CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Repositório Institucional da Universidade de Aveiro

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Núm. 33.1 (2015): 127-150
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental

Designing a questionnaire for assessing the didactic-mathematical knowledge on elementary algebraic reasoning

Juan D. Godino, Lilia P. Aké, Ángel Contreras, Carmen Díaz, Antonio Estepa, Teresa F. Blanco, Eduardo Lacasta, Aitzol Lasa, Teresa Neto, Luisa Oliveras, Miguel R. Wilhelmi
Proyecto VRAE (MINECO), Universidad de Granada
jgodino@ugr.es

RESUMEN • La promoción del pensamiento algebraico en alumnos de primaria requiere implementar acciones formativas específicas para los profesores, lo que a su vez implica elaborar instrumentos de evaluación del estado de sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre el tema. En este trabajo presentamos resultados del estudio realizado para la construcción de un cuestionario de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de estudiantes de magisterio sobre razonamiento algebraico elemental. Describimos las categorías de conocimientos algebraicos tenidas en cuenta (estructuras, funciones y modelización) y las categorías de conocimientos didácticos (facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Así mismo se describen y analizan las tareas incluidas en el cuestionario informando de su validez de contenido.

PALABRAS CLAVE: razonamiento algebraico; formación de profesores; evaluación; análisis de tareas

ABSTRACT • Promoting algebraic thinking in elementary school pupils requires implementing specific training activities for teachers, which in turn involves developing tools to assess their didactic-mathematical knowledge about this subject. In this paper we present results of a study aimed to build a questionnaire for assessing the didactic-mathematic knowledge of prospective primary teachers on elementary algebraic reasoning. We describe the categories of algebraic knowledge (structures, functions and modeling), as well as the categories of didactical knowledge (epistemic, cognitive, instructional and ecological facets) taken into account. We also describe and analyze the tasks included in the questionnaire reporting its content validity.

KEYWORDS: algebraic reasoning; teachers' education; assessment; task design

Fecha de recepción: abril 2014 • Aceptado: noviembre 2014

Para citar: Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2014). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, pp. 127-150

INTRODUCCIÓN

Diversas propuestas curriculares e investigaciones resaltan el interés de desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros niveles de educación primaria (NCTM, 2000; Cai y Knuth, 2011), lo que requiere la formación de los profesores en los aspectos didáctico-matemáticos de dicho tema. Como afirman Branco y Ponte (2012), los futuros docentes deben tener conocimientos sobre *álgebra y* sobre lo que implica su enseñanza en la escuela primaria para que sean capaces de movilizar más tarde, en su práctica, la creación de situaciones de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico en sus alumnos. Los maestros necesitan estar capacitados para crear oportunidades de promover el razonamiento algebraico: «algebrizar» problemas aritméticos, transformándolos de tal manera que ofrezcan oportunidades para desarrollar el razonamiento algebraico en los niños (Carraher y Schliemann, 2007). Los aprendizajes de hoy se deben desarrollar teniendo siempre presentes los aprendizajes futuros, y es evidente que el progresivo dominio del lenguaje algebraico constituye una pieza clave de la competencia matemática.

La formación de profesores implica elaborar, además de situaciones didácticas adecuadas que promuevan la reflexión y evolución de sus conocimientos sobre el álgebra elemental, instrumentos de evaluación del estado de tales conocimientos. En este trabajo abordamos el problema del diseño de un cuestionario para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de maestros en formación sobre razonamiento algebraico elemental. Las tareas que se proponen pueden ser usadas no solo con la finalidad de evaluar, sino también para promover la evolución de los conocimientos en una situación de reflexión y discusión de las respuestas dadas a las tareas del cuestionario. Este uso instruccional de las tareas descritas no se desarrolla en este artículo.

El diseño del instrumento se fundamenta en el modelo de razonamiento algebraico elemental (RAE) (Godino, Castro, Aké, Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y en el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) propuesto en Godino (2009).

El artículo queda organizado en las siguientes secciones: en la sección 2 se describe brevemente el marco teórico y la metodología; en la sección 3 se describen las categorías de conocimientos didáctico-matemáticos que se tienen en cuenta para la selección de las tareas; en la sección 4 se realiza el análisis a priori de las diez tareas seleccionadas, informando de las respuestas esperadas, los objetos y procesos movilizados en la resolución, el nivel de algebrización atribuible y la clasificación de los distintos ítems según las variables consideradas, lo cual permite informar de la validez de contenido del cuestionario. La última sección incluye una síntesis y reflexiones finales.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El trabajo se basa en la aplicación de dos tipos de herramientas teóricas: las relacionadas con la conceptualización del razonamiento algebraico elemental y el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos.

Razonamiento algebraico elemental (RAE)

Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar (Kieran, 2007; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Kaput, 2008; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011; Chevallard y Bosch, 2012). Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica lo constituyen los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, etc.), a clases o tipos de tales objetos. En la perspectiva del «álgebra temprana» (Carraher y Schliemann, 2007), el reconocimiento de lo general es condición previa de la expresión de dicha generalidad. Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros. «Esto significa que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas (esto es, se suma, resta, divide, etc., incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos)» (Radford, 2010: 2).

Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, el de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y el de las propiedades de las estructuras que se generan. En relación con el pensamiento relacional, la investigación sobre álgebra temprana se ha interesado por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005; Stephens, 2006; Molina, 2009).

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) proponen un modelo para caracterizar el RAE en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, y los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica. Concretamente, Godino *et al.* (2014) proponen los siguientes rasgos característicos de los niveles de algebrización:

> Nivel 0: Se opera con objetos particulares con lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
> Nivel 1: Primer encuentro con el «número general», identificación de propiedades generales de las estructuras algebraicas de N, la igualdad como equivalencia. O sea, adquisición de los primeros pasos del pensamiento relacional.
> Nivel 2: Primer encuentro con la representación alfanumérica de ecuaciones y funciones y simplificación de expresiones.
> Nivel 3: Primer encuentro con el tratamiento de las incógnitas y variables aplicando propiedades estructurales (cancelación, sustitución…) y la modelización algebraica y funcional.

La propuesta de considerar niveles de algebrización de la actividad matemática puede ayudar a tomar conciencia de brechas o discontinuidades en la progresión del aprendizaje del álgebra. Tales brechas se refieren al uso de distintos registros de representación semiótica y su tratamiento, así como a la intervención y puesta en relación de objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de mayor grado de generalidad. El análisis didáctico focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos.

Conocimientos didáctico-matemáticos (modelo CDM)

En Godino (2009) se propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que integra, organiza y extiende otros modelos, en particular el modelo MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) de Ball *et al.* (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008). Este modelo está basado en el marco teórico para la didáctica de las matemáticas «enfoque ontosemiótico» del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). La noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011), sus facetas, componentes y criterios se pueden usar para categorizar los conocimientos del profesor de matemáticas, como se indica en la figura 1 (modelo CDM). En dicha figura se observa que se tienen en cuenta las categorías de «conocimiento común» y «conocimiento en el horizonte matemático» propias del modelo MKT, las cuales son interpretadas de una manera específica.[1]

Se asume que el conocimiento didáctico especializado, propio del profesor, supone e implica el dominio del contenido matemático compartido con los alumnos de la etapa educativa correspondiente (conocimiento común) y el propio, al menos, de la etapa educativa posterior (conocimiento avanzado).

El modelo CDM integra el análisis de la actividad docente en el análisis didáctico general según las dimensiones cognitivo-afectiva, epistémico-ecológica e instruccional (interaccional-mediacional). Así, se tienen en cuenta aspectos relativos a:

– Los sujetos discentes: su implicación en el aprendizaje y la proximidad, en el sentido de Vygostky, del objetivo de aprendizaje.
– El docente: las estrategias de negociación de los significados y la gestión de los recursos temporales e instrumentales.
– Las matemáticas: la representatividad de los contenidos pretendidos y su adaptación al significado institucional de referencia, fijado por el currículo y el proyecto educativo para la etapa en la institución.

