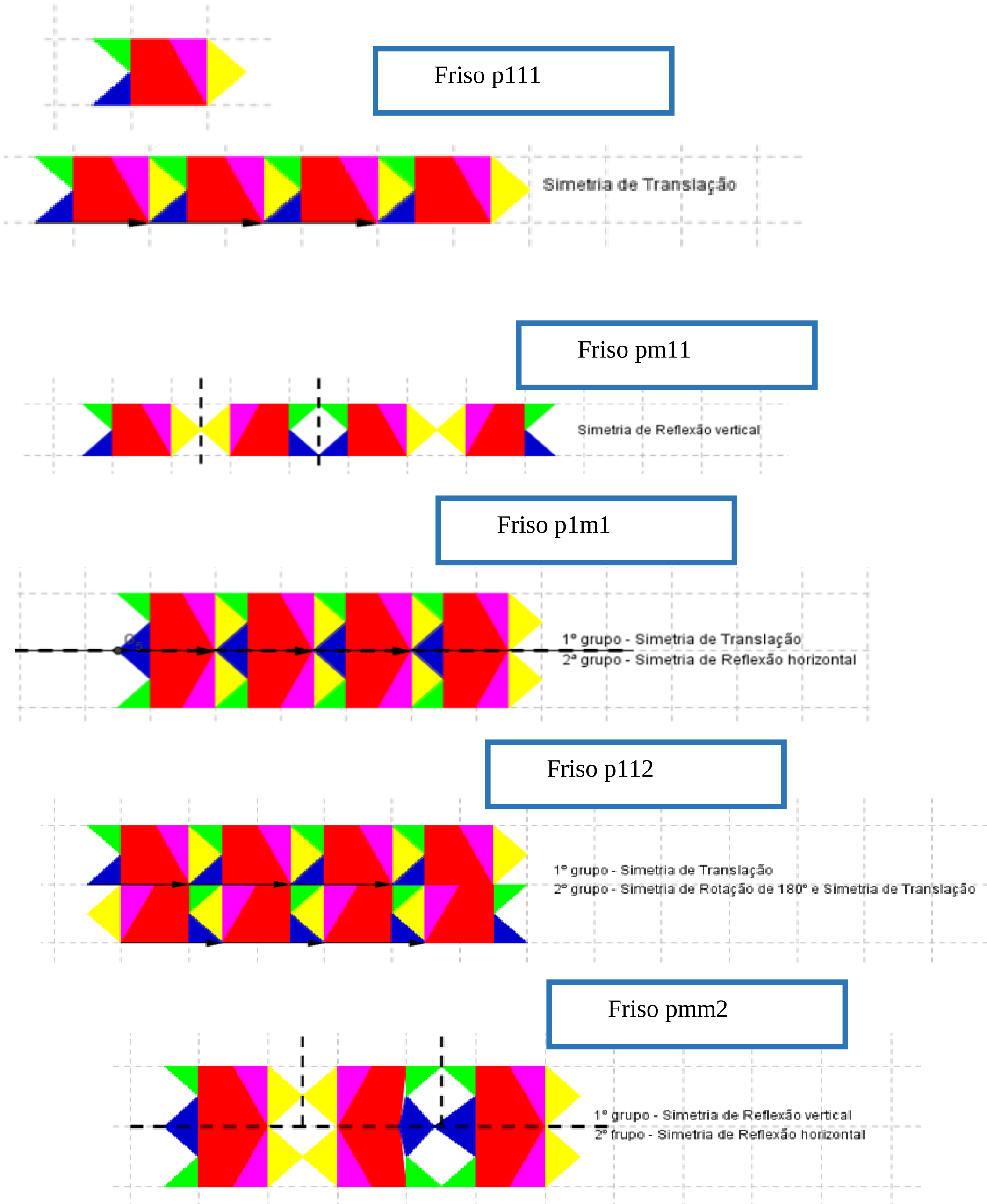


Fig. 212 – Frisos gerados pelo par Adriana e Sofia, no GeoGebra

2. O par Rui e Tomás

Este par não tinha por hábito trabalhar em conjunto nas aulas de Matemática. Aliás, o Tomás preferia trabalhar sozinho. O Rui participava ativamente nas aulas e como já foi referido anteriormente, apresentava melhor desempenho a Matemática do que o Tomás.

2.1 Competências geométricas

Este ponto contempla os conhecimentos, as capacidades e as atitudes face à Matemática em geral, e à Geometria em particular desenvolvidos, ao longo da experiência pedagógica pelo par Rui e Tomás.

2.1.1. Conhecimentos e capacidades

Abordam-se, sob este título, as isometrias e a simetria, em particular os frisos e as rosáceas.

Isometrias

A Tarefa 1 – Explorar Propriedades das Isometrias (anexo 3) – foi iniciada pelo par com o traçado um trapézio. O par não revelou dificuldade no domínio do GeoGebra, no entanto à semelhança do grupo turma, a primeira dúvida surgiria no traçado do vetor e na medição da amplitude dos ângulos:

> ***Tomás:*** *Não me aparece nada!! (referindo-se ao vetor)*
> ***Rui:*** *Uns ficam dentro!! Outros fora... (referindo-se à medição da amplitude dos ângulos)*

Como já foi referido, a investigadora relembrou o conceito de segmento de reta orientado e o procedimento no GeoGebra foi explicado por outro par. Dada a explicação, o par Rui e Tomás não teve dificuldade em proceder ao traçado do vetor e avançar na resolução da ficha.

Relativamente à manipulação do vetor, o par verificou que, quando se aumenta o comprimento do vetor, "*as figuras afastam-se… e quando o pomos mais pequenino as figuras começam a ficar uma em cima da outra*" ; que os pontos do transformado estão todos à mesma distância da figura inicial e que *" é igual ao tamanho do vetor".* A Investigadora perguntou então como poderiam mostrar, no GeoGebra, o que tinham acabado de afirmar. O par uniu os pontos da figura inicial aos respetivos pontos no transformado, o que se verificou nos restantes pares. No entanto nem todos mediriam os respetivos segmentos, o que o par fez.

Prosseguindo nas construções, como já foi referido, o par deparou-se com outra dificuldade: medição da amplitude de um ângulo. A investigadora recorreu à noção de ângulo, introduzida no sétimo ano, e explicou o procedimento a adotar no GeoGebra. O par não teve dificuldade em aplicar o procedimento e, detendo um bom domínio do GeoGebra, verificou-se que avançava mais rapidamente na resolução das tarefas. Enquanto outros pares tentavam medir a amplitude dos ângulos, este par tentava medir o comprimento dos lados do polígono, não conseguindo:

> ***Rui:*** *Stora, a mim apareceu-me perímetro…*
> ***Investigadora:*** ??? *(dirigindo-se ao par) Aah, está bem. O que fizeste foi que, em vez de selecionares só um dos lados selecionaste o polígono. Estás a ver que fica mais escuro? Tenta agora num dos segmentos.*

À medida que a execução da tarefa avançava, outros pares revelaram a mesma dúvida pelo que o Rui se levantou e foi ajudar. Enquanto isso, o Tomás continuava a tarefa. A investigadora questionou o grupo turma:

> ***Investigadora:*** *Já alguém chegou a uma conclusão?*
> ***Rui:*** *SIM!*
> ***Investigadora:*** *Explica como pensaste*
> ***Rui:*** *Uni os pontos A e A´*
> ***Investigadora:*** *Porquê esses pontos?*
> ***Rui:*** *Porque são correspondentes…*
> ***Investigadora:*** *Correspondentes?*
> ***Tomás:*** *Então o ponto A da primeira figura não vai ser o ponto A´da outra figura?*
> ***Investigadora:*** *E depois o que fizeram?*
> ***Tomás:*** *Medimos o comprimento da linha…*
> ***Investigadora:*** *Do segmento de reta, sim.*
> ***Tomás:*** *Ou isso…*
> ***Investigadora:*** *E chegaram a que conclusão?*
> ***Rui:*** *Se fizermos o mesmo para todos os pontos, as medidas vão ser iguais.*

Com a ajuda de outro par da turma, chegaram à conclusão que, manipulando o vetor e *"colocando-o sobre o segmento que une A e A' , os comprimentos são iguais e que as figuras vão na direção do vetor* quando a alteram .

No preenchimento do quadro final no que respeita à *"orientação dos ângulos"* e *"pontos fixos"*, surgiram dúvidas:

> ***Tomás:*** *Não percebo o que quer dizer isto dos ângulos...*

A investigadora colocou questões ao grupo turma de forma a orientá-los no procedimento e, verificando que as dúvidas persistiam em alguns pares, explicou-o. Após alguns fracassos, o par, Rui e Tomás, conseguiu perceber que a orientação dos ângulos se mantém e que não existem pontos fixos.

Após a discussão em grande grupo, o par preencheu o quadro síntese no final da ficha e identificou propriedades da translação.

Seguiu-se a exploração de propriedades da rotação. O par não teve difiuldade em efetuar a rotação do polígono e facilmente conjeturou sobre a medida do comprimento dos lados do polígono bem como sobre a medida da amplitude dos ângulos internos se manter invariante. Também não manifestou dificuldade em identificar o sentido positivo e o sentido negativo, pelo que reconheceu que a orientação dos ângulos se mantinha, dada a explicação na introdução da tarefa para a exploração de propriedades da translação. Tendo percebido a noção de pontos fixos, identificou o centro de rotação como ponto fixo para a isometria rotação. Preencheu o quadro e identificou propriedades da rotação.

Nos itens seguintes, foram exploradas propriedades da reflexão e da reflexão deslizante. No que concerne às questões relacionadas com as medidas do comprimento dos lados e das amplitudes dos ângulos, não houve dificuldade para o par. A investigadora questionou o grupo turma quanto às características do vetor associado à translação na reflexão deslizante por compração às características do eixo de reflexão, tendo surgido dúvidas quando se ouviu um dos pares afirmar *"o nosso é vertical"*. O Rui, apercebendo-se da construção do outro par, referiu que "*quando temos um eixo de reflexão horizontal o vetor vai ser horizontal e quando temos um eixo de reflexão vertical o vetor vai ser vertical".*

Quanto à Tarefa 2 – Composição de duas reflexões (anexo 4) – , verificou-se que o par foi confrontado pelo grupo turma nas suas descobertas*: "Já conseguiram fazer a reflexão da figura?"; "A mim só me dá um triângulo... Não tenho a figura toda como tu!".* O par revelava domínio do GeoGebra, assumindo o Rui a liderança. Por várias vezes se levantou e explicou o procedimento aos pares com mais dificuldade. O Tomás preferiu, sempre, explorar a construção no lugar. A investigadora não interferiu neste processo. Para o caso 1 – Composição de duas reflexões de eixos paralelos – , o par referiu *" da 1 para 2 as cores estão ao contrário, e da 2 para 3…Pois, são duas reflexões…"; " As cores só ficam iguais da primeira para a última…, nas outras ficam diferentes".* Refira-se que este par coloriu o polígono traçado desde a primeira tarefa, tendo nesta verificado que a utilização de mais cores poderia ajudar nas conjeturas. Outros pares seguiriam a estratégia.

Relativamente à relação entre os eixos e o vetor, facilmente concluíram, por recurso à ferramenta de medição do GeoGebra, que o vetor que define a translação tem de medida de comprimento *o dobro da distância entre os eixos*. Neste momento, a investigadora questionou o grupo turma para perceber se tinha de facto apreendido uma das propriedades da translação e da reflexão. Solicitou que revissem a tabela com as propriedades das isometrias estudadas. Após consulta, o par Rui e Tomás, chamou a investigadora:

> ***Tomás:*** *Acho que já sabemos… É nas propriedades! (sorrindo)*
> ***Investigadora:*** *Onde há diferenças nas propriedades?*
> ***Tomás:*** *Na orientação e nos pontos fixos…*
> ***Investigadora:*** *Compararam as duas isometrias que estão na tarefa…*
> ***Rui:*** *Só se for por causa dos ângulos…*
> ***Investigadora:*** *Por causa dos ângulos? Explica melhor.*
> ***Rui***: *Então… se já sabemos que temos reflexão e translação, iamos ver a orientação dos ângulos…*
> ***Investigaora:*** *Conclui Tomás.*
> ***Tomás:*** *OH Stora!!!*
> ***Investigaora:*** *Quero ouvir.*
> ***Tomás:*** *Então… está aqui…na translação a orientação mantém-se e na reflexão … não.*

A investigadora solicitou ao par que expusesse a sua conclusão ao grupo turma. Prosseguindo e relativamente ao caso 2 – Reflexões de duas reflexões de eixos concorrentes, na primeira parte da tarefa, de novo verificou-se discussão no grupo turma sobre o que ia aparecendo nas diversas construções. O par apontou para o ecrã, verificou se os colegas já tinham chegado a uma conclusão, comparou com o que tinha. Após alguma discussão:

> ***Tomás:*** *"Só pode ser 180…"*
> ***Rui:****"Acho que sim … temos esta linha…"*

Em seguida, os alunos experimentaram traçar os segmentos que unem cada par de vértices correspondentes e referiram *"passam todos pelo centro..."*. Para confirmarem a conjetura, procederam à medição da amplitude do ângulo de rotação e, facilmente, chegaram à conclusão de que é 180º.

Para tentar generalizar que a composição de duas reflexões de eixos concorrentes corresponde a uma rotação cuja medida da amplitude do ângulo é o dobro da medida do ângulo entre os eixos de reflexão, o par *manipulou os eixos de reflexão* e adotou os procedimentos efetuados para o caso anterior. Efetuou as medições respetivas e confirmou a conjetura.

Na Tarefa 3 – Composição de duas rotações (anexo 5) – , verificou-se que o par adotou um procedimento diferente de outros pares por manifestar maior domínio do GeoGebra. Para o caso 1 – Composição de duas rotações com o mesmo centro – , após obter os transformados pela rotação 1 e pela rotação 2, respetivamente, ocultou o primeiro transformado e só depois mediu a amplitude do ângulo de rotação que permitia obter o transformado da rotação 2 a partir do polígono traçado. À semelhança de outros pares, também traçou circnferências para se certificar que, de facto, havia rotação.

Para testar a conjetura, como definido no item 9 da tarefa, o par, após testar para alguns ângulos, optou por considerar um ângulo com o sentido contrário ao da primeira construção, para que as suas construções não ficassem sobrepostas, ocultando o que fosse desnecessário. Na execução desta tarefa, a investigadora atuou como agente facilitador da aprendizagem, intervindo quando solicitada pelo par.

A segunda parte da tarefa, que consistia em investigar a Composição de duas rotações com centros de rotação distintos – caso 2, suscitou grandes dúvidas, provavelmente pelo seu caráter aberto. Para a resolução desta tarefa, o par aplicou inicialmente o procedimento do caso anterior. O par indiciava alguma dificuldade, pelo que, a investigadora perguntou se precisavam de ajuda ao que o Rui respondeu *"Não Stora, deixe-nos pensar mais um pouco... temos de chegar lá!"*. O par consultou por várias vezes as questões e as construções que efetuou na resolução das tarefas anteriores e tentou várias estratégias. Um par solicitou, então, a ajuda da investigadora. Ouvido o par, a investigadora questiona o grupo turma – *"mediatriz, diz-vos alguma coisa?"*. Ouve-se um burburinho de fundo. Ao chegar perto do par, Rui e Tomás, a investigadora verificou que este traçou mediatrizes em vários segmentos, mas não conseguia avançar:

> ***Investigadora:*** *O que se está a passar com as mediatrizes?*
> ***Tomás:*** *Com as mediatrizes? Passam todas aqui... neste ponto ...*
> ***Investigadora:*** *Por que será? (O Rui e o Tomás olham um para o outro, revelando não estarem a perceber a questão) Leiam novamente a questão 5.*
> ***Rui:*** *AH … JÁ SEI!!! (O Rui explica ao Tomás a sua ideia e este traça a circunferência).*

Simetria – Frisos

Para a resolução da Tarefa 4 – Simetrias (anexo 6) – , à semelhança de outros pares, este identificou todas as simetrias de reflexão para cada polígono, não conseguindo identificar todas as de rotação. Foi na discussão em grupo turma que identificou as simetrias de rotação para cada polígono a partir da discussão conjunta:

Rui: *Como é que não me lembrei dessa?*

Para a Tarefa 5 – Frisos (anexo 7) – o par deveria identificar e caracterizar as simetrias em cinco composições. Das oito composições selecionadas pela investigadora do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nas composições 3, 4, 6, 7 e 8 apresentados no anexo 7. Posteriormente, deveria descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderia construir cada uma das composições escolhidas.

Na execução desta tarefa, apesar da discussão que se gerava entre o par, verificou-se que, por vezes, o Tomás aceitava, passivamente, as respostas do Rui*:"Quem percebe Matemática és tu…".*

Na análise do friso 3, o par identificou a reflexão e a translação, denominando a simetria de reflexão por simetria, neste caso simetria horizontal, por ser segundo um eixo horizontal. Identificou o eixo de reflexão, mas não identificou o vetor associado à translação (figura 95).

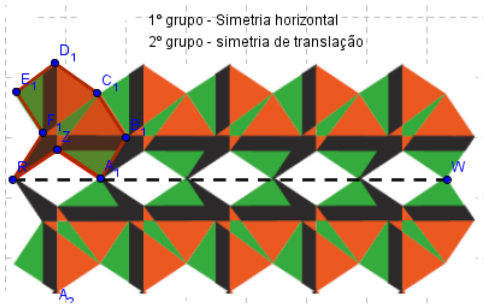


Fig. 213 – Análise do friso 3 pelo par Rui e Tomás

O par apresentou dois processos para obter o friso 3. O primeiro consiste em efetuar sucessivas translações e em seguida a reflexão horizontal; no segundo processo, o par identificou, erradamente, uma reflexão deslizante (figura 96). O par não foi inquirido quanto a este assunto.

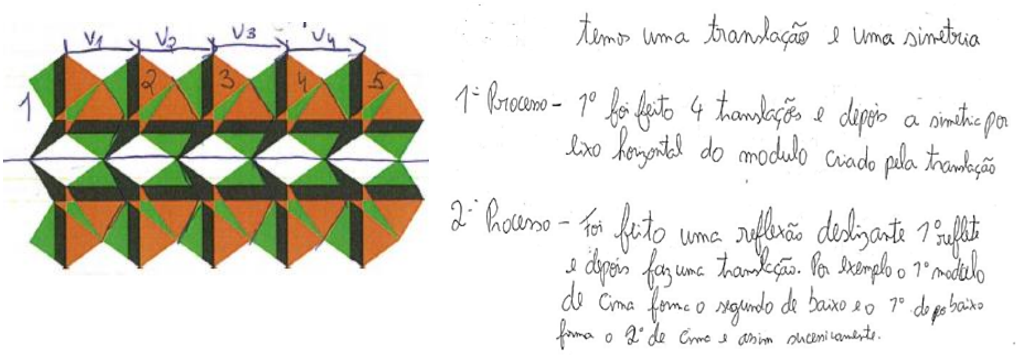


Fig. 216 – Processos de construção da composição 3 do par Rui e Tomás

Para averiguar se o par seria capaz de apresentar outro processo de construção do friso, a investigadora inquiriu:

> ***Investigadora:*** *Vocês podiam obter o friso de outra maneira?*
> ***Rui:*** *Em cima e em baixo?*
> ***Investigadora:*** *Sim, vocês só conseguem com estes vetores?*
> ***Rui:*** *Já tínhamos feito de 2 em 2*
> ***Investigadora:*** *2 em 2 como?*
> ***Rui:*** *Agrupávamos tipo… isto, fazia um padrão. O 1 e o 2 faziam um padrão e depois… já originava o 3 e 4*
> ***Investigadora:*** *E o vetor ia ser qual?*
> ***Rui:*** *A soma dos dois*
> ***Investigadora:*** *Então e o que vocês entendem por simetria com eixo horizontal, aqui?*
> ***Tomás:*** *É a reflexão.*

Poder-se-á considerar que o par havia verificado outro processo de construção do friso, que se aceita dada a idade dos alunos e que não foi referido nas suas respostas por escrito. O par não reconheceu a necessidade de referir simetria de reflexão. Para o par, simetria é sinónimo de simetria de reflexão. Em diálogo com a investigadora, o par referiu que se reportava a simetria quando pretendia referir simetria de reflexão, por a designarem desta forma em Educação Visual.

Na análise do friso 4, o par identificou as simetrias de acordo com o processo de construção do friso. Identificou duas reflexões, uma de eixo vertical e outra de eixo horizontal, e uma translação, com o respetivo vetor associado (figura 97).

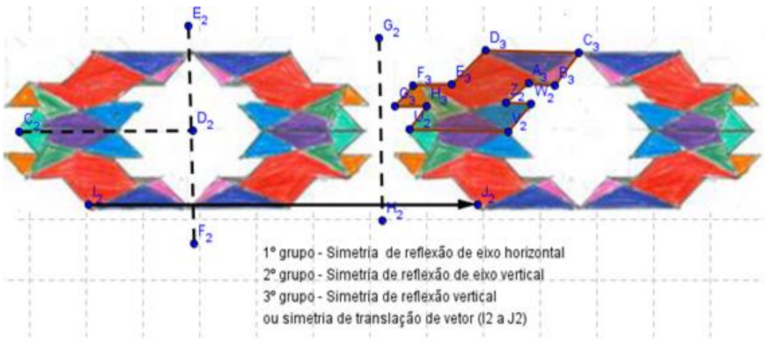


Fig. 219 – Análise do friso 4 pelo par Rui e Tomás

Nos processos de construção, o par identificou outra simetria, a simetria de rotação, sucitando dúvidas a amplitude do ângulo de rotação apresentado – 90º, bem como a obtenção do módulo C no processo 2 (figura 98).

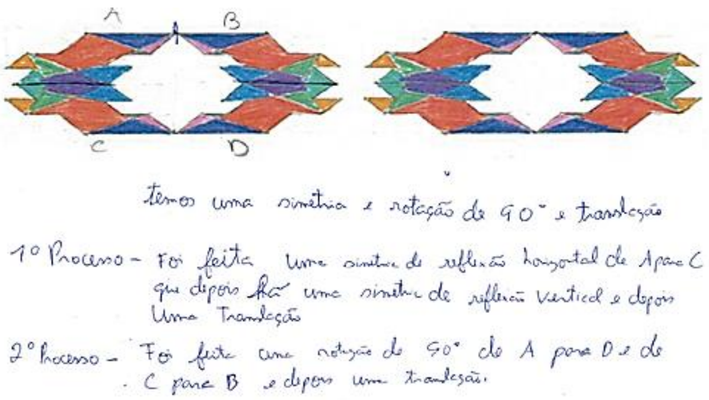


Fig. 222 – Processos de construção do friso 4 do par Rui e Tomás

Investigadora: *O ângulo de rotação que apresentam no processo 2 está correto? Ora vejam…*
Rui: *Não… (efetua movimentos com a mão, reflete sobre o que obtem). É 180 graus, temos duas reflexões…*
Investigadora: *Qual é o centro de rotação? E o sentido?*
Rui: *O centro é aqui no meio… (aponta a interseção dos eixos de reflexão) e o sentido tanto faz… vai dar o mesmo.*
Investigadora: *E como obtêm o C a partir do A?*
Tomás: *A partir de um eixo*
Investigadora: *Um eixo como?*
Tomás: *Horizontal. Está aqui!*

A resposta dada para o processo 2 indicia que a composição de duas reflexões de eixos perpendiculares foi consolidada pelo par.

Para o friso 6, o par identificou uma translação e o vetor associado, não no sentido de construir o friso mas para obter o módulo de repetição. Identificam também a reflexão de eixo vertical (figura 99).

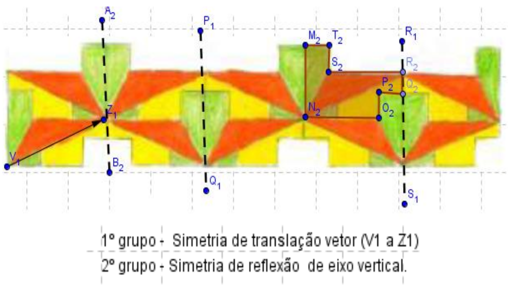


Fig. 225 – Análise do friso 6 pelo par Rui e Tomás

Quanto aos processos de construção, o par indicou dois. Identificou a rotação, a translação e a reflexão (figura 100). Como o esquema apresentado pelo par não coincidia com o escrito , o par foi inquirido.

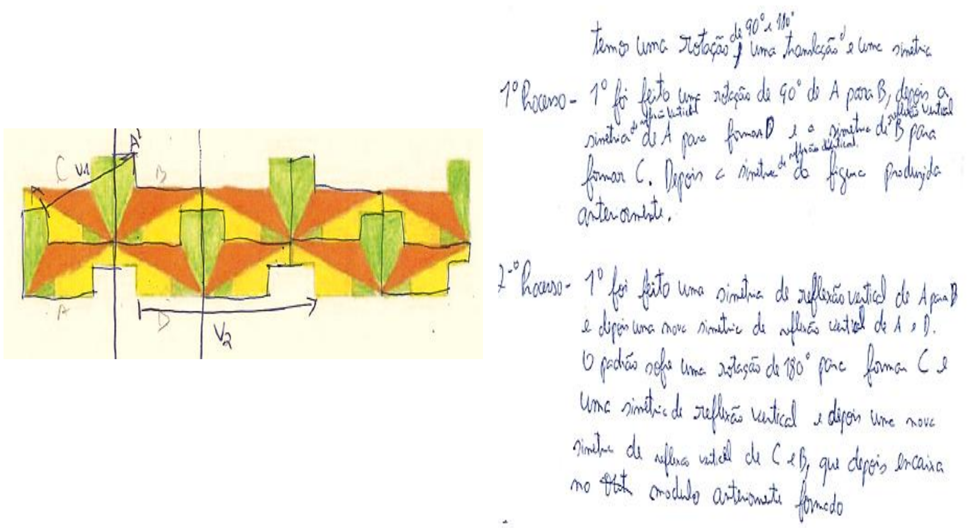


Fig. 228 – Processos de construção do friso 6 do par Rui e Tomás

> ***Investigadora:*** *No processo 1 referem uma rotação de 90 º e no vosso esquema representam um vetor associado a uma translação que nunca referem…*
> *Podem explicar-me?*
> ***Rui:*** *O quê?!*

> ***Investigadora.*** *Leiam o que escreveram no processo 1. (os alunos leem o que escreveram, olham um para o outro)*
> ***Rui:*** *O que escrevemos não está bem…*
> ***Investigadora:*** *Não?*
> ***Rui:*** *O módulo B não pode ser por rotação de 90º…*
> ***Investigadora:*** *Porquê?*
> ***Tomás:*** *O verde tinha de ficar na horizontal … o módulo tinha de ficar em pé…*
> ***Investigadora:*** *Então como fazem?*
> ***Tomás:*** *É mais fácil por translação.*
> ***Investigadora:*** *E o vetor qual é? Traça-o aí (O aluno traça o vetor identificado por v1 na figura 96).*

Em seguida, o par explica o processo 2 oralmente.

> ***Investigadora:*** *Como obtêm o módulo C a partir do A? Vocês aqui falam em rotação de 180º. O que têm de fazer ao A para obter o C?*
> ***Rui:*** *Temos de fazer uma simetria…*
> ***Investigadora:*** *Uma simetria? Qual?*
> ***Rui:*** *Na horizontal*
> ***Investigadora:*** *Onde está o eixo?*
> ***Rui:*** *É este "coiso" assim. (apontando para a zona laranja do módulo A)*
> ***Investigadora:*** *Então vá, vira mentalmente… obtens o C?*
> ***Rui:*** *Não, temos de fazer uma rotação…*
> ***Investigadora:*** *Então tenta…*
> ***Rui:*** *Simetria de A, horizontal, e depois uma rotação … de … 180*
> ***Investigadora:*** *Tomás ajuda o teu colega…*
> ***Tomás :*** *É de 180, sim. O verde tem de ficar para cima…*

As respostas dadas pelo par quanto à reflexão e rotação sugerem que reviram mentalmente os movimentos efetuados na construção dos frisos em Educação Visual. E, tal como referem no processo 2, o grupo composto por C e B, vai "encaixar" no módulo composto por A e D. Obtido o módulo composto por A e D, é efetuada uma reflexão segundo um eixo vertical para continuar o friso, acontecendo o mesmo com o módulo composto por C e B.

Indagou-se quanto a outro processo de construção do friso, sem ser por reflexão. De imediato o par respondeu que podia ser obtido por sucessivas translações horizontais a partir do módulo composto por A, B, C e D.

