Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

Dorabella Martins da Silva Santos

Operadores de Wiener-Hopf, Factorizações e Teoria da Realização

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

Dorabella Martins da Silva Santos

Operadores de Wiener-Hopf, Factorizações e Teoria da Realização

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento parcial dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Luís Filipe de Pinheiro Castro, Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Frank-Olme Speck
Professor Catedrático Convidado do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Professor Doutor Luís Filipe de Pinheiro Castro
Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

resumo

Na presente dissertação é feito um estudo dos operadores de Wiener-Hopf abstractos, em espaços de Banach, e de algumas técnicas de factorização associadas. Estas factorizações permitem deduzir diversas propriedades relativas às eventuais soluções de um largo conjunto de equações integrais e, em especial, das equações integrais de Wiener-Hopf, que foi o ponto de partida de Norbert Wiener e Eberhard Hopf na descoberta dos processos de factorização. Estes processos vêm, ainda, permitir a ligação do estudo das equações integrais de Wiener-Hopf com o estudo das realizações racionais e, assim estabelecer uma ligação entre as factorizações de Wiener-Hopf e a teoria da realização. De facto, se uma equação integral de Wiener-Hopf admitir símbolo racional, este pode tomar a forma de uma realização racional e, assim, pode-se proceder a factorizações conhecidas no seio da teoria da realização, de modo a se alcançar a solução. Neste âmbito, tanto perspectivas gerais como exemplos concretos são apresentados na presente dissertação que não contém resultados matemáticos originais.

abstract

In the present dissertation, a study of Wiener-Hopf abstract operators, in Banach spaces, and of some associated factorization techniques is performed. These factorizations allow the inference of several properties concerning eventual solutions of an extensive set of integral equations and, especially, of the Wiener-Hopf integral equations, which was the starting point for Norbert Wiener and Eberhard Hopf in the discovery of the factorization processes. Additionally, these processes allow the connection between the study of Wiener-Hopf integral equations and the study of rational realizations establishing, in this manner, a connection between Wiener-Hopf factorizations and the realization theory. In fact, if a certain Wiener-Hopf integral equation admits a rational symbol, the latter can be presented by a rational realization and, hence, one can proceed with the factorizations known in the context of the realization theory and, therefore, attain the solution. In this context, general perspectives, as well as, concrete examples are presented in the current dissertation, which does not contain original mathematical results.

Conteúdo

Lista de Símbolos

$\mathcal{L}(X,Y)$	Espaço linear dos operadores lineares definidos do espaço de Banach X para o espaço de Banach Y.
$\mathcal{L}(X)$	Espaço linear dos operadores lineares definidos do espaço de Banach X para o espaço de Banach X.
I_X	Operador identidade no espaço de Banach X.
$kerA$	Núcleo do operador A.
imA	Imagem do operador A.
$L(X,Y)$	Espaço normado dos operadores lineares limitados definidos do espaço de Banach X para o espaço de Banach Y.
$L(X)$	Espaço normado dos operadores lineares limitados definidos do espaço de Banach X para o espaço de Banach X.
$X \oplus Y$	Soma directa dos espaços X e Y.
$\rho(A)$	Resolvente de um operador A.
F	Transformação de Fourier.
$L^p,\ 1 \leq p < \infty$	Espaços das funções f tais que $\|f\|^p$ é integrável à Lesbesgue.
L^∞	Espaços das funções mensuráveis essencialmente limitadas.
$L^2_+(\mathbb{R})$	Subespaço de L^2 onde as funções estão definidas em $\mathbb{R}$ e têm suporte na semi-recta real positiva.

$r_{\mathbb{R}_+}$	Operador de restrição à semi-recta real positiva.
$P_{\mathbb{R}_+}$	Projecção canónica de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2_+(\mathbb{R})$.

Introdução

Norbert Wiener e Eberhard Hopf descobriram uma técnica para resolver uma certa classe de equações integrais, hoje conhecidas como equações integrais de Wiener-Hopf, através de um processo de factorização, quando estudavam problemas relacionados com equilíbrio radioactivo de atmosferas estelares [34, 35]. Este processo hoje denominado por técnica de Wiener-Hopf [1, 23, 24], em honra aos seus descobridores, veio a mostrar-se de grande importância para encontrar as soluções explícitas de um vasto número de problemas de fronteira [30]. O método principal que caracteriza esta técnica é a factorização de uma função específica, conhecida como símbolo que pode eventualmente ser matricial ou operatória, em factores com propriedades especiais. Em alguns problemas, onde a solução explícita não se pode obter, o estudo dos operadores integrais e equações envolvidas tem permitido investigar propriedades acerca do espaço de soluções associados. Este é o caso de problemas traduzidos por operadores do tipo de convolução, em intervalos limitados, com símbolos de Fourier quase periódicos [7, 9, 10].

Na verdade, o tipo de factorização de Wiener-Hopf para determinados operadores, caracterizam a sua invertibilidade. A invertibilidade não se reduz apenas à existência de inversos laterais ou inversos limitados, mas também diz respeito à existência de inverso em sentido generalizado [33]. Este tipo de invertibilidade pode dar resposta a diversos problemas, especialmente quando os operadores em causa não apresentam invertibilidade em sentido estrito, nem invertibilidade lateral [20, 30, 31, 33].

Importa, ainda, referir que o estudo das equações integrais de Wiener-Hopf no contexto da teoria da realização [1, 2, 5], admite diferentes formas de factorizações de funções (ou matrizes) associadas a estas equações e nalgumas destas apresenta-se na forma das (adiante designadas) realizações. Logo, o estudo das equações integrais pode ser feito recorrendo ao estudo dos operadores em questão.

A teoria da realização, é abrangida pela teoria de sistemas, uma área que engloba o estudo das soluções de diversos sistemas diferenciais, lineares ou não. Ora, a teoria da realização teve as suas raízes em diversas áreas, em particular no estudo dos sistemas lineares de controlo e das redes lineares eléctricas, focando-se em especial, este estudo, nas funções de transferência que descrevem os problemas correspondentes.

A presente dissertação não apresenta resultados originais, mas baseia-se, centralmente, nos trabalhos [1, 20, 30, 31, 33]. Procura-se fazer uma abordagem no que toca às factorizações associadas a operadores de Wiener-Hopf, relacionar estas factorizações com as equações onde actuam os operadores de Wiener-Hopf e fazer a ligação entre o estudo das equações integrais de Wiener-Hopf (caso particular das anteriores) e a teoria da realização.

Quanto à organização desta dissertação, esta é composta por cinco capítulos.

No primeiro capítulo é feita a apresentação de resultados gerais que dizem respeito a operadores em espaços de Banach, onde os resultados são adaptados, em grande parte, da leitura de [20, 30, 33]. Esta apresentação introdutória é organizada em quatro secções, onde a primeira expõe resultados preliminares necessários ao desenvolvimento da dissertação. Na segunda secção, estabelecem-se caracterizações referentes à invertibilidade à esquerda e à direita de operadores lineares limitados, enquanto que na terceira secção apresenta-se a noção de invertibilidade em sentido generalizado e resultados para estes mesmos operadores. A quarta secção finaliza o capítulo, expondo alguns resultados relativamente a outras propriedades de regularidade associadas aos operadores lineares limitados em espaços de Banach.

No segundo capítulo, introduz-se o conceito de operador abstracto de Wiener-Hopf e apresentam-se diversas factorizações possíveis para este tipo de operador. Procuram-se estabelecer relações e caracterizações entre diferentes factorizações, que é um dos principais objectivos desta dissertação. O conteúdo aqui apresentado baseia-se, fundamentalmente, em resultados de [30, 31, 33]. Deste modo, a apresentação destas factorizações divide-se em três secções, sendo a primeira devotada às factorizações *mais simples* –as factorizações forte e fraca– estabelecendo caracterizações com a invertibilidade lateral dos operadores em questão, enquanto que a segunda foca a factorização de Kreĭn –uma caracterização da factorização forte à esquerda (ou à direita). Finalmente, a terceira secção trata a factorização cruzada que se relaciona com a invertibilidade em sentido generalizado.

O terceiro capítulo é constituído por uma única secção, onde se apresenta fórmulas para as soluções das equações de Wiener-Hopf em termos das factorizações apresentadas, no capítulo anterior. Os resultados apresentados nesta parte usam frequentemente proposições bem conhecidas para as equações lineares em geral [20] e que aqui são adaptadas às equações de Wiener-Hopf [33].

O quarto capítulo trata certas equações integrais de Wiener-Hopf –um caso particular das equações apresentadas no capítulo anterior– do ponto de vista da teoria da realização. Isto é conseguido ao escrever o símbolo destas equações na forma de funções de transferência ou realizações. Para expôr diversos aspectos desta temática, este capítulo divide-se em cinco secções. A primeira secção, trata os preliminares referentes às realizações, necessários para o desenvolvimento do capítulo. Na segunda secção, é apresentado um caso particular das realizações –as realizações racionais– que são as pontes de ligação para as equações integrais de Wiener-Hopf com símbolos de Fourier racionais. Na secção seguinte, introduz-se a noção de operador exponencialmente dicotómico e ilustra-se a equivalência desta característica com a invertibilidade das realizações associadas. Na quarta secção estabelece-se, finalmente, a ponte de ligação entre certas equações integrais de Wiener-Hopf e as realizações racionais, especialmente através dos resultados do segundo e terceiro capítulos e das últimas secções. A última secção descreve uma relação especial entre operadores, na forma de uma identidade matricial, conhecida como relação de emparelhamento matricial ou de equivalência após extensão. O trabalho apresentado nas três primeiras secções, teve como base principal os resultados em [1], auxiliado nomeadamente por [19, 27]. Nas duas últimas secções, fez-se um esforço para relacionar os conteúdos, por meio das equações integrais de

Wiener-Hopf, com o apoio essencial de [2, 4, 5, 30].

Para finalizar, o último capítulo ilustra algumas concretizações básicas dos assuntos tratados nos capítulos anteriores, de modo a salientar que o desenvolvimento destes temas passa, muitas vezes, pela resolução de problemas concretos no seio da engenharia e da matemática aplicada. Dentre a literatura que serviu de base a este capítulo, salienta-se [1, 10, 25, 27, 32, 34]. Assim, recorrendo a técnicas de factorização e a técnicas de identificação dos símbolos das equações em questão com realizações, muitas vezes consegue-se vislumbrar a solução explícita ou, pelo menos, conhecer propriedades do espaço de soluções, que doutro modo, não se conseguiriam derivar. As concretizações estão organizadas em três secções. A primeira secção exibe alguns operadores de Wiener-Hopf e relaciona-os com outros operadores. Tais relações são, particularmente, úteis quando a complexidade dos operadores relacionados é significativamente diferente. A segunda secção apresenta algumas factorizações, umas no sentido do Capítulo 2, outras no sentido do Capítulo 4. Em dois exemplos, a resolução do problema passa por uma factorização. Na terceira secção, apresenta-se algumas funções matriciais e procura-se obter realizações para as mesmas.

Introduction

Norbert Wiener and Eberhard Hopf discovered a technique to solve a certain class of integral equations, today known as Wiener-Hopf integral equations, using a factorization process, while studying problems related to radioactive equilibrium in stellar atmospheres [34, 35]. This procedure, today named Wiener-Hopf technique [1, 23, 24], in honor of the discoverers, came to reveal itself of utter importance to find the explicit solutions of a wide number of boundary problems [30]. The fundamental method that characterizes this technique is the factorization of a particular function, known as a symbol function which can eventually be a matrix or operator valued, into factors with special properties. In some problems, where the explicit solution cannot be obtained, the study of the integral operators and of the equations involved has allowed the investigation of properties related to the solution sets. This is the case in problems translated by convolution type operators, on finite intervals, with almost periodic Fourier symbols [7, 9, 10].

In fact, the Wiener-Hopf factorization type for certain operators, characterizes their invertibility. Invertibility does not only refer to the existence of bounded inverses or lateral inverses, but it also relates to the existence of generalized inverses [33]. This kind of invertibility can give answer to various problems, especially when the operators in cause do not present invertibility in a strict sense, nor lateral invertibility [20, 30, 31, 33].

Moreover, it is worth mentioning that the study of the Wiener-Hopf integral equations in the context of realization theory [1, 2, 5], admits different forms of factorizations of functions (or matrices) associated to these equations and in some of them presenting the form of (the further called) realizations. Hence, the study of these integral equations can be done through the study of the operators involved.

The realization theory is contained in system theory, an area that includes the study of solutions to several linear or non-linear differential systems. Well, the realization theory had its rooting in many different areas, particularly in the study of linear control systems and electrical linear networks, where this study focuses especially on the transfer functions that describe the corresponding problems.

The current dissertation does not present original results, but is based mainly on the works [1, 20, 30, 31, 33]. There is an effort to perform an approach relative to the factorizations associated to Wiener-Hopf operators, relate these factorizations with equations where Wiener-Hopf operators act and connect the study of Wiener-Hopf integral equations (particular case of the previous) with the realization theory.

Concerning the organization of the present dissertation, the text is composed of five chapters.

In the first chapter, general results are presented concerning operators in Banach spaces, and these results are adapted mainly from the literature of [20, 30, 33]. This introductory presentation is organized within four sections, where the first depicts preliminary results necessary for the development of this dissertation. In the second section, characterizations concerning left and right invertibility of bounded linear operators are established, while in the third section the notion of generalized invertibility and results for these operators are presented. The fourth section concludes the chapter, by exposing some results relative to other regularity properties associated to bounded linear operators in Banach spaces.

In the second chapter, the concept of abstract Wiener-Hopf operators is introduced and several factorizations possible for these operators are presented. Relations and characterizations between different factorizations are investigated, which is one of the main objectives of this dissertation. The content presented here is based mostly in the results of [30, 31, 33]. In this manner, the presentation of these factorizations is divided into three sections, where the first is devoted to the *simpler* factorizations –the strong and weak factorizations– establishing characterizations with lateral invertibility of the operators in question, while the second focuses the Kreĭn factorization –a characterization of the left (or right) strong factorization. Finally, the third section treats the cross factorization that is related to generalized invertibility.

The third chapter is constituted by a single section, which presents formulas for the solution of Wiener-Hopf equations in terms of factorizations, presented in the preceding chapter. The results presented in this part, frequently use well-known propositions for linear equations [20] and that are adapted here to the Wiener-Hopf equations [33].

The fourth chapter treats certain Wiener-Hopf integral equations –a particular case of the equations presented in the latter chapter– from the point of view of the realization theory. This is achieved by writing the symbol of these equations in the form of transfer functions or realizations. To present different aspects of this topic, this chapter is divided into five sections. The first section deals with the preliminaries concerning realizations, necessary for the development of the chapter. In the second section, a particular case of realizations –rational realizations– are presented, which are the linking bridges for the Wiener-Hopf integral equations with rational Fourier symbols. In the next section, the notion of exponentially dichotomous operators is introduced and the equivalence between this characteristic and the invertibility of the associated realizations is illustrated. In the fourth section, the linking bridge is, finally, established between certain Wiener-Hopf integral equations and the rational realizations, especially through the results of the second and third chapters and from the preceding sections. The last section describes a special relation between operators, in the form of a matricial identity, known as the coupling relation or operator equivalence after extension relation. The work presented in the first three sections, had its main basis in the results of [1], supported namely by [19, 27]. In the last two sections, there was an effort to relate the material, by means of the Wiener-Hopf integral equations, with the essential support of [2, 4, 5, 30].

To conclude, the last chapter illustrates basic and particular cases of the topics dealt in the previous chapters, in order to emphasize that the development of these themes depends, many times, on the resolution of concrete problems in engineering and applied mathematics. Here, among the literature that served as basis to this chapter, [10, 25, 34] are highlighted. In this way, using factorization techniques and identification techniques of the symbols of the equations in question with realizations, many times it is possible to discover the explicit solution or, at least, to know properties of the solution space, which cannot be derived by other means. The examples are organized into three sections. The first section exhibits some Wiener-Hopf operators and relates them with other operators. Such relations are, particularly, useful when the complexity of the related operators is significantly different. The second section, presents a few factorizations, some in the sense of Chapter 2, others in the sense of Chapter 4. In two examples, a factorization process is used to solve the problem. In the third section, some matricial functions are presented and realizations for them are found.