De esta forma, los criterios de *idoneidad didáctica* indicados (representatividad epistémica, proximidad cognitiva, implicación afectiva, negociación de significados en las interacciones didácticas, disponibilidad mediacional y adaptación ecológica) o su formulación articulada en tres grandes dimensiones (epistémica, cognitiva e instruccional) descrita por Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010), constituyen una guía para el diseño, implementación y evaluación de los planes de formación de los profesores, y para la reflexión e indagación de estos sobre su propia práctica. Así, por ejemplo, con relación a la faceta epistémica, en el diseño y puesta en marcha de un proceso de estudio, el docente debe explicitar los objetos, procesos y significados matemáticos puestos en juego en la práctica matemática, como aspecto central para la valoración de la idoneidad de dicho proceso y, en su caso, la determinación de adaptaciones y cambios para la mejora.

1. Carrillo, Contreras y Flores (2013) analizan la evolución del conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986) hacia la descripción del conocimiento de las matemáticas para la enseñanza (MKT), resaltando las limitaciones de este modelo para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas. Así, estos autores justifican la necesidad de un nuevo modelo, el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán, 2013), consistente con el desarrollo realizado desde el EOS.

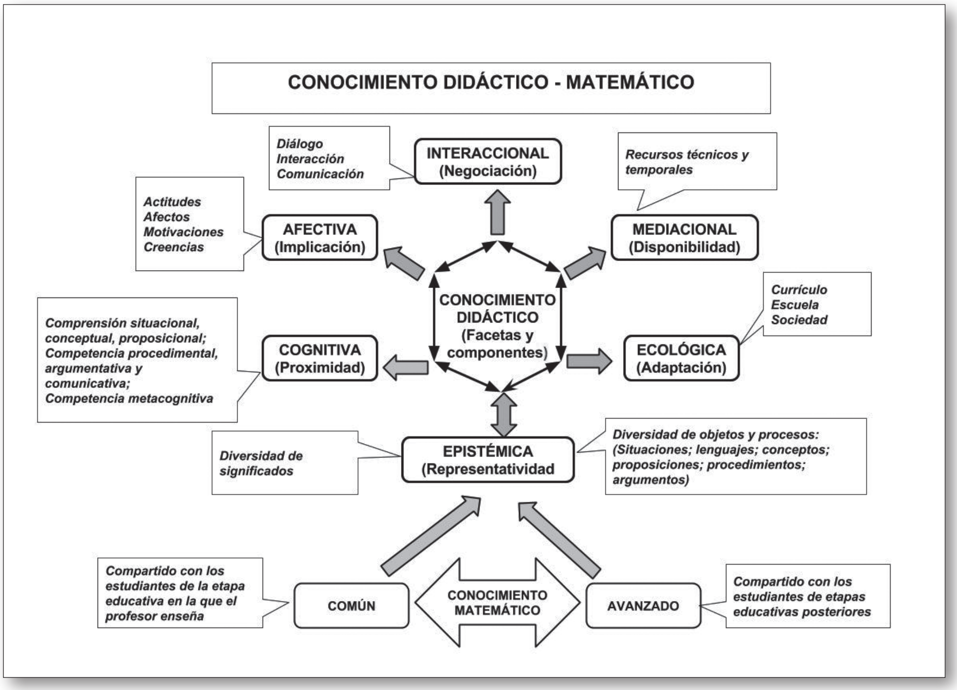


Fig. 1. Facetas y componentes del conocimiento didáctico-matemático (modelo CDM).

La aplicación del modelo CDM ayuda a formular cuestiones para caracterizar de manera sistemática los conocimientos del profesor de matemáticas en sus diferentes facetas y componentes. Tales cuestiones también se pueden usar para el diseño de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático, como se muestra en Godino (2009: 25-27).

Problema y metodología

Como hemos indicado, el problema que abordamos en este trabajo es el diseño de un cuestionario que permita evaluar los aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de los maestros en formación (MF) sobre el razonamiento algebraico elemental (CDM-RAE). Se trata de una fase del diseño de un modelo de formación de maestros sobre RAE que permita, en primer lugar, conocer el estado de los conocimientos en un momento dado (inicial o final de un proceso formativo), para posteriormente implementar acciones formativas fundamentadas.

Tras el estudio preliminar acerca del RAE y de los modelos de conocimientos profesionales del profesor de matemáticas, resumido en los apartados anteriores, el equipo de investigación ha realizado las siguientes acciones:

- Definir las variables que se deben tener en cuenta en el diseño del cuestionario.
- Recopilar un banco de tareas.
- Elaborar o reformular algunas de las tareas según el modelo del CDM-RAE.
- Seleccionar y analizar a priori una muestra de tareas.
- Aplicación piloto del cuestionario y redacción de la versión final de este.

La construcción de las tareas tiene en cuenta las relaciones entre el conocimiento matemático (en este caso algebraico) y el conocimiento didáctico especializado. Con dicha finalidad se incluye en las tareas un primer ítem orientado a evaluar el conocimiento del contenido algebraico y otros ítems orientados a distintas facetas del conocimiento didáctico (epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, instruccional (interaccional-mediacional) que involucran al contenido matemático correspondiente. Este diseño de las tareas es original, ya que usualmente las investigaciones encontradas suelen centrarse en evaluar el conocimiento del contenido algebraico.

CATEGORÍAS DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE RAE

Clasificamos el contenido que se ha de evaluar según dos variables: contenido algebraico y contenido didáctico. Para la variable *contenido algebraico* consideramos tres valores o categorías, en las cuales a su vez se pueden distinguir diversas subcategorías:

– *Estructuras*: relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones…
– *Funciones*: patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática…
– *Modelización*: problemas de contexto resueltos mediante el planteamiento de ecuaciones o relaciones funcionales.

Las tareas pueden involucrar contenido algebraico propio de educación primaria (conocimiento común del contenido) o propio de niveles superiores (conocimiento avanzado, por ejemplo, educación secundaria). El cálculo analítico puede tener lugar ligado a las estructuras, funciones y modelización, y ser realizado con lenguaje simbólico-literal o de otro tipo.

Para la variable *contenido didáctico* (que se refiere a un contenido algebraico, sea común o avanzado) consideramos en este trabajo las categorías siguientes:

– *Faceta epistémica*: reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización) y reconocimiento de niveles de algebrización.
– *Faceta cognitiva*: significados personales de los alumnos (conocimiento, comprensión y competencia sobre contenidos algebraicos elementales), conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
– *Faceta instruccional*: recursos para la enseñanza del álgebra en primaria (situaciones-problema, medios técnicos) y su adecuación al currículo escolar.

La evaluación del conocimiento didáctico-matemático del profesor debe tener en cuenta tanto el contenido algebraico en sí mismo (común y avanzado) como el conocimiento didáctico relativo a tales contenidos matemáticos. Usualmente las tareas incluirán apartados centrados en la solución de una tarea matemática (mediante la cual se evalúa el conocimiento del contenido matemático) y apartados que cuestionan alguno de los aspectos del conocimiento didáctico de los contenidos puestos en juego.

La tabla 1 resume las categorías que vamos a tener en cuenta en el diseño de tareas para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el RAE del profesor según el modelo descrito. Algunas de las facetas mencionadas no se tendrán en cuenta dado que el objetivo es elaborar un instrumento de medida que pueda ser respondido por escrito en un tiempo limitado (unas dos horas).