De novo se verificou que os alunos conseguiram visualizar outro processo de construção que não escreveram mas apresentaram quando questionados

Na análise da composição 7 (figura 101), o par identificou uma rotação de 180º do elemento de repetição, apresentado a sombreado na mesma figura. Para a identificar, o par traçou duas circunferências concêntricas e identificou o centro de rotação U. O procedimento utlizado está errado para este último, pois apenas traçou uma mediatriz e considerou que o centro de rotação é o ponto de interseção da mediatriz com o segmento de reta. O par identificou outra rotação, de amplitude de rotação 90º, no sentido negativo, do elemento de repetição. Para a identificação desta rotação, o par não apresentou um procedimento. A resposta sugere que o fez por visionamento da composição. Em seguida, há uma translação cujo vetor associado se encontra representado na figura 101, a tracejado.

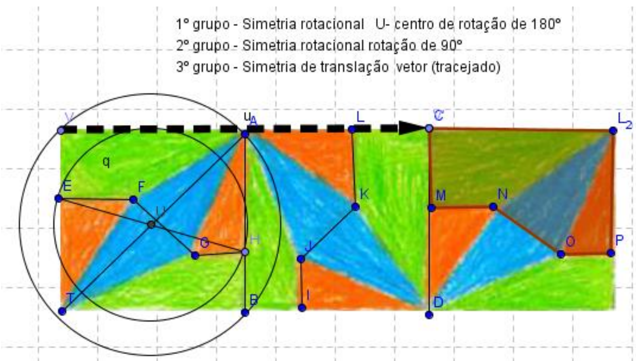


Fig. 231 – Análise da composição 7 pelo par Rui e Tomás

Como processos para obter o friso, o par considerou dois (figura 102). Um deles, errado, consiste em efetuar sucessivas rotações de 90 graus do primeiro elemento do módulo de repetição e o segundo consiste em efetuar translações do módulo de repetição (constituído por dois blocos do motivo sombreado original e respetivo transformado, obtido por rotação de 180º). O par representou os vetores associados à translação como se pode verificar na figura 102.

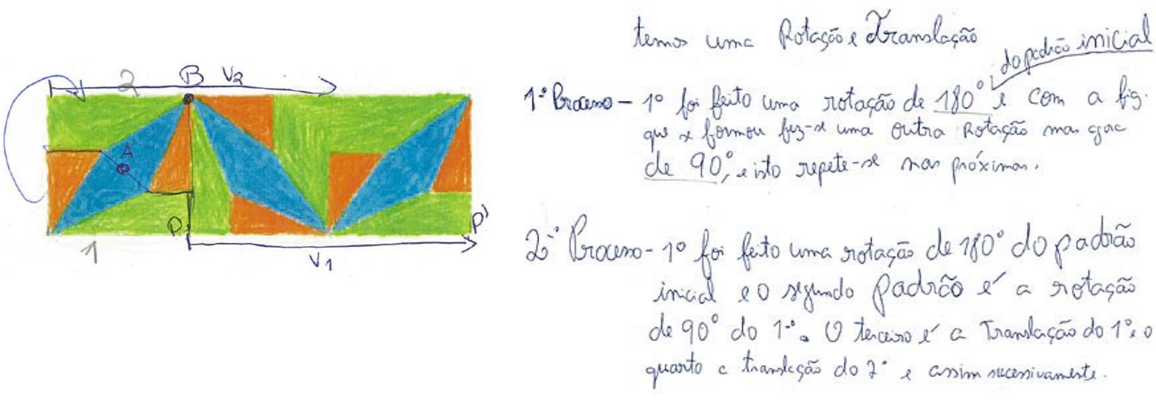


Fig. 234 – Processos de construção da composição 7 do par Rui e Tomás

O par foi questionado quanto ao centro de rotação referido no processo 1.

> ***Investigadora:*** *O ponto A é o centro de rotação para a simetria de rotação de 180 graus, certo? E para a de 90 graus, qual é o centro de rotação?*
> ***Tomás:*** *Roda aqui (indica um ponto que ficou assinalado por B).*
> ***Rui:*** *Pois, mas aí tinha de ser a rotação para baixo… (pensa em voz alta)… para ficar em cima… Sim é aqui.*
> ***Investigadora:*** *Conseguem rodar a figura mentalmente?*
> ***Tomás:*** *Pois…. Em Educação Visual tínhamos o papel vegetal. É mais fácil!!*
> ***Investigadora:*** *Roda em que sentido?*
> ***Rui:*** *Vem para aqui… positivo.*
> ***Tomás:*** *Daqui para aqui é 90 graus. Este laranja e este laranja é 90 graus.*

Faltava averiguar quanto às translações referidas no processo 2. Foi necessário esclarecer quanto ao significado de módulo pois, se por vezes se referem a ele como motivo original, construído em Educação Visual, neste caso referiam-se ao módulo como sendo a composição do motivo original com o seu transformado, obtido por rotação de 180 graus:

> ***Investigadora:*** *Referem translações. Do 1º para o 3º, e do 2º para o 4º.*
> ***Rui:*** *Sim*
> ***Investigadora:*** *Onde está o vetor?*
> ***Rui:*** *Pois não está… (O Tomás traça o vetor identificado por v1)*
> ***Investigadora:*** *Porque é que estás a desenhar esse vetor tão grande?*
> ***Tomás:*** *Porque é de dois em dois..*
> ***Investigadora:*** *O que é que se repete de dois em dois?*
> ***Tomás:*** *O módulo*
> ***Investigadora:*** *O vetor que traçaram é o único vetor que podem ter?*
> ***Tomás:*** *Não, pode ser aqui. Daqui aqui. (Traça o vetor identificado por v2)*

O par é de novo questionado sobre o processo 2. Não estava claro como era obtido o transformado do elemento original para obter o módulo que ia sofrer a translação. Referiu então que o processo era idêntico ao do processo 1:

> ***Investigadora:*** *Como é que vocês obtêm este 2º … módulo … Ele aparece… assim…*
> ***Rui:*** *É como fizemos no processo 1. Rotação de 90 graus…*
> ***Investigadora:*** *Em que sentido?*
> ***Rui:*** *No sentido positivo.*

No que concerne ao friso 8, verifica-se que o par averigua se existe rotação. Unindo o ponto original com o respetivo transformado, os alunos obtêm dois segmentos de reta, paralelos, e concluem que não pode existir rotação (figura 103). O par traça corretamente um dos vetores associado à translação. Refere que existe uma reflexão deslizante mas não identifica o eixo e o vetor associados.

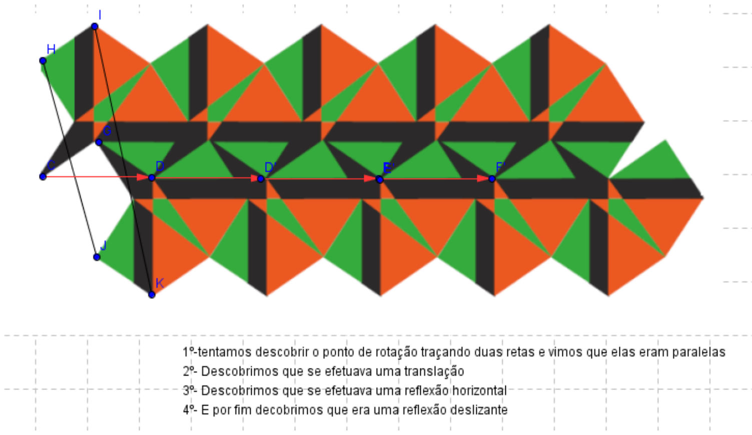


Fig. 237 – Análise do friso 8 pelo par Rui e Tomás

Como processo de construção para obter o friso, o par refere uma translação e identifica o vetor associado (figura 104). Quanto à reflexão deslizante, a resposta indicia que o par a identifica, e associa o eixo horizontal à direção do vetor de translação, no entanto não identifica este último.

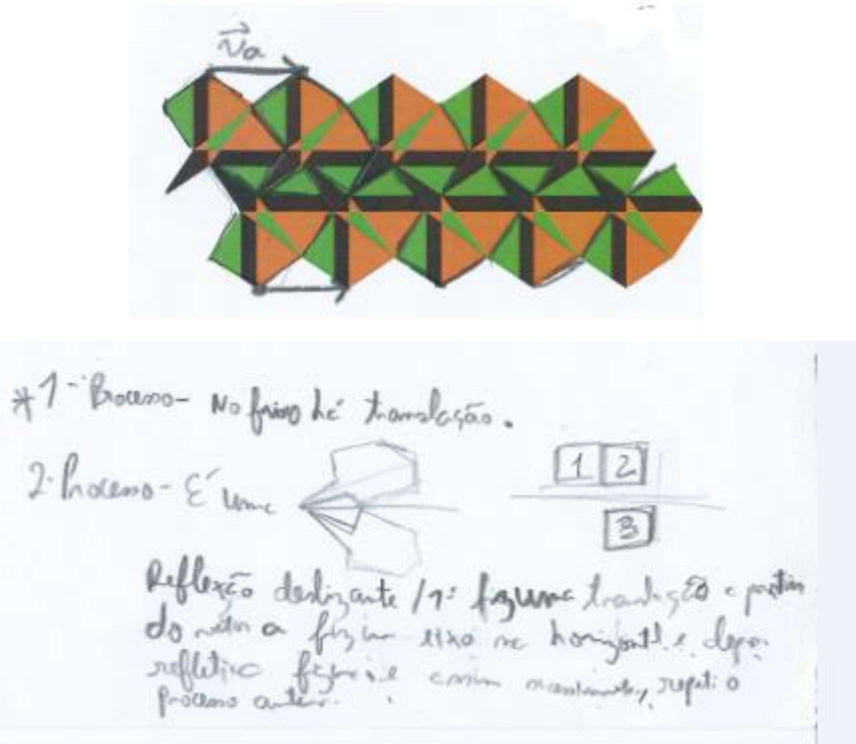


Fig. 240 – Processos de construção friso 8 do par Rui e Tomás

A investigadora solicitou ao par que caracterizasse uma reflexão deslizante e verificou-se que o par tinha consolidado o conceito. Mas, no caso do friso 8, não conseguiram identificar o eixo de reflexão.

O tipo de respostas obtidas ao longo da execução das tarefas bem como na inquirição, revelam que o par adquiriu e consolidou conhecimentos importantes sobre as isometrias. O par empenhou-se e tentou abordagens diferentes nas tarefas de caráter mais aberto.

Em seguida, para cada um dos elementos, descrevem-se, as respostas dadas no teste, versão pré e pós, na questão 1, de modo a dar uma ideia qualitativa da evolução do seu desempenho individual.

Em relação à questão 1, item 1.1, não se verificou alteração na resposta do Rui da versão pré para a pós. O aluno continuou corretamente cada um dos frisos, não adicionando qualquer detalhe. Também para o item 1.2, não se verifica melhoria no desempenho do aluno (figura 105).

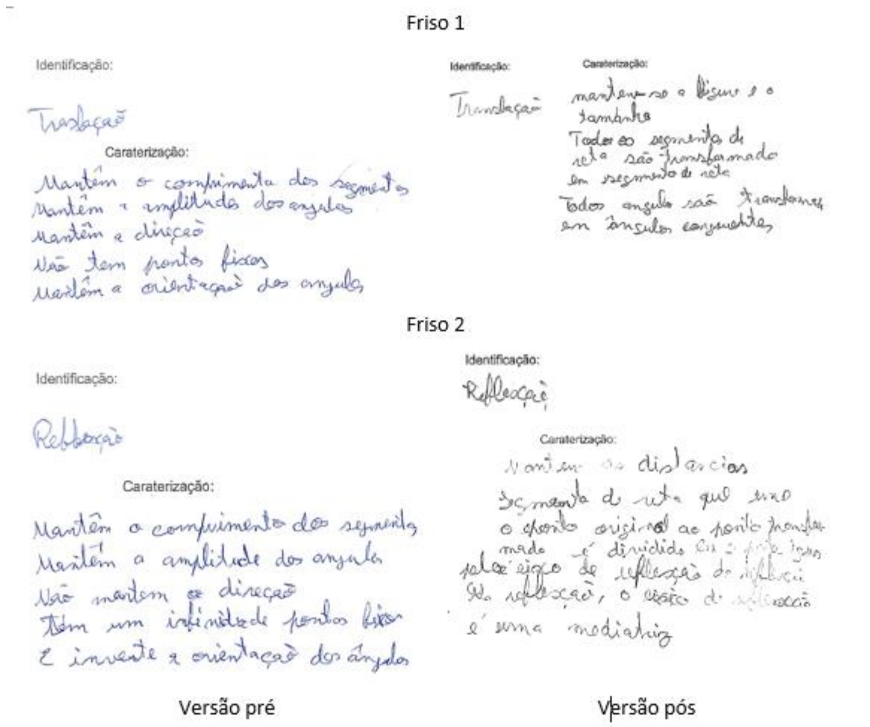


Fig. 243 – Resolução de Rui da questão 1, item1.2 do teste

Não é identificada a reflexão deslizante no friso 1, apresentando propriedades da translação para a sua caracterização. Para o friso 2, o aluno identificou a isometria reflexão, referiu propriedades e identificou o eixo de reflexão como uma mediatriz na versão pós. No entanto, não há qualquer alusão quanto à posição do(s) eixo(s) de reflexão.

No item 1.3, o Rui identificou as mesmas simetrias para a construção dos frisos (figura 106), não descrevendo qualquer processo. Note-se que o aluno também utiliza o termo simetria para se referir à reflexão.

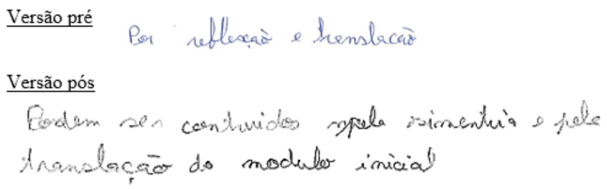

Versão pré
Por reflexão e translação
Versão pós
Podem ser construidos pela simetria e pela translação do modulo inicial

Fig. 246 – Resolução de Rui da questão 1, item 1.3, do teste

Quanto ao Tomás, relativamente ao item 1.1 e 1.2, a resposta não diverge da apresentada pelo Rui. Continuou os frisos sem adicionar qualquer detalhe e, no item 1.2, apresentou propriedades das isometrias identificadas: translação para o friso 1 e reflexão para o friso 2. As respostas dadas na versão pós são semelhantes às da versão pré. Quanto aos processos de construção para cada friso, o aluno não respondeu na versão pré e, na versão pós, a resposta dada apenas indica as isometrias utlizadas (figura 107). Tal como o Rui, o Tomás referiu simetria para identificar a reflexão, pelo facto do termo simetria ter sido mais utilizado em Educação Visual.

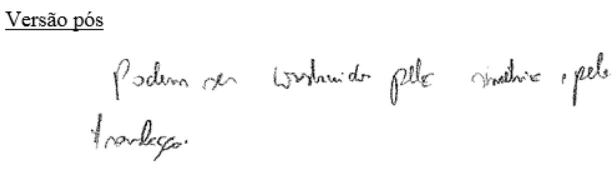

Versão pós
Podem ser construidos pela simetria e pela translação.

Fig. 249 – Resolução do Tomás da questão 1, item1.3, do teste

Nas respostas dadas no teste, após a intervenção didática, os alunos poderiam ter ido mais longe, aplicando conhecimentos apreendidos ao longo da execução de todas as tarefas, estratégias adotadas, bem como raciocínios realizados na exploração dos frisos construídos em Educação Visual.

Simetria – Rosáceas

Para a Tarefa 6 – Rosáceas (anexo 8) – , o par deveria identificar e caracterizar as simetrias em cinco rosáceas. Das oito rosáceas selecionadas pela investigadora do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nas rosáceas 2, 3, 5, 7 e 8 apresentadas no anexo 8. Posteriormente, deveriam descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderiam construir cada uma das rosáceas escolhidas.

Para a rosácea 2, o par não traçou circunferências para confirmar a simetria de rotação. Indicou, contudo, a medida da amplitude do ângulo de rotação (figura 108). O par efetuou um procedimento para encontar o centro de rotação. De novo, não é verificado o traçado das mediatrizes nem se verifica o traçado de circunferências. O par concluiu que a medida da amplitude do ângulo de rotação deveria ser de 60º e justifica, não havendo indícios de terem recorrido à ferramenta de medição. Como se pode verificar na figura 108, o par não aceitou o ponto de interseção dos segmentos de reta [EG] e [FH] como centro de rotação, marcando um que consideram ser o centro.

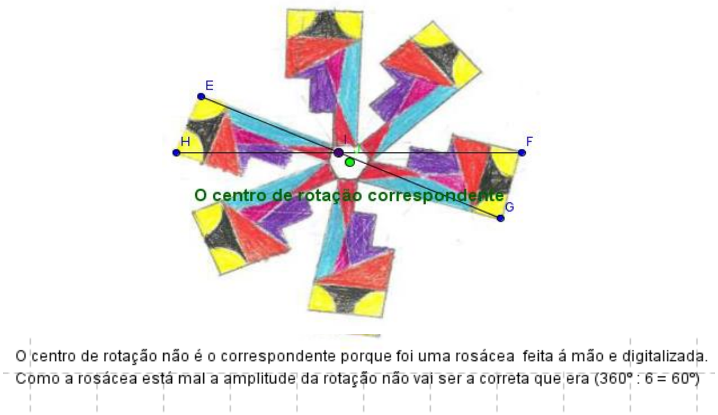


Fig. 252 – Análise da rosácea 2 pelo par Rui e Tomás

Quanto aos processos de construção, o par apresentou dois (figura 109). O primeiro consiste em sucessivas rotações de 60º, que podem ocorrer quer no sentido positivo, quer no sentido negativo. Já no segundo, é apresentado o método utilizado em Educação Visual: desenham um hexágono regular e posicionam os vários elementos sobre os lados do hexágono para obter a rosácea.

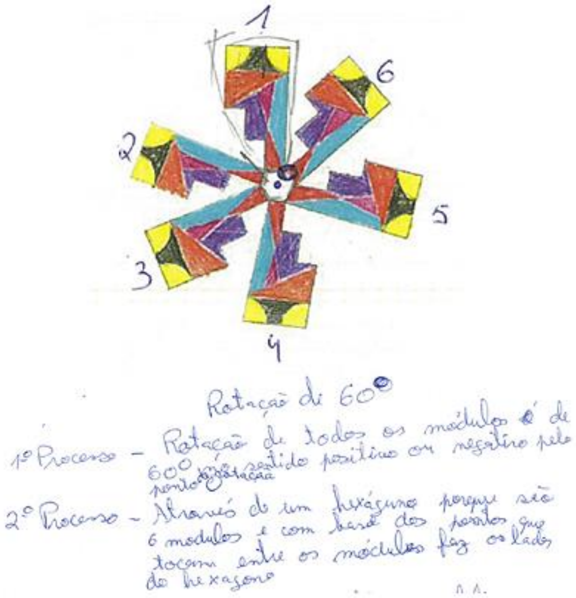


Fig. 255 – Processos de construção da rosácea 2 do par Rui e Tomás

Relativamente à rosácea 3, o par traçou duas circunferências concêntricas para verificar se existe rotação (figura 110) e utilizou a ferramenta de medição de amplitudes de ângulo do GeoGebra para medir a amplitude do ângulo de rotação, o que não se verificou nas anteriores. Conclui que o ângulo medido não é o esperado justificando que a rosácea foi feita *"à mão"*.

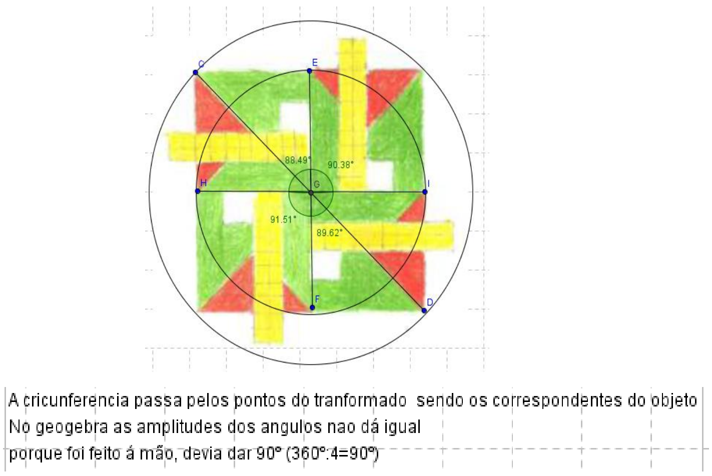


Fig. 258 – Análise da rosácea 3 pelo par Rui e Tomás

Para esta rosácea, o par apresentou apenas um

Fig. 259 – Processos de construção da rosácea 3 do par Rui e Tomás**Fig. 260** – Análise da rosácea 3 pelo par Rui e Tomás

processo de construção que consiste em rodar o módulo de 90º segundo o centro de rotação O (figura 111).

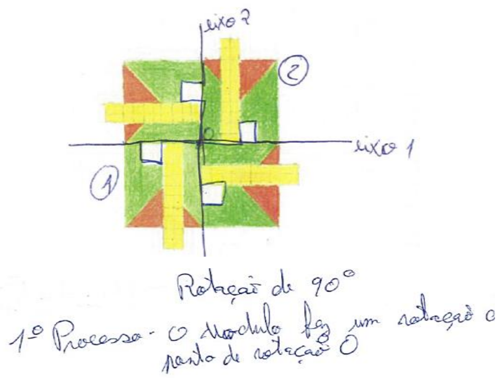


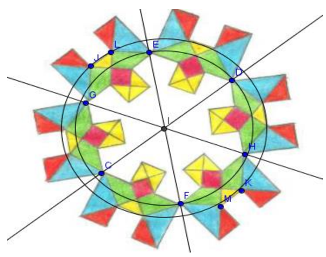
Fig. 261 – Processos de construção da rosácea 3 do par Rui e Tomás

O par foi questionado sobre a possibilidade de outro processo de construção. Referiu que se pode obter o tansformado do elemento original (identificados com 2 e 1, respetivamente, na figura 111), a partir de duas reflexões, uma de eixo horizontal e a outra de eixo vertical.

> ***Rui:*** *Faz uma reflexão e depois ... faz outra reflexão. Faz uma reflexão horizontal e depois outra vertical...*
> ***Investigadora:*** *Porque é que te apercebeste disso agora?*
> ***Rui:*** *Porque vi este triângulo ... o laranja, o mais pequeno ...*

A resposta dada pelo aluno sugere que transferiu os procedimentos que adotou em Educação Visual, para poder responder à questão colocada e não associou a composição das duas reflexões a uma rotação de 180º .

Na análise da rosácea 5, o par traçou duas circunferências concêntricas para verificar que há rotação e identificou o respetivo centro de rotação - I (figura 112). Não utiliza a ferramenta do GeoGebra para medir a amplitude do ângulo de rotação, justificando que é de 60º a partir de cálculos.



A circunferência passa pelos pontos do transformado que são os que correspondem aos pontos do objeto e o centro de rotação é o correspondente da rosácea.
A amplitude da rotação é (360° : 6 = 60°)

Fig. 264 – Análise da rosácea 5 pelo par Rui e Tomás

Para esta rosácea, o par apresentou três processos de construção (figura 113). O primeiro consiste em rotações sucessivas de 60º, no sentido positivo ou sentido negativo. No segundo, apresentam o processo seguido em Educação Visual: desenham um hexágono regular e posicionam os vários elementos para obter a rosácea. No terceiro processo, referem duas rotações sucessivas de 60º e posterior reflexão do grupo obtido, segundo o eixo 1 (figura 113), para obter a rosácea.

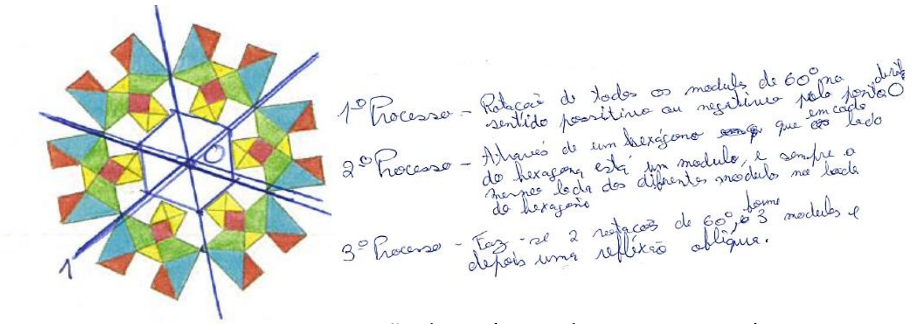


Fig. 265 – Processos de construção da rosácea 5 do par Rui e Tomás

Quando questionado sobre o tipo de hexágono que teria de desenhar, o par referiu ter de ser regular porque as medidas de amplitude dos ângulos associados às rotações são iguais. E quanto à possibilidade de se usarem triângulos responderam *Tínhamos de ter seis triângulos equiláteros. Assim formávamos um hexágono, era a mesma coisa.*

Da análise da composição 7, o par concluiu que não é rosácea por ter dois centros de rotação distintos, como se pode observar na figura 114. Não traçou circunferências como ocorreu em rosáceas anteriores. Refira-se, no entanto, que o procedimento para encontrar o(s) centro(s) de rotação não é o correto tal como se tem vindo a verificar para casos anteriores.

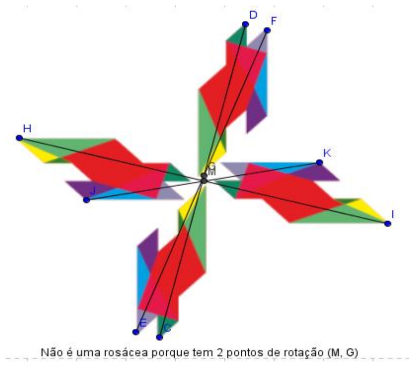


Fig. 268 – Análise da composição 7 pelo par Rui e Tomás

O par apresentou um processo de construção onde se verifica que é identificada uma rotação de 90º do elemento inicial segundo o centro de rotação O identificado na figura 115. Em seguida *"é o próprio módulo que faz uma rotação de 180º"* (figura 115), não sendo identificado o centro de rotação que permite efetuar a rotação do elemento de 180º. O par não foi inquirido quanto a esta composição.

Fig. 271 – Processos de construção para a *composição* 7 do par Rui e Tomás

Relativamente à rosácea 8, o procedimento adotado para verificar que há rotação é idêntico ao da rosácea 5, bem como a medida da amplitude do ângulo de rotação (figura 116).

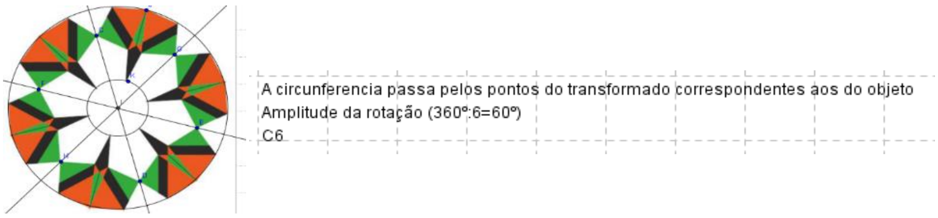


Fig. 274 – Análise da rosácea 8 pelo par Rui e Tomás

Quanto aos processos de construção, indica os considerados para a rosácea 5, como se pode verificar na figura 117. O par foi questionado sobre a possibilidade de outro processo de construção da rosácea:

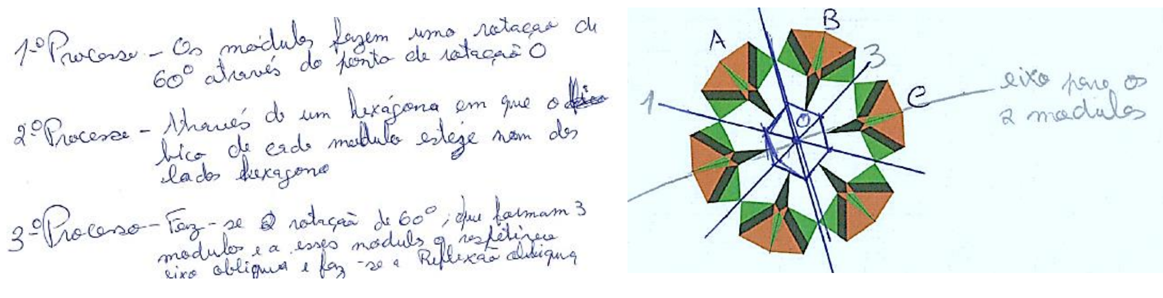


Fig. 277 – Processos de construção da rosácea 8 pelo par Rui e Tomás

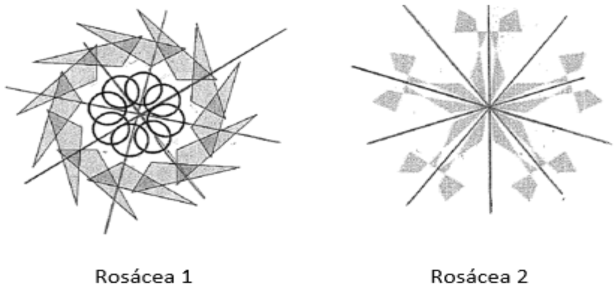
Investigadora: *Conseguiam construir a rosácea de outra forma?*
Tomás: *Não sei... reflexão ...*
Rui: *Por sucessivas reflexões ... Acho que este (A) depois de refletido dá este (B)...*

A investigadora pretendia que o par identificasse o eixo de reflexão no elemento original. Após algumas observações por parte da investigadora, o par identificou o eixo de reflexão no elemento C, como se observa na figura 117. A investigadora fez notar, ainda, que as duas rotações de 60º referidas no processo 3 originariam uma rotação de 120º , mantendo a figura invariante.