Capítulo 1

Resultados Gerais sobre Operadores em Espaços de Banach

1.1 Considerações Gerais

Nesta secção, apresentam-se resultados gerais envolvendo espaços normados, conhecidos no âmbito das disciplinas de Análise Funcional e da Topologia, que vão ser necessários no seguimento desta dissertação.

Consideram-se espaços de Banach X e Y sobre o corpo $\mathbb{K}$, que denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Seja, ainda, $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto das aplicações lineares definidas de X em Y. No caso de $X = Y$, escreve-se $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X,X)$.

Definição 1.1.1 *Um operador linear $P : X \to X$ diz-se uma projecção, ou projector, se $P^2 = P$. Se P é também limitado, então diz-se que P é uma projecção contínua.*

Além disso, se P é projecção, então $Q = I_X - P$ também é uma projecção e diz-se a projecção complementar de P.

Teorema 1.1.2 *Seja X um espaço de Banach. Se M é um subespaço fechado em X de dimensão finita ou codimensão finita ($codimM = dimX/M$), então M é complementado em X.*

Demonstração: Suponha-se que M é um subespaço de X de dimensão finita (resp. codimensão finita) n. Então, pode-se definir uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de M e uma base de $\{f_1, ..., f_n\}$ de $M^* = \{f : X \to \mathbb{K};\ f$ é linear e contínua$\}$, tais que $||e_i|| = ||f_i|| = 1$ e $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

Sejam

$$\begin{aligned} P : X &\to M \\ x &\mapsto Px = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i. \end{aligned}$$

e $y \in M$. Então, existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tal que $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Resulta que

$$\begin{aligned} Py &= \sum_{i=1}^{n} f_i(y)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_i(e_j)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= y. \end{aligned}$$

Conclui-se, então que P é sobrejectivo, ou seja, $imP = M$. Além disso, para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} P^2x &= P(Px) \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i)e_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) f_j(e_i) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j(x) e_j \\
&= Px
\end{aligned}
$$

o que implica que P é projector. Por outro lado, para todo $x \in X$ tal que $||x|| \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
||Px|| &= ||\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \cdot ||e_i|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||f_i|| \cdot ||x|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n.
\end{aligned}
$$

Logo, P é limitado, i.e., P é contínuo.

Consequentemente, M é a imagem de um projector contínuo. Então, $kerP$ é o complemento de M e, portanto, M é complementado. $\diamondsuit$

Proposição 1.1.3 *Sejam X um espaço vectorial normado (sobre o corpo $\mathbb{K}$) e $F \subseteq X$ tal que $dimF < \infty$. Nestas condições, F é fechado.*

Demonstração: Como $dimF = m < \infty$, então existem $f_1, ..., f_m \in F$ que permitem a constituição de uma base de F.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em F convergente em X. Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em F.

Como $f_1, ..., f_m$ constituem uma base de F, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\alpha_1^n, ..., \alpha_m^n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x_n = \alpha_1^n f_1 + ... + \alpha_m^n f_m.$$

Pelo facto de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser de Cauchy, tem-se

$$||x_n - x_k|| \to 0, \qquad \text{quando } n, k \to \infty,$$

ou seja,

$$||(\alpha_1^n f_1 + ... + \alpha_m^n f_m) - (\alpha_1^k f_1 + ... + \alpha_m^k f_m)|| \to 0, \quad \text{quando } n, k \to \infty,$$

e portanto,

$$||(\alpha_1^n - \alpha_1^k) f_1 + ... + (\alpha_m^n - \alpha_m^k) f_k|| \to 0, \qquad \text{quando } n, k \to \infty. \tag{1.1.1}$$

Uma vez que $f_1, ..., f_m$ são linearmente independentes (pois formam uma base de F), então a equação (1.1.1) implica que

$$|\alpha_j^n - \alpha_j^k| \to 0, \quad \text{quando } n, k \to \infty, \quad \text{para todo } j \in \{1, ..., m\}.$$

Logo, para todo $j \in \{1, ..., m\}$, $(\alpha_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{K}$. Sabendo que $\mathbb{K}$ é completo, então para todo $j \in \{1, ..., m\}$, existe $\beta_j \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_j^n \to \beta_j$, quando $n \to \infty$.

Considere-se $x = \beta_1 f_1 + ... + \beta_m f_m$. Logo, $x \in F$.

Então, tendo em conta que $\alpha_j^n \to \beta_j$, quando $n \to \infty$, ou seja, $|\alpha_j^n - \beta_j| \to 0$, quando $n \to \infty$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$, vem

$$\begin{aligned}
||x_n - x|| &= ||(\alpha_1^n f_1 + \cdots + \alpha_m^n f_m) - (\beta_1 f_1 + \cdots + \beta_m f_m)|| \\
&= ||(\alpha_1^n - \beta_1) f_1 + \cdots + (\alpha_m^n - \beta_m) f_m|| \\
&\leq ||(\alpha_1^n - \beta_1) f_1|| + \cdots + ||(\alpha_m^n - \beta_m) f_m|| \\
&= |\alpha_1^n - \beta_1| \ ||f_1|| + \cdots + |\alpha_m^n - \beta_m| \ ||f_m|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Resulta, então, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente para x. Como $x \in F$, vem que a sucessão converge em F.

Conclui-se, pois, que F é fechado. $\diamondsuit$

1.2 Invertibilidade Lateral de Operadores Lineares Limitados

A existência de inversos laterais de um operador linear limitado, pode ser caracterizada pelas propriedades do seu núcleo e da sua imagem. Como, por vezes, se consegue informação acerca destes subespaços, estas características permitem deduzir propriedades relativas ao espaço solução de equações que envolvem o inverso ou inversos laterais deste tipo de operadores.

Os resultados, desta secção, são baseados no trabalho [20].

Denota-se por $L(X,Y)$, o conjunto das aplicações lineares limitadas definidas de X em Y, com X e Y a serem espaços de Banach. Da mesma forma que ocorre com o conjunto dos operadores lineares (cf. secção 1.1), no caso de $X = Y$ escreve-se $L(X)$ em vez de $L(X,X)$.

Proposição 1.2.1 *Seja $A \in L(X,Y)$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

i) o operador A tem núcleo de dimensão nula e imagem complementada em Y;

ii) existe um operador $B \in L(Y,X)$ tal que $BA = I_X$.

Demonstração: $(i \Rightarrow ii)$ Suponha-se que A tem núcleo de dimensão nula e imagem complementada em Y.

Como $dim\ \ kerA = 0$, então A é injectiva, pelo que existe $A^{-1}_{|imA} : imA \to X$.

Por sua vez, como imA é complementada em Y, existe um subespaço fechado Z tal que $Y = imA \oplus Z$.

Seja $B : Y \to X$ tal que $B_{|imA} = A^{-1}$ e $B_{|Z} = 0$. Nestas condições, $B \in L(Y,X)$.

Considerando que para $x \in X$, se tem que $Ax \in imA$, então $BAx = x$. Tem-se, assim, que $BA = I_X$.

$(ii \Rightarrow i)$ Suponha-se, por sua vez, que existe um operador $B \in L(Y, X)$ tal que $BA = I_X$. Sendo $x, y \in X$, tem-se as seguintes proposições equivalentes,

$$\begin{aligned} Ax &= Ay \\ BAx &= BAy \\ x &= y. \end{aligned}$$

Então, segue-se que A é injectivo, ou seja, $kerA = \{0\}$. Conclui-se, pois, que $dim\ kerA = 0$.

Por outro lado, $(AB)^2 = A(BA)B = AB$ e como AB é composição de operadores lineares contínuos, $AB \in L(Y)$. Resulta, então, que AB é uma projecção continua. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} imA &\supset imAB \\ &\supset imA(BA) \\ &= imA. \end{aligned}$$

Portanto, $imA = imAB$. Conclui-se que imA é a imagem de uma projecção contínua e, por conseguinte, imA é complementado em Y. Em particular, o subespaço $kerB$ é um complemento de imA. $\diamondsuit$

Proposição 1.2.2 *Seja $A \in L(X, Y)$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

i) o operador A tem imagem de codimensão ($codim\ imA = dim\ Y - dim\ imA$) nula e núcleo complementado em X;

ii) existe um operador $B \in L(Y, X)$ tal que $AB = I_Y$.

Demonstração: $(i \Rightarrow ii)$ Suponha-se que $codim\ imA = 0$ e que A tem núcleo complementado em X.

Então, $dimY = dim\ imA$, pelo que $Y = imA$. Vem que A é sobrejectivo. Uma vez que $kerA$ é complementado em X, existe uma projecção $P \in L(X)$ sobre $kerA$. Assim, existe $Z \subset X$ tal que $kerA \oplus Z = X$ e $im(I_X - P) = Z$.

Considere-se $A_{|Z} : Z \to Y$.

Segue-se que $A_{|Z}$ permanece sobrejectivo e contínuo. Uma vez que $Z \cap kerA = \{0\}$, resulta que $A_{|Z}$ é uma injecção. Na realidade, note-se que para $z, w \in Z$ tais que $Az = Aw$, resultaria que $z - w \in kerA$ e, como Z é um espaço de Banach, $z - w \in Z$. Consequentemente, $z - w = 0$, ou seja, $z = w$ e, portanto, $A_{|Z}$ é injectivo. Logo, $A_{|Z}$ é uma bijecção contínua.

Seja $B = (I_X - P)A_{|Z}^{-1}$.

Observa-se que $B \in L(Y, X)$. Por conseguinte, atendendo a que $im(I_X - P) = Z$,

$$\begin{aligned} AB &= A(I_X - P)A_{|Z}^{-1} \\ &= A_{|Z}A_{|Z}^{-1} \\ &= I_Y. \end{aligned}$$

Logo, $AB = I_Y$.

$(ii \Rightarrow i)$ Reciprocamente, suponha-se que existe $B \in L(Y, X)$ tal que $AB = I_Y$.

Seja $y \in Y$. Então, $x = By \in X$ e $Ax = ABy = y$. Logo, A é sobrejectivo. Então, $codim\ \ imA = 0$.

Como B e A são operadores lineares contínuos, BA é um operador linear contínuo. Atendendo a que $(BA)^2 = B(AB)A = BA$, BA é uma projecção contínua. Por sua vez, também se tem, $kerA = kerA(BA) \supset kerBA \supset kerA$, ou seja, $kerA = kerBA$. Como $kerA$ é o núcleo de um projector contínuo num espaço de Banach, $kerA$ é complementado em X. $\diamondsuit$

1.3 Invertibilidade em Sentido Generalizado

Na presente secção, introduz-se um conceito de invertibilidade mais geral e menos comum. Este conceito permite, nomeadamente, resolver certos problemas de operadores que não possuem inverso limitado.

Expõe-se a diferença entre inverso generalizado e inverso generalizado reflexivo de um operador linear limitado, embora como se terá a oportunidade de comprovar, no presente contexto, a existência de um equivale à existência do outro. De forma semelhante aos inversos laterais, também a existência de um inverso generalizado de determinado operador linear limitado, pode ser caracterizado pelas propriedades do seu núcleo e/ou imagem.

Os resultados que serviram de apoio para esta secção foram obtidos, essencialmente, de [20] e [33].

Definição 1.3.1 *O operador $A \in L(X,Y)$ diz-se invertível em sentido generalizado se existir $B \in L(Y,X)$ tal que $ABA = A$. Nestas condições, B diz-se um inverso generalizado de A.*

Um operador $C \in L(Y,X)$ tal que $CAC = C$ e $ACA = A$, diz-se um inverso generalizado reflexivo de A.

Observação 1.3.2 É claro, pela definição, que todo o inverso generalizado reflexivo de $A \in L(X,Y)$ é um inverso generalizado de A. No entanto, nem todo o inverso generalizado de A é um inverso generalizado reflexivo de A.

Exemplo 1.3.3 Considere-se o espaço $\mathbb{R}^2$ e os operadores em $\mathbb{R}^2$ representados pelas matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $G_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$ [15].

Então, pode-se verificar que G_1 é inverso generalizado reflexivo de A:

$$\begin{aligned} AG_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_1AG_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= G_1. \end{aligned}$$

Como $G_1AG_1 = G_1$, pode-se também dizer que A é um inverso generalizado de G_1 (ou por outras palavras, A é um inverso generalizado dos seus inversos generalizados reflexivos).

Por sua vez, G_2 é um inverso generalizado de A, mas não é reflexivo:

$$\begin{aligned} AG_2A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_2AG_2 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 1/16 \end{pmatrix} \\ &\neq G_2. \end{aligned}$$

Proposição 1.3.4 *Seja $A \in L(X,Y)$. São equivalentes as seguintes propriedades:*

i) o operador A tem núcleo complementado em X e imagem complementada em Y;

ii) existe um operador $B \in L(Y,X)$ tal que $BA = I_X - P$ e $AB = I_Y - Q$, onde P e Q são projecções contínuas em X e Y, respectivamente, tais que $imP = kerA$ e $im(I_Y - Q) = imA$;

iii) existe um operador $C \in L(Y,X)$ tal que $CAC = C$ e $ACA = A$;

iv) existe um operador $D \in L(Y,X)$ tal que $ADA = A$.

Demonstração: $(i \Rightarrow ii)$ Suponha-se que A tem núcleo complementado em X e imagem complementada em Y. Então, existem subespaços fechados $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ tais que $X = kerA \oplus X_1$ e $Y = imA \oplus Y_1$. Assim, existem projecções contínuas P sobre $kerA$ ao longo de X_1 e Q sobre Y_1 ao longo de imA. Consequentemente,

$$im(I_X - P) = X_1 \quad e \quad im(I_Y - Q) = imA.$$

Seja $A_1 : X_1 \to imA$ tal que $A_1 x = A_{|X_1} x = Ax, \; x \in X_1$.

Então, $kerA_1 = kerA \cap X_1 = \{0\}$ e, portanto, A_1 é injectivo. Por outro lado, como o conjunto de chegada é imA, A_1 é sobrejectivo. Assim, A_1 é uma bijecção.

Considere-se o operador $B = (I_X - P)A_1^{-1}(I_Y - Q)$.

B é composição de operadores limitados e, consequentemente, B é limitado. Atendendo a que $im(I_X - P) = X_1$ e A_1^{-1} é bijectivo, tem-se $imB = im(I_X - P) = X_1$. Visto que $im(I_X - P) \cap kerA = \{0\}$, $kerA_1 = \{0\}$ e Y_1 é o complemento de $im(I_Y - Q)$, então $kerB = ker(I_Y - Q) = Y_1$.

Nestas condições, $imBA = imB = X_1 = im(I_X - P)$ (pois $im(I_Y - Q) = imA$) e $imAB = imA = im(I_Y - Q)$ (pois $imB = X_1$). Segue-se que $BA = I_X - P$ e $AB = I_Y - Q$.

$(ii \Rightarrow iii)$ Suponha-se que existe $B \in L(Y,X)$ tal que $BA = I_X - P$ e $AB = I_Y - Q$, onde P e Q são projecções contínuas em X e Y, respectivamente, satisfazendo $imP = kerA$ e $im(I_Y - Q) = imA$.

Atendendo a que $im(I_Y - Q) = imA$, então $QA = 0$ e, portanto, $ABA = (I_Y - Q)A = A - QA = A$.

Do mesmo modo, como $imP = kerA$ e $BA = I_X - P$, então $imB = imBA = im(I_X - P)$, o que implica que $PB = 0$ e, portanto, $BAB = (I_X - P)B = B - PB = B$.

$(iii \Rightarrow iv)$ É trivial.