Tabla 1.
Categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre RAE

Contenido didáctico	*Contenido algebraico*					
	Estructuras (E)		Funciones (F)		Modelización (M)	
	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado
Epistémico (niveles de algebrización)	EPI-E1	EPI-E2	EPI-F1	EPI-F2	EPI-M1	EPI-M2
Cognitivo (significados personales)	COG-E1	COG-E2	COG-F1	COG-F2	COG-M1	COG-M2
Instruccional (situaciones y recursos)	INS-E1	INS-E2	INS-F1	INS-F2	INS-M1	INS-M2
Contenido algebraico (solo conocimiento común o avanzado)	ALG-E1	ALG-E2	ALG-F1	ALG-F2	ALG-M1	ALG-M2

ANÁLISIS A PRIORI DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO CDM-RAE

En este apartado enunciamos y analizamos las tareas que hemos seleccionado para formar parte del cuestionario CDM-RAE. En cada tarea incluimos *a*) la solución esperada (en algunos casos puede ser más de una), *b*) los objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución, *c*) el nivel de algebrización correspondiente a la actividad matemática que se realiza y, por último, *d*) las categorías del conocimiento didáctico-matemático implicadas.

Las soluciones esperadas serán usadas como referencia para evaluar las respuestas de los estudiantes, las cuales se pueden calificar como correctas, incorrectas y parcialmente correctas, dado que tienen un carácter abierto y es posible apreciar el grado de corrección. Para fijar el criterio de calificación en algunos ítems, incluimos un ejemplo de respuesta parcialmente correcta dada por los estudiantes de una muestra piloto.

Para la selección de las tareas hemos partido principalmente del banco de ítems incluido en las tesis de Aké (2013) y de Branco (2013), modificando los enunciados e incluyendo nuevos ítems a fin de aumentar la validez de contenido del instrumento, según el análisis que hemos presentado en la sección 3.

Para poder cubrir todos los contenidos contemplados en la tabla 1 sería necesario construir una batería de instrumentos, incluyendo cuestionarios escritos y guiones de entrevistas. El objetivo de nuestra investigación es elaborar un único cuestionario escrito que pueda ser resuelto en un tiempo razonable, por lo que debemos tomar decisiones sobre las tareas que se deben incluir y los contenidos que finalmente estarán representados.

En este apartado analizamos los contenidos puestos en juego en las soluciones esperadas de las diez tareas seleccionadas e informamos de la validez de contenido del cuestionario, para lo cual clasificamos los distintos ítems según la tabla 1. La selección y redacción de los ítems ha sido resultado de las discusiones en el seno del equipo de investigación y de la aplicación de los ítems a muestras piloto de estudiantes de Magisterio de diversas universidades.

Tareas sobre estructuras

Tarea 1. Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria: ¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera? 8 + 4 = ___ + 5 Un alumno responde que el número es el 12. *a*) Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta. *b*) ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Solución esperada. Para la tarea 1 se espera que el maestro en formación (MF) indique que el alumno interpreta el signo = como resultado de la operación y no como relación de equivalencia. De hecho, es común observar escrituras del tipo «8 + 4 = 12 + 5 = 17 + 3 = 20» para referirse a una secuencia de sumas: ((8 + 4) + 5) + 3 = 20. La igualdad aritmética es interpretada como acción (Wilhelmi, Lacasta y Godino, 2007).

Objetos y procesos. La igualdad como equivalencia de expresiones en contraposición a la igualdad como resultado de una operación aritmética.

Nivel de algebrización. La actividad matemática que se requiere que realice el alumno es de nivel 1; supone atribuir al signo igual un significado diferente a «resultado de una operación aritmética». La actividad matemática que hace el alumno que responde 12 es de nivel 0 de pensamiento protoalgebraico. Al MF se le está requiriendo que reconozca la manifestación de un nivel 0 de pensamiento protoalgebraico en el alumno de primaria cuando la tarea requiere poner en juego un nivel 1. No quiere decir necesariamente que el estudiante lo formule en estos términos, salvo que haya recibido una instrucción específica en los niveles de algebrización. Se esperan expresiones del tipo «manejo aritmético», «la igualdad como resultado, no como equivalencia», etc.

Categorías de CD. La tarea 1 evalúa la categoría COG-E1 de CDM: faceta cognitiva; contenido algebraico sobre estructuras, etapa de primaria.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

1*a*) «El alumno realizó la suma de 8 + 4 sin tener en cuenta lo que hay detrás del símbolo =».

1*b*) «La interpretación que realiza del signo = es que se debe obtener un resultado exacto al realizar una operación aritmética. Una suma de sumandos da como resultado un número».

No hay en estas respuestas un indicador de la relación entre la introducción del signo igual en el contexto escolar (como resultado de una acción) y su uso en esta cuestión como equivalencia.

Tarea 2. Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión «13 + 11 = 12 + 12» es verdadera o falsa. El alumno responde lo siguiente: «Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo)». *a*) Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta. *b*) ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

Solución esperada. Para la tarea 2 se espera que el MF indique que el alumno está aplicando propiedades de las operaciones aritméticas (elemento neutro de la suma, conmutativa, asociativa), así como el significado del signo igual como equivalencia, no como resultado de la operación.

$$12 + 12 = [12 + 12 + (1 - 1)] = (12 + 1) + (12 - 1) = 13 + 11$$

Objetos y procesos. Uso de la igualdad como equivalencia de expresiones; propiedades de la adición de números naturales (elemento neutro, conmutativa, asociativa).

Nivel de algebrización. La actividad matemática que hace el alumno es de nivel 1 de algebrización. Se está requiriendo al MF que reconozca dicho nivel basándose en los objetos que el alumno pone en juego.

Categorías de CDM. El ítem *a*) evalúa la categoría COG-E1 de CDM: faceta cognitiva; contenido algebraico sobre estructuras, etapa de primaria. El *b*) implica reflexión epistémica (reconocimiento de propiedades de la adición) (EPI-E1).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

2*a*) «El razonamiento que ha seguido ha sido que al 13 le ha quitado 1 para añadírselo al 11 y de esta manera obtener del 13 un 12 y del 11 un 12 también. Ahora puede decir que está sumando 12 + 12 = 12 + 12, por lo que le da como resultado que es verdadero». El estudiante no hace pues referencia a ninguna propiedad.

2*b*) «La asociativa». El estudiante no hace referencia a otras propiedades que también son necesarias (elemento neutro, conmutativa).

Tarea 3. Un alumno formuló la siguiente conjetura:
«Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número».
a) ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
b) ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

Solución esperada. Para la tarea 3 se espera que el MF indique que la conjetura formulada por el alumno es correcta y válida para todos los números naturales, elaborando una justificación basada en el uso de una variable para expresar «un número natural cualquiera»:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1);\ 3(n + 1)\ /3 = n + 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

La justificación de la conjetura que puede dar el alumno de primaria estará basada muy posiblemente en la comprobación de algunos casos particulares.

Objetos y procesos. La solución esperada requiere la representación con una variable de un número natural cualquiera, y los dos números siguientes, operar con dichas expresiones y simplificar el resultado, identificándolo con el número intermedio.

Nivel de algebrización. Se pone en juego un nivel 3 de algebrización.

Categorías de CDM. El ítem *a*) hace referencia a un enunciado de un alumno y su posible justificación basada en una inferencia empírica, lo cual involucra conocimiento didáctico de tipo cognitivo, COG-E1. El ítem *b*) requiere que ponga en juego su conocimiento sobre propiedades estructurales a un nivel más avanzado que el requerido en primaria (ALG -E2).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

3*a*) «La conjetura es correcta. El alumno ha realizado una media; al dividir la suma de tres números consecutivos por el número de números que ha sumado (3) se obtiene una media que coincide con el valor del segundo número». Supone una interpretación, antes que una justificación.

3*b*) «Su razonamiento puede ser dado por una división. Haciendo la operación de división te sigue saliendo el segundo número 1, 2, 3; 6/3 = 2». Así, el estudiante hace un razonamiento sobre un único caso particular.

Tarea 4. Observa detenidamente la siguiente suma y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? ¿Cómo sabes que son correctos? Explica tu razonamiento.
b) ¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa resolución y qué nociones algebraicas se usarían?
c) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas que podría dar un alumno de primaria a este problema?