Este par recorreu, por várias vezes, aos procedimentos adotados em Educação Visual para construir frisos e rosáceas e que nem sempre estavam corretos. Deixa de “ver” as figuras como frisos ou rosáceas, para vê-las como uma composição qualquer. Contudo, não deixou de revelar a aquisição de conceitos importantes em Matemáica, no que respeita às isometrias e simetria. Neste caso, complementou os conhecimentos adquiridos em Matemática com os de Educação Visual.

Para cada um dos elementos do par, descrevem-se, em seguida, as respostas dadas no teste, versão pré e pós, na questão 2, de modo a dar uma ideia qualitativa da evolução do seu desempenho individual.

Em relação à questão 2, o Rui marcou todos os eixos de reflexão na rosácea 2, quer na versão pré quer na versão pós. Identificou corretamente as simetrias em ambas as rosáceas na versão pré, embora não as caracterizasse devidamente (figura 118). Curiosamente, verifica-se que o Rui deixou de indicar na sua resposta, na versão pós, a simetria de rotação.



Versão pré

Rosácea 1 – Rotação
Rosacea 2 – Reflexão e Rotação 72º

Versão pós

Simetria na vertical e diagonal

Fig. 280 – Resolução de Rui da questão 2 item 2.1 e 2.2 do teste

No que respeita aos processos de construção das rosáceas, o aluno apresentou a resposta que se segue na versão pré (figura 119). Note-se que refere, erradamente, a reflexão como segundo processo possível para a construção da rosácea 1.

Processo 1 :

Rosacea 1	Rosacea 2
Rotação	Reflexão

Processo 2 :

Rosacea 1	Rosácea 2
Reflexão	Rotação

Fig. 281 – Resolução de Rui da questão 2 item 2.3 do pré-teste

Na versão pós, o aluno tentou ser mais descritivo apresentando o procedimento adotado em Educação Visual como processo de construção. No entanto, a resposta para o segundo processo, não difere da apresentada na versão pré (figura 120), e acrescentou, erradamente , uma translação.

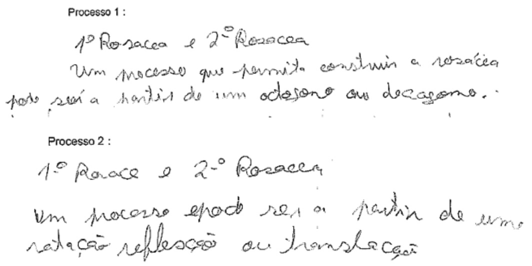

Processo 1 :
1º Rosacea e 2º Rosacea
Um processo que permite construir a rosácea pode ser a partir de um octogono ou decagono.
Processo 2 :
1º Rosace e 2º Rosacea
Um processo epode ser a partir de uma rotação reflexão ou translação

Fig. 282– Resolução de Rui da questão 2 item 2.3 do pós-teste

Na sessão que antecedeu a exploração dos frisos e das rosáceas construídos em Educação Visual, foram discutidas, em grande grupo, as características principais de um friso e de uma rosácea, no entanto a resposta do Rui sugere que não as apreendeu corretamente para as rosáceas. Apresenta-se a seguir o diálogo encetado com os alunos:

> ***Investigadora:*** *Construiram frisos e rosáceas em Educação Visual. Qual é a principal diferença entre ambos? Foram construídos da mesma forma?*
> ***Turma:*** *Foi a direito…*
> ***Rui:*** *Foi em linha…*
> ***Alexandre:*** *Fizemos translações!*
> ***Investigadora:*** *Estão a referir-se aos frisos. Sim, e como caracterizamos uma translação em Matemática?*
> ***Alexandre:*** *Com os vetores.*
> ***Investigadora:*** *Alguém é capaz de me dar uma palavra que dê significado ao que disseram? "em linha", "a direito"…*
> ***Alexandre:*** *Sim, é a direção do vetor.*
> ***Investigadora:*** *Correto. E as rosáceas, tamém as construiram segundo uma direção?*
> ***Turma:*** *Claro que não!! Tivemos de fechar a bola…*
> ***Investigadora:*** *Fechar a bola? O que queres dizer com isso?*
> ***Turma:*** *Stora, tivemos de fazer rotações até termos 360º. Fechar a bola…*
> ***Investigadora:*** *Mas não obtivste uma bola, pois não?*
> ***Investigadora:*** *Em Educação Visual, quando construiram as rosáceas, qual foi a isometria que aplicaram?*
> ***Turma:*** *A rotação.*
> ***Investigadora:*** *Conseguem identificar outra isometria possível para a construção de rosáceas?*

Ao ser colocada esta questão alguns alunos referiram a translação. Após alguma reflexão no grupo turma, os alunos concluiram que não era possível por ser necessário um vetor. Ao ser referida a reflexão, foram explorados casos de rosáceas, construídas em

Educação Visual. Por fim, concluiu-se que, uma figura é uma rosácea se apresenta a isometria rotação, ou as isometrias rotação e reflexão .

Prosseguindo, na análise das respostas dadas no teste, verificou-se que, para o Tomás, a resolução da questão 2, itens 2.1 e 2.2, é semelhante à do Rui. Contudo para a rosácea 1, não desenha o eixo de reflexão e, no pré-teste, em relação à rosácea 2, não refere a rotação.(figura 121).

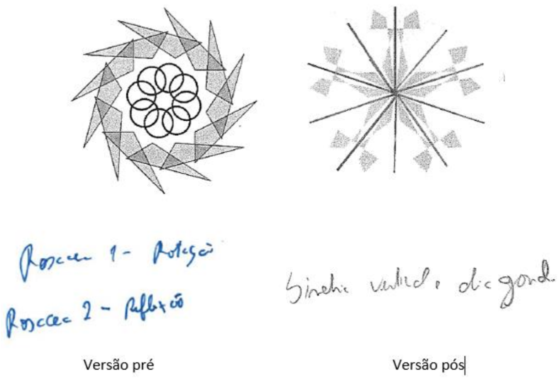


Fig. 285 – Resolução de Tomás da questão 2 item 2.1 e 2.2 do teste

Como processos de construção, o aluno não respondeu na versão pré, apresentando, na versão pós (figura 122), o método utilizado em Educação Visual. De qualquer forma, não explicita qual das rosáceas construia por esses processos e não se percebe a referência do octógono.

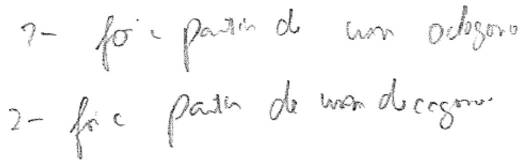


Fig. 288 – Resolução de Tomás da questão 2 item 2.3 versão pós-teste

Relativamente à questão 3 do teste, que consiste na análise de pavimentações de ESCHER, verifica-se que o Rui não melhorou as suas respostas da versão pré para a versão pós, como se pode verificar nas figuras 123 e 124, respetivamente.

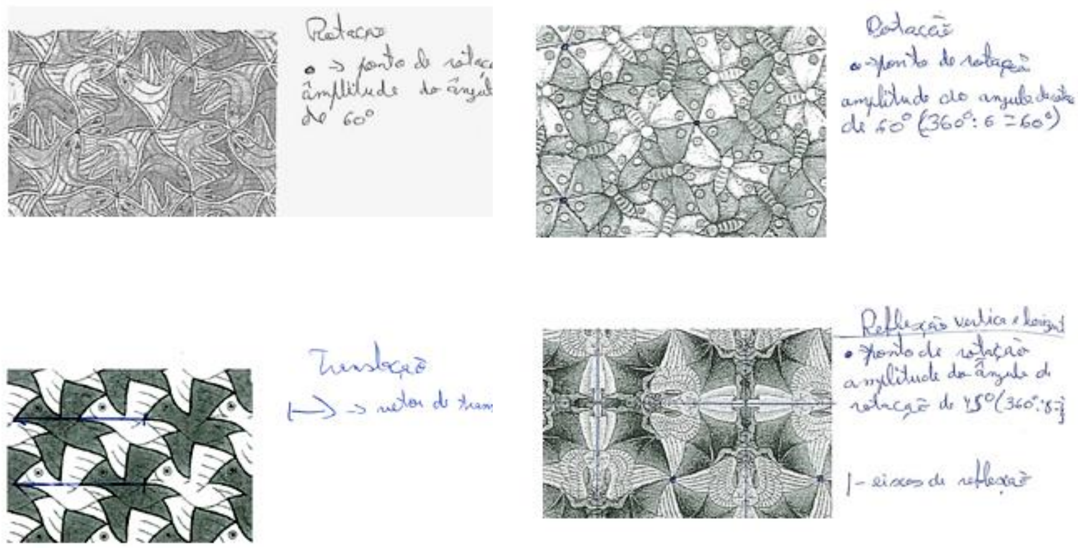


Fig. 289 – Resolução de Rui da questão 3 versão pré do teste

Para a pavimentação dos peixes, o Rui identificou, erradamente, a medida da amplitude do ângulo de rotação – 60º, e assinalou o centro de rotação, em ambas as versões. Quanto à pavimentação dos pássaros, na versão pré, o Rui identificou vetores de translação horizontais (figura 123). Na versão pós, para além de vetores horizontais, identificou vetores de direção oblíqua, apesar do seu traçado não estar correto, por não ser evidente o seu sentido (figura 124).

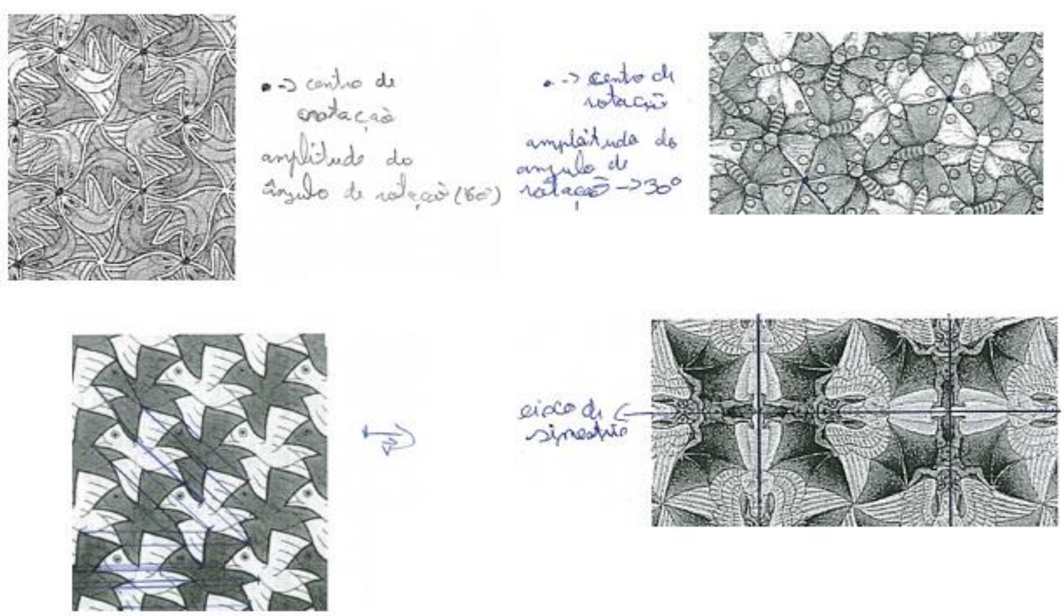


Fig. 292 – Resolução de Rui da questão 3 versão pós do teste

No caso da pavimentação das abelhas, em ambas as versões, o aluno identificou corretamente, os centros de rotação bem como a medida da amplitude do ângulo de rotação – 60º. Na pavimentação dos anjos, o Rui identificou uma rotação, cuja medida da amplitude do ângulo de rotação está errada – 45º. O cálculo efetuado (360º: 8) sugere que identifiou duas siemetrias de reflexão, uma de eixo vertical e outra de eixo horizontal, dividindo o módulo de repetição em oito partes iguais. No entanto, o aluno refere, apenas, uma reflexão de eixo vertical. Na versão pós, o aluno identificou, apenas, uma reflexão de eixo horizontal.

Quanto ao Tomás, e para a versão pré (figura 125),verifica-se que, na pavimentação dos peixes, identificou translações associadas a vetores horizontais com o mesmo sentido. Identificou também, e erradamente, uma rotação de amplitude 60º. Também na pavimentação dos pássaros identificou translações associadas a vetors horizontais, neste caso de sentido contrário aos da pavimentação dos peixes. Na pavimentação das abelhas, identificou, corretamente, a medida da amplitude do ângulo de rotação, assinalando os centros de rotação. Para a pavimentação dos anjos o Tomás identificou reflexões de eixos horizontal e vertical, traçando-os.

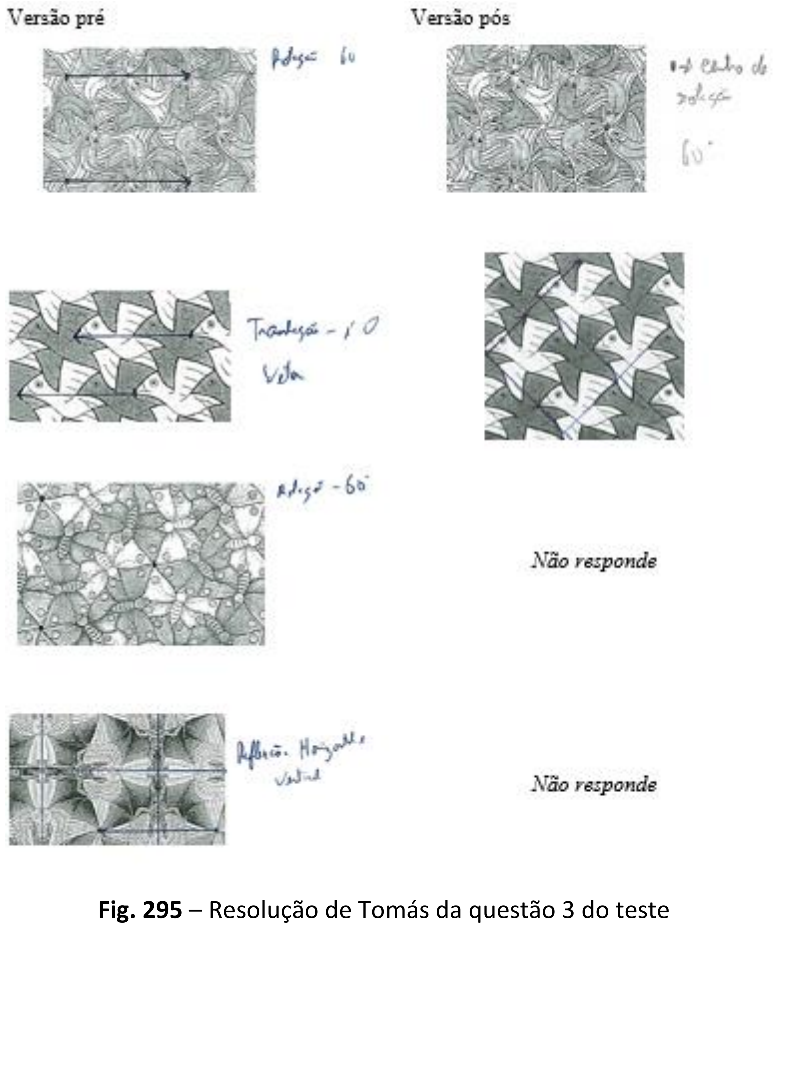


Fig. 295 – Resolução de Tomás da questão 3 do teste

Para a versão pós (figura 125), o Tomás não melhorou. No caso da pavimentação dos peixes, o Tiago deixou de referir a translação. Já para a dos pássaros, identificou vetores oblíquos de sentidos contrários. Para as duas restantes pavimentações, o aluno não respondeu.

2.1.2. Atitudes

Decorrente da aplicação do questionário inicial, num momento anterior à aplicação da sequência didática, o par *concordou plenamamente* com a afirmação *"Gosto de Matemática"*. O Rui discorda totalmente quanto à afirmação *"Nas aulas de Matemática sinto-me ansioso"*, e o Tomás não tem opinião. O par referiu gostar de Geometria, tendo assinalado a opção *"concordo plenamente"*e *"discordo totalmente"* que esta não sirva para nada. Discordou que *"a Geometria da Matemática é mais difícil do que a de Educação Visual"*. Se, por um lado, o Rui *discordou totalmente* de que "*as aulas de Matemática não se podem relacionar com as de Educação Visual*", o Tomás "*concordo plenamente"*. O Rui *concordou plenamente* que *"Educação Visual pode ajudar-me a entender melhor a Matemática*" e o Tomás não teve opinião, manifestando ambos a mesma opinião, *concordo*, com a afirmação, "*A Matemática ajuda-me a entender melhor os conceitos de outras disciplinas"*.

Ao longo da aplicação da sequência de tarefas, verificou-se, entusiasmo, autonomia e empenho na execução das tarefas, tendo sido o par a que mais recorreram os restantes, possivelmente por ser um dos que mais rapidamente concluía as construções geométricas no GeoGebra. No entanto, o Rui foi o elemento que mais disponibilidade e espírito de entre-ajuda mostrou com os colegas com mais dificuldade. Verificou-se, também, na exploração dos frisos e das rosáceas construídos em Educação Visual, empenho nas respostas dadas, procurando sempre outras possibilidades para além das referidas no papel. Quanto ao Tomás, por várias vezes a investigadora teve de solicitar diretamente que respondesse, dado que este aceitava passivamente as respostas do Rui, por este apresentar melhor desempenho à disciplina de Matemática.

No questionário final, relativamente à abordagem interdisciplinar, o par referiu ter gostado, e que gostaria de repetir a experiência com outros conteúdos de Matemática:

> **Rui:** *"Sim. Achei uma experiência interessante de se realizar e pensei que ia ficar mal".(o aluno estava a referir-se às composições realizadas em Educação Visual.*
> **Tomás:** *"Sim, porque foi divertido e aprendi"*

Ambos concordaram que a exeução das tarefas em Educação Visual "*tornou o tema das isometrias mais interessante"* e *"tornou-me mais confiante na execução das tarefas em*

Matemática", mas apenas o Rui concordou que o *"ajudaram a entender melhor as isometrias".* Quanto ao desenvolvimento de competências Matemáticas, o Rui *concordou* que a execução das tarefas o ajudaram na identificação, caracterização e construção de isometrias, assinalando a opção *"não tenho opinião"* quanto à exploração de frisos e de rosáceas. Quanto a isto, o Tomás concordou que a execução das tarefas o ajudaram a caracterizar e a construir isometrias, não concordando quanto a ajudarem na sua identificação. No entanto, concordou que o ajudaram na exploração dos frisos e das rosáceas.

No que respeita à utilização do GeoGebra, ambos consideraram que ajudou na execução das tarefas:

> ***Rui:*** *"Sim porque é mais fácil para nós construirmos figuras".*
> ***Tomás****: " Sim porque é uma maneira diferente de aprendermos"*

Quanto às principais dificuldades sentidas, ambos referiram *"pouca criatividade"* e *"falta de domínio do GeoGebra"* indicando o Tomás, também, a *"compreensão das tarefas"*. Sendo um dos pares que mais domínio revelou no GeoGebra, a resposta dada sugere que gostariam de ter explorado mais o software neste tema, e possivelmente ter procedido à construção de frisos e rosáceas no GeoGebra.

2.2. Criatividade

Neste ponto faz-se a distinção entre representações e manifestações de criatividade do par. Quanto às representações, são apresentadas algumas das respostas obtidas no questionário inicial, e as manifestações, reportam-se a produções dos alunos.

2.2.1. Representações

Quando inquiridos, no questionário inicial, sobre o significado atribuído a criatividade o Rui referiu *" Ser inteligente"* e o Tomás, *"Ser idiota (ter muitas ideias)".* O Rui considerou ser criativo *"porque tenho ideias impensáveis pelos outros"* e o Tomás referiu que não é criativo porque não tem criatividade. Quanto à disciplina onde consideram ser possível ser criativo, não referem qualquer disciplina. O Rui *discordou totalmente* quanto a ser mais criativo quando trabalha com outros colegas, e o Tomás assinala a opção *"não tenho opinião"*. O par referiu não ter opinião quanto à criatividade em Matemática poder ser estimulada nas escolas. Por outo lado, o Rui discordou totalmente que *"Em Matemática não* *é possível avaliar a criatividade dos alunos"*. O Tomás assinalou a opção *"não tenho opinião"* . O par concordou plenamente que, *"Em Matemática não se pode ser criativo – é aquilo e aquilo mesmo"* . Quanto à afirmação *" A Matemática é só números, não permite a criatividade"*, o Rui discordou totamente e o Tomás tem opinião contrária, concorda plenamente. O par concordou plenamente que "*A Matemática é criativa quando fazemos desenhos"* e concordou que *" não é possível ser criativo(a) em Matemática como se é a Educação Visual"*. O Rui concordou que, *"uma forma de desenvolver a criatividade em Matemática é estabelecr relações com outras disciplinas, como Educação Visual"* e o Tomás assinalou a opção *"não tenho opinião"*. As opiniões mantêm-se quanto a *"aplicar os conceitos aprendidos em Educação Visual nas aulas de Matemática, e vice versa, estimula a imaginação e promove o desenvolvimento de ideias"* – ambos concordaram. No entanto o par assinalou a opção *"concordo plenamente"* quanto às aulas de Matemática terem de ser expositivas para aprenderem melhor.

No questionário final, o par considerou que as tarefas propostas estimularam a criatividade:

> ***Rui:*** *"Sim porque vai ajudar-me no teste"*
> ***Tomás:*** *"Sim porque em vez de praticarmos com números e coisas assim, fazemos com outros materiais".*

Nesta fase do estudo, apenas o Rui considerou que a Matemática é criativa quando *"fazemos exercícios com isometrias no GeoGebra"*. Para o Tomás, a opinião mantém-se contrária pois "*a Matemática é só números".*

A investigadora inquiriu o par quanto ao friso, ou rosácea, consruído em Educação Visual, mais criativo e respondeu:

> ***Rui+Tomás:*** *O da Adriana*
> ***Investigadora:*** *Porquê?*
> ***Tomás:*** *Porque as cores foram bem escolhidas…*
> ***Rui:*** *Porque tem muitos detalhes geométricos…*

2.2.2. Manifestações

Nas tarefas de caráter mais aberto, o par apresentou estratégias diferentes do grupo turma, tendo sido seguidas por outros pares. Quanto à questão 4 do teste, orientada para a criatividade, verifica-se que o Rui foi um pouco mais criativo na elaboração do módulo pois, na versão pré apenas considerou eixos de reflexão na horizontal e na vertical, tendo inserido eixos de reflexão oblíquos na versão pós (figura 126), acontecendo o mesmo para o Tomás (figura 127).

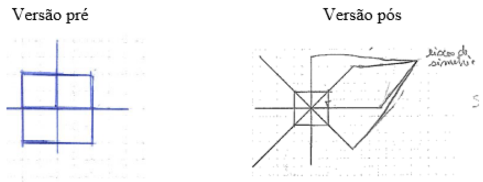


Fig. 298 – Resolução de Rui da questão 4 , item 4.1 do Teste

Fig. 301 – Resolução de Tomás da questão 4 item 4.1 do teste

Quanto à composição geométrica (figura 128), verifica-se, para o Rui, maior elaboração no módulo por lhe ter sido acrescentado outros detalhes que não existiam na versão pré, como se pode ver na figura que se segue. Na versão pré, o Rui foi original, por ter sido o único aluno que considerou a reflexão deslizante.

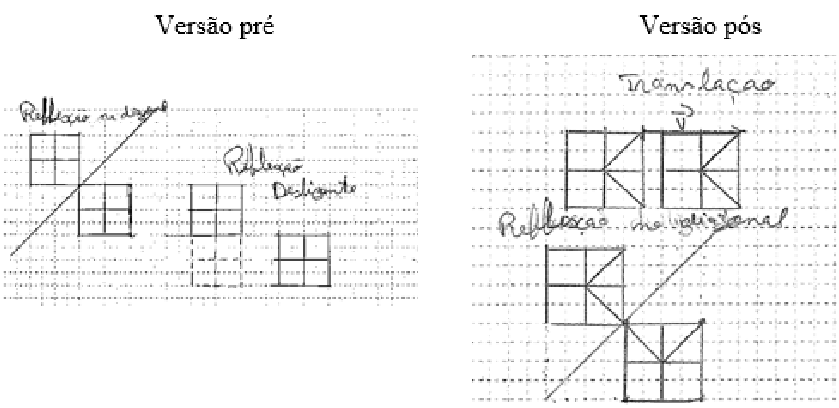


Fig. 302 – Resolução de Rui da questão 4 item 4.2 do teste

O mesmo se pode afirmar em relação ao Tomás. Tal como se pode verificar na figura 129, o Tomás foi um pouco mais criativo na versão pós ao adicionar um detalhe no módulo.

Quanto à composição geométrica, mantém-se a translação e a reflexão segundo um eixo oblíquo, na versão pré, passa a uma de eixo vertical, na versão pós.

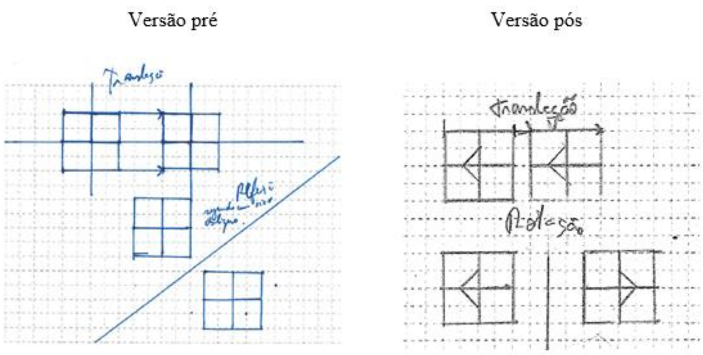


Fig. 303 – Resolução de Tomás da questão 4 item 4.2 do teste

3. O par Alexandre e Diogo

O par, Alexandre e Diogo, não costumava trabalhar em conjunto nas aulas de Matemática mas, como já foi referido, ambos denotavam empenho nas atividades.

3.1. Competências geométricas

Este ponto contempla os conhecimentos, as capacidades, e as atitudes face à Matemática em geral e à Geometria em particular desenvolvidos ao longo da experiência pelo par Alexandre e Diogo.

3.1.1. Conhecimentos e capacidades

Abordam-se, sob este título, as isometrias, simetria, com enfoque especial nos frisos e nas rosáceas.

Isometrias

O par iniciou a Tarefa 1 – Exploração de propiedades das isometrias (anexo 3) – e não revelou qualquer dificuldade na execução das tarefas. Este par conseguiu traçar o vetor sem qualquer ajuda, no entanto solicitou a presença da investigadora para se certificar que o traçado do vetor estava correto:

> ***Alexandre:*** *Eu consegui desenhar uma seta. Não sei se é isto!*
> ***Investigadora:*** *Deixa-me ver… Sim está correto. Podes explicar aos teus colegas como fizeste? Quem liga o projetor?*

O Alexandre traçou o vetor com a origem fora do polígono inicial. Outros pares optaram por traçar um vetor com origem num dos pontos do polígono.