$(iv \Rightarrow i)$ Suponha-se que existe $D \in L(Y, X)$ tal que $ADA = A$. Então,

$$(AD)^2 = (ADA)D = AD \quad e \quad (DA)^2 = D(ADA) = DA.$$

Resulta que DA e AD são projecções. Como D e A são limitadas, DA e AD também são limitadas. Verifica-se, adicionalmente, que $imAD = imA$ e $kerDA = kerA$. Então, imA e $kerA$ são imagem e núcleo de projecções contínuas em espaços de Banach e, portanto, complementados em Y e X respectivamente. $\diamondsuit$

Observação 1.3.5 Da proposição anterior, ser-nos-á particularmente útil, a caracterização de que um operador linear limitado possui um inverso generalizado se e só se a sua imagem e o seu núcleo são complementados. Também se verifica que se um inverso generalizado existir, então também existe um inverso generalizado reflexivo.

Proposição 1.3.6 *Seja $A \in L(X, Y)$ e C um inverso generalizado reflexivo de A. O conjunto dos inversos generalizados reflexivos é constituído por operadores da forma PCQ, onde P é uma projecção contínua em X tal que $im(I_X - P) = kerA$, e Q é uma projecção contínua em Y sobre a imagem de A.*

Demonstração: Considere-se o operador PCQ, onde P e uma projecção contínua em X tal que $im(I_X - P) = kerA$, e Q é uma projecção contínua em Y sobre a imagem de A.

Então, $QA = A$ e $A(I_X - P) = 0$, ou seja, $AP = A$. Atendendo, ainda, ao facto de que C é um inverso generalizado de A, tem-se que,

$$A(PCQ)A = (AP)C(QA) = ACA = A$$

e

$$\begin{aligned}(PCQ)A(PCQ) &= PC(QAP)CQ \\ &= PC(AP)CQ \\ &= (PC)A(CQ) \\ &= P(CAC)Q \\ &= PCQ.\end{aligned}$$

Logo, PCQ é um inverso generalizado reflexivo de A.

Por outro lado, sendo D um inverso generalizado reflexivo de A, tem-se

$$D = DAD = D(ACA)D = (DA)C(AD).$$

Além disso,

$$(DA)^2 = (DA)(DA) = (DAD)A = DA$$

e

$$(AD)^2 = (AD)(AD) = (ADA)D = AD.$$

Portanto, DA e AD são projecções em X e Y, respectivamente. Como A e D são contínuos, segue-se que DA e AD são projecções contínuas.

Adicionalmente, como $ADA = A$, resulta que $imAD = imA$ e $kerDA = kerA$, ou seja, $im(I_X - DA) = kerA$. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.7 *Sejam X um espaço de Hilbert e F um subespaço de X. Então, F é fechado se e só se F é complementado.*

Demonstração: Se F for complementado em X, resulta que F é fechado em X (por definição de complementado).

Suponha-se que F é fechado em X. Uma vez que X é um espaço de Hilbert, pode-se definir um produto interno e, portanto, existe o ortogonal

$$F^{\perp} = \{x \in X : x \perp F\}.$$

Então, como $F^{\perp}$ é fechado e complementa F algebricamente, conclui-se que F é complementado em X. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.8 *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in L(X, Y)$. Então, são equivalentes as seguintes propriedades:*

i) o operador A tem núcleo e imagem fechados;

ii) o operador A é invertível em sentido generalizado.

Demonstração: O operador A tem núcleo e imagem fechados se e só se $kerA$ e imA são complementados em X e Y, respectivamente, uma vez que X e Y são espaços de Hilbert (Proposição 1.3.7). Por outro lado, pela Observação 1.3.5, $kerA$ e imA são complementados se e só se A possui um inverso generalizado. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.9 *Sejam X, Y espaços de Banach e $A \in L(X, Y)$. Se A é um operador de característica finita, ou seja, $dim\ imA < \infty$, então o operador A é invertível em sentido generalizado.*

Demonstração: Suponha-se que A é um operador de característica finita, isto é, $dim\ imA < \infty$.

Pela Proposição 1.1.3, imA é fechado. Pelo Teorema 1.1.2, imA é complementado em Y.

Sejam X_1 o complemento algébrico de $kerA$ e

$$\begin{aligned} \overline{A} : X_1 &\rightarrow imA \\ x &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Então, $ker\overline{A} = kerA \cap X_1 = \{0\}$. Assim, $\overline{A}$ é injectivo. Por outro lado, $\overline{A}(X_1) = A(X_1) = imA$. Logo, $im\overline{A} = imA$, o que implica a sobrejectividade de $\overline{A}$. Segue-se, que, $\overline{A}$ é uma bijecção entre X_1 e imA.

Consequentemente, como $dim\ imA < \infty$, então $dimX_1 < \infty$. Logo, pela Proposição 1.1.3, X_1 é fechado. Resulta, então, que $kerA$ é complementado.

Finalmente, sabendo que imA e $kerA$ são complementados, então pela Observação 1.3.5 conclui-se a invertibilidade em sentido generalizado de A. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.10 *Seja $A \in L(X,Y)$ (onde X, Y são espaços de Banach). Se existe um operador $B \in L(Y,X)$ tal que $A - ABA$ é invertível em sentido generalizado, então A é invertível em sentido generalizado.*

Demonstração: Suponha-se que existe um $B \in L(Y,X)$ tal que $A - ABA$ é invertível em sentido generalizado. Logo, existe um $C \in L(Y,X)$ tal que

$$(A - ABA)C(A - ABA) = A - ABA.$$

Segue-se, então, as seguintes equações equivalentes,

$$\begin{aligned} A &= ABA + (A - ABA)C(A - ABA) \\ A &= ABA + A(I_X - BA)C(I_Y - AB)A \\ A &= A[B + (I_X - BA)C(I_Y - AB)]A \end{aligned}$$

Resulta, pois, que A é invertível em sentido generalizado. $\diamondsuit$

Observação 1.3.11 Se $A \in L(X,Y)$ é invertível, então o inverso generalizado de A é o inverso de A (e, portanto, é único).

Com efeito, são equivalentes

$$\begin{aligned} ABA &= A \\ ABAA^{-1} &= AA^{-1} \\ AB &= I_X \end{aligned}$$

e, similarmente, $BA = I_Y$.

1.4 Outras Propriedades de Regularidade dos Operadores Lineares Limitados

Apresenta-se, de seguida, um resumo de algumas das propriedades de regularidade (i.e., propriedades que são caracterizadas pelo núcleo e imagem) que ocorrem nos operadores lineares limitados e certas caracterizações entre elas, baseadas em resultados, fundamentalmente, de [20] e [30], relevantes a esta dissertação.

Definição 1.4.1 *Se $A \in L(X,Y)$ é tal que dim $\ker A < \infty$ e codim $\operatorname{im} A < \infty$, então A diz-se que verifica a propriedade de Fredholm ou que A é de Fredholm.*

Se A verifica (apenas) uma das situações,

i) dim $\ker A < \infty$ e $\operatorname{im} A$ é fechada, ou

ii) codim $\operatorname{im} A < \infty$,

diz-se que A é semi-Fredholm e escreve-se $A \in F_+(X,Y)$ ou $A \in F_-(X,Y)$, respectivamente.

Definição 1.4.2 *Seja $A \in L(X,Y)$ tal que $\operatorname{im} A$ é fechada. Seja $\alpha(A) = \dim \ker A$ e $\beta(A) = \operatorname{codim} \operatorname{im} A$. Se algum dos valores $\alpha(A)$ ou $\beta(A)$ são finitos, define-se o índice de Fredholm do operador A como sendo $\operatorname{ind} A = \dim(\ker A) - \operatorname{codim}(\operatorname{im} A)$.*

Se $\alpha(A) = \infty$, define-se $\operatorname{ind}(A) = \infty$ e, se $\beta(A) = \infty$, define-se $\operatorname{ind}(A) = -\infty$.

Definição 1.4.3 *Seja $P \in L(X)$ um projector em X. Um operador $A \in L(X)$ diz-se regularizável à esquerda (à direita) se existe $B \in L(PX)$ tal que $BA - I_{|PX}$ ($AB - I_{|PX}$) é compacto.*

Definição 1.4.4 *Diz-se que um operador $A \in L(X,Y)$ é normalmente solúvel se, para cada $y \in Y$, a equação $Ax = y$ é solúvel se e só se $f(y) = 0$, para cada $f \in \ker A'$ (onde $A' : Y' \to X'$ denota o operador dual de A, com $X' = L(X,\mathbb{K})$ e $Y' = L(Y,\mathbb{K})$ e que é definido por $(A'y')(x) = y'(Ax)$, $y' \in Y'$.)*

Teorema 1.4.5 (de Haussdorf) *Seja $A \in L(X,Y)$. Então, A é normalmente solúvel se e só se a imagem de A é fechada em Y.*

Demonstração: Suponha-se que A é normalmente solúvel. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de imA convergente em Y. Então, existe $y \in Y$ tal que $\lim y_n = y$.

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset imA$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $Ax_n = y_n$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $Ax_n = y_n$ é solúvel.

Seja $f \in kerA'$. Uma vez que A é normalmente solúvel, então $f(y_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim y_n = y$ e f é contínuo, então $\lim f(y_n) = f(y)$. Pelo facto que $f(y_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vem que $f(y) = 0$.

Pela arbitrariedade de $f \in kerA'$ e como A é normalmente solúvel, vem que existe $x \in X$ tal que $Ax = y$. Logo, $y \in imA$.

Conclui-se que imA é fechada.

Reciprocamente, suponha-se que imA é fechada em Y: $\overline{imA} = imA$.

Considere-se $Z = \{y \in Y : f(y) = 0, \ \forall f \in kerA'\}$.

Para $y \in imA$, tem-se que existe $x \in X$ tal que $Ax = y$. Além disso, para todo $f \in kerA'$, $f(y) = f(Ax) = (A'f)(x) = 0$. Consequentemente, $imA \subseteq Z$. Como $imA = \overline{imA}$, então $\overline{imA} \subseteq Z$.

Suponha-se que $\overline{imA}$ é um subconjunto próprio de Z. Então, existe um $z \in Z$ tal que $z \notin \overline{imA}$ e é possível construir $g \in Y'$ tal que $g(z) \neq 0$ e $g(imA) = \{0\}$. Tem-se que $(A'g)(x) = g(Ax)$, para todo $x \in X$. Logo, como $g(imA) = \{0\}$, vem que $g \in kerA'$. Consequentemente, pela definição de Z, tem-se que $g(Z) = \{0\}$, o que contradiz o facto de $g(z) \neq 0$.

Conclui-se, assim, que $imA = \overline{imA} = Z$. Logo, A é normalmente solúvel. $\diamondsuit$

Corolário 1.4.6 *Seja $A \in L(X,Y)$. Então, A é invertível em sentido generalizado se e só se A é normalmente solúvel e $kerA$, imA são complementados.*

Demonstração: Pela Observação 1.3.5, A é invertível em sentido generalizado se e só se $kerA$ e imA são complementados. Então, como imA é complementado, tem-se que imA é fechado.

Logo, A é invertível em sentido generalizado se e só se A é normalmente solúvel e $kerA$, imA são complementados. $\diamondsuit$

Proposição 1.4.7 *Suponha-se que X e Y são, agora, espaços de Hilbert e $A \in L(X,Y)$. Então, A é invertível em sentido generalizado se e só se A é normalmente solúvel.*

Demonstração: Suponha-se que A é invertível em sentido generalizado. Então, pelo Corolário 1.4.6, A é normalmente solúvel.

Suponha-se, agora, que A é normalmente solúvel. Pelo Teorema de Haussdorf, imA é fechada em Y. Como Y é espaço de Hilbert, pela Proposição 1.3.7, imA é complementado.

Uma vez que A é linear, $kerA$ é fechado. Como X é espaço de Hilbert, pela Proposição 1.3.7, $kerA$ é complementado.

Pelo Corolário 1.4.6, A é invertível em sentido generalizado. $\diamondsuit$

Para concluir a presente secção, apresenta-se uma caracterização das propriedades de regularidade de um operador linear limitado A definido entre espaços de Banach que pode ser encontrada em [30].

Propriedades de A	dim $kerA = 0$	dim $kerA < \infty$	$kerA$ complementado	$kerA$ fechado
$codim$ $imA = 0$	A é invertível	A é invertível à direita e é de Fredholm	A é invertível à direita	A é sobrejectivo
$codim$ $imA < \infty$	A é invertível à esquerda e é de Fredholm	A é de Fredholm	A é regularizável à direita	$A \in F_-$
imA complementado	A é invertível à esquerda	A é regularizável à esquerda	A é invertível em sentido generalizado	—
imA fechado	A é injectivo	$A \in F_+$	—	A é normalmente solúvel

Tabela 1.4.1 *Caracterização dos operadores lineares limitados, com imagem fechada, em espaços de Banach.*

Capítulo 2

Operadores de Wiener-Hopf Abstractos em Espaços de Banach e Factorizações Associadas

2.1 Factorização Forte e Fraca de Operadores Abstractos de Wiener-Hopf

Nesta secção, faz-se uma descrição centrada nos trabalhos originais [30, 31, 33], recorrendo também pontualmente a [28]. Diga-se que operadores associados a projectores surgem, frequentemente, em problemas de matemática aplicada e de engenharia. Em especial, os operadores de Wiener-Hopf têm grande importância quando associados a certas factorizações que garantem a existência de inversos e, assim, encontrar soluções a equações onde actuam estes operadores.

Em especial, nesta secção, apresenta-se a factorização forte que garante a existência de inverso, a factorização forte à esquerda (resp. à direita) que garante a existência de inverso à esquerda (resp. inverso à direita) e a factorização fraca.

Considere-se X e Y a serem espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Definição 2.1.1 ([30]) *Sejam $P, A \in L(X)$, onde P é um projector e A é invertível em X. Diz-se que o operador definido por*

$$W = PA_{|PX} : PX \to PX, \tag{2.1.1}$$

é um operador de Wiener-Hopf abstracto.

Definição 2.1.2 ([30]) *Para $A \in L(X,Y)$ invertível, o operador de Wiener-Hopf abstracto assimétrico é definido por*

$$W = P_2 A_{|P_1 X} : P_1 X \to P_2 Y$$

onde P_1 é um projector no espaço de Banach X e P_2 é um projector no espaço de Banach Y.

Considera-se um projector $P \in L(X)$, um operador invertível $A \in L(X)$ e o projector complementar de P, $Q = I_X - P$. Toma-se o operador de Wiener-Hopf, $W = PA_{|PX} : PX \to PX$.

Definição 2.1.3 ([30]) *Diz-se que o operador $A \in L(X)$ admite uma factorização forte se é possível escrever A da forma*

$$A = A_- A_+$$

onde A_+ e $A_- \in L(X)$ são invertíveis e satisfazem

$$A_+ PX = PX \quad e \quad A_- QX = QX.$$

Nestas circunstâncias, A_- e A_+ dizem-se factores fortes de Wiener-Hopf.

Definição 2.1.4 ([30]) *Diz-se que o operador $A \in L(X)$ possui uma factorização fraca relativamente ao espaço X e ao projector P, e denota-se que A possui uma factorização fraca relativamente a $[X,P]$, se é possível escrever A da forma*

$$A = B_- B_+,$$

onde B_- e $B_+ \in L(X)$ são invertíveis e $B_+ PX \subset PX$ e $B_- QX \subset QX$.

Se B_- ou B_+ for um factor de Wiener-Hopf forte, a factorização diz-se forte à esquerda ou forte à direita, respectivamente.