Solución esperada. La solución a la tarea 4 (C = 5; B = 8; A = 9) se puede obtener mediante razonamiento aritmético. Recurriendo a las tablas de multiplicar se establece que el valor de C puede ser 0 o 5. Como cada letra debe tener un valor diferente, el valor de C debe ser 5 (si se considerara $C = 0$ implicaría que $B = 0$). El valor de B se determina considerando que el triple de un número más una «unidad» da como resultado un número de dos cifras que termina en cinco. El único valor que cumple tal condición es el ocho (8 × 3 + 1). Finalmente se halla el valor de A siguiendo el mismo razonamiento, con lo que se obtiene que el único valor posible para A es el nueve (9 × 3 + 2).

También se puede resolver la tarea (apartado b) planteando ecuaciones lineales con una incógnita, como se indica a continuación. Para hallar el valor de C, se considera la condición que se establece en la primera columna, la de las unidades: 3C = C, o 3C = 10x + C, de donde C = 0 o C = 5, pero de la lectura de la segunda columna (la de las decenas) se obtiene que C no puede valer cero, así que C = 5. Para hallar el valor de B, se considera el caso posible 3B + 1 = 20 + C, donde C = 5**.** Se determina que 3B + 1 = 25 cumple con las condiciones establecidas en la columna de las decenas, así se obtiene que B = 8. Para hallar el valor de A se puede establecer: 3A + 2 = 20 + A, de donde el único valor posible para A es 9.

Una tercera solución a la tarea 4, más algebrizada que las anteriores, se puede obtener usando la expresión polinómica de los números naturales. La suma se puede expresar del siguiente modo: $3(100A + 10B + C) = 2000 + 100A + 10C + C$, de donde se obtiene $200A + 30B - 8C = 2000$ considerando que $A \neq B \neq C$ cuyos valores pertenecen a [0,9].

Objetos y procesos. El uso de un lenguaje alfanumérico en el enunciado y el uso de letras como incógnitas en ecuaciones de primer grado, en las justificaciones 2 y 3, se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico en la resolución de la tarea 4.

Nivel de algebrización. La actividad matemática que se realiza en cada una de las resoluciones involucra diferentes niveles de algebrización: en la solución 1 se usan propiedades del algoritmo de la suma (nivel 1). En la solución 2 se plantean ecuaciones del tipo 3B + 1 = 20 + C (nivel 2; C tiene ya un valor fijado, 5), mientras que en la solución 3 se plantean ecuaciones con incógnitas y se opera con ellas (nivel 3).

Categorías de CDM. Si la cuestión *a*) se resuelve planteando ecuaciones la actividad involucra conocimientos del tipo ALG-E1. La cuestión *b*) involucra la faceta epistémica del conocimiento didáctico (EPI-E1), mientras que el apartado *c*) implica movilizar conocimiento de la faceta cognitiva (COG-E1).

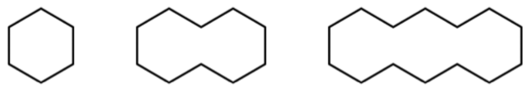
Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

4*a*) «C = 5; B = 8; A = 9. Son correctos porque al probar los números del 0 al 9 esos son los que cumplían la regla». El estudiante no razona si es la única solución ni explicita el procedimiento de cálculo (que en este caso es por ensayo-error).

4*b*) «2C = 10 + C; 3B + 1 = 20 + B; 3A + 2 = 20 + A». El estudiante no obtiene la solución del sistema que plantea, ni explicita los objetos matemáticos involucrados.
4*c*) «Le daría valores numéricos a las letras, pero sin razonar, es decir, al azar sin razonar por qué le da esos valores». El estudiante no percibe el método de ensayo-error como pertinente en la etapa.

Tareas sobre funciones

Tarea 5. Considera la siguiente secuencia de figuras.



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

Solución esperada. a) El MF (o el niño al que se proponga esta tarea) dibujará las dos siguientes figuras poniendo a la derecha otro hexágono, suprimiendo el lado común con el último hexágono trazado, y así sucesivamente. Para la cuarta figura se necesitan 18 segmentos y para la quinta, 22. Se puede obtener ese número contando los segmentos sobre las figuras una vez trazadas, o usando una estrategia de conteo viendo que se trata de hexágonos y restando el número de segmentos suprimidos en el interior de la figura. *b*) Se puede incluir un nuevo apartado que pida hallar el número de segmentos para formar la figura en una posición elevada, por ejemplo, 46. O bien, directamente pedir formular una regla que permita hallar el número de segmentos necesarios para la figura en una posición n cualquiera. En este caso no es posible obtener el número de segmentos mediante una estrategia de conteo directo sobre las figuras. Es necesario identificar una regla del tipo:

La figura en la posición n se compone de n hexágonos, luego para ello se requieren 6n segmentos. Pero se deben suprimir los lados interiores, cuyo número es $n - 1$; como esos lados interiores corresponden a dos hexágonos contiguos se deben descontar $2(n - 1)$ segmentos. Luego el número de segmentos necesarios sigue la regla: $N(n) = 6n - 2(n - 1) = 4n + 2$.

Para el caso $n = 46$, $N(46) = 186$.

También se puede ver que la figura está compuesta por n hexágonos a los cuales se les quitan dos lados (4n), añadiendo los dos segmentos de los extremos, $4n + 2$.

Objetos y procesos.

- Se debe encontrar una regla general para hallar el número de segmentos, expresada con lenguaje ordinario, o con lenguaje simbólico-literal.
- Función afín, variable independiente, n (número de orden de la figura), variable dependiente, $N(n)$ (número de segmentos necesarios para construir la figura de orden n.
- Justificación deductiva de la validez de la fórmula.

Nivel de algebrización. La realización del ítem *a*) no requiere poner en juego conocimientos algebraicos, representación icónica y conteo aritmético (nivel 0 de pensamiento protoalgebraico).

La respuesta esperada del ítem *b*) requiere conocimientos de nivel 2 (en el caso de que se formule la regla, $N(n) = 6n - 2(n - 1)$), o bien nivel 3 si se opera con la variable para obtener la expresión canónica, $4n + 2$ (en este caso se pone en juego un cálculo analítico).

Categorías de CDM. El apartado *a*) se resuelve de manera aritmética (recuento); no involucra contenido algebraico ni didáctico. El apartado *b*) es de tipo instruccional (INS-F2, al pedir la formulación de una tarea con unas condiciones determinada para su uso educativo). El apartado *c*) supone una reflexión epistémica sobre los tipos de conocimientos puestos en juego (EPI-F2). La tarea también se puede proponer a alumnos de primaria, aunque en ese caso es posible que formularan la regla general con lenguaje natural.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

5*a*) «18, 22». El estudiante no justifica cómo alcanza este resultado.

5*b*) «Pediría que sin dibujar me averiguasen cuántos segmentos tendrían los siguientes términos de la sucesión». La respuesta busca la simbolización, pero no prevé una cuestión que la precise sin ser impuesta.

5*c*) «La utilización de una fórmula para hallar el número de segmentos». El estudiante no explicita la fórmula ni tan siquiera qué habría que tener en cuenta para determinarla.

Tarea 6. Observa la siguiente secuencia de tres figuras formadas por puntos:

a) ¿Es posible determinar el número de puntos que tendría la figura que estuviera en cualquier posición de esta secuencia, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras? Justifica la respuesta.
b) Indicar las técnicas o diferentes maneras mediante las cuales se puede resolver el problema.
c) ¿Consideras que esta tarea se puede proponer a alumnos de tercer ciclo de primaria? ¿Cómo podrían abordar la solución?

Solución esperada. Se podría analizar cómo cambia el número de puntos respecto a la posición de la figura usando la siguiente tabla:

Posición	# de puntos	Observación
1	3	$2^2 - 1$
2	8	$3^2 - 1$
3	15	$4^2 - 1$
4	24	$5^2 - 1$
5	35	$6^2 - 1$
…	…	…

Y conjeturar que la expresión que describe tal relación es: $f(n) = (n + 1)^2 - 1$

Así mismo, de manera visual, se puede observar que cada figura tiene forma cuadrangular de lado $(n + 1)$, siendo n el número de orden de la figura, y se ha suprimido un punto al cuadrado. No se espera que el estudiante demuestre la validez general de la conjetura para cualquier número natural usando el principio de inducción matemática, sino que argumente mediante el uso de un elemento genérico representado por la letra n.