Este par ouvia atentamente as explicações e orientações da investigadora pelo que na maioria das vezes foi autónomo.

Não surgiram dúvidas quanto à manipulação do vetor. O grupo turma, como já se referiu, verificou que quando se aumenta o comprimento do vetor "*as figuras afastam-se… e quando o pomos mais pequenino as figuras começam a ficar uma em cima da outra"* e que os pontos do transformado estão todos à mesma distância da figura inicial e que *" é igual ao tamanho do vetor".* Quando a investigadora perguntou como poderiam mostrar, no GeoGebra, o que tinham acabado de afirmar, o par, Alexandre e Diogo, uniu os pontos da figura inicial aos respetivos pontos no transformado, medindo de seguida os respetivos segmentos.

> ***Investigadora:*** *Então, e o vetor serve para quê?*

Neste momento os alunos mostravam não estar a perceber a questão colocada pela investigadora:

> ***Grupo Turma:*** *HÃ?! O vetor?!*
> ***Alexandre:*** *Pode chegar aqui Stora? Não consigo medir o vetor…*
> ***Investigadora:*** *Qual é a tua ideia?*
> ***Alexandre:*** *Para ver que o comprimento entre os pontos é igual ao tamanho do vetor…*

A turma esteve atenta à sugestão do Alexandre e efetuaram as respetivas medições. No que respeita ao preenchimento do quadro resumo, o par ouviu atentamente as dúvidas que iam surgindo no grupo turma quanto à "*orientação dos ângulos*" e "*pontos fixos*", e as indicações da investigadora; explorou as ferramentas e, após alguns fracassos, facilmente verificou as conjeturas. Para finalizar, o par identificou as propriedades da translação e registou-as no quadro resumo.

No que respeita à tarefa seguinte, o par não teve dificuldade em efetuar a rotação de acordo com o procedimento apresentado. Facilmente conjeturou sobre a medida do comprimento dos lados do polígono construído, bem como sobre a medida da amplitude dos ângulos, para a figura inicial e o seu transformado. Para alterar a amplitude do ângulo de rotação, no sentido positivo e no sentido negativo, o par seguiu as orientações e as explicações da investigadora, continuou as construções e preencheu o quadro resumo:

> ***Investigadora:*** *Há alguma dúvida?*
> ***Diogo****: Não…*
> ***Investigadora:*** *Quantos pontos fixos encontraram para a rotação?*
> ***Diogo:*** *Um! O centro…*
> ***Alexandre:*** *Só esse é que não muda de lugar…*
> ***Investigadora:*** *Explica melhor*
> ***Alexandre:*** *O centro também é o transformado… Quando clicamos aqui (o aluno evidencia a ferramenta utilizada para a rotação) o ponto não muda.*

Quanto à reflexão e reflexão deslizante o par não revelou dificuldades no que respeita às questões relacionadas com as medidas do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos. No entanto, a primeira dúvida recaíu, de novo, na orientação dos ângulos, pois havia dificuldade em proceder à sua medição. A investigadora abordou o grupo turma sobre o assunto, tendo um aluno apresentado, corretamente, as suas conclusões.

> ***Investigadora****: Liguem o projetor. Não se importam que seja a vossa construção? (dirigindo-se ao Alexandre e ao Diogo, que trabalhavam no computador da sala)*

O par levantou-se e sentou-se noutro lugar, e foi ouvida a explicação do procedimento.

> ***Investigadora****: Entenderam a explicação? O que está a acontecer?*
> ***Grupo Turma :*** *Pois ...*
> ***Alexandre:*** *Acho que sei Stora.*
> ***Investigadora:*** *Diz lá então Alexandre?*
> ***Alexandre:*** *Não é o sentido do ângulo que muda?*
> ***Investigadora:*** *É isso mesmo*

No que concerne à reflexão deslizante, o par conseguiu ocultar o primeiro transformado, explorando as funcionalidades do software.

Como em todas as tarefas, este par só se manifestava quando considerava que a sua intervenção poderia trazer algo de novo às explicações do grupo turma pelo que, neste caso, tendo a conclusão sido apresentada por outro par, ouviu atentamente, comparou com a sua construção e registou as propriedades analisadas no quadro resumo.

Na resolução da Tarefa 2 – Composição de duas reflexões (anexo 4) – , para o caso 1 – Composição de duas reflexão de eixos paralelos – , o par não teve dificuldade no procedimento. Por vezes, o Diogo levantava-se para ver o que outros pares obtinham e comentava com o Alexandre. A investigadora não interferiu neste processo. Relativamente à relação entre os eixos e o vetor, o par facilmente concluiu que o vetor que define a translação tem de medida de comprimento o dobro da distância entre os eixos.

Para o caso 2 – Composição de duas reflexões de eixos concorrentes – , verificou-se que, na primeira parte da tarefa, o par seguiu as orientações da ficha e não teve dificuldade em obter o transformado da figura inicial por rotação de centro C. Para descobrir que a composição de duas reflexões de eixos concorrentes corresponde a uma rotação cuja medida da amplitude do ângulo é o dobro da medida do ângulo entre os eixos de reflexão, o par manipulou os eixos de reflexão ao invés de proceder a nova construção como outros pares. Adotou os procedimentos efetuados para o caso anterior, efetuou as medições respetivas e confirmou a conjetura. Tendo terminado a tarefa, o par conversava entre si, apontando para as figuras que tinham obtido e verificavam o que tinham escrito na ficha de trabalho:

> ***Investigadora:*** *Passa-se alguma coisa?*
> ***Diogo:*** *É por causa das cores…*
> ***Alexandre:*** *As cores aqui não mudam de posição…* (aponta para o ecrã)
> ***Investigadora:*** *Pois não…*
> ***Alexandre:*** *Então a orientação dos ângulos também não mudou… se é uma rotação…*

Na Tarefa 3 – Composição de duas rotações (anexo 5) – , para o caso1 – Composição de duas rotações com o mesmo centro – verificou-se que o par adotou um procedimento diferente de outros pares por manifestar maior domínio do GeoGebra. Ocultava o primeiro transformado e só depois media a amplitude do ângulo de rotação para obter o transformado da rotação 2 a partir do polígono traçado. À semelhança de outros pares, também traçou circunferências para se certificar que de facto havia rotação. Para testar a conjetura, o par, após testar com alguns ângulos, optou por considerar um ângulo com o sentido contrário ao da primeira construção, para que as construções não ficassem sobrepostas. O número de construções efetuadas, embora algumas delas sem sucesso, permitiu concluir que a apropriação do conceito de rotação bem como a composição de rotações com o mesmo centro não constituíram dificuldade para o par.

A segunda parte da tarefa, que consistia em investigar a composição de duas rotações com centros distintos – caso 2 – , suscitou grandes dúvidas, provavelmente pelo seu caráter mais aberto. A resolução desta tarefa antevia diferentes processos de exploração pelo que, a partir do sugerido na ficha de trabalho e atendendo a todo o trabalho exploratório realizado até à execução desta tarefa, seria de esperar que o par explorasse as construções com ângulos de diferentes amplitudes, o que aconteceu. Marcavam o ponto médio no segmento que unia o ponto original ao respetivo transfomado procedendo a nova construção quando não conseguiam obter uma circunferência que passasse por todos os transformados:

> ***Investigadora:*** *Porque é que estão a marcar o ponto médio?*
> ***Alexandre:*** *estou a tentar ver se dá para ter o centro…*
> ***Investigadora:*** *Ouviram o que disse o vosso colega?*

Um aluno havia referido "*Ó Stora, não pode ser por duas reflexões? Como é que sabemos onde vamos pôr os eixos?".* O par decide então analisar o que haviam feito para a composição de duas reflexões, não tendo conseguido concluir o raciocínio:

> ***Investigadora:*** *Mediatriz, diz-vos alguma coisa? (para toda a turma)*

A partir desta orientação dada pela investigadora, o par traçou mediatrizes, mas a dúvida persistiu quanto à rotação e foi necessário explicar o procedimento. A dificuldade revelada pelos alunos quanto à execução desta tarefa indicia que tarefas de caráter mais aberto e de maior complexidade pode dificultar uma construção imediata do conhecimento. Por outro lado, também é reveladora, possivelmente, da falta de familiaridade com tarefas, que exigem iniciativa na sua exploração.

Relativamente à Tarefa 4 – Simetrias (anexo 6) – o par apenas identificou as simetrias de reflexão nos polígonos apresentados na primeira questão, como aconteceu para a maioria dos pares da turma. Quanto à segunda questão, que focava a simetria em polígonos regulares, o par facilmente identificou todas as simetrias.

Quanto às respostas dadas pelo par no teste, nas versões pré e pós, e referente à subcategoria " Isometrias" será oportunamente analisada aquando das subcategorias frisos e rosáceas.

Simetria – Frisos

Para a Tarefa 5 – Frisos (anexo 7) – o par deveria identificar e caracterizar as simetrias em cinco frisos. Dos oito frisos selecionados pela investigadora do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nos frisos 3, 4, 6, 7 e 8 apresentados no anexo 7. Posteriormente, deveriam descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderiam construir cada um dos frisos escolhidos.

Para o friso 3, o par identificou uma simetria de reflexão horizontal cujo eixo é identificado pelo segmento de reta [H_1,I_1] e dois vetores equipolentes representados na figura 130.

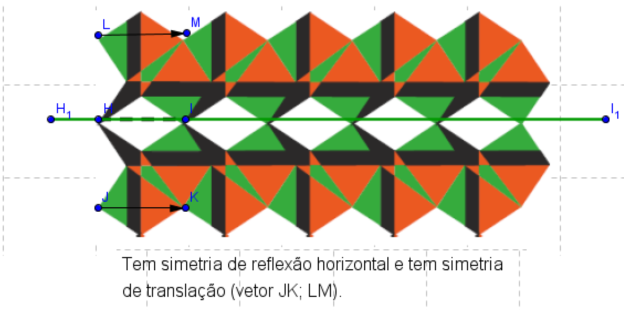


Fig. 304 – Análise do friso 3 pelo par Alexandre e Diogo

Quanto aos processos de construção o par identificou dois (figura 131). No primeiro processo, o par identificou uma *reflexão vertical* e translações sucessivas associadas a dois vetores horizontais equipolentes.

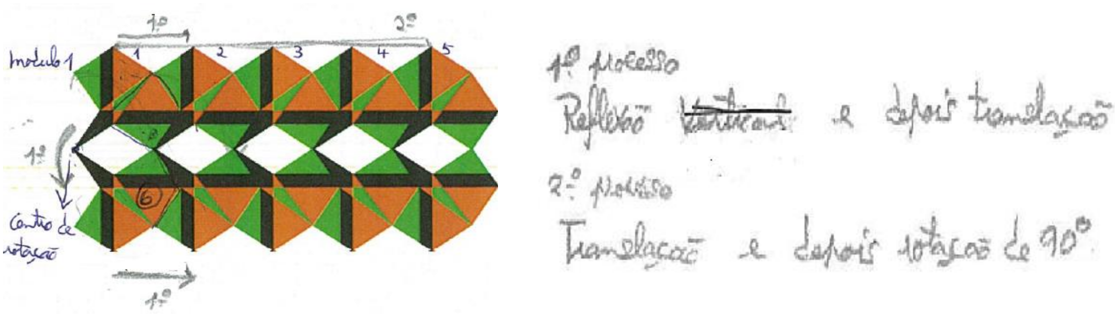


Fig. 305 – Processos de construção do friso 3 do par Alexandre e Diogo

Tendo sido identificado um eixo de reflexão horizontal, no sentido de clarificar o erro, o par é inquirido:

> ***Investigadora** – No friso3 vocês referem "reflexão vertical". É isso mesmo que vocês querem dizer?*
> ***Alexande**: Sim. A partir deste módulo obtém-se o de baixo.*
> ***Investigadora**:Então e é vertical?*
> ***Alexandre:** É. Porque o eixo está na horizontal.*
> ***Investigadora:** Se o eixo está na horizontal … é uma reflexão segundo um eixo*
> ***Diogo:** …horizontal*

A resposta deste par indicia que designaram a reflexão de acordo com o movimento do módulo apesar de terem identificado corretamente o eixo de reflexão horizontal. Em seguida, a investigadora solicitou que o par clarificasse a rotação de 90º referida no processo dois:

> ***Investigadora:** Então agora expliquem melhor como é que identificam a rotação de 90 graus neste friso.*
> ***Alexandre:** Está aqui translação…*
> ***Investigadora:** Essa é a translação. E a rotação de 90 graus que referem?*
> ***Alexandre:** … e depois a partir deste ponto … fazemos a rotação…*
> ***Investigadora:** E é esse o módulo? Qual é o módulo que vocês vão rodar?*
> ***Diogo:** É este, o 1.*
> ***Investigadora:** Então esse módulo vai fazer rotação de 90 graus. E depois como é que constroem o friso?*
> ***Alexandre:** O friso é uma translação …*
> ***Investigadora:** Translação como?*
> ***Alexandre:** Translação de um em um. Do 1 para o 2, do 2 para o 3, para o 4 e para o 5 …*
> ***Investigadora:** Mas isso é só a parte de cima! Como fazem para a parte de baixo?*
> ***Alexandre**: Este é todo junto…*
> ***Investigadora:** Então o módulo que vai sofrer translação é o módulo constituído pelo original e pelo transformado?*
> ***Diogo:** É …*
> ***Investigadora:** Nos 7 grupos de frisos não há rotações para além das de 180º. Neste caso porque é que esta surge? Pensem bem.Há outra maneira?*
> ***Diogo:** Podemos fazer a translação de todos e depois a reflexão de cada um. Em vez de ser logo estes dois.*

Quanto ao friso 4, o par identificou duas reflexões, uma de eixo vertical e outra de eixo horizontal, que originam o módulo de repetição; uma translação do módulo de repetição segundo o vetor identificado por *L1B1*, e uma reflexão de eixo vertical WG1 deste mesmo módulo (figura 132).

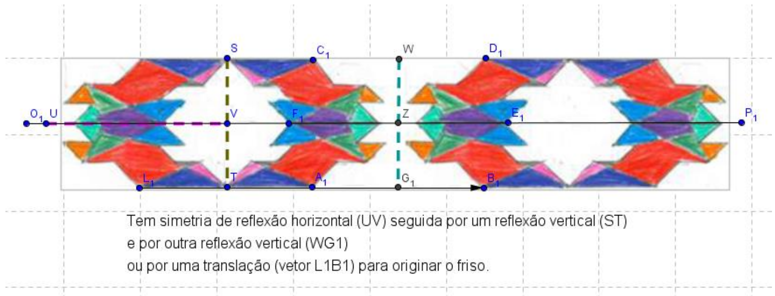


Fig. 308 – Análise do friso 4 pelo par Alexandre e Diogo

O par apresentou um processo de construção para o friso (figura 133), sendo muito suscinto na sua descrição, pelo que foi inquirido:

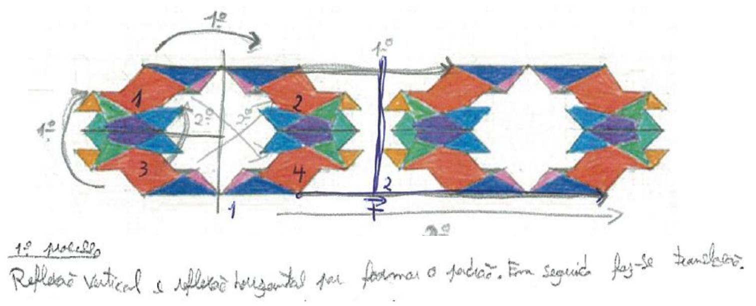


Fig. 311 – Processos de construção do friso 4 do par Alexandre e Diogo

Investigadora: *"Reflexão vertical e reflexão horizontal". A ordem que aplicaram foi primeiro, vertical e depois, horizontal? Foi essa a ordem?*
Alexandre: *Sim.*
Investigadora: *Expliquem melhor essas reflexões.*
Alexandre: *Aqui, a partir de 1, fazemos uma reflexão vertical e obtemos o 2… depois, a partir do 1 e do 2 fazemos uma reflexão horizontal e obtemos o 3 e o 4.*
Investigadora: *E como é que obtêm o resto do friso?*
Alexandre: *Depois, 4 faz-se …*
Alexandre e Diogo: *… uma translação.*
Investigadora: *Qual é o vetor?*
Alexandre: *É este, o T.*
Investigadora: *Então e eu pergunto, se em vez de começar pela reflexão "vertical", tivessem começado pela "horizontal", o friso iria ser o mesmo?*
Diogo: *Era a mesma coisa … Do 1 ia para o 3 depois era … do 3 para o 4 e do 1 para o 2 … e no fim obtinha-se o mesmo bloco. E podia fazer-se reflexão vertical…no eixo 2.*

Para o friso 6, o par identificou uma translação, e uma reflexão de eixo vertical no módulo de repetição. Para obter o friso são aplicadas sucessivas reflexões do módulo de repetição (figura 134).

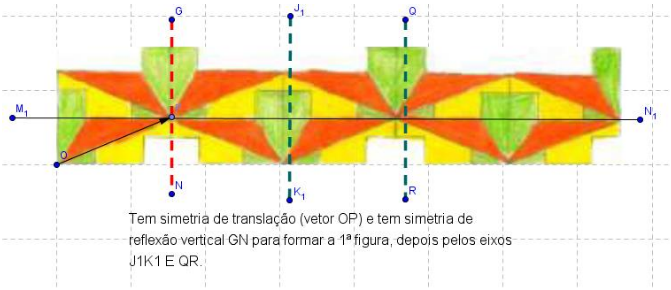


Fig. 314 – Análise do friso 6 pelo par Alexandre e Diogo

Quanto aos processos de construção do friso, o par apresentou dois (figura 135).

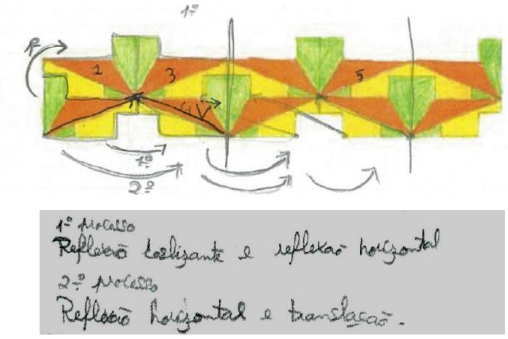


Fig. 315 – Processos de construção do friso 6 do par Alexandre e Diogo

Num dos processos é referida uma reflexão deslizante, pelo que, o par foi inquirido:

> ***Investigadora:*** *Expliquem melhor a reflexão deslizante que referem no pimeiro processo. Como é que vocês a identificam?*
> ***Alexandre:*** *É a partir deste módulo…*
> ***Investigadora:****Portanto, módulo original… o que é que vai acontecer?*
> ***Alexandre:*** *É uma rotação …*
> ***Investigadora:*** *Na reflexão deslizante há rotação?*
> ***Diogo:*** *Não!*
> ***Investigadora:*** *Expliquem-me como é que vocês obtêm uma reflexão deslizante.*
> ***Alexandre:****Temos o módulo … e um eixo de simetria…*
> ***Investigadora:*** *Sim. Queres dizer um eixo de reflexão, certo?*
> ***Alexandre:*** *Sim*
> ***Investigadora:*** *O que é que significa deslizar?*
> ***Diogo:*** *Que há um espaço entre eles…*
> ***Investigadora:****.É fazer uma reflexão e depois…*
> ***Alexandre:*** *Uma translação*
> ***Investigadora:*** *Então continuando, ainda não percebi como é que veem aí a reflexão deslizante. Vamos ver como é que a caracterizam.*
> ***Alexandre:*** *Este aqui, o 2, para este aqui. Porque aqui faz uma reflexão e depois a translação para este.*

Investigadora: *Então a reflexão é deste módulo2, certo? E vai originar o …*
Alexandre: *O 3 e depois o 3 com a translação vai formar o 5*

Verifica-se que o par não apreendeu corretamente o conceito de reflexão deslizante. Apesar de reconhecerem que é constituída por uma reflexão e uma translação, não foi consolidado o facto de o vetor associado à translação ter de ser paralelo ao eixo de reflexão. Quando é referido que deslizante significa que há um espaço entre eles, tal indicia que, provavelmente, o aluno estava a relembrar a construção realizada no GeoGebra. Ao realizar a construção, o primeiro transformado é ocultado restando apenas o original e o segundo transformado .

Para o friso 7, o par identifica apenas uma rotação, concluindo que a rotação não está correta devido à diferença verificada nos comprimentos dos segmentos [CD] e [EF], como se observa na figura 136.

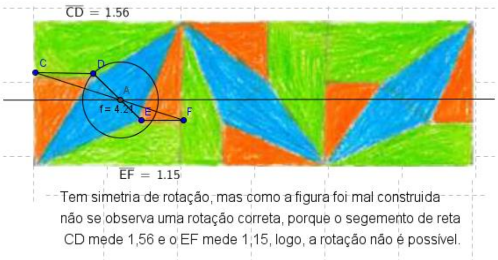


Fig. 318 – Análise do friso 7 pelo par Alexandre e Diogo

O par não traçou as respetivas mediatrizes para encontrar o centro de rotação, o que revela que, também neste par, o procedimento não foi consolidado.

Quanto aos processos de construção, apresentam dois (figura 137). No primeiro, referem uma rotação, supostamente, de 180 graus, no sentido negativo, do elemento original para obter o módulo de repetição e, em seguida uma rotação de 90 graus deste, no sentido negativo, para obter o módulo final que irá gerar o friso.

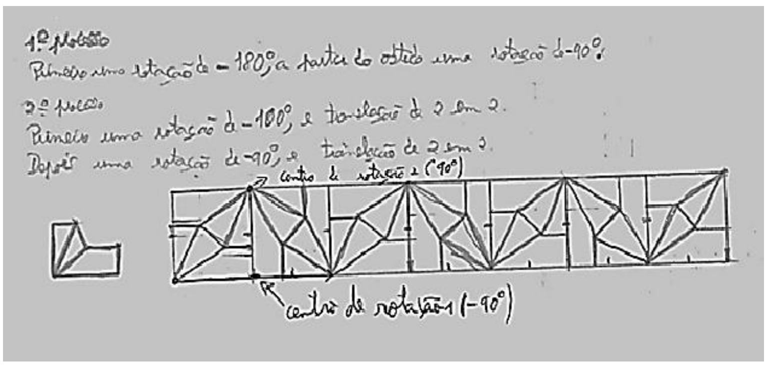


Fig. 321 – Processos de construção do friso 7 do par Alexandre e Diogo

No segundo processo, referem translação de “2 em 2” supostamente do módulo de repetição obtido de modo igual ao processo 1. Em seguida, há uma rotação de 90 graus no sentido negativo, e de novo translação de 2 em 2. Os respetivos centros de rotação estão identificados na figura 137, bem como o vetor de translação. Nota-se que os alunos têm dificuldade em identificar o friso e o respetivo módulo final de repetição, vendo a construção por peças isoladas. Quando inquiridos sobre a possibilidade de haver outro vetor de translação os alunos respondem:

> ***Alexandre:*** *Pode ser do 1º para o 5º...*
> ***Diogo:*** *Ou do 3 para o 7...*
> ***Investigadora:*** *Porquê?*
> ***Alexandre:*** *Porque é de 4 em 4.*

Esta resposta sugere que o par considerou que o friso, que não identificou, pode ser gerado pela translação segundo o vetor referido no primeiro processo e por translações obtidas por composição desta. Neste caso considerou um vetor duplo do primeiro.

Relativamente ao friso 8 o par não procedeu à sua análise porque *“não tivemos tempo”*, apresentando dois processos de construção (figura 138).

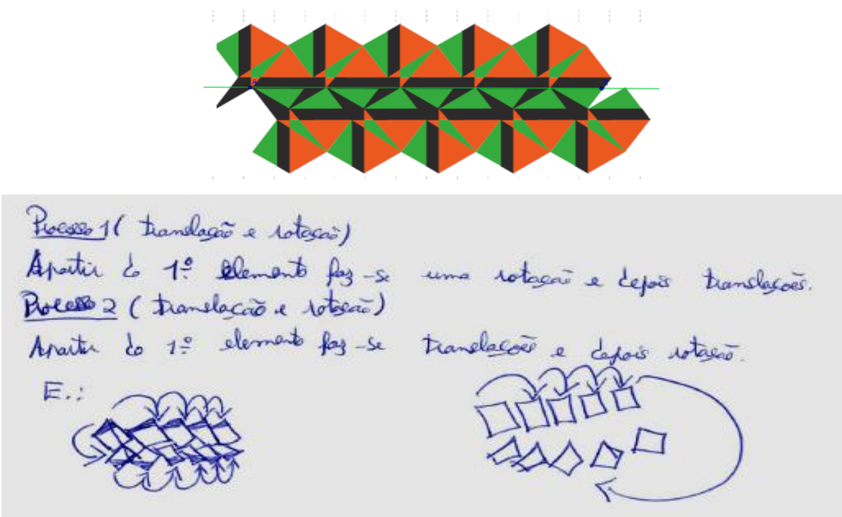


Fig. 324 – Processos de construção do friso 8 do par Alexandre e Diogo

O par foi inquirido quanto aos processos de construção:

> ***Investigadora:*** *No processo1 referem uma rotação. Como é que caracterizam essa rotação… qual é o centro de rotação e qual é a medida de amplitude do ângulo de rotação?*
> ***Alexandre:*** *Não tem rotação*
> ***Investigadora:*** *E para além da rotação também referem translação.*

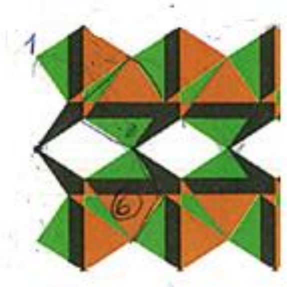
> ***Alexandre:*** *Só que a rotação não dá! Se fosse uma rotação este ponto (referindo o ponto A) tinha que estar aqui. Outro ponto no mesmo ponto, coincidentes.*
> ***Investigadora:*** *Aqui? Como é que se chamaria?*
> ***Alexandre e Diogo:*** *O centro de rotação.*
> ***Investigadora:*** *Este ponto A seria o centro de rotação? É isso que estão a querer dizer? Não estou a perceber …*
> ***Alexandre:*** *Mas não dá! Assim, no A, se fosse o centro de rotação… Depois este aqui tinha de estar em cima do ponto A, que é um centro de rotação… iam ficar sobrepostos e aqui não ficam sobrepostos.*
> ***Investigadora:*** *O que tu queres dizer é que o A… com o A, nós íamos obter outro ponto, certo? É isso? E esse ponto, esse novo ponto é o A'.*
> ***Diogo:*** *O A' tinha de coincidir com o A …porque é centro de rotação*
> ***Investigadora:*** *Se fosse o centro de rotação. Então o A não é centro de rotação. É isso que vocês estão a querer dizer.*

A resposta sugere que o par identificou o centro de rotação como ponto fixo na rotação.

> ***Investigadora:*** *Por translação conseguem obter qual, a partir do 1?*
> ***Alexandre e Diogo:*** *A parte de cima*
> ***Investigadora:*** *Só a parte de cima?Então como é que vocês obtêm a parte de baixo?*
> ***Alexandre:*** *Há uma reflexão … um eixo horizontal … mas depois este ponto… através de uma … uma reflexão e uma translação…*
> ***Investigadora:****E então como?*
> ***Alexandre:*** *Aqui, este é o B.*
> ***Investigadora:****Sim. O que é que vai acontecer?*
> ***Diogo:*** *A figura 2*
> ***Investigadora:****Sim*
> ***Alexandre:*** *Ia ficar o ponto, que há na figura 2, A, tinha de ficar a seguir ao ponto B. O ponto a seguir ao 2 tinha de ficar no ponto B.*
> ***Investigadora:*** *Consegues fazer um esquema do que me estás a dizer?*

O aluno inicia o esquema mas entretanto abandona-o e recorre ao friso 3 para a explicação (figura 139) .