Proposição 2.1.5 *O operador de Wiener-Hopf $W = PA_{|PX}$ é invertível em PX se e só se A admite uma factorização forte, $A = A_-A_+$. Nestas condições, o inverso é dado por* [1]

$$W^{-1} = A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX}.$$

Demonstração: Suponha-se que A admite uma factorização forte, $A = A_-A_+$. Logo, A_- e A_+ são invertíveis e

$$A_+PX = PX \quad \text{e} \quad A_-QX = QX.$$

Assim, $PX = A_+^{-1}PX$. Então, $imA_+P = PX = imA_+^{-1}P$. Consequentemente,

$$PA_+P = A_+P \quad \text{e} \quad PA_+^{-1}P = A_+^{-1}P.$$

Utilizando o mesmo raciocínio para A_-, resulta que

$$QA_-Q = A_-Q \quad \text{e} \quad QA_-^{-1}Q = A_-^{-1}Q.$$

Logo, encontram-se as seguintes equações equivalentes,

$$\begin{aligned}
QA_-Q &= A_-Q \\
(I_X - P)A_-(I_X - P) &= A_-(I_X - P) \\
(A_- - PA_-)(I_X - P) &= A_- - A_-P \\
A_- - A_-P - PA_- + PA_-P &= A_- - A_-P \\
-PA_- + PA_-P &= 0 \\
PA_-P &= PA_-.
\end{aligned}$$

Analogamente, para A_-^{-1}, obtém-se que $PA_-^{-1}P = PA_-^{-1}$.

[1] Mais detalhadamente, W^{-1} transforma em PX e o operador A_+^{-1} em X com imagem PX que admite uma identificação evidente.

Considere-se o operador $A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX}$. Tem-se, então, que

$$\begin{aligned} WA_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX} &= PA_{|PX}A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX} \\ &= PA_-A_+A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX} \\ &= PA_-PA_-^{-1}{}_{|PX} \\ &= PA_-A_-^{-1}{}_{|PX} \\ &= PI_{|PX} \\ &= I_{|PX}. \end{aligned}$$

Similarmente, obtém-se que $A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX}W = I_{|PX}$.

Conclui-se então que W é invertível e com inverso dado por

$$W^{-1} = A_+^{-1}PA_-^{-1}{}_{|PX}.$$

Reciprocamente, suponha-se que W é invertível. Veja-se o rodapé 1.

Verifica-se que, $PAP+Q = WP+Q = PWP+Q$. Então, sabendo que $imW = PX$ (uma vez que W é invertível em PX) e $PQ = 0$,

$$(PWP+Q)(PW^{-1}P+Q) = PWPW^{-1}P+Q = P+Q = I_X.$$

Logo, $PAP+Q$ é invertível em X. Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} (I_X - PAQ)(I_X + PAQ) &= I_X + PAQ - PAQ \\ &= I_X \end{aligned}$$

e, portanto, $I_X + PAQ$ é invertível. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} (I_X + PAQ)(PAP+Q) &= PAP + Q + PAQ \\ &= PAP + Q + PA - PAP \\ &= PA + Q. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Em especial, (2.1.2) exibe que $PAP+Q$ e $PA+Q$ são equivalentes (no sentido de [4]). Logo, como $PAP+Q$ é invertível, segue-se que $PA+Q$ é também invertível.

Sejam $A_+ = PA+Q$ e

$$A_- = (A_+A^{-1})^{-1} = ((PA+Q)A^{-1})^{-1} = (P+QA^{-1})^{-1}.$$

Então, $A = A_-A_+$ e A_+, A_- são invertíveis, devido à invertibilidade de $PA+Q$. Também, devido à invertibilidade de W, tem-se,

$$A_+PX = (PA+Q)PX = PAPX = WPX = PX$$

e tendo ainda em conta que $im(PA+Q) = X$ (pois $PA+Q$ é invertível em X), vem

$$A_+QX = A_+X - A_+PX = (PA+Q)X - PX = X - PX = QX.$$

Logo,

$$A_-QX = (A_+A^{-1})^{-1}QX = AA_+^{-1}QX = AQX = QX.$$

Segue-se que A_+ e A_- são factores fortes e, portanto, A admite uma factorização forte. $\diamondsuit$

Assume-se, agora, que P_1 é um projector em X, P_2 é um projector em Y, $A \in L(X,Y)$ e seja $W = P_2A_{|P_1X} : P_1X \to P_2Y$ o respectivo operador de Wiener-Hopf assimétrico. Considere-se, ainda, os projectores complementares $Q_1 = I_X - P_1$ e $Q_2 = I_Y - P_2$.

Definição 2.1.6 ([33]) *Diz-se que o operador $A \in L(X,Y)$ possui uma factorização fraca (assimétrica) relativamente aos espaços X e Y, e aos projectores P_1 e P_2, e escreve-se que A possui uma factorização fraca relativamente $[(X,Y),(P_1,P_2)]$, se*

$$A = B_-B_+,$$

onde B_- e B_+ são tais que uma das seguintes duas situações ocorre, *i)* $B_- \in L(Y)$ *e* $B_+ \in L(X, Y)$ *com* $B_- P_2 Y \subset P_2 Y$ *e* $B_+ P_1 X \subset P_2 Y$ *ou*

ii) $B_- \in L(X, Y)$ *e* $B_+ \in L(X)$ *com* $B_- P_1 X \subset P_2 Y$ *e* $B_+ P_1 X \subset P_1 X$.

Proposição 2.1.7 *O operador* W *tem um inverso à esquerda,* L*, se e só se* $A = A_- B_+$*, onde* A_- *é um factor forte relativamente a* $[Y, P_2]$ *e* B_+ *é um factor fraco relativamente a* $[(X, Y), (P_1, P_2)]$.

Então, o inverso à esquerda de W *é dado por*

$$L = P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1}{}_{|P_2 Y}$$

e uma factorização de A *pode ser dada por*

$$A = (I_Y + Q_2 A L P_2)(A - Q_2 A L P_2 A).$$

Demonstração: Como A é invertível, A_- e B_+ são invertíveis.

Se $A = A_- B_+$, onde A_- é factor forte de Wiener-Hopf e B_+ é factor fraco de Wiener-Hopf, então tem-se que $P_2 B_+ P_1 = B_+ P_1$ e $P_2 A_-^{-1} P_2 = P_2 A_-^{-1}$.

Seja $L = P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1}{}_{|P_2 Y}$. Assim,

$$\begin{aligned}
LW &= LP_2 A_{|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1} P_2 A_{|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1} P_2 A_- B_{+|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1} A_- B_{+|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} P_2 B_{+|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} P_2 B_+ P_{1|P_1 X} \\
&= P_1 B_+^{-1} B_+ P_{1|P_1 X} \\
&= P_{1|P_1 X} \\
&= I_{|P_1 X}.
\end{aligned}$$

Logo, L é de facto um inverso à esquerda de W.

Suponha-se, por sua vez, que W tem inverso à esquerda, L. Tem-se assim, $LW = I_{|P_1X}$ e $L = P_1LP_2$.

Define-se $A_- = I_Y + Q_2ALP_2$ e $B_+ = A - Q_2ALP_2A$.

Então, A_- tem inverso $A_-^{-1} = I_Y - Q_2ALP_2$ sendo, por isso, invertível em Y. Além disso, $A_-Q_2Y = (I_Y - Q_2ALP_2)Q_2Y = Q_2Y$, donde se conclui que A_- é um factor forte relativamente a $[Y, Q_2]$.

Verifica-se, ainda, que

$$\begin{aligned} A_-B_+ &= A_-(A - Q_2ALP_2A) \\ &= A_-(I_Y - Q_2ALP_2)A \\ &= A_-A_-^{-1}A \\ &= A. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q_2B_+P_1 &= Q_2(A - Q_2ALP_2A)P_1 \\ &= Q_2AP_1 - (Q_2)^2ALP_2AP_1 \\ &= Q_2AP_1 - Q_2ALWP_1 \\ &= Q_2AP_1 - Q_2A(P_1)^2 \\ &= Q_2AP_1 - Q_2AP_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $P_1LP_2AP_1 = LP_2AP_1 = P_1$. Como, $Q_2B_+P_1 = 0$, ou seja, $B_+P_1 = P_2B_+P_1$.

Com efeito, $A = A_-B_+$, onde A_- é um factor forte relativamente a $[Y, Q_2]$ e B_+ é um factor fraco relativamente a $[(X, Y), (P_1, P_2)]$.

Pode-se concluir então que a factorização

$$A = (I_Y + Q_2ALP_2)(A - Q_2LP_2A)$$

é válida. $\diamond$

Proposição 2.1.8 *W tem um inverso à direita, R, se e só se $A = B_- A_+$, onde A_+ é um factor forte relativamente a $[X, P_1]$, e B_- é um factor fraco relativamente a $[(X,Y),(P_1,P_2)]$. Então, R pode ser dado por*

$$R = A_+^{-1} P_1 B_-^{-1}{}_{|P_2 Y}$$

e uma factorização de A pode ser

$$A = (A - ARP_2AQ_1)(I_X + RP_2AQ_1).$$

Demonstração: Se $A = B_- A_+$, então como A é invertível, A_+ e B_- são invertíveis. Tem-se ainda que, $P_2 B_- P_1 = P_2 B_-$ e $P_1 A_+^{-1} P_1 = A_+^{-1} P_1$. Define-se $R = A_+^{-1} P_1 B_-^{-1}{}_{|P_2 Y}$. Então,

$$\begin{aligned} WR &= P_2 A R_{|P_2 Y} \\ &= P_2 A A_+^{-1} P_1 B_-^{-1}{}_{|P_2 Y} \\ &= P_2 B_- A_+ A_+^{-1} P_1 B_-^{-1}{}_{|P_2 Y} \\ &= P_2 B_- P_1 B_-^{-1}{}_{|P_2 Y} \\ &= P_2 B_- B_-^{-1}{}_{|P_2 Y} \\ &= I_{|P_2 Y}. \end{aligned}$$

Logo, R é de facto um inverso à direita de W.

Suponha-se, agora, que W tem um inverso à direita, R. Assim, $WR = P_2$ e $R = P_1 R P_2$.

Define-se $A_+ = I_X + RP_2AQ_1$ e $B_- = A - ARP_2AQ_1$.

Então, $A_+^{-1} = I_X - RP_2AQ_1$, pelo que A_+ é invertível em X. Adicionalmente, $A_+ P_1 X = P_1 X$ o que implica que A_+ é um factor forte relativamente a $[X, P_1]$. Resulta que,

$$\begin{aligned}
B_-A_+ &= (A - ARP_2AQ_1)A_+ \\
&= A(I_X - RP_2AQ_1)A_+ \\
&= AA_+^{-1}A_+ \\
&= A.
\end{aligned}$$

Verifica-se, ainda, que

$$\begin{aligned}
P_2B_-Q_1 &= P_2(A - ARP_2AQ_1)Q_1 \\
&= P_2AQ_1 - P_2ARP_2AQ_1 \\
&= P_2AQ_1 - WRP_2AQ_1 \\
&= P_2AQ_1 - P_2AQ_1 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Logo, atendendo a (2.1.3), tem-se $P_2B_-P_1 = P_2B_-$. Por outro lado, verifica-se que $P_2AP_1RP_2 = P_2ARP_2 = P_2$ e $RQ_2 = 0$.

Conclui-se pois que $A = B_-A_+$, onde A_+ é um factor forte relativamente a $[X, P_1]$ e B_- é um factor fraco relativamente a $[(X, Y), (P_1, P_2)]$. Consequentemente, a factorização

$$A = (A - ARP_2AQ_1)(I_X + RP_2AQ_1)$$

é válida. $\diamondsuit$

Proposição 2.1.9 *W é invertível à esquerda (direita) se e só se o operador de Wiener-Hopf associado,*

$$W_* = Q_1A^{-1}{}_{|Q_2Y} : Q_2Y \to Q_1X$$

é invertível à esquerda (direita).

Demonstração: Se W tem inverso à esquerda, L, então, já se provou que $P_1LP_2AP_1 = P_1$. Ora, sabendo que $P_1Q_1 = 0 = Q_1P_1$ e $P_1LP_2AP_1Q_1 = P_1LWP_1Q_1 = P_1Q_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
I_Y &= AA^{-1} \\
&= A(P_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2AP_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2A(I_X - Q_1) + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2A - P_1LP_2AQ_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2A - P_1LP_2AQ_1P_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2A - P_1LP_2AQ_1P_1LP_2AP_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A(P_1LP_2A - P_1LP_2AP_1Q_1P_1LP_2A + P_1LP_2AQ_1P_1LP_2AQ_1 + Q_1)A^{-1} \\
&= A((I_X - P_1LP_2AQ_1)P_1LP_2A + Q_1)A^{-1} \\
&= A((I_X - P_1LP_2AQ_1)P_1LP_2A + (I_X - P_1LP_2AQ_1)Q_1)A^{-1} \\
&= A(I_X - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2A + Q_1)A^{-1} \\
&= A(I_X - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2 + QA^{-1}). \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

Adicionalmente, $L = P_1LP_2$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
Q_1L &= L - P_1L \\
&= L - (P_1)^2LP_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, considerando $L_* = Q_2A(I_X - P_1LP_2A)Q_1$ e tendo em atenção (2.1.4), tem-se,

$$\begin{aligned}
L_*W_* &= Q_2A(I_X - P_1LP_2A)Q_1Q_1A^{-1}{}_{|Q_2Y} \\
&= Q_2A(I_X - P_1LP_2A)Q_1(L + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y} \\
&= Q_2A(I_X - P_1LP_2A)Q_1(P_1LP_2 + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y} \\
&= Q_2A(Q_1 - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2 + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Q_2A(I_X - P_1 - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2 + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y} \\
&= Q_2A(I_X - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2 + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y} \\
&\quad -Q_2AP_1LP_{2|Q_2Y} - Q_2AP_1Q_1A^{-1}{}_{|Q_2Y} \\
&= Q_2A(I_X - P_1LP_2AQ_1)(P_1LP_2 + Q_1A^{-1})_{|Q_2Y} \\
&= Q_2.
\end{aligned}
$$

Logo, L_* é um inverso à esquerda de W_*.

Reciprocamente, suponha-se que W_* é invertível à esquerda. Tem-se ainda que $I_X - Q_1 = P_1$ e $I_Y - Q_2 = P_2$. Fazendo $T = W_*$, pelo que se provou tem-se que, $T_* = P_2A_{|P_1X}$, ou seja, $T_* = W$. Logo, como W é o operador de Wiener-Hopf associado a W_* e como W_* é invertível à esquerda, W é invertível à esquerda. $\diamondsuit$

2.2 Factorização de Kreĭn de Operadores de Wiener-Hopf

Nesta secção, introduz-se a chamada factorização de Kreĭn [30]. Nesta factorização, figuram três factores, onde os dois extremos são factores fortes e o factor central pode ser fraco ou forte. Designadamente, por exemplo, se o factor central é fraco do tipo $+/-$ (no sentido da complementariedade entre projectores assumida na correspondente definição exibida à frente), então o seu inverso é fraco do tipo $-/+$.

A literatura de base a esta secção foi exclusivamente [30, 33]. Aproveita-se, ainda, para apresentar um resultado relativo a inversos generalizados de um operador de Wiener-Hopf abstracto.

Definição 2.2.1 ([33]) *Um operador $A \in L(X,Y)$ possui uma factorização de Kreĭn relativamente a* $[(X,Y),(P_1,P_2)]$ *se* $A = A_-UA_+$*, onde*

$$A_+P_1X = P_1X, \;\; A_-Q_2Y = Q_2Y,$$

e

$$UP_1X \subset P_2Y, \;\; U^{-1}Q_2Y \subset Q_1X$$

$$(\text{ou } UQ_1X \subset Q_2Y, \;\; U^{-1}P_2Y \subset P_1X).$$

Teorema 2.2.2 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) o operador W é invertível à esquerda (direita);

ii) o operador A admite uma factorização forte à esquerda (direita);

iii) o operador A admite uma factorização de Kreĭn.

Demonstração: ($iii \Rightarrow ii$) Suponha-se que A admite uma factorização de Kreĭn. Então, $A = A_-UA_+$ onde $A_- \in L(Y)$, $U \in L(X,Y)$, $A_+ \in L(X)$ são invertíveis e $A_-Q_2Y = Q_2Y$, $A_+P_1X = P_1X$, $UP_1X \subset P_2Y$ e $U^{-1}Q_2Y \subset Q_1X$.