Para el ítem *b*) se espera que el estudiante haga referencia al uso de un procedimiento inductivo como el indicado en la tabla, o un razonamiento deductivo basado en las características visuales de la tarea. En el ítem *c*) se espera que los alumnos de primaria puedan usar un procedimiento inductivo y sean capaces de describir un patrón de formación de las sucesivas figuras.

Objetos y procesos. En esta solución se propone una tabla para el registro del número de puntos de acuerdo con la posición de la figura. Interviene la noción de función y de variable (variable independiente, número de orden de la figura, y dependiente, el número de puntos); además se reconoce la regla general del comportamiento del patrón y se expresa en un lenguaje simbólico-literal.

Nivel de algebrización. Se asigna a esta actividad un nivel 2 de algebrización. Cuando el estudiante es capaz de realizar transformaciones sobre la expresión hallada, es decir, pasar de la expresión $f(n) = (n + 1)^2 - 1$ a la expresión $f(n) = n^2 + 2n$, entonces se ponen en juego características propias del nivel 3 de algebrización.

Categorías de CDM. El ítem a) involucra conocimientos del contenido matemático de tipo funcional propio de secundaria (ALG-F2); el ítem *b*) implica una reflexión epistémica (reconocimiento de diferentes procedimientos para realizar una tarea) (EPI-F2), y el ítem *c*) moviliza conocimiento de tipo cognitivo (habilidades de los alumnos de primaria) (COG-F1).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

6*a*) «Sí, multiplicando los números de la base por los de la altura y restando 1. Ej.: $(4 \times 4) - 1 = 15$». En la respuesta está ausente la justificación.

6*b*) «Sumando todos los puntos o, como en la respuesta anterior, multiplicando los puntos de la base por los de la altura y restando 1». La respuesta no permite saber si el estudiante podría, por ejemplo, determinar los puntos de la figura 50, ya que no asocia el número de puntos de la base y la altura con el lugar que ocupan en la serie.

6*c*) «Sí se puede proponer, ya que no es una tarea compleja y existen varias formas de obtener la solución. La solución la pueden obtener sumando o multiplicando». Identifica la adecuación únicamente con las propiedades aritméticas, sin tener en cuenta el contexto, la generalización, ni la representación simbólica, etc.

Tareas sobre modelización

Tarea 7. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.

a) ¿Cuánto dinero recibió?
b) ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
c) ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

Solución esperada 1. El ahorro de 4 €/día durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160 €. Con esta cantidad pudo comer durante 20 días más. El coste diario real fue de 160 €/20 días = 8 €/día. Como los días reales fueron 60, el presupuesto total será 60 días × 8 €/día = 480 €.

Solución esperada 2. Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = \frac{X}{40}$. Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{X}{60}$; $40x = 60y$; además $y = x - 4$; $40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$

Cantidad recibida: $12 \times 40 = 480$; 480 €.

Objetos y procesos. En la solución 1 se usan operaciones aritméticas aplicadas a números particulares, mientras que en la 2 se plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas representadas simbólicamente. Se opera con las incógnitas para obtener la cantidad desconocida.

Nivel de algebrización. La solución 1 no involucra razonamiento algebraico, mientras que la 2 implica un nivel 3 de algebrización.

Categorías de CDM. El apartado *a*) evalúa conocimiento del contenido matemático, que será de naturaleza algebraica si el estudiante resuelve la tarea planteando ecuaciones (ALG-E2). Los ítems *b*) y *c*) suponen una reflexión de tipo epistémico (reflexión sobre los métodos y los objetos matemáticos involucrados) (EPI-E2).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

7*a*) «40 × 4 = 160 €; 60 – 40 = 20, días más; 160: 20 = 8 €/día. 8 × 40 = 320 € le dieron sus padres».

7*b*) «Sí, como lo he resuelto yo». No hay en esta respuesta referencia a las características que su resolución posee para ser calificada como «aritmética».

7*c*) «40.x – 160 = 60.x». Se reconoce como una solución algebraica, aunque errónea e incompleta.

Tarea 8. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

a) Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.

b) Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.

Solución esperada. Para la expresión 1) se espera que el MF reconozca la expresión de una ecuación lineal con una incógnita. Un ejemplo típico podría ser:

> «Por la compra de las entradas para el cine de 4 personas y unos refrescos hemos pagado en total 25 €. Si los refrescos costaron 5 €, ¿cuánto costó cada entrada al cine?».

Para la expresión 2) se espera que el MF reconozca la expresión de una función afín que permite hallar el valor de una variable y en función de otra variable *x*. Ejemplo de situación que lleva al planteamiento de ese tipo de funciones:

> «Cada minuto que pasa una tortuga recorre en línea recta 2 m. Si al principio la tortuga estaba a una distancia de 1 m, ¿a qué distancia y estará transcurridos *x* minutos?».

Para la expresión 3 se espera reconocer la expresión de una fórmula para calcular el valor de una variable *P* en función de otras dos, *c* y *l*. Por ejemplo, podría ser la fórmula de cálculo del perímetro de un rectángulo de base *c* y altura *l*.

Objetos y procesos. Ecuación de primer grado; función afín; fórmula de una función con dos variables independientes; proceso de enunciado de situaciones-problemas.

Nivel de algebrización. Los tres apartados de la tarea están enunciados con lenguaje alfanumérico; se requiere un proceso de interpretación de las expresiones algebraicas y de modelización, pero no se realiza ningún tipo de cálculo analítico. Se puede considerar que la actividad matemática que se pone en juego es de nivel 2.

Categorías de CDM. La realización de esta tarea pone en juego conocimientos de varias categorías: INS, porque se pide al MF que enuncie problemas que pueden ser usados con fines instruccionales, de tal modo que requieran usar una ecuación, una función o una fórmula (criterio de una función de dos variables). De este modo se involucran contenidos algebraicos de estructuras (E, ecuaciones), funciones (F) y modelización (M). Por otra parte, los conocimientos matemáticos implicados son más propios de secundaria que de primaria, pero las situaciones y las técnicas de resolución pueden formularse de modo que las puedan abordar alumnos de primaria. Por tanto, de acuerdo con las notaciones introducidas en la tabla 1, esta tarea se puede incluir en las siguientes categorías: INS-E1, INS-E2, INS-F1, INS-F2 y INS-M2.

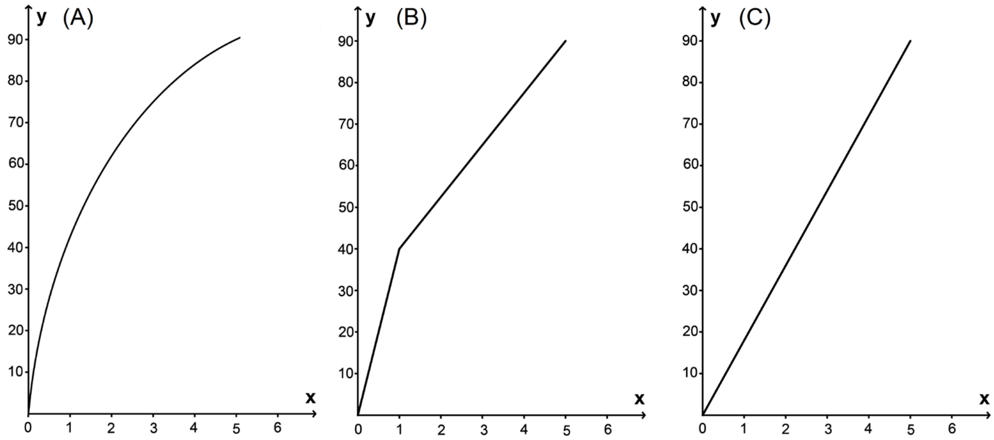
Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

8*a*) «1) Que la *x* vale $\frac{25-5}{4}$; 2) que hay dos incógnitas y que si no nos dan una habrá más de una solución; 3) que cuantas más incógnitas, más soluciones posibles». El estudiante realiza una interpretación de las tres expresiones como «ecuaciones», sin referencia a nociones tales como relación, función o fórmula, asociando siembre las expresiones a la búsqueda de «números desconocidos».