> ***Alexandre:*** *É como aqui, Stora. Como aqui, a figura 2, para ser uma reflexão, a figura 2 em relação à 1, é como o friso 3, a figura 1 e … a 6.*



Friso 3

Friso 8

Fig. 327 – Comparação do friso 3 com o friso 8 pelo par Alexandre e Diogo

O par referiu que existia uma reflexão de eixo horizontal, tal como no friso 3, para obter o elemento 6 a partir do elemento 1. Em seguida explicou que a partir do elemento 6 (do friso 3) se obtinha, por translação, o elemento 2 do friso 8. A investigadora questionou o par quanto ao eixo de reflexão identificado:

> ***Investigadora:*** *Qual seria o eixo de reflexão? É o que me estão a mostrar?(o aluno identificou o eixo horizontal paralelo ao vetor associado à translação).*
> ***Alexandre****: É.*
> ***Investigadora:*** *Explica-me então, como é que conseguias obter o ponto A a partir do ponto B, como já referiste.*
> ***Alexandre:*** *Por uma translação do ponto B para o ponto A.*
> ***Investigadora:*** *Mas não pode ser. A translação que estás a indicar está associada a um vetor de direção obliqua e não pode ser.*

Neste momento, a investigadora explica ao par como poderia obter a reflexão deslizante que o par não identificou. Referiu que, para obter o friso, o vetor associado à translação teria de ser paralelo ao eixo de reflexão, neste caso, horizontal. Explicou, ainda, onde deveria considerar o eixo de reflexão.

Em seguida, para cada um dos elementos, descrevem-se as respostas dadas no teste, versão pré e pós, na questão 1, de modo a dar uma ideia qualitativa do seu desempenho individual.

Relativamente às respostas dadas pelo par ao item 1.1, verifica-se um ganho de pormenores na resposta da versão pré para a pós.

Como se pode observar na figura 140, o Alexandre traçou os vetores e efetua a reflexão do módulo para exemplificar a reflexão deslizante no friso 1, e os eixos de reflexão, horizontais e verticais, para o friso 2, o que não aconteceu na versão pré. Neste caso o aluno apenas continuou os frisos.

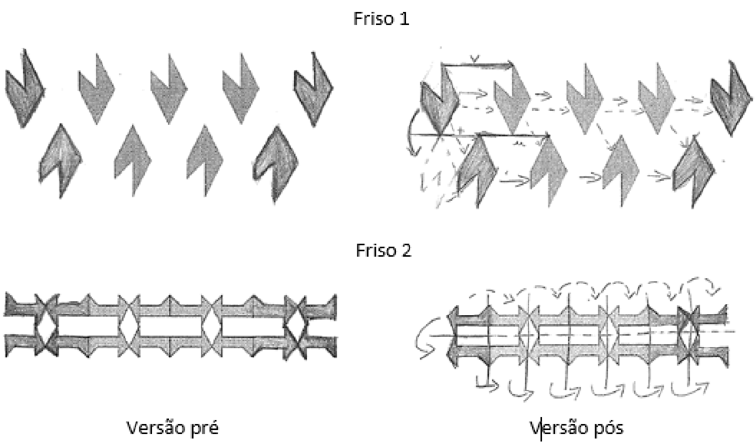


Fig. 330 – Resolução de Alexandre da questão 1 item 1.1 do teste

Também o Diogo, na versão pré, apenas continuou os frisos (figura 141). Na versão pós, traçou o eixo de reflexão e traçou um vetor para representar a translação no friso 1, ainda que esteja mal representado. No entanto, para o friso 2, traçou os vetores corretamente.

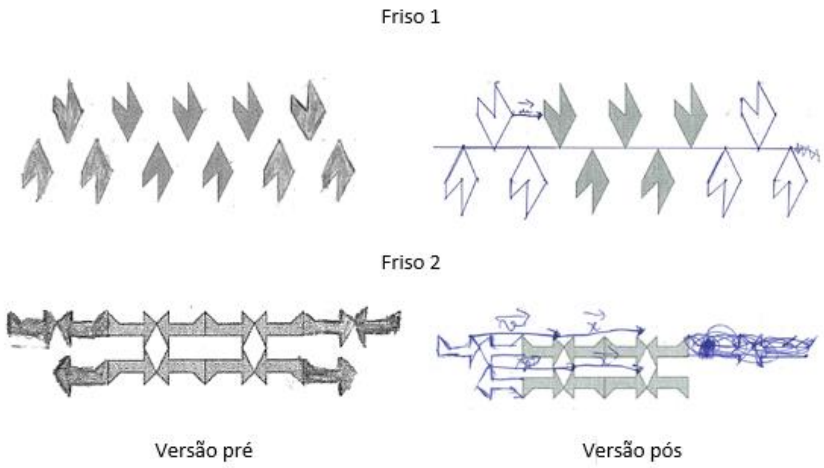


Fig. 333 – Resolução de Diogo da questão 1 item 1.1 do teste

Para o item 1.2, friso 1, o Alexande identificou a reflexão deslizante na versão pós o que não aconteceu na pré (figura 142). Verifica-se que a resposta dada na caracterização da isometria está correta pois o Alexandre identificou um vetor de direção horizontal.

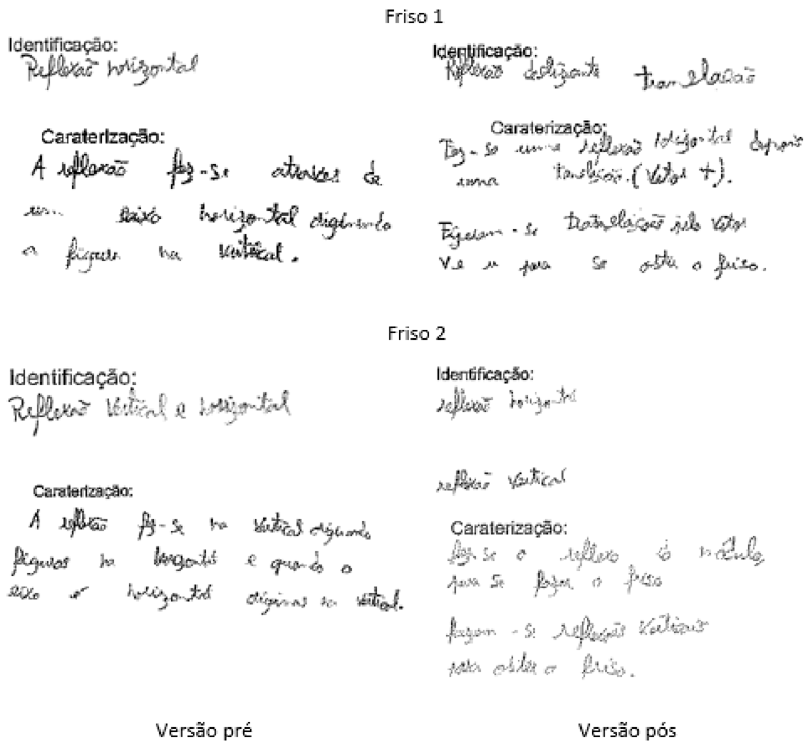


Fig. 336 – Resolução de Alexandre da questão 1 item 1.2 do teste

Contudo, não identifica o eixo de reflexão horizontal. Verifica-se o traçado de uma seta para exemplificar a reflexão que ocorre do elemento original para obter o transformado, representado a tracejado na figura 140. Por outro lado, para o friso 2, da versão pré para a pós, as respostas estão corretas, não se verificando diferenças significativas (figura 142). O Alexandre melhorou na identificação e caracterização das isometrias para gerar o friso 1. Para o friso 2, a resposta indicia que considerou que as reflexões, vertical e horizontal, se efetuam sucessivamente, o que não é claro na versão pré.

Quanto ao Diogo, a melhoria verifica-se principalmente no vocabulário utilizado da versão pré para a versão pós (figura 143). Para o friso 2, verificou-se uma melhoria na versão pós. O aluno identificou uma translação o que não aconteceu na versão pré.

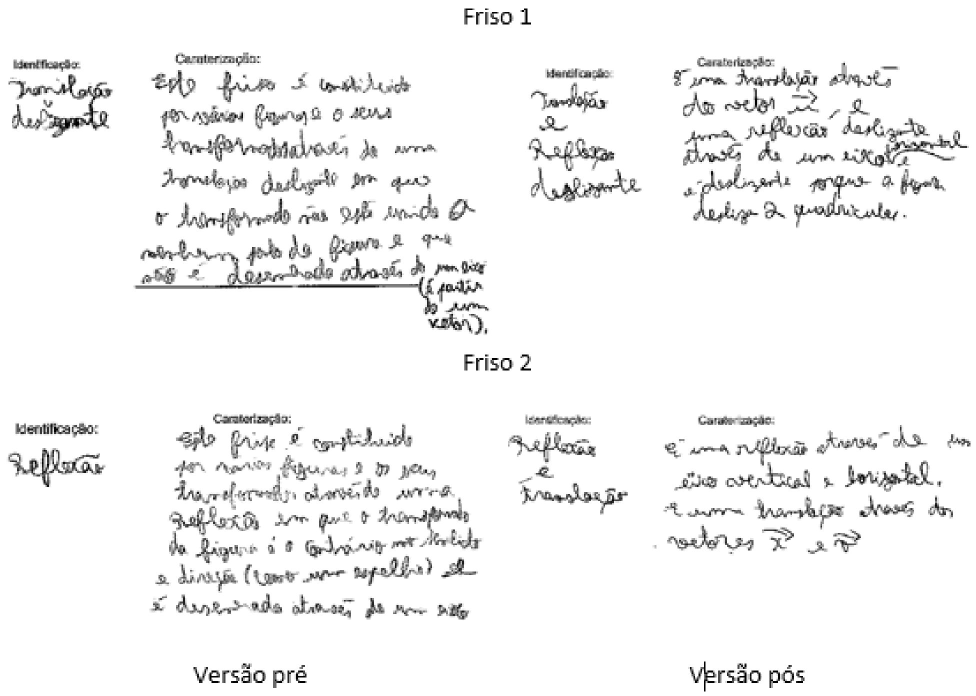


Fig. 339 – Resolução de Diogo da questão 1 item 1.2 do teste

No item 1.3, verifica-se uma melhoria na resposta dada pelo Alexandre para os processos de construção dos frisos (figura 144). Na versão pré, o aluno apresentou apenas um processo, errado, para o friso 1. Na versão pós, apresenta dois processos. Para o friso 1, pode considerar-se que os processos para gerar o friso estão corretos. Refere, para o primeiro processo, que o friso se obtem a partir de uma reflexão deslizante seguida de uma translação. Subentende-se que, ao ser referido que a translação se aplica *em cima e em baixo,* o aluno considera que está associada ao mesmo vetor. Quanto ao segundo processo, o aluno considera sucessivas translações do elemento original, e em seguida aplica a reflexão deslizante a cada um dos elementos obtidos.

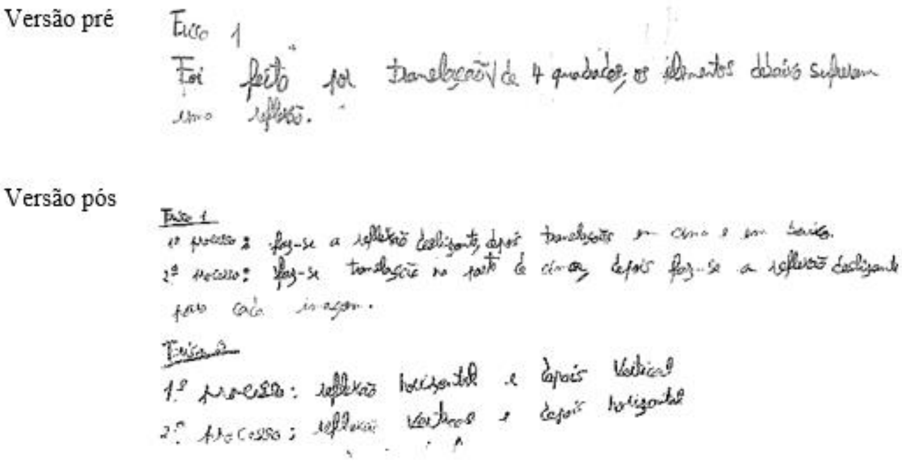


Fig. 342 – Resolução de Alexandre da questão 1 item 1.3 do teste

De novo, para o Diogo, verifica-se, no item 1.3, uma melhoria no vocabulário utilizado (figura 145). Em termos de processos de construção não se verifica melhoria significativa.

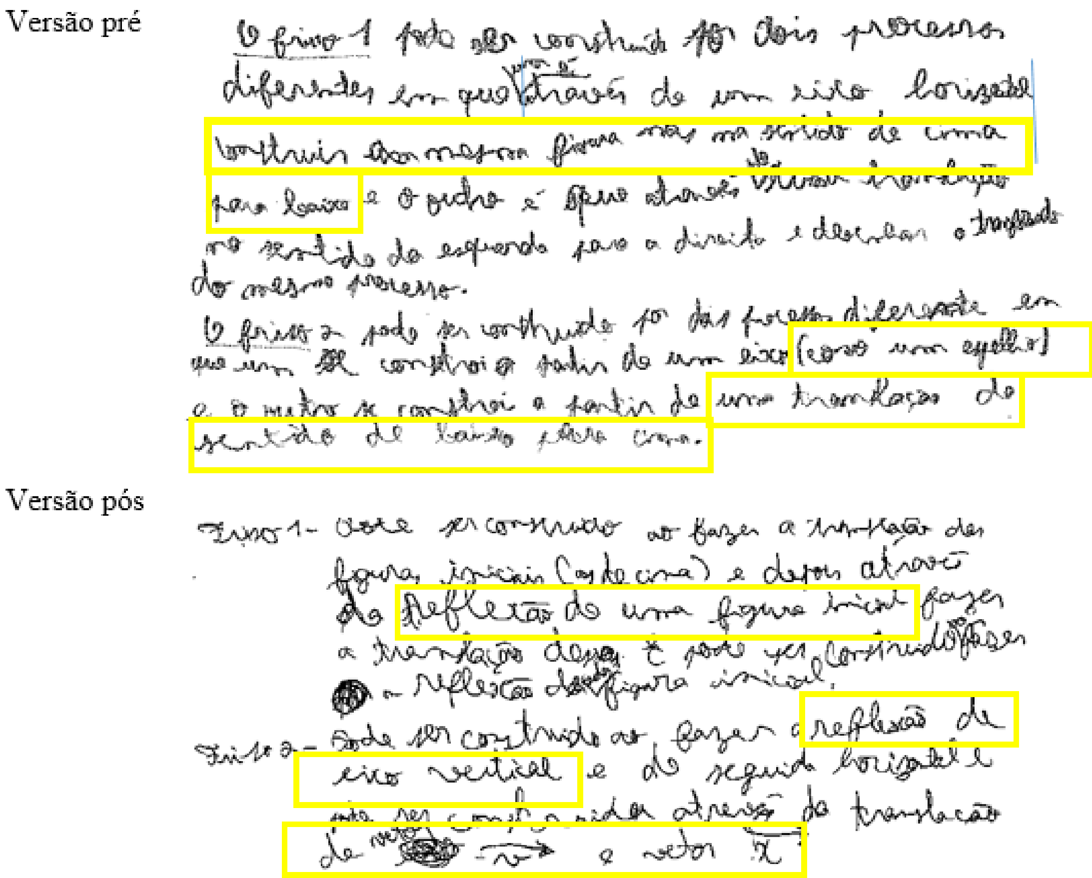


Fig. 345 – Resolução de Diogo da questão 1 item 1.3 do teste

Na versão pré o aluno referiu *"através de um eixo horizontal construir a mesma figura mas de cima para baixo", "Como um espelho"* e *"uma translação de sentido de baixo para cima"* corrigindo para *" reflexão da figura inicial"* , *" reflexão de eixo vertical"* e *"translação de vetor v e vetor x",* respetivamente..

As respostas dadas no teste, após a intervenção didática, não revelam a apropriação de conhecimentos construídos pelo par ao longo da execução de todas as tarefas, bem como , da mobilização e raciocínios realizados na exploração dos frisos construídos em Educação Visual.

Simetrias – Rosáceas

Para a Tarefa 6 – Rosáceas (anexo 8) – , o par deveria identificar e caracterizar as simetrias em cinco rosáceas. Das oito rosáceas selecionadas pela investigadora do leque obtido em Educação Visual pelo grupo turma, a análise do par recaiu nas rosáceas 1, 4, 6. 7 e 8 apresentadas no anexo 8. Posteriormente, deveriam descrever, se possível, por mais do que um processo, como poderiam construir cada uma das rosáceas escolhidas.

Na análise da rosácea 1, o par só identificou uma rotação traçando duas circunferências concêntricas, o respetivo centro de rotação e a medida da amplitude do ângulo de rotação (figura 146). Averiguou, também, a existência de uma reflexão que verificou não ser possível pelo facto do módulo não ser simétrico, depreendendo que estão a referir-se às cores (figura 146).

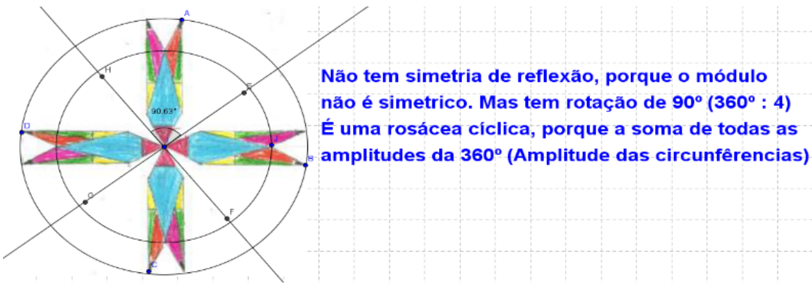


Fig. 347 – Análise da rosácea 1 pelo par Alexandre e Diogo

Quanto aos processos de construção, o par identificou dois (figura 147). O primeiro processo consiste em rotações sucessivas de 90º. O par colocou a possibilidade de haver reflexão pois traçou um eixo oblíquo, concluindo que tal não é possível devido às cores. Para o segundo processo, o par traçou mediatrizes no esquema (figura 147), o que revela que o par consolidou o conceito de que o eixo de reflexão é uma mediatriz. Conclui, no entanto, que a construção da rosácea por sucessivas reflexões segundo um eixo diagonal, não é possivel, devido às cores da rosácea.

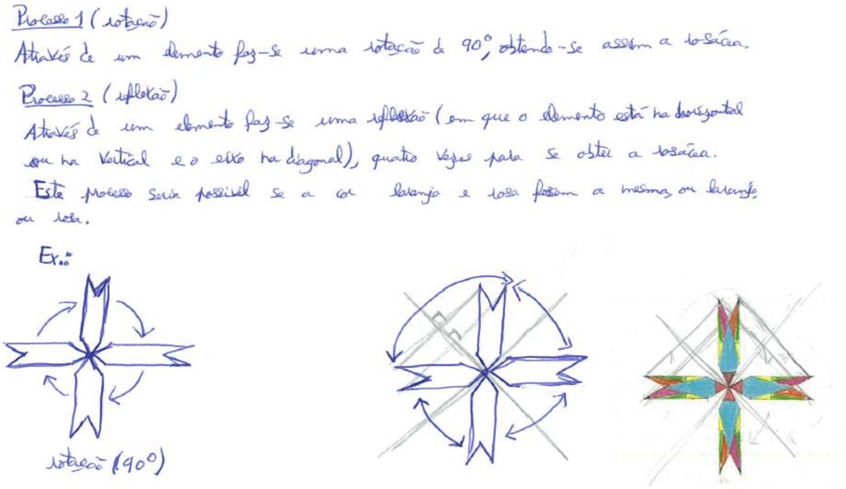


Fig. 350 – Processos de construção da rosácea 1 do par Alexandre e Diogo

Relativamente à rosácea 4, o par analisou novamente a existência de uma rotação e de uma reflexão, concluindo que não existe a última porque o módulo não é simétrico (figura 148). Identificou o centro de rotação e recorreu à ferramenta do GeoGebra para medir a amplitude do ângulo de rotação.

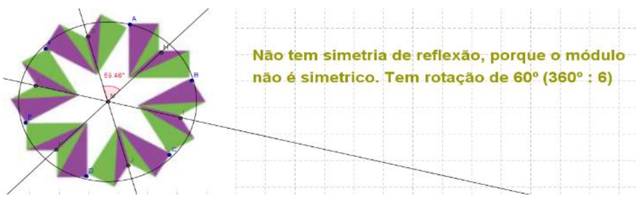


Fig. 353 – Análise da rosácea 4 pelo par Alexandre e Diogo

Relativamente aos processos de construção, o par apresentou dois (figura 149). No primeiro referiu sucessivas rotações de 60º, e quanto ao segundo, referiu rotações de 60º para obter os 3 primeiros módulos e em seguida é aplicada, a cada um dos módulos, uma reflexão deslizante.

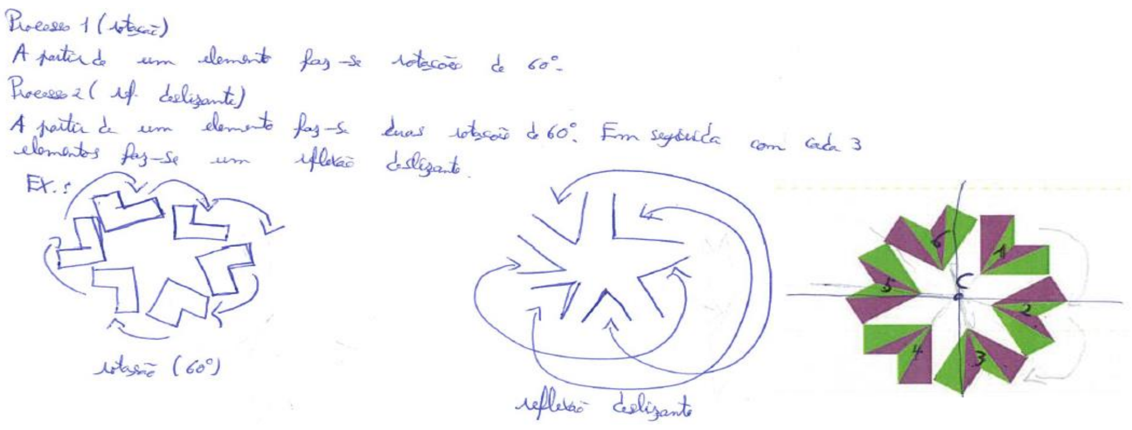


Fig. 354 – Processos de construção da rosácea 4 do par Alexandre e Diogo

Quando questionado sobre o significado de “reflexão deslizante” no processo apresentado, o par, ao observar a figura apercebe-se que não estava correto. Sendo solicitado um processo de construção, o par explicou que, partindo do módulo 1 (assinalado na figura 149), por sucessivas rotações de 60º, se obtêm os módulos 2 e 3, respetivamente. A partir destes 3 módulos, concluem a construção da rosácea, com uma rotação de 180º.

O Alexandre, apercebeu-se da possibilidade de poder realizar uma reflexão:

> ***Alexandre:*** *A partir do 1... podemos obter o 4, a partir de uma reflexão vertical..*
> ***Investigadora:*** *Não entendo.*
> ***Alexandre:*** *Sim, e depois uma horizontal.*
> ***Investigadora:*** *Continua o teu raciocínio...*
> ***Alexandre:*** *Do 1 para o 4 são 180 graus ...*
> ***Investigadora:*** *Diogo, está correto?*
> ***Diogo:*** *Acho que sim, faz 3 vezes 60...*
> ***Alexandre:*** *Depois fazia o mesmo da 2 para 5, e depois da 3 para a 6.*

É possível depreender desta resposta que o Alexandre associou a composição de duas reflexões, neste caso de eixos perpendiculares, a uma rotação de 180 graus, enquanto o Diogo efetuou uma rotação de amplitude 180º para ober o módulo identificado com 4.

> ***Alexandre:*** (interrompendo)*... também podíamos obter o 3 por uma rotação de 120 graus do 1...*

Das respostas dadas pode considerar-se que o par considera diferentes simetrias de rotação: de ordem 2 para uma rotação de amplitude 180º; de ordem 3 para uma rotação de amplitude 120º e de ordem 6, para uma rotação de amplitude 60º.

Para a análise da rosácea 6, o par adotou o procedimento anterior: traçou duas circunferências concêntricas e mediu a amplitude do ângulo de rotação recorrendo à ferramenta do GeoGebra (figura 150).

Fig. 357 – Análise da rosácea 6 pelo par Alexandre e Diogo

Os processos de construção apresentados são dois: o primeiro que consiste em realizar rotações sucessivas de 60º; e o segundo, em efetuar duas rotações de 60º e, a partir do grupo formado pelos 3 módulos, efetuar reflexão, denominada erradamente pelos alunos por reflexão deslizante (figura 151). Mais uma vez se nota a dificuldade em ver a construção como um todo e identificar todas as rotações e as reflexões que deixam a figura invariante.

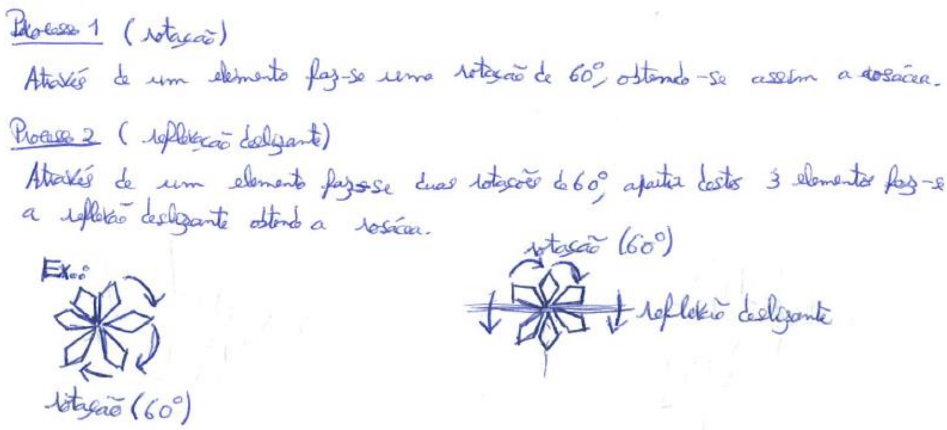


Fig. 358 – Processos de construção da rosácea 4 apresentados pelo par Alexandre e Diogo

Os alunos foram inquiridos sobre este processo:

> ***Investigadora:*** *Quando falaram em reflexão deslizante era mesmo isso que queriam dizer?*
> ***Alexandre:*** *Era aqui a partir do módulo 1, fazíamos reflexão ... só que não dá por causa das cores ... nem do formato…*

A resposta sugere que o par identificou uma reflexão e associou a palavra “deslizante” ao movimento do módulo. De novo fica evidente que o par não consolidou o conceito de reflexão deslizante.

Para a composição 7, o par referiu que não é uma rosácea, não apresentando qualquer justificação (figura 152).

Fig. 359 – Análise da composição 7 pelo par Alexandre e Diogo

O par apresentou dois processos de construção (figura 146). No primeiro apresentou rotações de 180º e, no segundo referiu, reflexão deslizante.

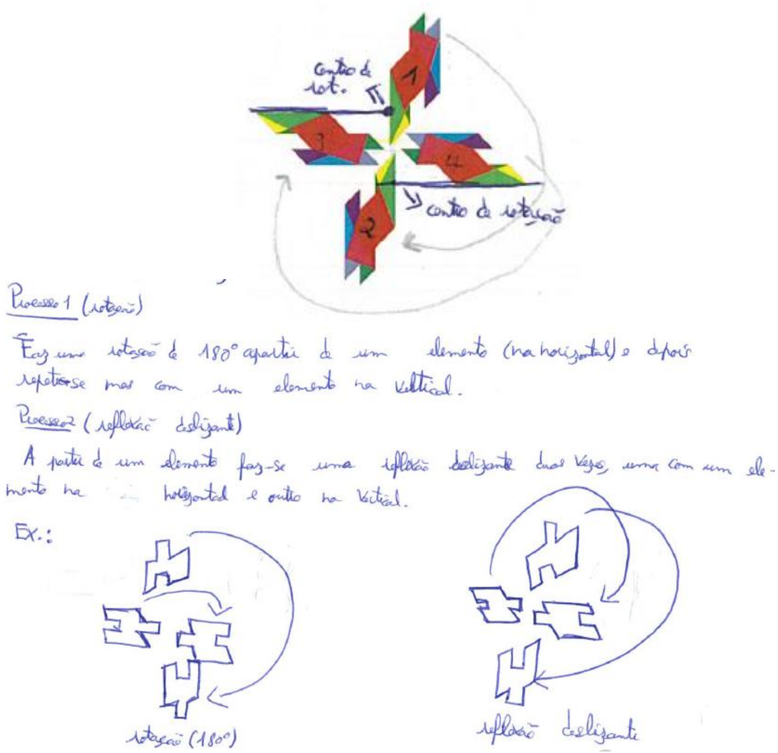


Fig. 360 – Processos de construção da rosácea 7 do par Alexandre e Diogo

Inquiridos sobre a reflexão deslizante verificou-se que os alunos tinham dificuldade em perceber esta isometria quando realizada segundo um eixo vertical. Solicitou-se aos alunos que descrevessem outro processo que fosse viável:.