Seja $B_+ = UA_+$. Sabendo que $A_+P_1X = P_1X$ e $UP_1X \subset P_2Y$, segue-se que,

$$B_+P_1X = UA_+P_1X = UP_1X \subset P_2Y.$$

Logo, A é da forma $A = A_-B_+$, com B_+ a ser um factor fraco e A_- a ser um factor forte (da factorização de Kreĭn). Assim, A admite uma factorização forte à esquerda.

($ii \Rightarrow i$) Segue de imediato da Proposição 2.1.7.

($i \Rightarrow iii$) Suponha-se que W é invertível à esquerda. Logo, pela Proposição 2.1.9, tem-se que W_* é invertível à esquerda.

Pela Proposição 2.1.7, resulta que $A = A_-B_+$ representa uma factorização forte à esquerda de A (devido à invertibilidade de W) e $A^{-1} = A_+^{-1}B_-$ representa uma factorização forte à esquerda de A^{-1} (devido à invertibilidade de W_*).

Logo, $A_-P_2Y = P_2Y$, $B_+P_1X \subset P_2Y$, $A_+^{-1}Q_1X = Q_1X$ e $B_-Q_2Y \subset Q_1X$.

Seja $U = B_+A_+^{-1}$. Então, $A = A_-UA_+$ e

$$U = B_+A_+^{-1} = B_+A^{-1}B_-^{-1} = A_-^{-1}B_-^{-1} = (B_-A_-)^{-1} \in L(X,Y).$$

Tem-se ainda que,

$$UP_1X = B_+A_+^{-1}X - B_+Q_1X \subset B_+X - B_+Q_1X = B_+P_1X \subset P_2Y$$

$$U^{-1}Q_2Y = B_-A_-Q_2Y = B_-A_-Y - B_-P_2Y \subset B_-Y - B_-P_2Y \subset Q_1X.$$

Conclui-se, assim, que A possui uma factorização de Kreĭn, relativamente a $[(X, Y), (P_1, P_2)]$.

No caso da invertibilidade e da factorização forte à direita, a demonstração é análoga. $\diamondsuit$

Proposição 2.2.3 *Seja* $W = PA_{|PX} : PX \to PX$, *com* P *a ser um projector em* X *e* $A \in L(X)$ *invertível em* X*. Considere-se o operador complementar* $Q = I_X - P$*.* W *possui inverso generalizado se e só se*

$$W_* = QA^{-1}{}_{|QX} : QX \to QX$$

tem inverso generalizado.

Demonstração: Se W possui um inverso generalizado, então existe $V \in L(PX)$ tal que $WVW = W$. Adicionalmente, tem-se que

$I_X - QAP = (I_X + QAP)^{-1}$ e $I_X + PA^{-1}Q = (I_X - PA^{-1}Q)^{-1}$.

Seja $\widetilde{V} = PVP + Q$. Então,

$$\begin{aligned}
(PAP+Q)\widetilde{V}(PAP+Q) &= (PAP+Q)(PVP+Q)(PAP+Q) \\
&= (PAPPVP + PAPQ + QPVP + QQ) \\
&\quad\ (PAP+Q) \\
&= (PAPVP+Q)(PAP+Q) \\
&= PAPVPPAP + PAPVPQ + QPAP + QQ \\
&= PAPVPAP + Q \\
&= WPVWP + Q
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= WVWP + Q \\
&= WP + Q \\
&= PAP + Q.
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, $\widetilde{V}$ é um inverso generalizado de $PAP + Q$.

Tem-se ainda que,

$$
\begin{aligned}
& A(P + QA^{-1}Q)(I_X + PA^{-1}Q)(I_X - QAP)\widetilde{V} \\
& A(P + QA^{-1}Q)(I_X + PA^{-1}Q)(I_X - QAP) \\
= \;& (AP + AQA^{-1}Q)(I_X + PA^{-1}Q)(I_X - QAP)\widetilde{V} \\
& (AP + AQA^{-1}Q)(I_X + PA^{-1}Q)(I_X - QAP) \\
= \;& (AP + APA^{-1}Q + AQA^{-1}Q)(I_X - QAP)\widetilde{V} \\
& (AP + APA^{-1}Q + AQA^{-1}Q)(I_X - QAP) \\
= \;& (AP + APA^{-1}Q + AA^{-1}Q - APA^{-1}Q)(I_X - QAP)\widetilde{V} \\
& (AP + APA^{-1}Q + AA^{-1}Q - APA^{-1}Q)(I_X - QAP) \\
= \;& (AP + Q)(I_X - QAP)\widetilde{V}(AP + Q)(I_X - QAP) \\
= \;& (AP + Q - QAP)\widetilde{V}(AP + Q - QAP) \\
= \;& (AP + Q - AP + PAP)\widetilde{V}(AP + Q - AP + PAP) \\
= \;& (PAP + Q)\widetilde{V}(PAP + Q) \\
= \;& PAP + Q. \qquad (2.2.1)
\end{aligned}
$$

Definindo-se $\widetilde{V}_* = (I_X + PA^{-1}Q)(I_X - QAP)\widetilde{V}A$ e tendo em conta (2.2.1), obtem-se,

$$
\begin{aligned}
& (P + QA^{-1}Q)\widetilde{V}_*(P + QA^{-1}Q) \qquad (2.2.2) \\
= \;& A^{-1}(PAP + Q)(I_X + QAP)(I_X - PA^{-1}Q) \\
= \;& A^{-1}(PAP + Q + QAP)(I_X - PA^{-1}Q) \\
= \;& A^{-1}(PAP + Q + AP - PAP)(I_X - PA^{-1}Q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= A^{-1}(AP+Q)(I_X-PA^{-1}Q)\\
&= A^{-1}(AP-APA^{-1}Q+Q)\\
&= P-PA^{-1}Q+A^{-1}Q\\
&= P+(I_X-P)A^{-1}Q\\
&= P+QA^{-1}Q. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}
$$

Fazendo $V_* = Q\widetilde{V}_{*|QX}$ e utilizando a composição com o projector Q, à esquerda e à direita, na equação (2.2.3), obtem-se,

$$Q(P+QA^{-1}Q)\widetilde{V}_*(P+QA^{-1}Q)Q = Q(P+QA^{-1}Q)Q,$$

ou seja,

$$QA^{-1}Q\widetilde{V}_*QA^{-1}Q = QA^{-1}Q,$$

isto é,

$$W_*V_*W_*Q = W_*Q.$$

Logo, $W_*V_*W_* = W_*$.

Conclui-se então, que V_* é um inverso generalizado de W_*.

Suponha-se, por sua vez, que W_* tem inverso generalizado. Sabendo que $I_X - Q = P$ e fazendo $T = W_*$, resulta que $T_* = PA_{|PX}$, ou seja, $T_* = W$. Logo, como W_* tem inverso generalizado, pelo que se provou anteriormente, W tem inverso generalizado. $\diamondsuit$

Observação 2.2.4 Faz-se notar que em alternativa à última demonstração, poder-se-ia usar a noção mais à frente apresentada de equivalência após extensão (entre operadores lineares limitados – ver Definição 4.5.3) e com ela deduzir de forma mais sucinta o resultado de cima [4].

2.3 Factorização Cruzada de Operadores de Wiener-Hopf

Uma das factorizações mais interessantes é, talvez, a factorização cruzada, uma vez que está intrinsecamente relacionada com a invertibilidade em sentido generalizado. Assim, mesmo quando os operadores de Wiener-Hopf envolvidos numa equação, não apresentam nem sequer invertibilidade lateral, é possível investigar a solução através da invertibilidade em sentido generalizado, se os operadores admitirem factorizações cruzadas.

O trabalho desta secção é baseado, fundamentalmente, nos resultados de [30, 33] com o apoio de [31].

Definição 2.3.1 ([33]) *Diz-se que um operador linear limitado* $A \in L(X,Y)$ *tem uma factorização cruzada relativamente a* $[(X,Y),(P_1,P_2)]$ *se* $A_- \in L(Y)$, $C \in L(X,Y)$, $A_+ \in L(X)$ *e*

$$A = A_- C A_+,$$

onde A_- *e* A_+ *são factores de Wiener-Hopf fortes, e o factor cruzado* C *é também invertível, com as restrições bijectivas*

$$C : X_j \to Y_j, \quad j = 0,1,2,3$$

onde

$$X_1 \oplus X_0 = P_1 X, \;\; Y_1 \oplus Y_2 = P_2 Y, \;\; X_2 \oplus X_3 = Q_1 X, \;\; Y_0 \oplus Y_3 = Q_2 Y.$$

As restrições do factor cruzado satisfazem o diagrama (ver [30]),

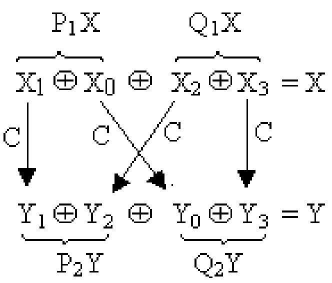

Figura 2.3.1 *Diagrama salientando as condições do factor cruzado.*

Exemplo 2.3.2 Para $\Phi \in L^{\infty}_{n\times n}(\mathbb{R})$, um operador de Toeplitz pode ser definido por

$$T = P_{\mathbb{R}}\Phi\cdot_{|P_{\mathbb{R}}X},$$

onde podemos estar a considerar para X o espaço $L^2_n(\mathbb{R})$ e $P_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{R}})$, com $S_{\mathbb{R}}$ a ser a transformação de Hilbert

$$S_{\mathbb{R}}\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \xi}d\tau.$$

Supondo que existe uma factorização generalizada de funções matriciais Φ [22]

$$\Phi(\xi) = \Phi_{-}(\xi)\ \mathrm{diag}\left[\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}\right)^{\kappa_j}\right]\Phi_{+}(\xi)$$

(com as respectivas propriedades), então é possível [22] construir operadores associados utilizando as transformações de Fourier

$$\begin{aligned} A &= F^{-1}\Phi\cdot F \\ A_{\pm} &= F^{-1}\Phi_{\pm}\cdot F \\ C &= F^{-1}\ \mathrm{diag}\left[\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}\right)^{\kappa_j}\right]\cdot F. \end{aligned}$$

Nesta linha, casos particulares destes últimos operadores aparecem em vários exemplos no artigo [31], como ilustrações de concretas factorizações cruzadas.

Exemplo 2.3.3 No caso de W ser um operador de Wiener-Hopf finito[2] e A ser invertível, uma factorização cruzada pode-se também identificar utilizando a noção de factorização LU, se se escolher o factor cruzado para ser a transformação linear associada às necessárias trocas de linhas de uma matriz auxiliar E_A, utilizando o algoritmo de Gauss, de tal forma que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} E_A \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

com n a ser a dimensão associada ao operador W e E_A a ser uma matriz unitária (os pormenores deste exemplo podem ser encontrados em [13] e [31]).

Teorema 2.3.4 *Seja $A \in L(X, Y)$ invertível. O operador de Wiener-Hopf $W = P_2 A_{|P_1 X}$ tem inverso generalizado se e só se A admite uma factorização cruzada.*

Demonstração: Suponha-se que A tem uma factorização cruzada. Então, A pode-se escrever da forma

$$A = A_- C A_+,$$

onde A_- e A_+ são factores de Wiener-Hopf fortes e $C \in L(X, Y)$ é invertível em X, com as restrições bijectivas

$$C : X_j \to Y_j, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

onde

$$X_1 \oplus X_0 = P_1 X, \;\; Y_1 \oplus Y_2 = P_2 Y \;\; , X_2 \oplus X_3 = Q_1 X, \;\; Y_0 \oplus Y_3 = Q_2 Y.$$

Assim,

$$\begin{aligned} W &= P_2 A_{|P_1 X} \\ &= P_2 A_- C A_{+|P_1 X} \\ &= P_2 A_{-|P_2 Y} P_2 C_{|P_1 X} P_1 A_{+|P_1 X}. \end{aligned}$$

[2] No sentido de estar a actuar na álgebra $\mathcal{A}$ das matrizes $n \times n$ de números reais ou complexos e tendo em conta uma decomposição desta $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$, onde $\mathcal{A}_+$ é a subálgebra das matrizes triangulares superiores e $\mathcal{A}_-$ é a subálgebra das matrizes triangulares inferiores com zeros na diagonal principal, bem como, os correspondentes projectores associados a tal decomposição.

Como A_- e A_+ são invertíveis e P_1 e P_2 são projectores, P_2A_- e P_1A_+ são invertíveis.

Considere-se, então, $W_C = P_2C_{|P_1X}$. Do diagrama do factor cruzado (Figura 2.3.1), pode-se verificar que,

$$\begin{aligned} kerW_C &= \{x \in P_1X : P_2C(x) = 0\} \\ &= \{x \in P_1X : C(x) - P_2C(x) = C(x)\} \\ &= \{x \in P_1X : Q_2C(x) = C(x)\} \\ &= \{x \in P_1X : C(x) \in Q_2X\} \\ &= X_0. \end{aligned}$$

e

$$imW_C = \{y \in P_2Y : y = P_2C(x),\ \ x \in P_1X\} = Y_1$$

com complementos X_1 em P_1X e Y_2 em P_2Y, respectivamente.

Resulta que W tem imagem e núcleo complementados e, portanto, pela Observação 1.3.5 implica que W tem inverso generalizado.

Por sua vez, suponha-se que W tem inverso generalizado. Sejam

$$X_0 = kerW,\ \ Y_1 = imW,\ \ Y_0 = kerW_*\ \ X_3 = imW_*.$$

Pela Proposição 2.2.3, como W tem inverso generalizado, W_* possui também inverso generalizado. Então, pela Observação 1.3.5, existem espaços complementares X_1, X_2, Y_2 e Y_3 tais que

$$X_0 \oplus X_1 = P_1X,\ \ Y_1 \oplus Y_2 = P_2Y,\ \ Y_0 \oplus Y_3 = Q_2Y \ \text{ e } \ X_3 \oplus X_2 = Q_1X. \qquad (2.3.1)$$

Como $X_0 = kerW$, vem que

$$\begin{aligned} X_0 &= \{x \in P_1X : Wx = 0\} \\ &= \{x \in P_1X : P_2Ax = 0\} \\ &= \{x \in P_1X : Q_2Ax = Ax\} \\ &= \{x \in P_1X : Ax \in Q_2Y\}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$Y_0 = \{x \in Q_2Y : A^{-1}x \in P_1X\} = A\{u \in P_1X : Au \in Q_2Y\} = AX_0.$$

Assim, $A : X_0 \to Y_0$ é uma bijecção. Sejam

$$\widetilde{X} = X_1 \oplus Q_1X \quad e \quad \widetilde{Y} = Y_3 \oplus P_2Y.$$

Então, $\widetilde{X}$ tem complemento X_0 relativamente a X e $\widetilde{Y}$ tem como complemento Y_0 relativamente a Y.

Seja $P_{\widetilde{X}}$ o projector sobre $\widetilde{X}$ ao longo de X_0 (i.e., $kerP_{\widetilde{X}} = X_0$), P_{X_0} o projector sobre X_0 ao longo de $\widetilde{X}$ e P_{Y_0} o projector sobre Y_0 ao longo de $\widetilde{Y}$.

Sabendo que $A : X_0 \to Y_0$ é uma bijecção, tem-se $imA^{-1}P_{Y_0} \subset X_0$. Como $P_{\widetilde{X}}$ é o projector sobre $\widetilde{X}$ ao longo de X_0, ou seja, $kerP_{\widetilde{X}} = X_0$, resulta que $P_{\widetilde{X}}A^{-1}P_{Y_0} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& (I_X - A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}})(I_X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}) \\
= \; & I_X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}} - A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}} - A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}} \\
= \; & I_X.
\end{aligned}$$

Daqui observa-se, então, que

$$A = A(I_X - A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}})(I_X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}) = (A - P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}})H_+,$$

onde $H_+ = (I_X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}})$.