8*b*) El estudiante enuncia uno o dos problemas con sentido.

Tarea 9. Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto.

a) Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen de agua en litros.



Respuesta: ______; Justificación:

b) ¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?

c) ¿Consideras que esta tarea es adecuada para ser propuesta a niños de educación primaria? Justifica tu respuesta.

Solución esperada. La solución esperada para el ítem *a*) puede articularse en los siguientes términos. Como el caudal es constante, 18 litros por minuto, la variación del volumen que se va llenando es también constante, $V = 18t$; se trata de una función lineal cuya gráfica es la C. Se puede también dar varios valores a *t*, calcular *V* y representar dichos pares de números en el diagrama, observándose que los puntos están alineados, incluyendo el origen de coordenadas. La gráfica A no puede ser porque a medida que avanza el tiempo la velocidad de llenado es menor, lo cual requeriría que el grifo fuera echando menos agua a medida que pasa el tiempo. La gráfica B no puede ser porque a partir del segundo minuto cambia la velocidad de llenado del depósito, lo que no se corresponde con el enunciado.

Para el apartado *c*) se espera indicar que en el último curso de primaria se estudian ejemplos de uso de la función lineal (proporcionalidad simple directa); los alumnos también conocen las representaciones cartesianas, de modo que tienen la estrategia de construir una tabla de valores, representarlos en una gráfica y comprobar que se corresponde con la gráfica C.

Objetos y procesos. En el apartado *b*) se espera que identifiquen la función lineal, variables independiente y dependiente. Gráficas cartesianas. Representación tabular. Relación entre pendiente de una curva y tasa de variación de una función.

Nivel de algebrización. Si se razona en términos de propiedades de la tasa de variación de una función, ello supone un claro conocimiento algebraico (nivel 3), mientras que si se razona mediante una tabla de valores y la representación de los puntos, se tiene un pensamiento no plenamente algebraico (nivel 2).

Categorías de CDM. El ítem *a*) involucra conocimientos de tipo algebraico (funciones, representación cartesiana) (ALG-F2) y modelización (llenado de un depósito) (ALG-M2). Puede ser propio de secundaria, posiblemente también se pueda proponer en el último curso de primaria. El ítem *b*) supone una reflexión de tipo epistémico (reconocimiento de tipos de objetos y proceso) (EPI-M2) y el *c*) implica conocimiento instruccional (INS-M1).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta:

9*a*) «A y C, ya que el agua que cae es siempre la misma y es constante». Interpreta que la gráfica A también puede representar una función «de llenado constante», porque como la C, a diferencia de la B, no tiene «quiebres, ángulos», es decir, es «suave». En resumen, confunde la pendiente constante con la cualidad de derivable.

9*b*) «[Dos conocimientos:] 1) Regla de 3: $\frac{18l.}{1min.} = \frac{90l.}{x\ min.} \rightarrow x = \frac{90}{18} = 5$; 2) Álgebra: Función constante $18x = 90$». El estudiante confunde función con ecuación.

9*c*) «Sí, de 2.º ciclo de primaria en adelante, porque ya saben dividir». El estudiante omite la necesaria interpretación de la gráfica, interpretando que es «transparente».

Tarea 10. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:

«En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa.
¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones. Supón que en una bolsa caben 4 kg de peras.
b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.

Solución esperada. Para el apartado *a*) se puede esperar como variante del problema un enunciado similar al siguiente: «¿Podrías dar una regla para calcular el coste de una bolsa con 5, 10, 15, …, kg de peras?».

Para el ítem *b*) la solución se puede dar de manera tabular:

Kg	1	2	3	4	5	6	7
Coste	2×1+0,1	2×2+0,1	2×3+0,1	2×4+0,1	2×5+2×0,1	2×6+2×0,1	…

O bien, describiendo la regla que sigue la función, dependiendo del número de bolsas que se necesiten: $y = 2x + 0{,}1$, si $0 < x \leq 4$; $y = 2x + 2 \times 0{,}1$, si $4 < x \leq 8$, ….,

No se espera que los estudiantes enuncien el criterio de la función usando la función parte entera: $y = 2x + (E[x/4] + 1) \times 0{,}1$ con $E[x]$, función parte entera.

Objetos y procesos. Intervienen los conceptos de variable independiente, dependiente y la regla de correspondencia, que en este caso sería una función definida a trozos, o usando la función parte entera.

Nivel de algebrización. El reconocimiento de una regla para calcular el coste de cualquier cantidad de peras ya supone un nivel incipiente de razonamiento algebraico. La expresión tabular indicada supone un nivel 1, mientras que la descripción de la función lineal a trozos de la forma $y = 2x + 0{,}1$ supone un nivel 2. El uso de la función parte entera manifiesta un conocimiento de nivel 3.

Categorías de CDM. *a*) Conocimiento de tipo instruccional, al pedir enunciar una tarea con cierta finalidad; INS-M1; INS-F2. *b*) Conocimiento de contenido matemático y reflexión epistémica; ALG-F1; EPI-F1.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta.

10*a*) «En una tienda venden el kg de peras a 3 € y cobran la bolsa a 50 céntimos ¿cuánto costaría comprar 12 kg si en cada bolsa caben 4 kg?». Es una variante del problema inicial, pero no requiere movilizar las nociones de variable y función.

10*b*) «Resolución: 12 kg: 4 kg/bolsa = 3 bolsas. X = 3 €/kg 12 kg + 0,5 €/bolsa. 3 bolsas = 37,5 € nos cuesta comprar 12 kg. Hay que saber el conocimiento e interpretación de ecuaciones e incógnitas». Se resuelve el problema enunciado en a), pero no se reconocen los objetos algebraicos pretendidos.

Algunas características psicométricas del instrumento

Una vez elaborados y depurados los ítems, se aplicó una versión piloto del cuestionario a una muestra de futuros profesores. Esta primera administración ha permitido revisar la redacción de algunos ítems y la supresión e inclusión de otros nuevos.

El cuestionario final, descrito en este artículo, ha sido aplicado a una muestra de 91 estudiantes del tercer curso del grado de Educación Primaria. En la tabla 2 mostramos una estimación de los índices de dificultad obtenidos en cada ítem. Para la obtención de este índice se ha realizado una transformación de las puntuaciones originales (que oscilaban entre valores de 0, 1 y 2, según el grado de corrección de las respuestas). A partir de la media de puntuaciones de cada ítem y para facilitar la interpretación se ha transformado dicha puntuación al intervalo [0-100], siendo un índice de 100 un indicador de que el ítem es muy fácil (todos los estudiantes lo respondieron correctamente), mientras que un índice de 0 indica que el ítem es muy difícil (ningún estudiante lo resolvió correctamente). También se incluye en la tabla 2 el error típico de la puntuación media de cada ítem, que permite construir intervalos de confianza de las estimaciones de dichos estadísticos.