> ***Investigadora:*** *Como é que fazem?*
> ***Ambos:*** *Segundo um eixo horizontal*
> ***Diogo:*** *Não as cores não...*
> ***Investigadora:*** *O que é que têm de fazer?*
> ***Diogo:*** *.... É uma reflexão com eixo vertical*
> ***Investigadora:*** *E onde está o eixo?*
> ***Alexandre:*** *Está aqui.*
> ***Investigadora:*** *"Fora" do módulo?*
> ***Diogo:*** *Está "dentro"...*
> ***Investigadora:*** *Foram do 1 para o 2. Como é que vão obter o terceiro?*
> ***Alexandre:*** *Através de uma rotação e de uma tranlação...*
> ***Investigadora:*** *Estás a dizer que fazes rotação do 2 para obter... Tens a certeza?*
> ***Alexandre:*** *Não*
> ***Investigadora:*** *Não, então?*
> ***Alexandre:*** *Do 2 fazemos uma rotação assim... de 90 graus ... positivo*
> ***Diogo:****É negativo...*
> ***Investigadora:*** *E depois dizes tu que fazes uma translação...para obter ...*
> ***Alexandre:*** *O 4*
> ***Investigadora:*** *Então e onde está o centro de rotação (O aluno traça uma linha horizontal que delimita a posição do módulo 2 ao efetuar a rotação, e depois marca o centro de rotação)*
> ***Investigadora:*** *E como vais obter o 3?*
> ***Diogo:*** *Fazemos o mesmo processo mas a partir do 1*

O par não identificou as rotações de 180º que permitem obter o elemento 2 a partir do 1, e o elemento 4 a partir do 3. Contudo, a resposta do par deixa antever que consideraram a composição de duas reflexões de eixos perpendiculares ao referirem uma reflexão segundo um eixo horizontal e, em seguida, uma reflexão de eixo vertical. Neste caso não ficou clara a identificação do eixo associado. Para obter o elemento 3, o par referiu uma rotação de 90º cujo centro de rotação é obtido a partir de um procedimento realizado em Educação Visual. Quanto à translação, não é identificado o vetor de translação.

Quanto à rosácea 8, referiram uma simetria de rotação de amplitude 30º devido à simetria de reflexão no módulo (figura 147). Identificaram o centro de rotação como o ponto de interseção dos eixos de reflexão e medem a amplitude do ângulo de rotação, não comentando a discrepância do obtido com o esperado. Neste caso o par identificou todos os eixos de reflexão. À semelhança do que tem acontecido, também neste caso, não são identificadas todas as rotações que deixam a figura invariante.

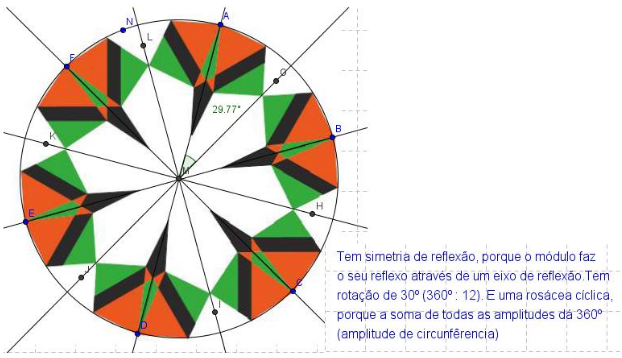


Fig. 363 – Análise da rosácea 8 pelo par Alexandre e Diogo

Quanto aos processos de construção da rosácea, o par indicou três (figura 148). Num primeiro processo o par identificou sucessivas rotações de amplitude 60º. Quanto ao segundo, identificou erradamente, uma reflexão de eixo horizontal , e num terceiro processo referem, erradamente uma reflexão deslizante.

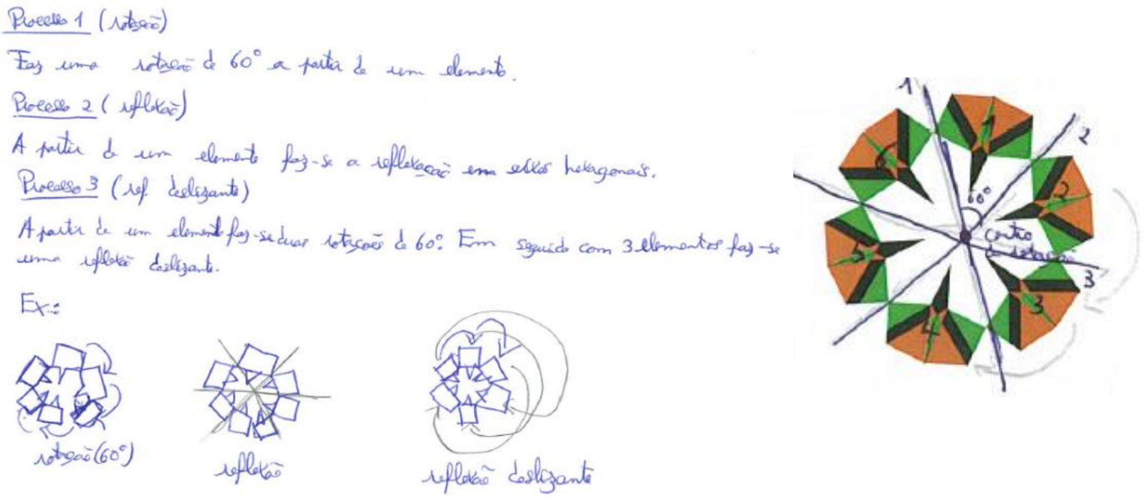


Fig. 366 – Processos de construção da rosácea 8 do par Alexandre e Diogo

Para clarificar o raciocínio do segundo processo, a investigadora inquiriu o par:

> **Investigadora:** *"A partir de um elemento faz-se a reflexão hexagonal". O que é que isto quer dizer? hexagonais, o que é que querem dizer com eixos hexagonais?*
> **Alexandre:** *Têm um eixo de reflexão diagonal…*
> **Investigadora:** *Então, quando vocês referem eixos hexagonais são esses eixos que aí estão … o 1, o 2 e o 3, porque estão na diagonal. Não estão nem na horizontal, nem na vertical. Como é que vocês conseguiam obter a rosácea a partir disso?*

> ***Alexandre:*** *A partir do 1 obtinhamos o 2. Pela… por esta reflexão.*
> ***Investigadora:*** *Segundo o eixo 2. Sim.*
> ***Alexandre:*** *A 3, conseguíamos através do 2 pelo eixo 3. Depois a 4, obtínhamos através do 3 pelo eixo 1. E a 6 através do 5 pelo eixo 3.*
> ***Investigadora:*** *Diogo,consegues encontrar outra maneira? O Alexandre fez reflexões sucessivas. Conseguias outra maneira, tu?*
> *(silêncio)*
> ***Diogo:*** *Não.*

Dada a natureza do aluno, reservado e tímido, a investigadora incentiva-o a responder. O processo apresentado não diferiu do apresentado pelo Alexandre. A investigadora volta a insistir na mesma questão, tendo o Alexandre respondido prontamente:

> ***Alexandre:*** *A partir do 1. Fazer uma rotação de 60 graus e obtínhamos o 6, menos 60 graus obtínhamos o 2*
> ***Investigadora:*** *Sim*
> ***Alexandre:*** *E depois a partir do segmento … do eixo 3 obtínhamos o grupo dos 3.*
> ***Investigadora****. E a amplitude de rotação, segundo o que definiste … Só pode ser obtida a partir de amplitudes de 60 graus?*
> ***Alexandre:*** *60 … ou 180.*
> ***Investigadora:*** *180 como?*
> ***Alexandre:*** *Do 1 para o 4, do 2 para o 5 e do 3 para o 6.*
> ***Investigadora:*** *Mais alguma Diogo, que consigas ver?*
> *(silêncio)*
> ***Diogo:*** *do 1 para o 3 …*
> ***Investigadora:*** *De quanto?*
> ***Diogo:*** *120 … Depois do 3 para o 5 e … do 5 fazia rotação para o 2…*
> ***Investigadora:*** *De quanto?*
> ***Diogo:*** *De 180…*
> ***Investigadora:*** *180. Então agora falta o 4 e o 6…*
> ***Diogo:*** *… do 3 para o 6 e depois de 1 para o 4, com 180.*

O par não identificou de imediato todas as rotações que deixam a figura invariante. Foi necessário insistir na mesma questão para que fosse possível obter uma resposta aceitável. Tal como já foi verificado, o par não viu a construção como um todo.

Para cada um dos elementos, descrevem-se, em seguida, as respostas dadas no teste, versão pré e pós, na questão 2, de modo a dar uma ideia qualitativa da evolução do seu desempenho individual.

Em relação à questão 2, item 2.1, o Alexandre não melhorou o seu desempenho na versão pós. Na versão pré referiu rotações e associou, corretamente, uma das medidas de amplitude da rotação que tornam a figura invariante. Na versão referiu erradamente a translação em ambas as rosáceas (figura 156), e a reflexão que não se aplica à primeira. Quanto aos itens 2.2 e 2.3, não respondeu na versão pré nem na versão pós.

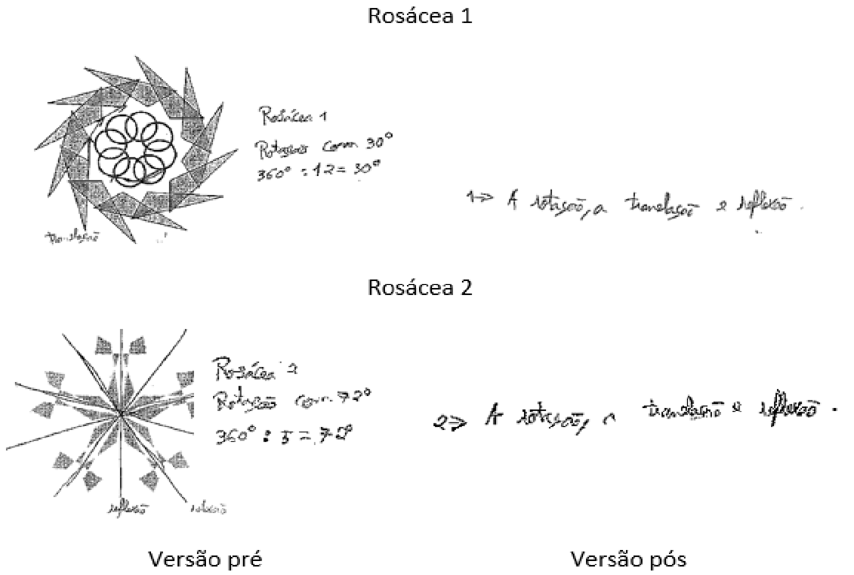


Fig. 369 – Resolução de Alexandre da questão 2.1 do teste

O Diogo identificou a reflexão e a rotação em ambas as rosáceas. Para a rosácea 1 a reflexão identificada está errada. Na versão pós referiu, corretamente, a rotação para a rosácea 1. Quanto à rosácea 2, ao invés da reflexão referiu, erradamente, a translação (figura157).

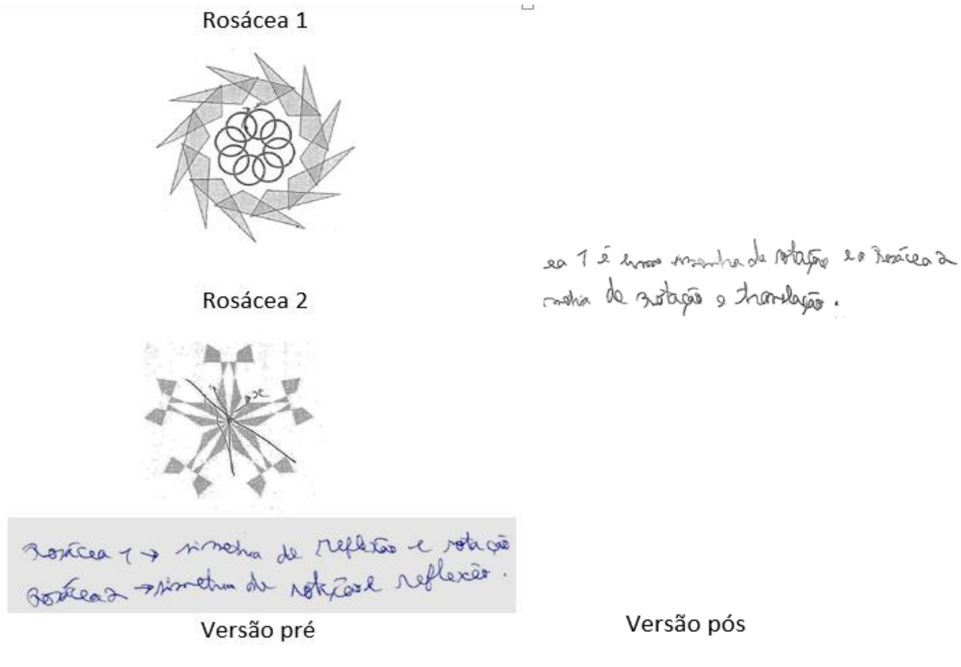


Fig. 372 – Resolução de Diogo da questão 2.1 do teste

No item 2.2, versão pré, o Diogo caracterizou erradamente a rotação identificada em cada rosácea. Contudo, identificou corretamente, o *ponto x* (identificado na figura 150) como centro de rotação para a rosácea 2. Por outro lado, referiu para ambas, a medida da amplitude do ângulo de rotação – 90º, o que não está correto. Quanto à reflexão referida para a rosácea 2, não se percebe, a partir dos elementos adicionados à rosácea, o significado atribuído ao eixo horizontal (figura 158).

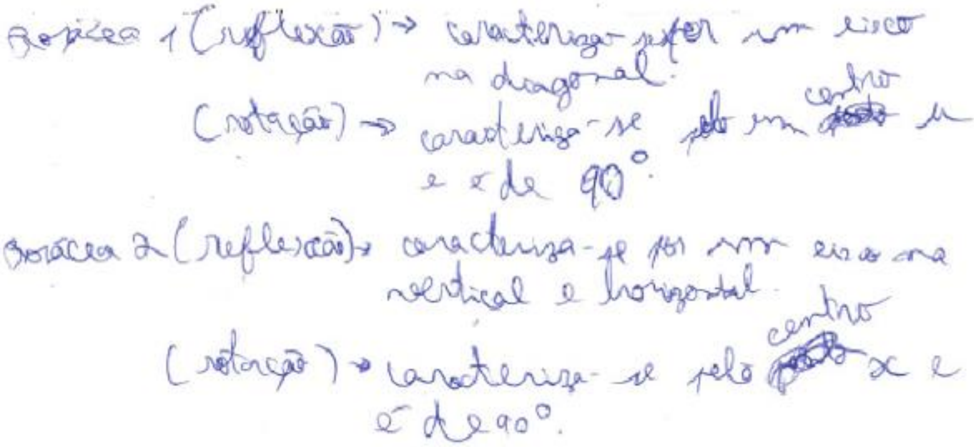

Rosácea 1 (reflexão) → caracteriza-se por um eixo na diagonal.
(rotação) → caracteriza-se pelo um centro e é de 90º.
Rosácea 2 (reflexão) → caracteriza-se por um eixo na vertical e horizontal.
(rotação) → caracteriza-se pelo centro x e é de 90º.

Fig. 375 – Resolução de Diogo da questão 2.2, versão pré

Na versão pós, o Diogo não caracterizou as rotações, identificadas corretamente em ambas as rosáceas (figura 159). No entanto, referiu o significado que atribuiu à rotação para gerar as rosáceas – *rotação em que se repete a figura várias vezes até formar um círculo imaginário*.

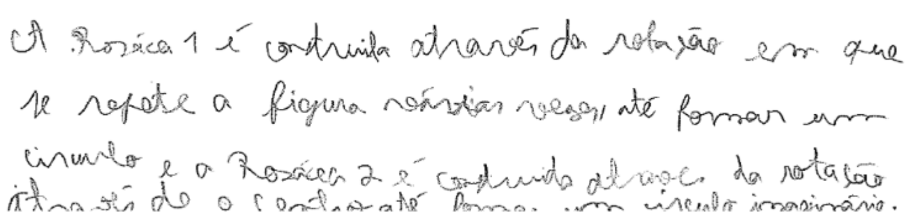

A Rosáca 1 é construída através da rotação em que se repete a figura várias vezes até formar um circulo e a Rosácea 2 é construída através da rotação através de o contorno até formar um circulo imaginário.

Fig. 376 – Resolução de Diogo da questão 2.2, versão pós

A resposta do Diogo sugere que identificou uma rosácea como sendo a repetição de um elemento a partir de rotações, e que é finalizada quando se obtem um ângulo de 360º, traduzido pelo aluno na forma de *círculo imaginário*. Quanto aos processos de construção para as rosáceas, a resposta apresentada inclui o referido no item 2.1 e 2.2.

Relativamente à questão 3 do teste, que consiste na análise de pavimentações de ESCHER, as respostas deste par não diferem das dos pares aneriores.

O Alexandre identifica erradamente, a medida da amplitude do ângulo de rotação para a pavimentação dos peixes – 60º, em ambas as versões. Quanto à pavimentação dos pássaros. O aluno identificou vetores oblíquos na versão pré e, na versão pós, identificou dois vetores, um horizontal e outro vertical. Na pavimentação das abelhas, identificou, corretamente, a rotaçao de ampliude 60º, na versão pré. Na versão pós, o aluno apenas assinala os centros de rotação. Na pavimentação dos anjos, o Alexandre identifica as reflexões de eixos vertical e horizontal, em ambas as versões.

A falta de elementos, característica das respostas do Alexandre, sugere que esta tarefa não foi desafiante para o aluno, possivelmente pela complexidade das figuras.

Quanto ao Diogo, na versão pré, para a pavimentação dos peixes, identificou corretamente, uma translação, e respetivo vetor associado. Identifica também, mas erradamente, uma reflexão e uma rotação de amplitude 60º. Na versão pós, apenas identificou, erradamente, uma rotação de amplitude 90º. No que refere às pavimentações seguintes, as respostas do Diogo refletem o que foi mencionado para o Alexandre.

3.1.2. Atitudes

Decorrente da aplicação do questionário inicial, num momento anterior à aplicação da sequência didática, o par *concordou* com a afirmação *"Gosto de Matemática"*. O par discorda quanto à afirmação *"Nas aulas de Matemática sinto-me ansioso"*. O par referiu gostar de Geometria, assinalando a opção *"concordo plenamente"* e discordou totalmente que esta não sirva para nada. O Alexandre discordou totalmente de que *"a Geometria da Matemática é mais difícil do que a de Educação Visual"*, e o Diogo assinalou a opção *"não concordo"*.Se, por um lado, o Diogo *discordou totalmente* de que "*as aulas de Matemática não se podem relacionar com as de Educação Visual*", o Alexandre assinalou a opção "*concordo*. O par *concordou* que *"Educação Visual pode ajudar-me a entender melhor a Matemática*", mantendo a mesma opinião quanto à afirmação, "*A Matemática ajuda-me a entender melhor os conceitos de outras disciplinas"*.

Ao longo da aplicação da sequência de tarefas, verificou-se, que o par foi autónomo, interessado, atento e empenhado na execução das tarefas, não tendo sido efusivo nas discussões em grande grupo, o que fazia parte da própria personalidade dos alunos. No entanto, sempre que verificavam poder acrescentar algo de novo à discussão faziam-no, esperando pela sua vez. Relativamente a este aspeto, a investigadora, conhecendo esta vertente do par, esteve sempre atenta a possíveis sinais que indiciassem que os alunos queriam participar.

Verificou-se, no decorrer das questões colocadas pela investigadora, referentes à exploração dos frisos e rosáceas construídos em Educação Visual, para além do empenho nas respostas dadas, a mesma atitude de interesse e curiosidade, procurando sempre outras possibilidades para além das referidas no papel. No questionário final, relativamente à abordagem interdisciplinar, o par referiu ter gostado, e que gostariam de repetir a experiência com outros conteúdos de Matemática:

> ***Alexandre:*** *"Sim, porque a Matemática e Eduação Visual estão mais ligadas do que parece. E também porque a Matemática não é só números, mas também criatividade e lógica".*
> ***Diogo:*** *" Sim, porque achei a experiência anterior interessante"*

No final da experiência didática, o par concordou que a exeução das tarefas em Educação Visual "*tornou o tema das isometrias mais interessante*" e *"tornou-me mais confiante na execução das tarefas em Matemática"*, O Alexandre *concordou plenamente* que a execução das tarefas o *"ajudaram a entender melhor as isometrias"* e o Diogo *concordou.*

Quanto ao desenvolvimento de competências Matemáticas, o par *concordou* que a execução das tarefas o ajudaram na identificação, caracterização e construção de isometrias, bem como na exploração de frisos e de rosáceas. No que respeita à utilização do GeoGebra, ambos consideraram que ajudou na execução das tarefas:

> ***Alexandre:*** *" Sim, porque é um bom recurso. Porque podemos fazer a construção de gráficos, simetrias, isometrias, entre outros…"*
> ***Diogo:*** *"Sim porque ajuda na construção de isometrias".*

Quanto às dificuldades sentidas, o Alexandre indicou a "*compreensão das tarefas"* e o Diogo assinalou *"pouca criatividade"*.

3.2. Criatividade

Neste ponto faz-se a distinção entre representações e manifestações de criatividade do par.

3.2.1 Representações

Quando inquiridos, no questionário inicial, sobre o significado atribuído a *criatividae* o Alexandre referiu *"Ter ideias ou imaginação"* e o Diogo, *"Dar asas à imaginação".* O Alexandre referiu *"às vezes sou criativo, porque consigo fazer cartazes chamativos"* e o Diogo *"porque tenho quase sempre ideias originais"* . Quanto à disciplina onde consideram ser possível ser criativo, não referiram qualquer disciplina. O par concordou ser mais criativo quando trabalha com outros colegas e referiu *"não tenho opinião"* quanto à criatividade Matemática poder ser estimulada nas escolas, manifestando a mesma opinião quanto à afirmação *"Em Matemática não é possível avaliar a criatividade dos alunos"*. Discordou plenamente das afirmações *"Em Matemática não se pode ser criativo – é aquilo e aquilo mesmo"* e *" A Matemática é só números, não permite a criatividade"*. O par concordou que "*A Matemática é criativa quando fazemos desenhos"* . O Diogo concordou que *"não é possível ser criativo em Matemática como se é a Educação Visual"* e o Alexandre *não concordou.* O par concordou que, *"uma forma de desenvolver a criatividade em Matemática é estabelecer relações com outras disciplinas, como Educação Visual"* e que *"aplicar os conceitos aprendidos em Educação Visual nas aulas de Matemática, e vice versa, estimula a imaginação e promove o desenvolvimento de ideias"*, e também concordou *que "as aulas de Matemática têm de ser expositivas para aprenderem melhor".*

No questionário final, o par considerou que as tarefas propostas estimularam a criatividade:

> ***Alexandre:*** *"Sim. Aprendi que há muitas formas de fazer isometrias, por exemplo, nas rosáceas podemos rodar sem sobrepor ou sobrepor e dar origem a rosáceas criativas".*
> ***Diogo:*** *"Sim, na forma de resolver um problema de várias maneiras"*

Nesta fase do estudo, o Alexandre reconheceu que a Matemática pode ser criativa porque, *"a Matemática não tem só números mas também tem sequências de figuras, frisos e por isso criatividade"* e o Diogo referiu que "*para além das isometrias podemos resolver* *um problema de várias maneiras”*. O par foi inquirido quanto ao friso, ou rosácea, construído em Educação Visual, mais criativo:

> **Alexandre:** “*O da Adriana. E o do Bruno também… porque os desenhos que fizeram eram muito diferentes”*
> **Diogo:** *Para mim o da Adriana…Porque tem muitas figuras geométricas…”*

Refira-se que, o friso da Adriana corresponde ao friso identificado como friso 6 , no anexo 7, e os do Bruno identificados como friso 3 e friso 8.

3.2.2. Manifestações

Nas tarefas de caráter mais aberto, o par apresentou estratégias diferentes do grupo turma e, na exploração de frisos e rosáceas, apresentou respostas diferentes das do grupo turma, quer na elaboração quer nos detalhes apresentados nas respostas, tendo sido original quando o Alexandre recorreu ao friso 3 para explicar a construção do friso 8. Por outro lado, também se pode considerar que o par apresentou flexibilidade pois conseguiu apresentar outro(s) processo(s) para além do(s) apresentado(s) no papel e distintos destes.

Quanto à questão 4 do teste, orientada para a criatividade, verifica-se que o Alexandre manteve a mesma linha de raciocínio para a construção do módulo (reflexões de eixos vertical, horizontal e oblíquo), nas duas versões do teste (figura 160).

Fig. 379 – Resolução de Alexandre da questão 4.1 do teste

Na composição geométrica, versão pré, o Alexandre aplicou a reflexão associada a eixos vertical e horizontal. Por seu lado, a introdução da translação na composição geométrica indicia flexibilidade em relação à resposta na versão pré, pois aplicou outra isometria, para além das aplicadas na versão pré.(figura 161).

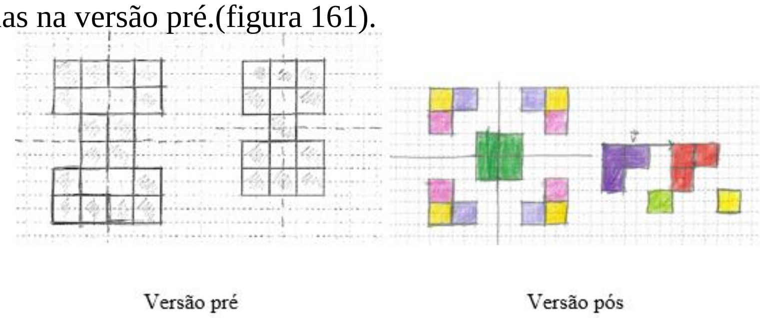


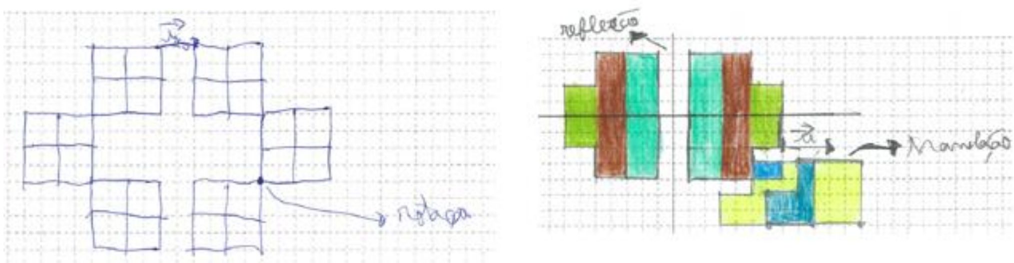
Fig. 382 – Resolução de Alexandre da questão 4.2 do teste

Na Questão 4, item 4.1, verifica-se que o Diogo, na versão pré, desenhou uma figura simples com quatro simetrias de reflexão – um quadrado. Por outro lado, na versão pós, pode considerar-se que houve fluência pois, neste caso, para além de considerar o módulo da versão pré, o aluno efetuou uma reflexão com um eixo que contém a diagonal de um dos quadrados menores que fazem parte do módulo (figura 162).

Versão pré Versão pós

Fig. 385 – Resolução de Diogo da questão 4.1 do teste

Quanto à composição geométrica, na versão pré, o Diogo aplicou as isometrias rotação e translação e, na versão pós, utilizou duas reflexões, com eixos horizontal e vertical (figura 163). Verifica-se, no entanto, que o aluno ainda aplicou uma translação na composição apresentada, que nada tem a ver com o motivo construído na questão 4.1. Tais factos sugerem que o aluno aplicou conhecimentos adquiridos em Educação Visual e Matemática.



Versão pré Versão pós

Fig. 386 – Resolução de Diogo da questão 4.2 do teste

CAPÍTULO IV

PRINCIPAIS CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E SUGESTÕES

Apresentam-se, neste capítulo, as principais conclusões decorrentes da análise dos resultados obtidos a partir dos dados recolhidos, no sentido de dar resposta às questões de investigação. Tem-se particular atenção nas duas categorias principais sobre as quais o estudo incidiu, competências geométricas dos alunos, em particular ao nível das isometrias, e criatividade.