Como $X_0 \oplus \widetilde{X} = X$, então $A = AP_{\widetilde{X}} + AP_{X_0}$. Sabendo que, $imAP_{\widetilde{X}} \subset \widetilde{Y}$, resulta que $P_{\widetilde{Y}}AP_{\widetilde{X}} = AP_{\widetilde{X}}$. Atendendo ainda que, $I_Y - P_{Y_0} = P_{\widetilde{Y}}$, vem pois,

$$\begin{aligned}
A &= (AP_{\widetilde{X}} - P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}} + AP_{X_0})H_+ \\
&= [(I_Y - P_{Y_0})AP_{\widetilde{X}} + AP_{X_0}]H_+ \\
&= (P_{\widetilde{Y}}AP_{\widetilde{X}} + AP_{X_0})H_+. \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

Adicionalmente, H_+ é invertível e do facto de $imAP_{\widetilde{X}} \subset \widetilde{Y}$ e $kerP_{Y_0} = \widetilde{Y}$, obtém-se

$$\begin{aligned} H_+P_1X &= (I_X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}})P_1X \\ &= P_1X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}P_1X \\ &= P_1X + A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}X \\ &\subset P_1X + A^{-1}P_{Y_0}\widetilde{Y}X \\ &= P_1X. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Por sua vez, o inverso de H_+ é dado por $H_+^{-1} = I_X - A^{-1}P_{Y_0}AP_{\widetilde{X}}$. Seguindo o mesmo raciocínio que foi feito para H_+, conclui-se que

$$H_+^{-1}P_1X \subset P_1X. \tag{2.3.4}$$

Tem-se, consequentemente, que $H_+P_1X \subset P_1X$ e $H_+^{-1}P_1X \subset P_1X$, o que implica que $H_+P_1X = P_1X$, ou seja, H_+ é um factor forte de Wiener-Hopf.

Como $A : X \to Y$ e $A : X_0 \to Y_0$ são bijectivas, o operador

$$\widetilde{A} = P_{\widetilde{Y}}A_{|\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$$

é invertível. Logo, o operador de Wiener-Hopf $\widetilde{W} = P_2\widetilde{A}_{|P_1X}$ é injectivo. Segue-se, pois, que a dimensão de $ker\widetilde{W}$ é nula. Pela definição de $\widetilde{A}$ e de $P_{\widetilde{Y}}$, resulta que $im\widetilde{W} = imW = Y_1$.

Então, $im\widetilde{W}$ é fechado e tem complemento em P_2Y. Por conseguinte, pela Proposição 1.2.1, $\widetilde{W}$ é invertível à esquerda e, portanto, devido ao Teorema 2.2.2, $\widetilde{A}$ tem uma factorização de Kreĭn relativamente a $[(\widetilde{X}, \widetilde{Y}), (P_{X_1}, P_{Y_3})]$:

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_-\widetilde{C}\widetilde{A}_+,$$

onde $\widetilde{A}_- \in L(\widetilde{Y})$, $\widetilde{C} \in L(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, $\widetilde{A}_+ \in L(\widetilde{X})$ e $\widetilde{A}_-Y_3 = Y_3 = Q_2\widetilde{Y}$, $\widetilde{A}_+X_1 = X_1 = P_1\widetilde{X}$ e, ainda, $\widetilde{C}X_1 \subset P_2\widetilde{Y}$, $\widetilde{C}^{-1}Y_3 \subset Q_1\widetilde{X}$.

Assim, com o resultado de (2.3.2), tem-se

$$\begin{aligned} A &= (P_{\widetilde{Y}} A P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0}) H_+ \\ &= (\widetilde{A} P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0}) H_+ \\ &= (\widetilde{A}_- \widetilde{C} \widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0}) H_+. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Sabendo-se que $imAP_{X_0} \subset Y_0$ e $\widetilde{C} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, o que implica que $\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} A P_{X_0} = 0$ e $P_{Y_0} \widetilde{C} P_{\widetilde{X}} = 0$, resulta

$$\begin{aligned} & (\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} + P_{Y_0})(\widetilde{C} P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0})(\widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{X_0}) \\ = \; & (\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} \widetilde{C} P_{\widetilde{X}} + \widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} A P_{X_0} + P_{Y_0} \widetilde{C} P_{\widetilde{X}} + P_{Y_0} A P_{X_0})(\widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{X_0}) \\ = \; & \widetilde{A}_- \widetilde{C} \widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + \widetilde{A}_- \widetilde{C} P_{\widetilde{X}} P_{X_0} + P_{Y_0} A P_{X_0} \widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{Y_0} A P_{X_0} \\ = \; & \widetilde{A}_- \widetilde{C} \widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Deste modo, de (2.3.5) e (2.3.6) segue,

$$A = (\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} + P_{Y_0})(\widetilde{C} P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0})(\widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{X_0}) H_+ = A_- C A_+,$$

onde $A_- = (\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} + P_{Y_0})$, $C = (\widetilde{C} P_{\widetilde{X}} + A P_{X_0})$ e $A_+ = (\widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{X_0}) H_+$.

Das propriedades de $\widetilde{A}_-$, tomando em consideração (2.3.1) e atendendo a que $kerP_{\widetilde{Y}} = Y_0$, tem-se que,

$$\begin{aligned} A_- Q_2 Y &= (\widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} + P_{Y_0}) Q_2 Y \\ &= \widetilde{A}_- P_{\widetilde{Y}} Q_2 Y + P_{Y_0} Q_2 Y \\ &= \widetilde{A}_- Y_3 + Y_0 \\ &= Y_3 + Y_0 \\ &= Q_2 Y. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

De igual modo, considerando (2.3.1) e as propriedades de $\widetilde{A}_+$, bem como o facto de $kerP_{X_0} = \widetilde{X}$, resulta que

$$(\widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} + P_{X_0}) P_1 X = \widetilde{A}_+ P_{\widetilde{X}} P_1 X + P_{X_0} P_1 X$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{A}_+ X_1 + X_0 \\
&= X_1 + X_0 \\
&= P_1 X. && (2.3.8)
\end{aligned}
$$

De (2.3.7), sabe-se que A_- é um factor forte de Wiener-Hopf. De (2.3.3) e (2.3.4), concluiu-se que H_+ é também um factor forte de Wiener-Hopf. Adicionalmente, de (2.3.8), resulta que A_+ é um factor forte de Wiener-Hopf.

Por sua vez, como A é uma bijecção de X_j para Y_j, $j = 0, 1, 2, 3$, C satisfaz as condições de factor cruzado.

Logo, A admite uma factorização cruzada. $\diamondsuit$

Corolário 2.3.5 *Suponha-se que A admite uma factorização cruzada relativamente a $[(X,Y),(P_1,P_2)]$, $A = A_- C A_+$. Então,*

$$V = A_+^{-1} P_1 C^{-1} P_2 A_{-|P_2Y}^{-1}$$

é um inverso generalizado de $W = P_2 A_{|P_1 X}$.

Demonstração: Como $A = A_- C A_+$ representa uma factorização cruzada de A, tem-se que $A_- \in L(Y)$, $A_+ \in L(X)$, $C \in L(X,Y)$ com $A_+ P_1 X = P_1 X$, $A_- P_2 Y = P_2 Y$, C invertível e tal que

$$C : X_j \to Y_j, \;\; j = 0, 1, 2, 3$$

são bijecções onde

$$X_0 \oplus X_1 = P_1 X, \;\; X_2 \oplus X_3 = Q_1 X$$

e

$$Y_1 \oplus Y_2 = P_2 Y, \;\; Y_0 \oplus Y_3 = Q_2 Y.$$

Seja P_{X_1} o projector em X_1 ao longo de $X_0 \oplus Q_1 X$. Pelo diagrama do factor cruzado (Figura 2.3.1), verifica-se que $imCP_{X_1} = Y_1 \subset P_2 Y$ e, portanto, $P_2 C P_{X_1} = C P_{X_1}$. Por sua vez, $imCP_1 \in Y_1 \cup Y_0$, e tendo em consideração que $ker P_{X_1} = X_0$ e $P_2 Q_2 = 0$, segue que $C X_1 = Y_1 = C P_{X_1}$ e $P_2 C X_0 = P_2 Y_0 = 0 = P_2 C P_{X_1} X_0$.

Daqui sai que $P_2CP_1 = P_2CP_{X_1} = CP_{X_1}$.

Seja $V = A_+^{-1}P_1C^{-1}P_2A_{-|P_2Y}^{-1}$. Logo, usando o facto de que $imA_+P_1 = P_1X$ e $imA_-P_2 = P_2Y$, verifica-se que

$$\begin{aligned}
WVW &= P_2AA_+^{-1}P_1C^{-1}P_2A_-^{-1}P_2A_{|P_1X} \\
&= P_2A_-CA_+A_+^{-1}P_1C^{-1}P_2A_-^{-1}P_2A_-CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CP_1C^{-1}P_2A_-^{-1}P_2A_-CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CP_1C^{-1}P_2A_-^{-1}A_-CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CP_1C^{-1}P_2CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CP_1C^{-1}CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CP_1A_{+|P_1X} \\
&= P_2A_-CA_{+|P_1X} \\
&= P_2A_{|P_1X} \\
&= W.
\end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que V é um inverso generalizado de W. $\diamondsuit$

Teorema 2.3.6 *Seja X um espaço de Hilbert separável e A invertível.*

i) Suponha-se $W = PA_{|PX}$ possui um inverso generalizado. Então A é fracamente factorizável (através da decomposição $A = B_-B_+$) se e só se

a) PX e $QA^{-1}QX$ têm característica infinita (onde $Q = I_X - P$)

ou

b) pelo menos um dos factores B_-, B_+ (da decomposição cruzada $A = B_-B_+$) é um factor de Wiener-Hopf forte.

ii) Suponha-se que A é fracamente factorizável através da decomposição $A = B_-B_+$. Então $W = PA_{|PX}$ tem um inverso generalizado se e só se $kerPB_{+|PX} + imPB_{-|PX}$ é fechado em PX.

Demonstração: i) Suponha-se que W possui um inverso generalizado. Então, pelo Teorema 2.3.4, A admite uma factorização cruzada.

Sem perda de generalidade, supõe-se que A é um factor cruzado (pois, os outros factores da factorização cruzada já são factores fortes). Logo, $A \in L(X)$ é invertível em X, com as restrições bijectivas

$$A : X_j \to Y_j, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

onde

$$X_0 \oplus X_1 = Y_1 \oplus Y_2 = PX \quad e \quad X_2 \oplus X_3 = Y_0 \oplus Y_3 = QX. \tag{2.3.9}$$

Se X_0 ou X_2 forem triviais (i.e., $X_0 = \emptyset \vee X_0 = PX$ ou $X_2 = \emptyset \vee X_2 = QX$), então $APX = PX$ ou $AQX = QX$, respectivamente (tal significa que estamos no caso b).

Suponha-se, agora, que X_0 e X_2 não são triviais. Suponha-se, então, que PX e $X_3 = imW_* = QA^{-1}QX$ são de dimensão infinita. Logo, como $PX = X_0 \oplus X_1$, $dimX_0 = \infty$ ou $dimX_1 = \infty$.

Se $dimX_1 = \infty$, como X é um espaço separável, existe $B_+ \in L(X)$, invertível e tal que as restrições de B_+ em

$$PX \to Y_1, \;\; X_2 \to Y_2, \;\; X_3 \to QX \tag{2.3.10}$$

são bijectivas (devido às restrições bijectivas de A). Então, $B_+PX \subset PX$ e, portanto, B_+ é factor de Wiener-Hopf fraco.

Seja $B_- = AB_+^{-1}$. Então, por (2.3.9) e (2.3.10), tem-se que

$$\begin{aligned} B_- &: Y_1 \to PX = X_0 \oplus X_1 \to Y_0 \oplus Y_1, \\ B_- &: Y_2 \to X_2 \to Y_2, \\ B_- &: QX \to X_3 \to Y_3 \subset QX. \end{aligned}$$

Logo, como B_- é invertível (pois A e B_+ são invertíveis) e $B_-QX \subset QX$, B_- é um factor de Wiener-Hopf fraco. Resulta, pois, $A = B_-B_+$, ou seja, A é fracamente factorizável.

Analogamente, se $dimX_0 = \infty$, existe B_+ tal que as restrições de B_+ em $X_1 \to X_1$, $X_0 \oplus X_2 \to X_0$, $X_3 \to QX$ são bijectivas. Logo, B_+ é um factor fraco. Para $B_- = AB_+^{-1}$, tem-se que

$$\begin{aligned} B_- &: X_1 \to X_1 \to Y_1, \\ B_- &: X_0 \to X_0 \oplus X_2 \to Y_0 \oplus Y_2, \\ B_- &: QX \to X_3 \to Y_3 \subset QX. \end{aligned}$$

Resulta, pois que, B_- é um factor fraco e, consequentemente, A é fracamente factorizável.

Se a) não se verificar, como A admite factorização cruzada, A admite uma factorização fraca (e eventualmente forte).

Reciprocamente, suponha-se que A é fracamente factorizável. Logo, $A = B_-B_+$, onde B_- e $B_+ \in L(X)$ são factores fracos.

Se B_- ou B_+ são factores fortes, fica provado.

Suponha-se, então, que B_- e B_+ não são factores fortes. Suponha-se, também (por absurdo), que $dimPX < \infty$. Logo, os subespaços X_0, X_2, Y_0, Y_2 (que actuam entre espaços diferentes) têm a mesma dimensão finita, $n < \infty$. Um operador equivalente a A em $X_0 \oplus X_2$ pode, então, atendendo a (2.3.9), ser representado por

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} : X_0 \times X_2 \to Y_2 \times Y_0.$$

Considere-se a decomposição dos factores B_- e B_+ em

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} B_4 & B_5 \\ 0 & B_6 \end{pmatrix},$$

respectivamente, onde $B_1 = P_{Y_2}B_{-|B_+X_2}$, $B_2 = P_{Y_0}B_{-|B_+X_0}$, $B_3 = P_{Y_0}B_{-|B_+X_2}$, $B_4 = B_{+|X_0}$ e $B_5 = B_6 = B_{+|X_2}$.

Assim,

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_4 & B_5 \\ 0 & B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1B_4 & B_1B_5 \\ B_2B_4 & B_2B_5 + B_3B_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.11}$$

Considere-se B_1 e B_4. Como A é invertível, então B_- e B_+ são invertíveis. Resulta, pois, que B_1 e B_4 são invertíveis, o que contradiz o facto em (2.3.11), de $B_1B_4 = 0$.

Logo, fica provado que $dimPX = \infty$.

Por sua vez, suponha-se (por absurdo) que $dimQA^{-1}QX = dimW_* = n < \infty$. Sem perda de generalidade, considere-se $dimX_2 = \infty$ (caso contrário, a situação seria semelhante à anterior) e $n = 0$ (porque os operadores de dimensão finita podem ser sempre decompostos em factores, onde alguns são de dimensão nula).

Atendendo à decomposição

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} : X_1 \times X_0 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \times Y_0$$

e considerando

$$B_1 = P_{Y_1}B_{-|B_+X_1}, \qquad B_2 = P_{Y_2}B_{-|B_+X_2}, \qquad B_3 = P_{Y_0}B_{-|B_+X_1},$$

$B_4 = P_{Y_0}B_{-|B_+X_0}, \qquad B_5 = P_{Y_0}B_{-|B_+X_2},$

obtém-se:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \\ B_3 & B_4 & B_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{+|X_1} & 0 & PB_{+|X_2} \\ 0 & B_{+|X_0} & 0 \\ 0 & 0 & QB_{+|X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{|X_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{|X_2} \\ 0 & A_{|X_0} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.12}$$

Então, de (2.3.12), resulta que $B_3B_{+|X_1} = 0 = B_3PB_{+|X_2}$, o que implica que $B_5QB_{+|X_2} = 0$. Deste modo, B_- e B_+ não podem ser invertíveis, o que é absurdo.