Tabla 2.
Índice de dificultad de los ítems del cuestionario CDM-RAE

ITEM. Descriptor	*Índice de dificultad*	*Error típico*
1*a*. Igualdad resultado aritmético. Explicación	74,2	3,8
1*b*. Igualdad resultado aritmético. Interpretación	55,5	4,8
2*a*. Igualdad equivalencia. Explicación	55,5	4,0
2*b*. Igualdad equivalencia. Propiedades	13,7	2,7
3*a*. Suma tres números. Generalización	29,7	3,9
3*b*. Suma tres números. Tipo de justificación	34,6	4,3
4*a*. Suma incompleta. Resolución y explicación	59,3	5,2
4*b*. Suma incompleta. Solución algebraica	7,1	2,4
4*c*. Suma incompleta. Solución escolar	13,2	3,2
5*a*. Patrón hexagonal. Dos términos	51,1	5,2
5*b*. Patrón hexagonal. Generalización algebraica	5,5	2,1
5*c*. Patrón hexagonal. Tipos de objetos algebraicos	1,1	0,8
6*a*. Patrón cuadrados. Solución general	23,6	3,8
6*b*. Patrón cuadrados. Técnicas posibles	20,3	3,5
6*c*. Patrón cuadrados. Solución escolar	19,2	3,6

ITEM. Descriptor	*Índice de dificultad*	*Error típico*
7*a*. Coste comida. Resolución	61,0	5,0
7*b*. Coste comida. Solución aritmética	21,4	4,3
7*c*. Coste comida. Solución aritmética	19,8	4,0
8*a*. Interpretación de expresiones	40,7	3,9
8*b*. Enunciado de problemas	22,0	2,9
9*a*. Gráficas funciones. Justificación	66,5	3,9
9*b*. Gráficas funciones. Reconocimiento objetos	32,4	4,2
9*c*. Gráficas funciones. Currículo	51,1	4,1
10*a*. Funciones lineales. Enunciados	9,9	2,7
10*b*. Funciones lineales. Reconocimiento álgebra	4,9	1,8
Dificultad media	31,7	3,6

Los apartados *b*) y *c*) de la tarea 5 han sido particularmente difíciles (índices de dificultad de 5,5 y 1,1 respectivamente). Los estudiantes han tenido gran dificultad para encontrar el patrón general de la secuencia de figuras hexagonales, y por tanto en la identificación de los objetos algebraicos implicados en la resolución. Los procesos de generalización y su correspondiente representación simbólica, así como la identificación de objetos y procesos algebraicos, han supuesto un reto para los estudiantes. Hemos encontrado mayores carencias en el reconocimiento de objetos y procesos algebraicos, como se revela en el elevado índice de dificultad de 2*b* (índice 13,7) (Reconocimiento de propiedades que se ponen en juego al establecer la equivalencia de dos expresiones), 9*b* (índice de dificultad de 32,4) y 10*b* (índice de dificultad de 4,9) (Reconocimiento de objetos algebraicos implicados en las representaciones gráficas de funciones y en la modelización funcional de una situación, respectivamente). Así mismo, el enunciado de tareas con el fin de desarrollar el pensamiento algebraico también debe ser promovido en los programas de formación, como se revela en el ítem 8*b* (Enunciar problemas que requieran el uso de una determinada expresión algebraica) y 10*a* (Enunciar una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales), con índices de dificultad de 22,0 y 9,9 respectivamente.

El ítem más fácil ha sido el 1*a* (índice de dificultad de 74,2), que requiere conocer el uso de la igualdad como resultado de operaciones aritméticas, seguido de la interpretación de gráficas funcionales, ítem 9*a* (índice 66,5).

Adicionalmente, se han obtenido los índices de discriminación de cada ítem como diferencia de medias entre los grupos de baja y alta capacidad (definidos por los percentiles 33 y 67). Todos los ítems han tenido poder discriminativo excepto los ítems 3*b* (Suma de tres números; tipo de justificación), el 4*b* (Suma incompleta; solución algebraica) y el 5*c* (Patrón hexagonal; generalización algebraica). En estos casos, la diferencia de medias entre la puntuación en el ítem correspondiente al grupo de estudiantes del percentil del 67% (estudiantes que tienen mejor puntuación en el conjunto de la prueba) y del percentil del 33% (estudiantes que tienen peor puntuación) no ha sido significativa ($p = 0{,}205$ en el 3*b*; $p = 0{,}058$ en el 4*b*; $p = 0{,}155$, en el 5*c*). Esto es, aunque los «mejores» estudiantes han tenido puntuaciones medias superiores en dichos ítems que los «peores» estudiantes, estas diferencias no han sido significativas al nivel del 0,05%. El enunciado de dichos ítems deberá ser revisado para lograr aumentar su poder de discriminación, disminuir su índice de dificultad y mejorar de ese modo las características psicométricas de la prueba.

Una vez asegurado el correcto funcionamiento de cada uno de los ítems, hemos procedido a estudiar el funcionamiento del instrumento en su conjunto. El coeficiente de fiabilidad de consistencia interna obtenido para la escala (Alfa de Cronbach), aplicada a la muestra de 91 estudiantes, ha sido de 0,785, que es razonablemente alto para este tipo de escalas.[2]

Con objeto de aportar ciertas evidencias de validez de contenido del instrumento, en la tabla 3 se presenta la clasificación de los distintos ítems del cuestionario según las categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el RAE (descritas en la tabla 1). Las filas, columnas y cada celda de la tabla se pueden tratar como factores del CDM-RAE, que no serán independientes por el propio diseño del instrumento.

Este instrumento no pretende evaluar todas las categorías de conocimientos didáctico-matemáticos propuestas por el modelo CDM-RAE, sino algunas que consideramos relevantes y que, en principio, se pueden evaluar mediante las respuestas que los estudiantes dan por escrito a tareas de tipo abierto en un tiempo limitado (unas 2 horas). En particular, no hemos incluido ítems relativos a la faceta afectiva, esto es, conocimientos de los futuros maestros sobre actitudes, motivación, emociones y creencias respecto al aprendizaje del álgebra elemental por parte de los alumnos de educación primaria, ni tampoco sobre tal faceta en su propio aprendizaje del álgebra y la didáctica del álgebra. Tampoco hemos abordado la evaluación de los conocimientos didácticos sobre la faceta ecológica (aspectos curriculares, conexiones con otros contenidos), ni la faceta interaccional, al considerar que los modos de interacción docente-discentes para el aprendizaje del álgebra posiblemente no sean diferentes a los de otros contenidos matemáticos. En todo caso, la evaluación de los conocimientos sobre estas facetas es un problema abierto que requerirá realizar investigaciones específicas.

Además, se debe tener en cuenta que las categorías de CDM-RAE no son disjuntas o excluyentes, en el sentido de que un mismo ítem puede estar en más de una categoría. Por ejemplo, el ítem *a*) de la tarea 10, «Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones», involucra al contenido «funciones», pero también a «modelización». Así mismo, se pide que el estudiante enuncie una variante de problema con un fin instruccional específico, y por tanto movilice conocimiento sobre un «recurso instruccional»; pero también involucre un conocimiento especializado del contenido matemático en sí mismo, esto es, la faceta epistémica en sus componentes situacional y regulativo (concepto de función, sus representaciones, etc.). Por esta razón hemos incluido algunos ítems en más de una celda en la tabla 3.

Tabla 3.
Contenidos evaluados por cada ítem del cuestionario

Contenido didáctico	*Contenido algebraico*					
	Estructuras (E)		Funciones (F)		Modelización (M)	
	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado
Epistémico (niveles de algebrización)	EPI-E1 2*b*; 4*b*	EPI-E2 7*b*; 7*c*	EPI-F1 10*b*	EPI-F2 5*c*; 6*b*	EPI-M1	EPI-M2 9*b*
Cognitivo (significados personales)	COG-E1 1*a*; 1*b*; 2*a*; 3*b*; 4*c*	COG-E2	COG-F1 6*c*	COG-F2	COG-M1	COG-M2
Instruccional (situaciones y recursos)	INS-E1 8*b*	INS-E2 8*b*	INS-F1 8*b*	INS-F2 5*b*; 8*b*; 10*a*	INS-M1 9*c*; 10*a*	INS-M2 8*b*
Contenido algebraico (solo conocimiento común o avanzado)	ALG-E1 4*a*; 3*a*	ALG-E2 7*a*	ALG-F1 5*a*; 10*b*	ALG-F2 6*a*; 8*a*; 9*a*	ALG-M1	ALG-M2 9*a*

2. El Alfa de Cronbach varía entre 0 y 1, siendo los valores superiores a 0,7 considerados usualmente como satisfactorios.