Em seguida, indicam-se as principais limitações do estudo e sintetizam-se algumas sugestões que dele decorrem para investigações futuras. Por fim, conclui-se o trabalho com uma breve reflexão pessoal sobre a experiência desenvolvida.

1. Conclusões do estudo

O desenvolvimento da investigação consistiu na aplicação de uma proposta didática, centrada nos alunos, no âmbito da unidade de ensino "Isometrias". Relembre-se que se pretendia, neste estudo, analisar a influência de uma abordagem interdisciplinar das isometrias, integrando Matemática e Educação Visual, e operacionalizada através de uma sequência de tarefas, mais ou menos abertas, com recurso ao GeoGebra: i) numa mais sólida apropriação e aplicação de conceitos geométricos envolvidos; ii) no desenvolvimento de atitudes mais favoráveis em relação à Matemática, no geral, e em relação à geometria, em particular, bem como, iii) no desenvolvimento da criatividade ao nível quer de representações quer de manifestações.

A preparação e implementação deste estudo seguiram as orientações curriculares, manifestadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), por estar em vigor aquando do estudo. A recolha de dados foi efetuada numa turma do oitavo ano e a análise incidiu em três casos que correspondem a três pares.

Optou-se por iniciar o estudo das propriedades das isometrias, tal como recomendado por Breda *et al.* (2011), recorrendo ao GeoGebra e, num segundo momento, aplicar o conhecimento adquirido na conceção de frisos e rosáceas em Educação Visual, para posterior análise na disciplina de Matemática. Para além disso, procurou-se criar uma dinâmica em sala de aula que permitisse o trabalho individual, o trabalho de pares e a discussão em grande grupo.

Competências geométricas

Tendo em conta o desempenho e discursos ao longo das sessões, pode considerar-se que a abordagem interdisciplinar das Isometrias contribuiu para o desenvolvimento de alguns conhecimentos e capacidades, apesar dos diversos erros cometidos, designadamente no pós-teste.

De um modo geral, os pares apropriaram-se de conceitos e processos envolvidos na resolução das primeiras quatro tarefas relativas às propriedades das isometrias, tendo posteriormente transferido alguns deles para a conceção e construção de frisos e rosáceas em Educação Visual. A construção de conhecimentos e desenvolvimento de capacidades parece evidente, nomeadamente, na identificação de invariantes numa figura, na resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra, e na análise de alguns frisos e rosáceas.

Relativamente ao GeoGebra, a sua utilização, enquanto ferramenta para o ensino e aprendizagem das transformações geométricas, proporcionou respostas imediatas levando o aluno a testar, ao seu ritmo, várias hipóteses, reduzindo o tempo de pesquisa, o que se torna bastante útil quando as explorações estão voltadas para composições geométricas complexas, como é o caso de várias delas usadas neste estudo. Permitiu a exploração de um maior número de situações, motivou os alunos a realizar mais construções e proporcionou um ambiente de aprendizagem colaborativa. Por outro lado, os resultados apontam para o GeoGebra ser efetivamente uma ferramenta da qual se apropriam com facilidade e os motiva para se empenharem nas tarefas tal como indicam os estudos efetuados por Vieira (2010), Martins (2012), Coelho (2013) e Gaspar (2013). Neste caso, refira-se a construção de frisos no GeoGebra, por parte de alguns alunos, sem que tal fosse solicitado pela investigadora.

No entanto, tal não significa que o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades tenha sido igual para todos os casos. O par Adriana e Sofia revelou maior dificuldade em delinear estratégias e/ou levá-las a cabo. Por várias vezes, teve de recorrer ao trabalho desenvolvido por outros pares, nomeadamente o par Rui e Tomás. Dos resultados obtidos, pode inferir-se que a interação social assume particular importância na aprendizagem da Matemática (Schoenfield,1992) pois, através da troca de ideias, os conhecimentos são melhor entendidos por cada um, promovendo maior autonomia na exploração das construções e na concretização das tarefas. Destaque-se que, ao longo de todas as sessões de implementação da proposta didática, a investigadora assumiu o papel de facilitadora do processo aprendizagem, fomentando a autonomia dos vários pares na execução das tarefas, bem como o papel de moderadora na discussão entre os pares, no final das mesmas, prestando os devidos esclarecimentos quando necessário. As interações investigadora/aluno, materializadas em questões de focalização e resposta curta, contribuíram para ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades envolverem-se mais nas tarefas. As conclusões só seriam obtidas após vários insucessos, várias construções, manipulações, comparações e discussão geral.

Da análise dos resultados, pode ainda concluir-se que os pares apresentaram maior dificuldade na identificação da isometria reflexão deslizante e no uso correto desta expressão. Ainda se verificou que, em outras situações, nem sempre utilizaram a linguagem mais adequada na resolução das tarefas, designadamente ao nível de terminologia. Por exemplo, usaram o termo simetria para se referir a simetria de reflexão, muito por influência de Educação Visual. Mas o mais evidente foi "verem" as diversas peças que compunham as construções de forma isolada e não como um todo. Significa isto que, tiveram muita dificuldade em perceber a estrutura subjacente às referidas composições. Mais uma vez, parecem ter sido influenciados pelo que aconteceu em Educação Visual. Isso levou-os a "inventar" novos frisos que, realmente não existem. Para além disso, também se nota muita dificuldade em identificar todas as translações associadas a um friso bem como todas as rotações e, eventualmente, reflexões associadas a rosáceas. Também a dificuldade revelada pelos pares na execução de tarefas de caráter mais aberto e de maior complexidade, que poderá ser causada pela falta e familiaridade com tarefas desta natureza, limitou a construção do conhecimento. Assim, defende-se que as tarefas nem podem ser desinteressantes pela excessiva facilidade, nem exageradamente complexas, porque isto também serve como bloqueio à aprendizagem.

No geral, os pares, no início da abordagem do tema, revelaram algum conhecimento sobre isometrias, como se pode verificar nas respostas da versão pré do teste. No que respeita à versão pós, verificou-se que os alunos não se esforçaram em explicar devidamente os processos nem revelaram domínio da terminologia associada ao tema. Em particular, a questão relativa às pavimentações de ESCHER parece não ter induzido desafio, ou curiosidade, nos alunos, pois as respostas na versão pós apresentaram sempre pior desempenho em relação à versão pré.

No que respeita às atitudes dos alunos envolvidos neste estudo face à Matemática em geral e à Geometria em particular, pode afirmar-se que, no geral, sofreram uma evolução positiva. Apesar de, no início, a maior parte destes alunos revelar já gostar de Matemática, manifestou, no final do mesmo, que o seu interesse pela disciplina aumentou e que a utilização do GeoGebra foi um contributo importante, quer em termos de motivação, quer como ferramenta facilitadora da aprendizagem. Para além disso, a abordagem interdisciplinar tornou o tema das isometrias mais interessante.

Criatividade

Dos temas abordados neste estudo, a criatividade foi, sem dúvida, o mais complexo. Mesmo depois de se ter optado por uma das teorias mais em voga, sentiu-se grande dificuldade em avaliar as produções dos alunos em termos da sua criatividade, dada a natureza dos trabalhos realizados. Não obstante, defendendo a classificação de Leikin (2009), que propõe que se meça a fluência, a flexibilidade, a originalidade e a elaboração das respostas apresentadas pelos alunos, pode considerar-se que os pares foram sendo gradualmente mais capazes de, para uma mesma proposta, apresentar diversas soluções, algumas delas envolvendo processos de construção diferentes. Assim, evoluiram principalmente em fluência. Alguns trabalhos também revelam alguns índices de elaboração interessantes. Também foi possível verificar, ao longo do estudo, que alguns alunos apresentaram um grau de originalidade superior aos restantes colegas. Refira-se, por exemplo o recurso a um friso por parte de um dos casos, para explicar a construção de outro. Para esta evolução foi determinante terem tido oportunidade de confrontar o seu trabalho com o dos colegas (Coelho, 2013).

2. Limitações do estudo

Não obstante os aspetos positivos já mencionados sobre a realização deste estudo cabe, ainda, considerar alguns condicionalismos que, de forma objetiva, puderam influenciar o desenvolvimento do mesmo.

Um dos constrangimentos, intrínseco à própria investigadora, tem a ver com a sua total inexperiência neste papel, o que possivelmente levou a que situações que careciam de mais atenção não tivessem sido devidamente exploradas, ou simplesmente não foram percecionadas da melhor forma. Saliente-se ainda o duplo papel assumido, de professora e de investigadora, que dificultou a focalização na observação e registo de notas, condicionando a recolha de dados.

À data de realização deste estudo, verificou-se que, em Potugal são escassos os estudos no âmbito da interdisciplinaridade no ciclo de ensino a que se reporta este estudo e, em particular entre Matemática e Educação Visual. Isso colocou algumas dificuldades no desenvolvimento do mesmo, limitando as opções tomadas quanto ao tipo de atividades a considerar e a metodologia a seguir.

Quanto à criatividade, tema que assume importância na aprendizagem da Matemática, pode constatar-se que é um tema pouco explorado e de difícil tratamento.

Há ainda a salientar a falta de condições materiais verificadas na maior parte das escolas em Portugal. A sala de TIC não estava preparada, quer ao nível da organização do espaço quer ao nível de horário para a sua utilização frequente, tendo este constrangimento sido ultrapassado com a disponibilidade da maior parte dos alunos em trazer o próprio portátil para a escola. Deve salientar-se, no entanto, a dimensão reduzida da turma (14 alunos), que possibilitou a realização das tarefas a pares com o número de portáteis disponíveis.

Considera-se ainda que (por incompatibilidade no horário), a impossibilidade da investigadora poder estar presente nas aulas de Educação Visual limitou o desenvolvimento do estudo pois não foi possível averiguar como foram aplicados os conhecimentos adquiridos ao longo das tarefas na conceção e construção dos frisos e rosáceas.

3. Reflexão final

A realização deste trabalho de investigação foi motivada pelo interesse pessoal da investigadora sobre abordagens interdisciplinares na aprendizagem da Matemática e pela necessidade de aprofundar conhecimentos que pudessem orientar e melhorar a sua atuação em sala de aula, quer na lecionação de conteúdos quer na sua gestão.

O tema das transformações geométricas, nomeadamente as isometrias, constituiram desde sempre um desafio por ser uma área onde é possível explorar muitos aspetos geométricos. Apesar disso, a investigadora sentiu alguma dificuldade em delinear uma proposta didática original que fosse consonante com as suas ideias e permitisse atingir os objetivos que tinha em mente relativamente aos conhecimentos geométricos e possível desenvolvimento da criatividade nos alunos.

Possivelmente os resultados não foram os expetáveis mas foram, com certeza, relevantes para o ensino e aprendizagem da Geometria. Os resultados sugerem que o recurso a ambientes dinâmicos de geometria dinâmica pode contribuir de forma positiva para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, permitindo manter os alunos mais focalizados nas tarefas e contribuir para um ambiente de aprendizagem colaborativo. Relativamente ao GeoGebra, o desenvolvimento deste estudo veio reforçar a ideia de vários autores (nacionais e estrangeiros) de que facilita a aprendizagem das isometrias tornando-a mais significativa e promove o desenvolvimento de competências consideradas importantes no domínio da Geometria, em particular, e da Matemática, em geral.

Quanto ao contributo da abordagem interdisciplinar, torna-se bastante difícil quantificar objetivamente a sua influência. No entanto, foi visível que recorrer a esta abordagem originou nos alunos motivação e, de alguma forma, promoveu neles, uma nova atitude face aos conteúdos lecionados e possivelmente desenvolveu a criatividade. Deste estudo resulta, também, a perceção de que abordagens diferentes, com caráter tecnológico e exploratório, promovem atitudes mais favoráveis em relação à Matemátca.

Considera-se que a interdisciplinaridade, em contexto escolar, não deve ser entendida como uma definição mas como a atitude do professor no processo de ensino e aprendizagem. A forma como os alunos se envolveram e experienciaram a intervenção didática fortalece a convicção de que abordagens de ensino mais criativas desenvolvem competências Matemáticas nos alunos. Por isso, deveriam acontecer de forma mais regular e sistemática, constiuindo parte integrante da prática docente.

Aguns destes aspetos deveriam ser tidos em conta dada a importância que assumem no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e ter implicações, quer na formação inicial dos professores quer na sua formação ao longo da vida.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. Disponível em https://www.ime.usp.br/~danim/Texto-Paulo-Abrantes-95.pdf. (data de consulta 24-05-2012)

Abrantes, P. (2001). A Gestão Flexível do Currículo: O ponto de vista da Administração. In: Cândido Varela Freitas *et al.* (Orgs.). *Gestão Flexível do Currículo – contributos para uma reflexão crítica.* Lisboa: Texto Editora, pp. 24 – 30.

Adams, D. & Hamm, M. (2010). *Demistify Math, Science and Technology: Creativity, Innovation, and Problem Solving*. UK: Rowman & Littlefield Education.

Alencar, E. , Fleith, D. & Virgolim, A. M. R. (1995). Fatores inibidores à criatividade em estudantes universitários e professores, Campinas: Editora Átomo.

Alencar, E., & Fleith, D. (2003). Criatividade – múltiplas perspectivas. Brasília, DF: Editora da Universidade de Brasília.

Alencar, E. & Fleith, D. (2003a). *Criatividade: múltiplas perspetivas (2ª ed.)*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

Alencar, E. & Fleith, D. (2003b). Contribuições teóricas recentes ao estudo da criatividade. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 19 (1), 1-8. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/S0102-37722003000100002. (data de consulta: 02-11-2011)

Alencar, E. (2007). Criatividade no contexto educacional: três décadas de pesquisa. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 23 (n. especial), 45-49.

Alonso, L. (1993). Inovação Curricular, Profissionalidade Docente e Mudança Educativa. *Actas ProfMat.* Ponta Delgada. 27-30 de Outubro de 1993. pp. 17-27.

Amabile, T. (1989). *Growing up Creative: nurturing a lifetime of creativity*. New York: Crown Publishers.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática.* (Edição comemorativa). Lisboa: APM.

Bastos, R. (2007). Transformações geométricas. *Notas sobre o Ensino da Geometria (GTG), Educação e Matemática*, (94), 23-27.

Barbosa, I. (2009). Potencialidades da Disciplina de TIC para a mudança de práticas educativas: um estudo de caso no 3º ciclo do ensino básico. Dissertação de Mestrado. Univerisdade de Aveiro.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento. Disponível em http://hdl.handle.net/1822/10561 (data de consulta: 10-02-2012)

Bodgan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, Hélia & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Cabrita, I., Pinheiro, L., Pinheiro, J. e Sousa, O. (2008). Novas trajectórias em Matemática: programa de formação contínua com professores do 2.º ciclo do ensino básico da Universidade de Aveiro. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Cabrita, I. ; Coelho, A, Vieira, C.; Malta, E.; Vizinho, I.; Almeida, J.; Gaspar, J.; Pinheiro, J.; Pinheiro, L.; Nunes, M.; Sousa, O. e Amaral, P. (2009). Perspectivas e vivências emergentes em Matemática. Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro. ISBN 978-972-789-293-8.

Canavarro, A. (2003). Práticas de Ensino da Matemática: duas professoras, dois currículos. (Tese de doutoramento). Lisboa: DEFCUL..

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de Geometria Dinâmica.* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Candeias, N. e Ponte, J. P. (2008). Aprender geometria utilizando um ambiente de geometria dinâmica. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), Tecnologias e Educação Matemática (pp. 313-325). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Carretero, M. Construir e Ensinar as Ciencias Socias/hist. São Paulo: Artmed, 1997

Coelho, A. (2013). *GeoGebra e iTALC numa abordagem criativa das isometrias*. Universidade de Aveiro. Tese de Mestrado.

Coto, G., Neto,L. & Pacheco,A. (2009). *Criatividade dentro da Educação: um estudo de caso do Curso de Administração da UFSC* – Universidade Federal de Santa Catarina. Revista de Ciências da Administração**,** Florianópolis,221-245, dez. 2009. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/adm/article/view/21758077.2009v11n24p221. (data de consulta: 02-11-2011)

Coutinho, C. & Chaves, J. (2002) – O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. Revista Portuguesa de Educação, 2002, 15 (1), p. 221-243.Universidade do Minho, Portugal

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina.

Cloutier, (1975). A era do Emerec. Lisboa: I.T.E.

Eça , Torres T. (2010), «A educação artística e as prioridades educativas do início do século XXI », revista ibero americana de educação, nº52, pp 127-146. (data da consulta 10-02-2012)

Eger, J. M. (2008). "The Arts in Contemporary Education." School Administrator 65(3),32-35

Fazenda, I. (1993) A Interdisciplinaridade: um projeto em parceria. São Paulo: Loyola.

Farmer, (1996). *Grupos e Simetria.* Lisboa: Editora Gradiva.

Fleith, D. & Alencar, E. (2005). Escala sobre o clima para criatividade em sala de aula. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 21 (1), 85-91.*

Franco, A. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Garcia, J. (2012). O futuro das práticas de interdisciplinaridade na escola. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, 12(35), 211 – 232.

Gaspar, J. (2013). Abordagem criativa das isometrias para a criatividade em Matemática (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Gaspar, M. & Roldão, M. (2007). Elementos de Desenvolvimento Curricular. Lisboa: Universidade Aberta

Gontijo, C. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em Matemática motivação em Matemática de alunos do ensino médio*. Tese de doutoramento. Disponível em http://repositorio.unb.br/handle/10482/2528. (data de consulta:10-02-2012)

Guilford, J.(1967). *The nature of human intelligence*. McGraw-Hill: New York.

Guzmán, M. (2003). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Disponível em http://www.rieoei.org/rie43a02.htm (data de consulta: 10-12-2011)

Holley, K., (2009) Understanding Interdisciplinary Challenges and Opportunities in Higher Education: ASHE Higher Education Report, Volume 35, Number 2

Japiassu, H. Interdisciplinaridade e Patologia do saber. Rio de Janeiro: Imago, 1976, p.74.

Jeffrey, B. and Craft, A. (2004). Teaching creatively and teaching for creativity: distinctions and relationships. Educational Studies, 30(1), (p. 77–87).

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Disponível em http://hdl.handle.net/10362/68. (data de consulta: 05-06-2012)

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (in press). Does mathematical creativity differentiate mathematical ability? *Proceedings of CERME 7, February 2011*. University of Rzesków, Poland.

Klein, J.,The taxonomy of interdisciplinarity. In: Frodeman, R.; Klein, J. T.; Mitcham, C. (Ed.). Oxford handbook of interdisciplinarity. Oxford: Oxford University Press, 2010,15 –30.

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics. Contribution to the T, 3, (p. 6-8). Citeseer.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 283-317.

Lavaqui, V., & Batista, I.. (2007). Interdisciplinaridade em ensino de Ciências e de Matemática no Ensino Médio. Ciência & Educação (Bauru), *13* (3), 399-420.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. Em R.Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education ofgifted students*. (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Levenson, E. (2011). Mathematical creativity in elementary school: is it individual or collective? *Proceedings of CERME 7*, Feb. 2011. University of Rzesków, Poland.

Lin, Y. (2011). Fostering creativity through education- A conceptual framework of creative pedagogy. 2(3), 149-155.

Machado,N.(1993), Interdisciplinaridade e Matemática. PRO-Posições, 4(1), 24 – 34.

Mann, E. (2005). *Mathematical creativity and school Mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle schools students*. Tese de doutoramento. Connecticut, USA: University of Connecticut.

Martin, G. (1982). Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry. New York: Springer.

Martins, V. (2000). Para uma pedagogia da criatividade. Propostas de trabalho. Porto: ASA.

Martins, I. (2005). Competências em Ciências Físicas e Naturais – Concepções e Prática de Professores do Ensino Básico (Dissertação de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Martins, C. (2012).Sistemas de equações: uma abordagem criativa, Universidade de Aveiro. Disponível em http://hdl.handle.net/10773/9883. (data de consulta: 14-05-2013).

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional Do Ensino Básico Competências do Essências*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica..

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* Colecção TESES - doutoramento. Lisboa: APM. Disponível em http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1149/4/Investigar%20para%20ensinar%20Matem%C3%A1tica.pdf . (data de consulta: 14-05-2013).

Mergel, Brenda. (1998), *Instructional Design and Learning Theory*. Educational Communications and Technology, University of Saskatchewan. Disponível em www.usask.ca/education/coursework/802papers/mergel/brenda.htm (data de consulta: 10-11-2012)

Mitjáns Martínez, A. (2002) “A criatividade na escola: três dimensões de trabalho”. En: *Revista Linhas Críticas da Faculdade de Educação da UnB*, 8(15), 189-206.

Morais, M. (2011a).*Criatividade: desafios ao conceito*.
Disponível em http://hdl.handle.net/1822/15332. (data de consulta: 10-11-2011)

Morais, M. F. & Azevedo, I. (2011b). *What is a creative teacher and what is a creative pupil? Perceptions of teachers.* Disponível em http://hdl.handle.net/1822/14863 (data de consulta: 10-11-2011)

Moreira, D. (2001). Educação Matemática e comunicação: uma abordagem no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, 65, 27-32.

Morelatti, M. (2001). *Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em cálculo diferencial e integral I*. Tese de doutoramento em Educação - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Morin, E. (2003), “*A cabeça bem feita – Repensar a reforma, reformar o pensamento”,* 8ªedição, Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Morris, W. (2006). *Creativity – its place in education*. Disponível em http://www.creativejeffrey.com/creative/Creativity_in_Education.pdf.(data de consulta: 10-11-2011)

Munari, B. (1987). Fantasia: invenção, criatividade e imaginação na comunicação visual. Lisboa: Presença.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, Z. (2010). Fatores influentes no desenvolvimento do potencial criativo. Estudos de psicologia (Campinas), 27(1), 83-92.

Pacheco, J.(1996). Currículo: Teoria e Práxis. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. & Pereira, N. (2005). Projeto educativo: da utopia à realidade. Um estudo qualitativo. *Revista Portuguesa de Investigação Educacional*[24], 4, 39-58.

Pardal, L., & Lopes, E. (2012). Métodos e Técnicas de investigação social. Lisboa: Areal Editores.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Palmade, G. (1979), Interdisciplinariedade e Ideologias. Madrid: Narcea,

Papert, S., Harel, I. (1991). Situating Constructionism. Ablex Publishing Corporation. Disponível em http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html (data de consulta 03-04-2012)

Paviani, J.(2008), Interdisciplinaridade: conceitos e distinções. 2. ed. Caxias do Sul, RS: Educs.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 29*, 3, 63-67.

Pombo, O., Guimarães, H. Levy, T. (1993, 2.ª edição). *A Interdisciplinaridade – reflexão e experiência*. Portugal (Lisboa): Texto Editora, Coleção Educação Hoje

Pombo, O. (2003), Interdisciplinaridade. Ambições e Limites, Lisboa: Relógio d'Água. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/investigacao/interdisc%20excertos.htm (data de consulta 10-11-2011)

Ponte, J. (1994), *O estudo de caso na investigação em educação Matemática*, educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa Grupo de Investigação DIF –

Didáctica e Formação, Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 23-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação Matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). Investigação em educação Matemática: Implicações curriculares. Lisboa: IIE.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Pires, C. (2010). Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156*, *11*(1).

Reis, M. (2009). Interdisciplinaridade na prática pedagógica. REVELLI – Inhumas, V, 1, n.º 2.

Ribeiro, A. (1995). Desenvolvimento Curricular. Lisboa: Texto Editora.

Ribeiro, A. (2005). O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura Matemática. (Tese de Doutoramento). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Ribeiro, A., Cabrita, I. (2002). O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura Matemática. In J. P. Ponte *et al.* (org.). Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores, (p. 135-157). Sociedade portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Roldão, M. (1999). *Gestão Curricular – Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Roldão, M. (2000). O currículo escolar: da uniformidade à contextualização – campos e níveis de decisão curricular. *Revista de Educação*, 9 (1), 81-92. Lisboa: Departamento de Educação da FCUL.

Serrano, G. (2004). Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. Vol I. Métodos. Madrid: Ed. La Muralla.

Serrazina, L., Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 35-62). Lisboa: APM. Disponível em http://apm.pt/files/127552_gti2005_art_pp35-62_49c772282ed28.pdf. (data de consulta: 14-05-2013)

Santomé, J. (1998). *Globalização e interdisciplinaridade: o currículo integrado*. Porto Alegre, Editora Artes Médicas Sul

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education,3*, 75-80.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Serenato, L. (2008). *Aproximações interdisciplinares entre Matemática e arte: resgatando o lado humano da Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator*, 14(1), 19-34.

Serrazina, L., Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência Matemática. In APM-GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 35-62). Lisboa: APM.

Serrazina, L., Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico*, 43-59.

Spelt, E., Biemans, H., Tobi,H. (2009). Teaching and Learning in Interdisciplinary Higher Education: a systematic review. Educational Psychology Review, 21(4), 365-378.

Torre, S. de la (2005). *Dialogando com criatividade: da identificação à criatividade paradoxal*. São Paulo: Madras.

Vale, I (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. Em J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Eds.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I., Barbosa, A., Barbosa, E., Borralho, A., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011). *Padrões em Matemática: uma proposta didática no âmbito do Novo Programa para o Ensino Básico*. Lisboa: Texto Editores.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. Interacções, 20, 181-207.

Vale, I.; Barbosa, A. (2015). A criatividade na aula de Matemática: revisitar a resolução de problemas, XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

Valente, J., Almeida, F. (1997). Visão Analítica da Informática no Brasil: a questão da formação do professor. In *Revista Brasileira de Informática na Educação*-SBIE, nº 1.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais.* Lisboa: IIE.

Velosos, E. (2012), Simetria e transformações geométricas. Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM.

Virgolim, A. (2007). Prefácio. In A. Virgolim (Org.), *Talento criativo*: *expressão em múltiplos contexto* (pp.19-27). Brasília: EdUnB.

Yin, R. (2010). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Zaman, G., Goschin, Z. (2010), *Multidisciplinarity, Interdisciplinarity and Transdisciplinarity: Theoretical Approaches and Implications for the Strategy of Post-Crisis Sustainable Development***.** Theoretical & Applied Economics, 17(12), 5 – 20.

Zamir, H., Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder focusing on teachers conceptions. Research in Mathematics Education, 13(1), 17 – 3.

ANEXOS

Anexo 1 – Questionário inicial

QUESTIONÁRIO INICIAL

Este questionário serve para te conhecer melhor. Responde com a maior sinceridade. Tenta ser coerente e rigoroso(a) nas tuas respostas.

I - Identificação :

1. Nome: ____Idade: ____ anos

II – Relação com a Matemática

2. Nível obtido a Matemática no 7º ano :

nível 1 ☐ nível 2 ☐ nível 3 ☐ nível 4 ☐ nível 5 ☐

3. Lê atentamente cada afirmação registada no quadro e, em seguida, coloca um × na opção que consideres mais adequada.

	Não tenho opinião	**discordo totalmente**	**não concordo**	**concordo**	**concordo totalmente**
Gosto de Matemática	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto de geometria	☐	☐	☐	☐	☐
A geometria não serve para nada	☐	☐	☐	☐	☐
Nas aulas de Matemática sinto-me ansioso(a)	☐	☐	☐	☐	☐

III – Representações da criatividade em Matemática

4. O que significa, para ti, "criatividade"?

____

____

____

5. Consideras-te criativo(a)? Porquê?

____

____

____

6. Haverá disciplinas onde consideras possível ser-se criativo(a)? Em caso afirmativo, indica quais. Podes dar um exemplo de uma situação que o evidencie.