Conclui-se, pois, que $dimQA^{-1}QX = \infty$.

ii) Suponha-se que A é fracamente factorizável. Logo, existem factores fracos de Wiener-Hopf, B_- e B_+ tais que $A = B_-B_+$.

Então, $W = PA_{|PX}$ possui inverso generalizado se e só se imW é fechado em PX e

$$PX = kerW \oplus X_1 = imW \oplus X_2, \tag{2.3.13}$$

onde X_1 e X_2 são subespaços de PX (Observação 1.3.5).

Como $A = B_-B_+$, $W = PA_{|PX} = PB_-PB_{+|PX}$. Então, como X é um espaço de Hilbert separável, $PX = kerW \oplus imW = kerPB_+ \oplus imPB_-$.

Por conseguinte, (2.3.13) e o facto de imW ser fechado, equivale ao facto de $kerPB_+ \oplus imPB_-$ ser fechado em PX. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Equações de Wiener-Hopf

3.1 Relação entre a Factorização dos Operadores de Wiener-Hopf e as Soluções das Equações de Wiener-Hopf

Equações onde os operadores que nelas actuam são identificados como operadores de Wiener-Hopf, designam-se, naturalmente, por equações de Wiener-Hopf. Estas equações aparecem frequentemente em áreas aplicadas como, por exemplo, a Electrónica e a Física.

Do capítulo anterior, é possível inferir resultados entre as factorizações dos operadores e o espaço de soluções das equações respectivas. Os resultados, a seguir, apresentados são baseados nos resultados anteriores com o apoio essencial de [20, 33].

Em todo o presente capítulo, considera-se que X e Y são espaços de Banach. Além disso, $A \in L(X,Y)$ é invertível, P_1 é um projector em X, $Q_1 = I_X - P_1$, P_2 é um projector em Y e $Q_2 = I_Y - P_2$. O operador

$$W = P_2 A_{|P_1 X} : P_1 X \to P_2 Y$$

representa o respectivo operador de Wiener-Hopf abstracto assimétrico.

Definição 3.1.1 *A equação dada por*

$$Wu = v, \tag{3.1.1}$$

onde $u \in imP_1$ *e* $v \in imP_2$, *diz-se uma equação de Wiener-Hopf abstracta (cf. Definição 2.1.2).*

Proposição 3.1.2 *A equação (3.1.1) é possível e determinada para todo* $v \in imP_2$ *se e só se o operador* W *for invertível.*

Demonstração: Suponha-se que a equação (3.1.1) é possível e determinada para todo $v \in imP_2$.

Assim, para cada $v \in imP_2$, existe $u \in imP_1$ tal que $Wu = v$ é possível. Resulta que $v \in imW$. Deste modo, W é sobrejectivo.

Por outro lado, suponha-se que $u_1, u_2 \in imP_1$ são tais que $Wu_1 = Wu_2 = v$, para algum $v \in imP_2$. Então, u_1 e u_2 são soluções de $Wu = v$. Como a solução é única, resulta que $u_1 = u_2$. Consequentemente, W é injectivo.

Conclui-se, pois, que W é invertível.

Suponha-se, por sua vez, que W é invertível. Seja $v \in imP_2$. Então, tem-se as seguintes equações equivalentes,

$$\begin{aligned} Wu &= v \\ W^{-1}Wu &= W^{-1}v \\ u &= W^{-1}v. \end{aligned}$$

Então, a equação é possível e determinada. $\diamondsuit$

Teorema 3.1.3 *Suponha-se que o operador* A *admite uma factorização forte à esquerda,* $A = A_-B_+$, *e que a equação (3.1.1) tem solução. Então, a solução é única e é dada por*

$$u = P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1} v.$$

Demonstração: Como $A = A_-B_+$ representa uma factorização forte à esquerda, pela Proposição 2.1.7, W tem inverso à esquerda dado por $L = P_1 B_+^{-1} P_2 A_-^{-1}{}_{|P_2Y}$.

Sejam w_1 e w_2 duas soluções da equação $Wu = v$, onde $v \in imP_2$. Segue-se, que $Ww_1 = v$ e $Ww_2 = v$. Então, tem-se as seguintes equações equivalentes,

$$\begin{aligned} Ww_1 &= Ww_2 \\ LWw_1 &= LWw_2 \\ w_1 &= w_2. \end{aligned}$$

Resulta, então, que a equação (3.1.1) tem solução única.

Por outro lado, considere-se $u = Lv = P_1B_+^{-1}P_2A_-^{-1}v$, onde $v \in imP_2$. Logo, $u \in imP_1$ e como $A_-P_2Y = P_2Y$ e $B_+P_1X \subset P_2Y$, tem-se

$$\begin{aligned} Wu &= P_2AP_1B_+^{-1}P_2A_-^{-1}v \\ &= P_2A_-B_+P_1B_+^{-1}P_2A_-^{-1}v \\ &= P_2A_-B_+B_+^{-1}P_2A_-^{-1}v \\ &= P_2A_-P_2A_-^{-1}v \\ &= P_2A_-P_2A_-^{-1}P_2v \\ &= P_2A_-A_-^{-1}P_2v \\ &= P_2v \\ &= v. \end{aligned}$$

Sabendo que a solução da equação (3.1.1) é única, a solução é dada por u. $\diamondsuit$

Teorema 3.1.4 *Suponha-se que $A = B_-A_+$ representa uma factorização forte à direita do operador A. Então, a equação (3.1.1) tem sempre solução e a solução geral é dada por,*

$$u = A_+^{-1}P_1B_-^{-1}v + A_+^{-1}w_0$$

onde $w_0 \in kerP_2B_-$ é arbitrário.

Demonstração: Considere-se a equação $Wu = v$, onde $v \in imP_2$ é dado. Sendo $A = B_-A_+$ uma factorização forte à direita, pela Proposição 2.1.8, W tem inverso à direita, dado por $R = A_+^{-1}P_1B_-^{-1}{}_{|P_2Y}$.

Seja $u = Rv$. Logo,

$$Wu = WRv = P_2 v = v.$$

Então, a equação (3.1.1) tem sempre solução.

Para perspectivar todas as possíveis soluções da (3.1.1), analisa-se todas as soluções da equação homogénea $Wu = 0$, o que equivale a analisar o núcleo de W. Assim, $kerW = kerP_2A_{|P_1X} = kerP_2B_-A_{+|P_1X}$.

Como $A_+P_1X = P_1X$, então $kerW = kerP_2B_-$. Portanto, $Wu = 0$ tem como solução os elementos $u' = A_+^{-1}w_0$ onde $w_0 \in kerP_2B_-$.

Seja $w_1 = A_+^{-1}P_1B_-^{-1}v$, onde $v \in imP_2$. Então, tem-se que

$$\begin{aligned} Ww_1 &= P_2AA_+^{-1}P_1B_-^{-1}v \\ &= P_2B_-P_1B_-^{-1}v \\ &= P_2v \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo, w_1 é uma solução particular da equação (3.1.1).

Segue-se, então que a solução geral é $u = w_1 + u'$, ou seja,

$$u = A_+^{-1}P_1B_-^{-1}v + A_+^{-1}w_0$$

para qualquer $w_0 \in kerP_2B$. $\diamondsuit$

Teorema 3.1.5 *Suponha-se que $A = B_-B_+$ representa uma factorização fraca do operador A (com $B_+P_1X \subset P_2Y$ e $B_-P_2Y \subset P_2Y$) e que a equação (3.1.1) tem solução. Então, toda a solução tem a forma $u = B_+^{-1}P_2B_-^{-1}v + B_+^{-1}P_2w_0$, para certo $w_0 \in kerP_2B_-$.*

Demonstração: Considere-se a equação $Wu = v$, onde $v \in imP_2$. Como a equação tem solução, existe $u \in imP_1$ tal que $Wu = P_2Au = v$. Seja

$$w = P_2B_+u. \tag{3.1.2}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_2B_-w &= P_2B_-P_2B_+u \\ &= P_2B_-P_2B_+P_1u \\ &= P_2B_-B_+P_1u \\ &= P_2B_-B_+u \\ &= P_2Au \\ &= v. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando que $B_- = B_-I_Y$, tem-se que B_- tem factorização forte à direita e, portanto, pelo Teorema 3.1.4, $w = P_2B_-^{-1}v + w_0$, para certo $w_0 \in kerP_2B_-$.

Como u é solução da equação (3.1.2), e $B_+ = I_YB_+$ representa uma factorização forte à esquerda, pelo Teorema 3.1.3, $u = P_1B_+^{-1}P_2w$. Logo,

$$u = P_1B_+^{-1}P_2(P_2B_-^{-1}v + w_0) = P_1B_+^{-1}P_2B_-^{-1}v + P_1B_+^{-1}P_2w_0.$$

Uma vez que $u \in imP_1$, $u = B_+^{-1}P_2B_-^{-1}v + B_+^{-1}P_2w_0$. $\diamondsuit$

Observação 3.1.6 O teorema que se segue aplica-se não apenas às equações onde actuam operadores de Wiener-Hopf, mas também àquelas onde actuam operadores lineares e limitados em geral. Por esse motivo, o teorema é apresentado para o caso geral.

Teorema 3.1.7 *Considere-se um operador $T \in L(X,Y)$. Então, o operador $T : X \to Y$ é invertível em sentido generalizado se e só se*

i) existe um operador $V \in L(Y,X)$, tal que para $v \in Y$, a equação $Tu = v$ é possível se e só $TVv = v$;

ii) nas condições de i), a forma geral da solução de $Tu = v$, onde $v \in Y$, é dada por $u = Vv + (I_X - VT)z$, com $z \in X$.

Demonstração:

Seja T invertível em sentido generalizado. Então, existe um operador $V \in L(Y, X)$ tal que $TVT = T$.

Seja $v \in Y$. Suponha-se que a equação $Tu = v$ é possível. Então, existe $x \in X$ que satisfaz a equação. Tem-se que

$$\begin{aligned} TVv &= TVTx \\ &= Tx \\ &= v. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $TVv = v$, então fazendo $x = Vv$ tem-se que $x \in X$ e $Tx = TVv = v$, donde se conclui que $Tu = v$ é possível. Assim, provou-se i).

Temos, pois, uma solução (particular) de $Tu = v$ que é dada por $u = Vv$. Atendendo a que $I_X - VT$ é uma projecção contínua sobre $kerA$ (cf. Proposição 1.3.4), a forma geral da solução vem dada por $u = Vv + (I_X - VT)x$, para todo $x \in X$. Assim, prova-se ii).

Reciprocamente, suponha-se que se verificam as condições i) e ii).

Da primeira condição, retira-se que $P_{imT} = TV$ é um projector contínuo sobre imT e da segunda que $P_{kerT} = I - VT$ é um projector contínuo sobre $kerT$. Logo, tanto imT como $kerT$ são complementados e daí T ser invertível em sentido generalizado (cf. caracterização da Tabela 1.4 ou a Observação 1.3.5.) $\diamondsuit$

Capítulo 4

Teoria da Realização e Factorização de Wiener-Hopf

4.1 Resultados Gerais sobre Realizações

Certos operadores associados a equações integrais específicas – designadamente algumas equações integrais de Wiener-Hopf – podem ser escritos (através da transformação de Fourier) na forma de uma função de transferência ou realização, cuja expressão geral é dada por

$$D + C(\lambda - A)^{-1}B.$$

Este tipo de estruturas são um dos objectos centrais do estudo da chamada teoria da realização.

Dentro da literatura que apoiou esta secção, destaca-se [19, 27].

Neste capítulo, considera-se X e Y como sendo espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $A \in L(X)$, $B \in L(Y, X)$, $C \in L(X, Y)$ e $D \in L(Y)$.

Definição 4.1.1 *Considere-se a aplicação $W_A : \mathbb{K} \to L(Y)$, cujas imagens são aplicações lineares e limitadas em Y. Uma identificação da forma*

$$W_A(\lambda) = D + C(\lambda I_X - A)^{-1}B, \tag{4.1.1}$$

com $\lambda \in \mathbb{K}$*, onde* $A \in L(X)$*,* $B \in L(Y,X)$*,* $C \in L(X,Y)$ *e* $D \in L(Y)$*, diz-se uma realização do operador* $W_A(\lambda)$*.*

Observação 4.1.2 Notoriamente, para $W_A(\lambda)$ admitir a realização (4.1.1), λ não pode pertencer ao espectro de A.

Em seguida considera-se a condição adicional, $D = I_Y$.

Teorema 4.1.3 *Suponha-se que* $W_A(\lambda)$ *admite a realização (4.1.1). Se* λ *não pertencer ao espectro de*

$$A^{\times} = A - BC,$$

então

$$W_A(\lambda)^{-1} = W_{A^{\times}} = I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B.$$

Demonstração: Suponha-se que λ não pertence ao espectro de $A^{\times} = A - BC$. Assim, pode-se considerar $(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}$.

Observando que $BC = A - A^{\times}$, tem-se

$$\begin{aligned}
W_A(\lambda)W_{A^{\times}}(\lambda) &= \left[I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}B\right]\left[I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B\right] \\
&= I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B + C(\lambda I_X - A)^{-1}B - \\
&\quad C(\lambda I_X - A)^{-1}BC(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B \\
&= I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B + C(\lambda I_X - A)^{-1}B - \\
&\quad C(\lambda I_X - A)^{-1}(A - A^{\times})(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B \\
&= I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B + C(\lambda I_X - A)^{-1}B - \\
&\quad C(\lambda I_X - A)^{-1}(A - \lambda I_X + \lambda I_X - A^{\times})(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B \\
&= I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B + C(\lambda I_X - A)^{-1}B + \\
&\quad C(\lambda I_X - A)^{-1}(\lambda I_X - A)(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B - \\
&\quad C(\lambda I_X - A)^{-1}(\lambda I_X - A^{\times})(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_Y - C(\lambda I_X - A^\times)^{-1}B + C(\lambda I_X - A)^{-1}B + \\
&\quad C(\lambda I_X - A^\times)^{-1}B - C(\lambda I_X - A)^{-1}B \\
&= I_Y.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, se prova que $W_{A^\times}(\lambda)W_A(\lambda) = I_Y$. Logo, nas presentes condições, $W_{A^\times}(\lambda)$ é o inverso de $W_A(\lambda)$. $\diamondsuit$

Teorema 4.1.4 *Suponha-se que $X = X_1 \oplus X_2$ e sejam*

$$W_{A_1}(\lambda) = I_Y + C_1(\lambda I_{X_1} - A_1)^{-1}B_1 \tag{4.1.2}$$

e

$$W_{A_2}(\lambda) = I_Y + C_2(\lambda I_{X_2} - A_2)^{-1}B_2 \tag{4.1.3}$$

realizações actuando em Y, onde $A_k \in L(X_k)$, $C_k \in L(X_k, Y)$ e $B_k \in L(Y, X_k)$, com $k \in \{1, 2\}$. Então, tem-se a realização,

$$W_A(\lambda) = W_{A_1}(\lambda)W_{A_2}(\lambda) = I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}B,$$

onde $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$.

Demonstração: Tem-se que

$$(\lambda I_X - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda I_{X_1} - A_1 & -B_1C_2 \\ 0 & \lambda I_{X_2} - A_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Considere-se $M_k = \lambda I_{X_k} - A_k$, com $k \in \{1, 2\}$ e

$$M = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Então, verifica-se,

$$M^{-1}(\lambda I_X - A)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_1 & -B_1C_2 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\begin{pmatrix} M_1 & -B_1C_2 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix}\right]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} I_{X_1} & B_1C_2M_2^{-1} - B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & I_{X_2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ 0 & I_{X_2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= I_X.
\end{aligned}
$$

Analogamente, deduz-se que $(\lambda I_X - A)^{-1}M^{-1} = I_X$.

Logo, $(\lambda I_X - A)^{-1} = M = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix}$.