La tabla 3 se puede interpretar como una propuesta teórica de la estructura del cuestionario. Los ítems han sido seleccionados con el fin de tener en cuenta, en la medida de lo posible, los diferentes contenidos algebraicos y didácticos explicitados en la sección 3, por lo que se puede esperar que un análisis factorial debiera mostrar una estructura multidimensional. Pero la aplicación de estas técnicas de análisis de datos requiere disponer de un tamaño de muestra bastante superior, lo cual constituye un objetivo futuro de nuestra investigación.

REFLEXIONES FINALES

El objetivo de esta fase de nuestro proyecto de investigación ha consistido en elaborar un instrumento válido que permita caracterizar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. Este objetivo tiene una indudable utilidad, tanto para el diagnóstico de los conocimientos de los maestros en formación, como para obtener datos que puedan utilizarse en la fase de intervención educativa, esto es, en el diseño, implementación y evaluación de procesos formativos de los maestros sobre el tema. La aplicación piloto del cuestionario ha permitido conjeturar algunas carencias formativas de los estudiantes sobre RAE, en particular, algunas concepciones y sesgos sobre pensamiento relacional, el uso conflictivo de incógnitas y variables, y dificultades para la formulación de tareas sobre funciones con fines educativos.

Dado que los currículos vigentes de matemáticas de educación primaria a nivel del Estado español no contemplan de manera explícita contenidos relacionados con el razonamiento algebraico elemental, los planes de formación de maestros no suelen considerar de manera sistemática la formación didáctica y matemática sobre dicho razonamiento. La situación debe cambiar si tenemos en cuenta la perspectiva ofrecida por las orientaciones curriculares de otros países, los resultados de las investigaciones que se vienen realizando y el cambio que se vislumbra en España ante el reciente Decreto del Currículo Básico de Educación Primaria (MECD, 2014). En este decreto se incluye un bloque de contenido sobre *procesos, métodos y actitudes en matemáticas* que se considera como la columna vertebral del resto de los bloques. Concretamente se afirma que «todo el alumnado, al acabar la educación primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (MECD, 2014: 19387). En esta cita se hace referencia a aspectos fundamentales del razonamiento algebraico elemental.

La aplicación del cuestionario CDM-RAE a muestras representativas de maestros en formación permitirá conocer efectivamente el estado de los conocimientos didáctico-matemáticos de estos sobre razonamiento algebraico elemental y diseñar acciones formativas basadas en dicho estado.

RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm>.
http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos*. Tesis doctoral. Instituto de educação. Universidade de Lisboa.

Branco, N. y Ponte, J. P. (2012). Developing algebraic and didactical knowlendge in pre-service primary teacher education. En T. Y. Tso (ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 75-82. Taipei, Taiwan: PME.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM,* 37 (1), 53-59.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carrillo J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, TR: Middle East Technical University and ERME.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, ESP: Comares.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J. L. Dorier, y A. Robert (coords.), *Enseignement de l'algèbre* ***élémentaire****. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques*, special issue (pp. 13-33).

Contreras, A., Ordoñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367-384.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1), 127-135.
http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática- BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: BOE 52, 1 Marzo 2014.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19.
http://dx.doi.org/10.1080/14794800903569741

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9 (3), 249-278.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1

INFORMACIÓN SOBRE LOS AUTORES

Juan D. Godino. Catedrático de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
jgodino@ugr.es

Lilia P. Aké. Profesora titular A. Universidad de Colima, México.
liliapatricia_ake@ucol.mx

Ángel Contreras. Profesor titular de universidad. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Matemáticas y Sociales. Universidad de Jaén.
afuente@ujaen.es

Carmen Díaz. Profesora contratada doctora. Departamento de Psicología Clínica, Experimental y Social. Universidad de Huelva.
carmen.diaz@dpsi.uhu.es

Antonio Estepa. Catedrático de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Matemáticas y Sociales. Universidad de Jaén.
aestepa@ujaen.es

Teresa F. Blanco. Profesora titular de universidad. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Santiago de Compostela.
teref.blanco@usc.es

Eduardo Lacasta. Profesor titular de universidad. Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra.
elacasta@unavarra.es

Aitzol Lasa. Profesor ayudante. Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra.
aitzol.lasa@unavarra.es

M. Teresa Bixirão Neto. Profesora auxiliar. Centro de Investigação «Didática e Tecnologia na Formação de Formadores» (CIDTFF), Universidade de Aveiro, Portugal.
teresaneto@ua.pt

M. Luísa Oliveras. Profesora titular de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
oliveras@ugr.es

Miguel R. Wilhelmi. Profesor contratado doctor. Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra.
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Los autores de este artículo son miembros del proyecto de investigación EDU2012-31869 financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) titulado, «Evaluación y desarrollo de competencias matemáticas y didácticas en la formación inicial de maestros: Visualización y razonamiento algebraico elemental» (Proyecto VRAE).

Designing a Questionnaire for Assessing the Didactic-Mathematical Knowledge on Elementary Algebraic Reasoning

Juan D. Godino, Lilia P. Aké, Ángel Contreras, Carmen Díaz, Antonio Estepa, Teresa F. Blanco,
Eduardo Lacasta, Aitzol Lasa, Teresa Neto, Luisa Oliveras, Miguel R. Wilhelmi
Proyecto VRAE (MINECO), Universidad de Granada
jgodino@ugr.es

Several curricular proposals and research papers highlight the importance of developing algebraic thinking from the earliest levels of primary education (NCTM, 2000; Cai & Knuth, 2011), which requires the training of teachers in the didactic-mathematical aspects of the topic. Before starting the training of teachers, it is crucial to evaluate their knowledge on the subjects they have to teach, so that we need validated instruments that assess such knowledge.

In this paper we present some results of a study oriented to build a questionnaire to assess the didactic-mathematical knowledge about elementary algebraic reasoning of teacher students.

The questionnaire design is based on the models of Elementary Algebraic Reasoning (RAE – *Razonamiento Algebraico Elemental*) (Godino, Ake, Gonzato & Wilhelmi, 2014) and Didactic-Mathematics Knowledge (CDM – *Conocimiento Didáctico Matemático*) proposed by Godino (2009). It covers the different components of elementary algebraic reasoning and didactic-mathematical knowledge. The algebrization levels by Godino, et al. (2014), as well as algebraic objects (common and advanced knowledge) and processes (generalization, etc.) were also considered. The questionnaire includes 10 tasks, each one consisting of several items, with a total of 25 items.

The categories of algebraic knowledge taken into account in the design of the questionnaire are: Algebraic structures (4 items), functions (2 items) and modelling (4 items). The following categories of didactic knowledge are also considered: epistemic (8 items), cognitive (6 items), instructional (9 items) and ecological (9 items); some of the items assess several of them.

To start the questionnaire, the research team developed a preliminary item bank, from which a pilot questionnaire was extracted and administered to a sample of teacher students. The results were used to revise the wording of some items, remove and add some others; finally, the questionnaire described in this paper was obtained. The questionnaire did not attempt to assess all categories of didactic-mathematical knowledge in elementary algebraic reasoning, but only the most relevant with the limitation that students can complete the questionnaire in 2 hours' time.

The psychometric characteristics of the questionnaire were analysed from the responses of a sample of 91 teacher students. We present the item difficulty and compare these indexes by considering the algebraic objects and processes involved. We also present and analyse the items discrimination index. All items have discriminative power except 3 of them.

A Cronbach's alpha reliability coefficient of 0.785 was obtained, which is reasonably high, given the varied content of the questionnaire. A table that classifies the items according to the didactic knowledge categories and types of algebraic content is included, to provide evidence of content validity of the questionnaire according to theoretical proposal for the structure of the questionnaire.

The application of the questionnaire CDM-RAE to representative samples of teacher students will allow assessing the didactic-mathematical knowledge about elementary algebraic reasoning and designing training programs based on this assessment.

KEYWORDS: algebraic reasoning, teachers' education, assessment, task design