____

____

____

7. Tens, ou tiveste, algum professor que consideres ser criativo? Exemplifica com um episódio ocorrido em sala de aula.

____

____

____

8. De que forma, um professor de Matemática, pode ser criativo?

____

____

____

9. De que forma, um aluno pode ser criativo em Matemática?

____

____

____

10. Lê atentamente cada afirmação registada no quadro que se seguue e coloca um × na opção que consideres mais adequada.

	não tenho opinião	discordo totalmente	não concordo	concordo	concordo totalmente
Ser criativo a Matemática é ser sobredotado.	☐	☐	☐	☐	☐
Ser bom a Matemática é ser criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
Em Matemática não é possível avaliar a criatividade dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade em Matemática pode ser estimulada nas escolas.	☐	☐	☐	☐	☐
Sou mais criativo(a) a Matemática quando trabalho com outros colegas.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática é só números, não permite a criatividade.	☐	☐	☐	☐	☐
Não consigo ser criativo(a) a Matemática quando trabalho sozinho(a).	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática é criativa quando fazemos *desenhos*	☐	☐	☐	☐	☐
Gostava mais de Matemática se as aulas fossem criativas.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática não se pode ser criativo, é aquilo e aquilo mesmo	☐	☐	☐	☐	☐
Aulas de Matemática criativas estimulam a aprendizagem dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
Ser criativo a Matemática é um dom.	☐	☐	☐	☐	☐
Podemos ser criativos a Matemática porque podemos resolver os problemas de várias maneiras.	☐	☐	☐	☐	☐
Não é possível ser criativo(a) em Matemática como se é a educação visual	☐	☐	☐	☐	☐

IV – Articulação de conteúdos (Matematica e Educação visual)

11. Lê atentamente cada afirmação registada no quadro que se segue e coloca um × na opção que consideres mais adequada.

	não tenho opinião	discordo totalmente	não concordo	concordo	concordo totalmente
Nas aulas de Matemática expositivas aprendo melhor.					
As aulas de Matemática não se podem relacionar com as de ducação visual					
Não é possível transferir a criatividade em Matemática para as aulas de educação visual					
Educação visual pode ajudar-me a entender melhor a Matemática					
A Matemática ajuda-me a ententender melhor os conceitos de outras disciplinas					
A geometria da Matemática é mais difícil do que a de educação visual					
Uma forma de desenvolver a criatividade em Matemática é estabelecer relações com outras disciplinas, como educação visual					
Aplicar os conceitos aprendidos em educação visual nas aulas de Matemática estimula a imaginação e promove o desenvolvimento de novas ideias					

O questionário chegou ao fim.
Obrigada pela tua colaboração!

Anexo 2 – Teste

Nome : ____ 8ºano turma A

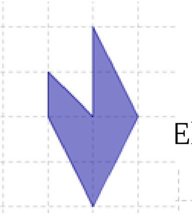
Questão 1. Considera os frisos que se seguem. Para cada um deles:

1.1 Desenha mais três elementos base, antes e após os esquemas representados, continuando cada um dos frisos;

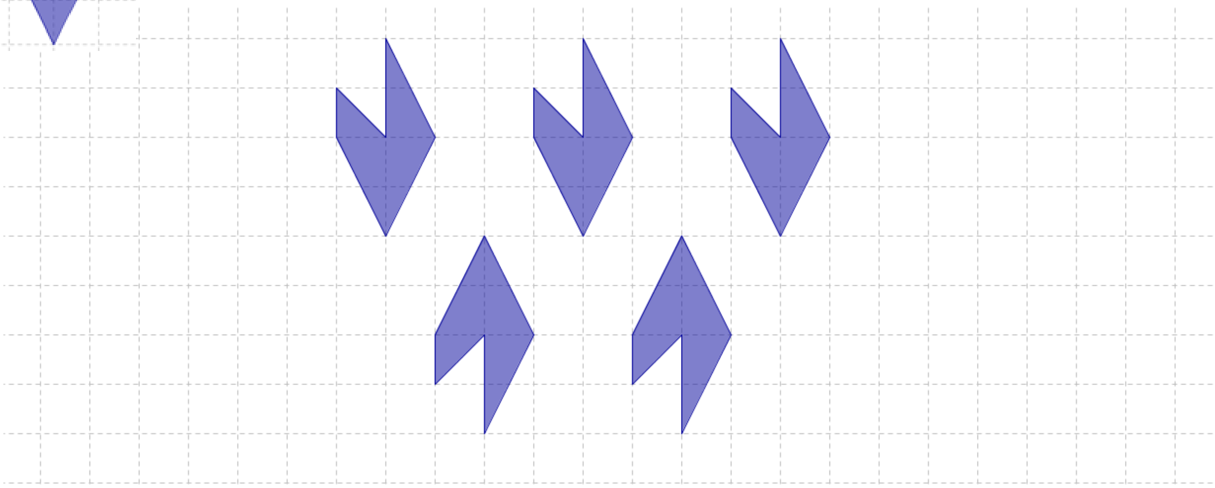
1.2 Identifica, e caracteriza, a(s) isometria(s) que permite(m) construir esses frisos;

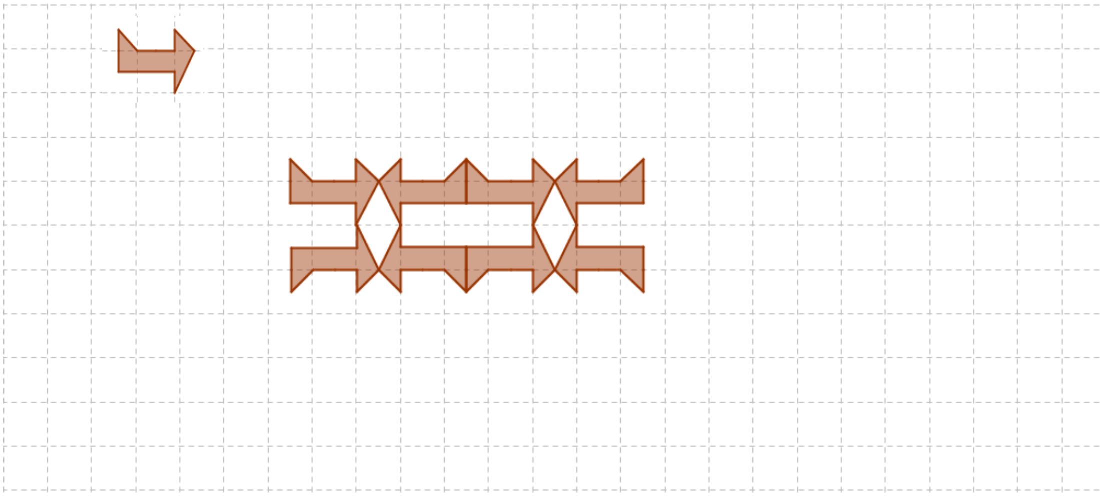
1.3 Apresenta dois processos diferentes que permitam construir cada um dos frisos.

Friso 1 Elemento base

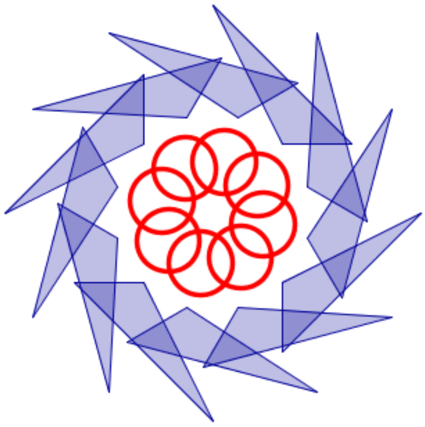


Elemento base

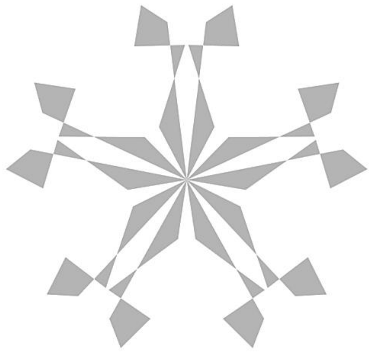




Questão 2 Considera as rosáceas que se seguem



Rosácea 1



Rosácea 2

1.1. Caracteriza as isometrias que permitem construir cada uma das rosáceas;

1.2. Identifica as simetrias presentes em cada rosácea;

1.3. Apresenta dois processos diferentes que permitam construir cada uma das rosáceas.

Questão 3. As quatro figuras seguintes são pavimentações do plano, realizadas por Escher. Para cada figura efetua o estudo das isometrias usadas. Para isso deverás, sempre que possível:

- Identificar o(s) eixo(s) de reflexão,
- Identificar o(s) vetor(es) de translação ,
- Identificar o centro de rotação e a amplitude do ângulo de rotação,

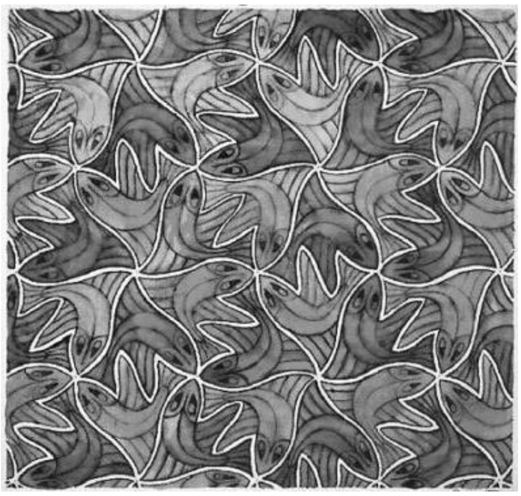


Figura 1 – Os peixes

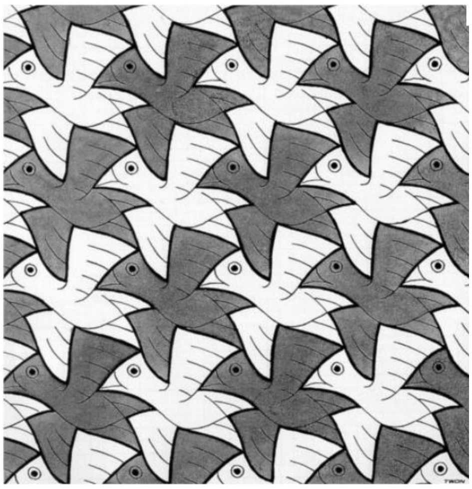


Figura 2 – Os pássaros

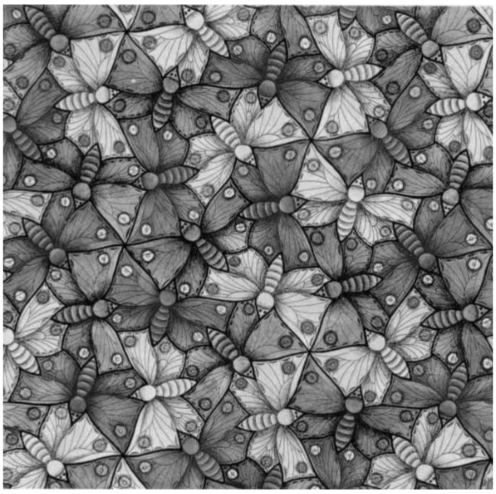


Figura 3 – As borboletas

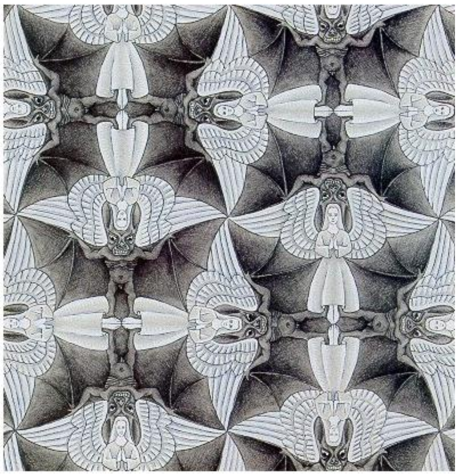


Figura 4 – Anjos e demonios

Questão 4 – Neste item deverás proceder à construção de uma figua, utilizando o material de desenho adequado.

4.1. A partir dos passos que se seguem, efetua a construção da figura:

Passo 1 – Desenha um quadrado com lado 2 quadrículas;
Passo 2 – Por reflexão, segundo um eixo vertical que contenha um lado do quadrado, obtém o transformado da figura inicial;
Passo 3 – Por reflexão, segundo um eixo horizontal que contenha um lado do quadrado obtém o transformado da figura inicial;
Passo 4 – Completa a tua figura de modo a obteres uma figura final com quatro eixos de simetria;
Passo 5 – Traça os quatros eixos de simetria;

4.2. A partir da figura obtida cria uma composição a gosto, utilizando, pelo menos, duas isometrias diferentes.

FIM

Anexo 3 – Tarefa 1

Explorar propriedades das isometrias

Translação

1. Constrói um quadrilátero à tua escolha;
2. Cria um vetor diretor;
3. Obtém o transformado do quadrilátero que construíste pela translação associada ao vetor que criaste;
4. Mede o comprimento dos lados do quadrilátero construído e do seu transformado. O que verificas?
5. Mede a amplitude de cada um dos ângulos do quadrilátero construído e do seu transformado. O que verificas?
6. Seleciona um dos vértices do quadrilátero que criaste e deforma a figura. Verifica o que acontece ao seu transformado;
7. Altera o vetor que criaste. O que verificas relativamente ao analisado em 4 e 5.
8. Com base na análise efetuada que propriedades podes enunciar para a translação?

Rotação

1. Constrói um quadrilátero à tua escolha;
2. Marca um ponto C que será o centro de rotação;
3. Obtém o transformado do quadrilátero construído por rotação, com ângulo de amplitude 60º e centro de rotação C;
4. Mede o comprimento dos lados do quadrilátero construído e do seu transformado. O que verificas?
5. Mede a amplitude de cada um dos ângulos do quadrilátero construído e do seu transformado. O que verificas?
6. Seleciona um dos vértices do quadrilátero que criaste e deforma a figura. Verifica o que acontece ao seu transformado.
7. Movimenta o centro de rotação. O que verificas relativamente ao analisado em 4 e 5?
8. Altera a amplitude do ângulo de rotação (no sentido positivo e no sentido negativo). O que verificas?
9. Com base na análise efetuada que propriedades podes enunciar para a rotação?

Reflexão

1. Constrói um polígono à tua escolha;
2. Obtém o transformado do polígono construído por reflexão, para isso deverás criar um eixo de reflexão;
3. Efetua os procedimentos que te permitam comparar :
    a. O comprimento dos lados do polígono construído e do seu transformado. O que verificas?
    b. A amplitude de cada um dos ângulos do polígono construído e do seu transformado. O que verificas?
    c. A distância entre cada um dos vértices e o eixo de reflexão, para o polígono construído e o seu transformado. O que verificas?
4. Deforma o polígono que construíste selecionando um dos vértices. O que verificas relativamente ao efetuado em 3?
5. Altera a posição do eixo de reflexão. O que verificas relativamente ao analisado em 3?
6. Com base na análise efetuada que propriedades podes enunciar para a reflexão?

Reflexão deslizante

1. Constrói um polígono à tua escolha ;
2. Obtém o transformado do polígono construído por reflexão;
3. Cria um vetor com direção paralela ao eixo de reflexão;
4. Obtém o transformado do polígono obtido em 2 por uma translação associada ao vetor criado em 3;
5. Esconde o polígono obtido em 2;
6. Efetua os procedimentos que te permitam comparar :
    a. O comprimento dos lados do polígono construído e do seu transformado. O que verificas?
    b. A amplitude de cada um dos ângulos do polígono construído e do seu transformado. O que verificas?
7. Deforma o polígono que construíste selecionando um dos vértices. O que verificas relativamente ao efetuado em 5?
8. Altera a posição do eixo de reflexão e o vetor, não esquecendo que deverá ter a direção do eixo de reflexão. O que verificas relativamente ao analisado em 5?
9. Com base na análise efetuada que propriedades podes enunciar para a reflexão deslizante?

Tenta preencher a tabela que se segue, de acordo com as conclusões que tiraste:

Isometria	Translação	Rotação	Reflexão	Reflexão deslizante
Comprimento dos segmentos				
Amplitude dos ângulos				
Pontos fixos				
Orientação dos ângulos				

Anexo 4 – Tarefa 2 : Composição de duas reflexões

Caso 1 – Composição de duas reflexões de eixos paralelos

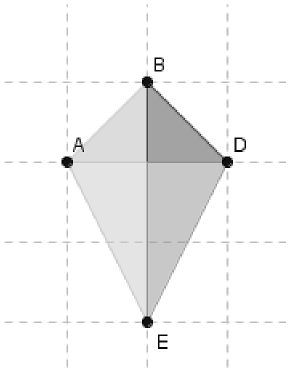


Figura 1

1. Reproduz a figura1 que se encontra ao lado.
2. Cria um eixo qualquer.
3. Obtém o transformado do figura1 que construíste por reflexão associada a eixo r.
4. Cria um novo eixo, paralelo ao primeiro. Obtém o transformado da " figura 2" por reflexão associada ao eixo s. Será a tua figura 3"
5. Relaciona as figuras obtidas. O que verificas?
6. Mede a distância entre os dois eixos criados.
7. Cria um vetor que te permita obter a figura 3 a partir da figura 1.
8. Obtém a figura 3 por translação da figura 1, associada ao vetor que criaste. O que verificas?
9. Mede o comprimento do vetor e relaciona-o com a distância entre o eixo r e o eixo s. O que concluis?
10. Manipula um dos eixos e verifica o que acontece;
11. A conjetura efetuada em 10 mantém-se?

Caso 2 – Composição de duas reflexões de eixos concorrentes

1. Procede de modo idêntico ao caso 1, mas agora, considera que os teus eixos r e s são concorrentes perpendiculares
2. Assinala o ponto de interseção dos eixos criados. Oculta a figura 2.
3. A partir da construção que tens e efetuando os procedimentos necessários, obtém por rotação de centro C, o transformado da figura 3 a partir da figura 1.
4. Mede a amplitude do ângulo de rotação. Compara com a amplitude do ângulo entre os dois eixos. O que verificas?
5. Identifica o ponto que é o centro de rotação e manipula-o. O que verificas? A conjetura efetuada em 5 mantém-se?
6. Verifica se a tua conjetura se mantém no caso em que os eixos concorrentes não são perpendiculares.

Anexo 5 – Tarefa 3 : Composição de duas rotações

Caso 1 – Composição de duas rotações com o mesmo centro

1. Constrói um polígono/figura qualquer. Cria um ponto exterior à figura 1 e que será o centro de rotação .
2. Obtem o transformado da figura 1 pela rotação de centro C e medida de amplitude θ à tua escolha. Obtem o transformado da figura 2 pela rotação de centro C e medida de amplitude α à tua escolha.
3. Efetuando os procedimentos adequados, mede a amplitude do ângulo (β) que te permite obter, por rotação de centro O, a figura 3 a partir da figura 1.
4. Compara o valor de β com os valores de θ e α. O que verificas?
5. Move o ponto O. Verifica se a conjetura efetuada em 6 se mantém.
6. Explora a tua construção considerando outra medida de amplitude para θ e α.
7. Efetuando o mesmo que em 5 , verifica se a conjetura efetuada em 6 se mantém.

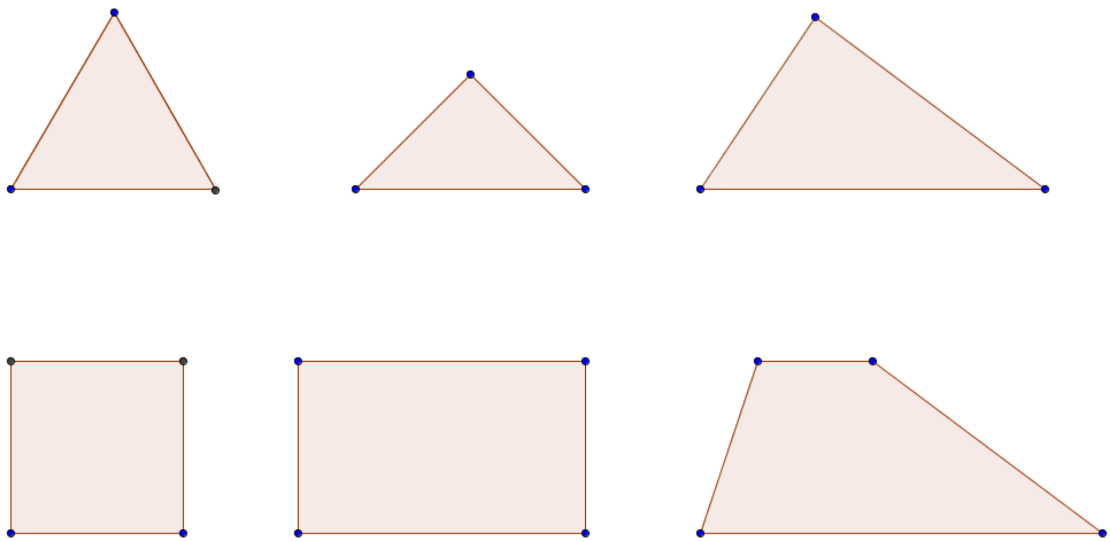
Caso 2 – Composição de duas rotações com centros distintos

1. Efetua o mesmo procedimento do verificado no caso 1 até ao ponto 3.
2. Cria outro ponto exterior à figura 1. Denomina-o “ T”
3. Obtem o transformado da figura 2 pela rotação de centro T e medida de amplitude α à tua escolha. Será a tua “ Figura 3 ”
4. Oculta a figura 2.
5. Efetuando os procedimentos verifica se é possível , por rotação, obter a figura 3 a partir da figura 1. O que verificas?
6. Haverá outra forma de obter a figura 3 a partir da figura 1? Identifica esse processo .

Anexo 6 – Tarefa 4 : Simetrias

Uma isometria é uma simetria para uma figura F se fixa, ou deixa invariante essa figura

1. Quantas simetrias tem cada um dos polígonos apresentados? Identifica-as.



2. Quantas simetrias tem um hexágono regular? E um polígono regular com n lados?

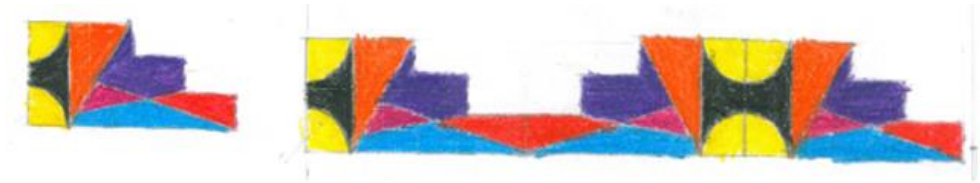
Anexo 7 – Tarefa 5 : Simetrias - Frisos

Observa e analisa os frisos que se seguem. Escolhe cinco, e para cada um deles:

1. Identifica as isometrias;
2. Descreve, se possível por mais do que um processo, como poderias obter cada um dos frisos escolhidos.

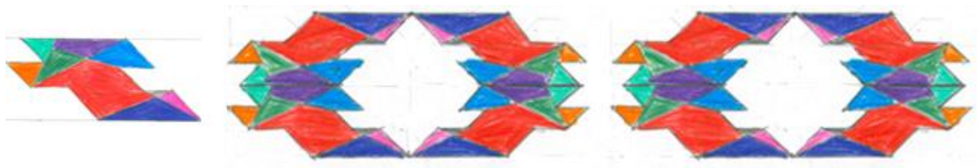
Friso 1

Friso 2

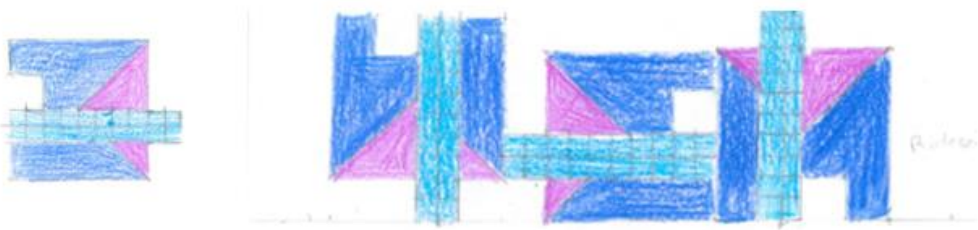


Friso 3

Friso 4



Friso 5



Friso 6

Friso 7

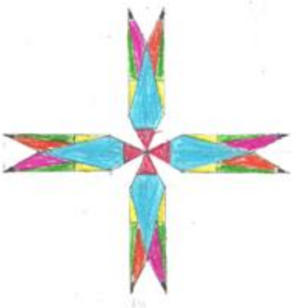
Friso 8

Anexo 8 – Tarefa 6: Rosáceas

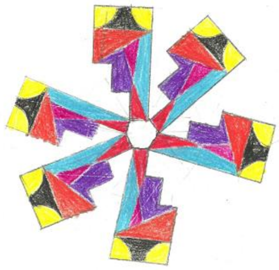
Observa e analisa as rosáceas que se seguem. Escolhe cinco, e para cada uma delas

1. Identifica e caracteriza as isometrias;
2. Descreve, se possível por mais do que um processo, como poderias obter cada uma das rosáceas escolhidas

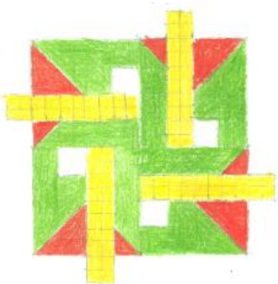
Rosácea1



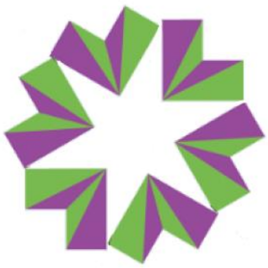
Rosácea2



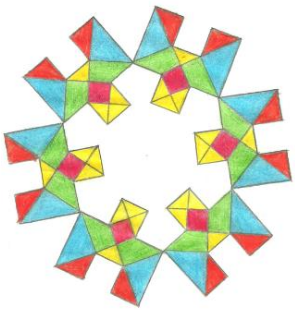
Rosácea3



Rosácea4

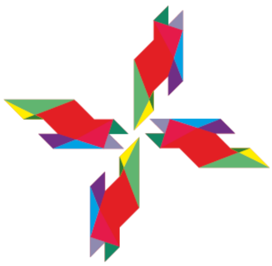


Rosácea5



Rosácea6

Rosácea7



Rosácea8

Anexo 9 – Questionário Final

QUESTIONÁRIO FINAL

Este questionário tem como objetivo principal perceber a tua opinião e a forma como percecionaste a abordagem do tópico " Isometrias". Tenta ser coerente e rigoroso(a) nas tuas respostas.

I. Identificação

Nome: ____

II. Interdisciplinaridade entre Matemática e educação visual

1. Para cada afirmação, seleciona a opção que consideres mais adequada.

A execução das tarefas em educação visual…

	Não tenho opinião	Discordo totalmente	Não concordo	Concordo	Concordo totalmente
… ajudaram-me a entender melhor as isometrias	☐	☐	☐	☐	☐
… tornou o tema das isometrias mais interessante para mim	☐	☐	☐	☐	☐
… tornou-me mais confiante na execução das tarefas em Matemática	☐	☐	☐	☐	☐

2. Gostarias de repetir a experiência com outros conteúdos de Matemática?

Sim ☐ Não ☐ Porquê?

____

____

____

____

____

III. Criatividade em Matemática

3. Tendo por base as tarefas executadas na aula de Matemática, sobre isometrias, responde às questões que se seguem:

3.1. Consideras a Matemática criativa? Sim ☐ Não ☐ De que forma?

____

____

3.2. As tarefas propostas estimularam a tua criatividade em Matemática?

Sim ☐ Não ☐ De que forma?

____

____

____

____

____

3.3. Consideras que melhoraste a tua criatividade em Matemática? Sim ☐ Não ☐

De que forma?

____

____

____

IV. Capacidades específicas e transversais

V. Para cada afirmação, seleciona a opção que consideres mais adequada .

A execução das tarefas ajudaram-me a desenvolver competências Matemáticas ao nível de:

	Não tenho opnião	Discordo totalmente	Discordo	Concordo	Concordo totalmente
Caraterização das isometrias	☐	☐	☐	☐	☐
Exploração de rosáceas	☐	☐	☐	☐	☐
Exploração de frisos	☐	☐	☐	☐	☐
Capacidade de comunicar e argumentar	☐	☐	☐	☐	☐
Construção de uma visão mais positiva da Matemática	☐	☐	☐	☐	☐

VI. Consideras importante a utilização do GeoGebra na execução das tarefas? Porquê?

VI. Qual foi a tua maior dificuldade na execução das tarefas solicitadas na disciplina de Matemática, relativamente às isometrias?

Compreensão das tarefas	☐
Complexidade das tarefas	☐
Pouca criatividade	☐
Falta de domínio do GeoGebra	☐
Pouco tempo disponível para a execução das tarefas	☐

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo 10 – Pedido de autorização aos encarregados de educação

Exmo(a). Sr(a). encarregado de educação

Eu, Maria Elisabete Gomes de Oliveira Amaral, venho por este meio, solicitar a sua autorização, para a participação do seu educando num estudo a realizar no âmbito de um curso de Mestrado da Universidade de Aveiro. Solicito ainda a autorização para registar essa participação em suporte de vídeo/áudio.

Aluno	Assinatura do encarregado de educação	Autorização
Aluno a		SIM ☐ NÃO ☐
Aluno b		SIM ☐ NÃO ☐
…		

_____/03/2012

A professora: __________________________