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}B &= I_Y + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
&= I_Y + \begin{pmatrix} C_1M_1^{-1} & C_1M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1} + C_2M_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
&= I_Y + C_1M_1^{-1}B_1 + C_1M_1^{-1}B_1C_2M_2^{-1}B_2 + C_2M_2^{-1}B_2 \\
&= I_Y + C_1M_1^{-1}B_1(I_Y + C_2M_2^{-1}B_2) + C_2M_2^{-1}B_2 \\
&= (I_Y + C_1M_1^{-1}B_1)(I_Y + C_2M_2^{-1}B_2) \\
&= W_{A_1}(\lambda)W_{A_2}(\lambda) \\
&= W_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Observação 4.1.5 Nas condições do teorema anterior, dado que se tem

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

e

$$A^\times = A - BC = \begin{pmatrix} A_1 - B_1C_1 & B_1C_2 - B_1C_2 \\ -B_2C_1 & A_2 - B_2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\times & 0 \\ -B_2C_1 & A_2^\times \end{pmatrix},$$

X_1 é um subespaço invariante para A e X_2 é um subespaço invariante para $A^\times$.

Teorema 4.1.6 *Suponha-se que $X = M \oplus M^\times$, com M um subespaço de X invariante para A e $M^\times$ um subespaço de X invariante para $A^\times$. Seja $W_A(\lambda) = I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}B$, $\lambda \in \rho(A)$, onde $\rho(A)$ é o resolvente de A. Então, para*

$$W_1(\lambda) = I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}(I_X - P)B \tag{4.1.4}$$

e

$$W_2(\lambda) = I_Y + CP(\lambda I_X - A)^{-1}B \tag{4.1.5}$$

onde P é a projecção de X sobre $M^\times$ ao longo de M, tem-se que

$$W_A(\lambda) = W_1(\lambda)W_2(\lambda).$$

Demonstração: Como P é a projecção de X sobre $M^\times$ ao longo de M, tem-se que

$$P(\lambda I_X - A)P = P(\lambda I_X - A)$$

e

$$P(\lambda I_X - A^\times)P = (\lambda I_X - A^\times)P.$$

Seja $N = \lambda I_X - A$. Tomando (4.1.4) e (4.1.5) e sabendo que $BC = A - A^\times = (A - \lambda I_X) + (\lambda I_X - A^\times)$, tem-se que

$$\begin{aligned} W_1(\lambda)W_2(\lambda) &= I_Y + CPN^{-1}B + CN^{-1}B - CN^{-1}PB + CN^{-1}BCPN^{-1}B - \\ &\quad CN^{-1}PBCPN^{-1}B \\ &= I_Y + CN^{-1}B + CPN^{-1}B - CN^{-1}PB + \\ &\quad CN^{-1}(A - \lambda I_X)PN^{-1}B + CN^{-1}(\lambda I_X - A^\times)PN^{-1}B - \\ &\quad CN^{-1}P(A - \lambda I_X)PN^{-1}B - CN^{-1}P(\lambda I_X - A^\times)PN^{-1}B \\ &= I_Y + CN^{-1}B + CPN^{-1}B - CN^{-1}PB - CPN^{-1}B + \\ &\quad CN^{-1}(\lambda I_X - A^\times)PN^{-1}B - CN^{-1}P(A - \lambda I_X)N^{-1}B - \\ &\quad CN^{-1}(\lambda I_X - A^\times)PN^{-1}B \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_Y + CN^{-1}B - CN^{-1}PB + CN^{-1}PB \\
&= I_Y + CN^{-1}B \\
&= W_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Proposição 4.1.7 *Para todo $\lambda \in \rho(A)$, os operadores $W_A(\lambda)$ e $\lambda I_X - A^\times$, onde $A^\times = A - BC$, são equivalentes após extensão, i.e., existem operadores invertíveis limitados E e F tais que,*

$$E(\lambda)\begin{pmatrix} W_A(\lambda) & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} F(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I_X - A^\times & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \rho(A)$. Definem-se E e F como sendo os operadores dados por

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} -B & \lambda I_X - A^\times \\ I_Y & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & \lambda I_X - A + BC \\ I_Y & -C \end{pmatrix}$$

e

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} C & I_Y \\ I_X + (\lambda I_X - A)^{-1}BC & (\lambda I_X - A)^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Observa-se que,

$$
\begin{aligned}
&E(\lambda)\begin{pmatrix} C(\lambda I_X - A)^{-1} & W_A(\lambda) \\ (\lambda I_X - A)^{-1} & (\lambda I_X - A)^{-1}B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_X & -BW_A(\lambda) + (\lambda I_X - A^\times)(\lambda I_X - A)^{-1}B \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, tem-se que

$$\begin{pmatrix} C(\lambda I_X - A)^{-1} & W_A(\lambda) \\ (\lambda I_X - A)^{-1} & (\lambda I_X - A)^{-1}B \end{pmatrix} E(\lambda) = \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix}.$$

Então,

$$E^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} C(\lambda I_X - A)^{-1} & W_A(\lambda) \\ (\lambda I_X - A)^{-1} & (\lambda I_X - A)^{-1}B \end{pmatrix}$$

e, portanto, E é invertível.

Por outro lado, considerando $\lambda \in \rho(A)$ arbitrário, verifica-se que

$$\begin{aligned} F(\lambda)\begin{pmatrix} -(\lambda I_X - A)^{-1}B & I_X \\ W_A(\lambda) & -C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -C(\lambda I_X - A)^{-1}B + W_A(\lambda) & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo similar, prova-se que

$$\begin{pmatrix} -(\lambda I_X - A)^{-1}B & I_X \\ W_A(\lambda) & -C \end{pmatrix} F(\lambda) = \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$F^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\lambda I_X - A)^{-1}B & I_X \\ W_A(\lambda) & -C \end{pmatrix}$$

e, por conseguinte, F é invertível.

Além disso, verifica-se que,

$$\begin{aligned} E(\lambda)\begin{pmatrix} W_A(\lambda) & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} F(\lambda) &= \begin{pmatrix} -BW_A(\lambda) & \lambda I_X - A^{\times} \\ W_A(\lambda) & -C \end{pmatrix} F(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda I_X - A^{\times} & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclui-se, pois, que $W_A(\lambda)$ e $\lambda I_X - A^{\times}$ são equivalentes após extensão. $\diamondsuit$

Observação 4.1.8 Os operadores $W_A(\lambda)$ e $\lambda I_X - A^{\times}$, têm muitas propriedades em comum, uma vez que são equivalentes após extensão. Para alguns autores, $A^{\times}$ pode ser entendido como uma linearização de W_A [3].

4.2 Realizações Racionais

Nesta secção é feito o estudo das realizações racionais, baseado em resultados sobretudo de [1, 27] com o auxílio de [2, 19]. Tais realizações permitirão chegar a uma outra forma de factorizações em contraste com as apresentadas no Capítulo 2.

No que se segue, assume-se que W_A é uma função matricial racional $n \times n$, A é uma matriz racional $m \times m$, C é uma matriz racional $n \times m$ e B é uma matriz racional $m \times n$. Além disso, suponha-se que A não tem valores próprios reais e W_A tem a forma

$$W_A(\lambda) = I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}B, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Além disso, $A^\times$ denota o indicador a A, $A^\times = A - BC$.

Definição 4.2.1 *Diz-se que a realização* $W_A(\lambda) = I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}B$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, *admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf se*

$$W_A = W_1 W_2,$$

onde W_1 *e* W_2 *são racionais, não têm pólos, e são invertíveis, respectivamente, no semi-plano fechado superior relativamente ao espectro de* A *(ou seja, no semi-plano fechado superior que corresponde aos valores próprios de* A*), e inferior relativamente ao espectro de* $A^\times$ *(ou seja, no semi-plano fechado inferior que corresponde aos valores próprios de* $A^\times$*).*

Nestas condições, W_1 *e* W_2 *designam-se factores de Wiener-Hopf de* W_A *(cf. Capítulo 2).*

Teorema 4.2.2 *O operador* W_A *admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf se e só se*

i) $A^\times$ *não tem valores próprios reais,* *ii)* $\mathbb{C}^m = M \oplus M^\times$, *onde* M *e* $M^\times$ *são os subespaços lineares espectrais (de* $\mathbb{C}^m$*) associados aos valores próprios de* A *e* $A^\times$ *localizados nos semi-planos fechados superior e inferior, respectivamente.*

Assim, os factores de Wiener-Hopf são dados por

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) &= I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}(I_m - P)B, \\ W_2(\lambda) &= I_n + CP(\lambda I_m - A)^{-1}B \end{aligned}$$

e os seus inversos por

$$\begin{aligned} W_1(\lambda)^{-1} &= I_n - C(I_m - P)(\lambda I_m - A^\times)^{-1}B, \\ W_2(\lambda)^{-1} &= I_n - C(\lambda I_m - A^\times)^{-1}PB, \end{aligned}$$

onde P *é a projecção de* $\mathbb{C}^m$ *sobre* $M^\times$ *ao longo de* M*.*

Demonstração: Suponha-se que W_A admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf. Então, $W_A = W_1W_2$, onde W_1 e W_2 são racionais, não têm pólos e são invertíveis nos semi-planos fechados inferior e superior, relativamente ao espectro de A e de $A^\times$, respectivamente. Logo, W é invertível em $\mathbb{R}$.

Pelo Teorema 4.1.3, resulta que $W_A(\lambda)^{-1} = I_n - C(\lambda I_m - A^\times)^{-1}B$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e, portanto, $A^\times$ não tem valores próprios reais.

Sejam M e $M^\times$ os subespaços espectrais associados aos valores próprios de A e $A^\times$ localizados nos semi-planos fechados superior e inferior, respectivamente. Pela invertibilidade de W_1 e W_2, tem-se que $\mathbb{C}^m = M \oplus M^\times$.

Suponha-se, por outro lado, que $A^\times$ não tem valores próprios reais e que $\mathbb{C}^m = M \oplus M^\times$, onde M e $M^\times$ são os subespaços espectrais associados a A e $A^\times$, respectivamente.

Então, M é subespaço invariante para A e $M^\times$ é subespaço invariante para $A^\times$. Então pelo Teorema 4.1.6 segue que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica $W_A(\lambda) = W_1(\lambda)W_2(\lambda)$, i.e.,

$$W_A = W_1W_2$$

onde

$$W_1(\lambda) = I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}(I_m - P)B$$

e

$$W_2(\lambda) = I_n + CP(\lambda I_m - A)^{-1}B,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e P projector de $\mathbb{C}^m$ sobre $M^\times$ ao longo de M.

Uma vez que $A^\times$ não tem valores próprios reais, $(\lambda I_m - A^\times)^{-1}$ fica definido para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $P(\lambda I_m - A)P = P(\lambda I_m - A)$ e $P(\lambda I_m - A^\times)P = (\lambda I_m - A^\times)P$.

Denota-se $N = (\lambda I_m - A)^{-1}$ e $N^\times = (\lambda I_m - A^\times)^{-1}$.

Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e sabendo que $BC = A - A^\times = (A - \lambda I_m) + (\lambda I_m - A^\times)$,

$$\begin{aligned}
& W_1(\lambda)(I_n - C(I_m - P)N^\times B) \\
= \;& (I_n + CNB - CNPB)(I_n - CN^\times B + CPN^\times B) \\
= \;& I_n - CN^\times B + CPN^\times B + CNB - CNBCN^\times B + CNBCPN^\times B - \\
& CNPB + CNPBCN^\times B - CNPBCPN^\times B \\
= \;& I_n - CN^\times B + CPN^\times B + CNB - CN(A - \lambda I_m)N^\times B - \\
& CN(\lambda I_m - A^\times)N^\times B + CN(A - \lambda I_m)PN^\times B + \\
& CN(\lambda I_m - A^\times)PN^\times B - CNPB + CNP(A - \lambda I_m)N^\times B + \\
& CNP(\lambda I_m - A^\times)N^\times B - CNP(A - \lambda I_m)PN^\times B - \\
& CNP(\lambda I_m - A^\times)PN^\times B \\
= \;& I_n - CN^\times B + CPN^\times B + CNB + CN^\times B - CNB - CPN^\times B + \\
& CN(\lambda I_m - A^\times)PN^\times B - CNPB + CNP(A - \lambda I_m)N^\times B + CNPB - \\
& CNP(A - \lambda I_m)N^\times B - CN(\lambda I_m - A^\times)PN^\times B \\
= \;& I_n.
\end{aligned}$$

De forma análoga, se prova que

$$(I_n - C(I_m - P)(\lambda I_m - A^\times)^{-1}B)W_1(\lambda) = I_n.$$

Logo, W_1 é invertível e $W_1(\lambda)^{-1} = I_n - C(I_m - P)(\lambda I_m - A^\times)^{-1}B$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Similarmente, prova-se que W_2 é invertível e

$$W_2(\lambda)^{-1} = I_n - C(\lambda I_m - A^\times)^{-1}PB,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, W_1 e W_2 não têm pólos (pois $A^\times$ não tem valores próprios reais) e são racionais. Por outro lado, devido à projecção P, tem-se que W_1 e W_2 ficam definidos nos semi-planos fechados inferior e superior, respectivamente.

Conclui-se, pois, que W_A admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf. $\diamondsuit$

Teorema 4.2.3 *O operador W_A admite a decomposição*

$$W_A(\lambda) = I_n - Fk(\lambda), \tag{4.2.1}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, onde F é a transformada de Fourier e $k \in L^1_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que,

$$k(t) = \begin{cases} -iCe^{-itA}PB, & t < 0 \\ iCe^{-itA}(I_m - P)B, & t > 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

onde P é a projecção espectral correspondente aos valores próprios de A, localizados no semi-plano superior.

Demonstração: O operador W_A tem a forma

$$W_A(\lambda) = I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}B,\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja P a projecção espectral correspondente aos valores próprios de A, localizados no semi-plano superior e defina-se

$$k(t) = \begin{cases} -iCe^{-itA}PB, & t < 0 \\ iCe^{-itA}(I_m - P)B, & t > 0. \end{cases}$$

Uma vez que A, C e B são racionais e P é um projector, resulta que $k \in L^1_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A transformada de Fourier de k é dada por

$$\begin{aligned}
Fk(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(t)dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t} iCe^{-itA}PBdt + \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} iCe^{-itA}(I_m - P)Bdt \\
&= -C(\lambda I_m - A)^{-1}PB - C(\lambda I_m - A)^{-1}(I_m - P)B \\
&= -C(\lambda I_m - A)^{-1}B, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$W_A(\lambda) = I_n - Fk(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\diamondsuit$

Observação 4.2.4 Expressões do tipo (4.2.2) dizem-se representações exponenciais (espectrais) das realizações correspondentes.

4.3 Realizações com Operadores Exponencialmente Dicotómicos

São apresentados resultados baseados, sobretudo, nos trabalhos [1, 2], sobre realizações onde actuam operadores, não necessariamente limitados, mas que decaem para zero exponencialmente. Verifica-se, em especial, que o facto de uma realização ser invertível equivale a que certo operador, obtido através dos operadores que figuram na realização, seja exponencialmente dicotómico.

Definição 4.3.1 *Um operador S num espaço de Banach complexo Z, diz-se exponencialmente dicotómico se o subespaço linear gerado por imS é denso em Z e $S = S_+ \oplus S_-$, onde S_+ e $-S_-$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos que decaem exponencialmente.*

Por outras palavras, S é um operador linear densamente definido em Z, com imagem fechada, e que decompõe Z numa soma directa topológica.

Observação 4.3.2 A decomposição de S, na definição anterior, é única e a projecção associada a S em S_- ao longo de S_+ designa-se projecção de separação.

Suponha-se, agora, que X é um espaço de Banach (complexo), Y é um espaço de Banach de dimensão finita, $B \in L(Y, X)$, $C \in L(X, Y)$ e A é um operador linear em X tal que $-iA$ é exponencialmente dicotómico.

Teorema 4.3.3 *Seja $W_A(\lambda) = I_Y + C(\lambda I_X - A)^{-1}B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes proposições são equivalentes:*

i) $detW_A(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

ii) $A^{\times}$ não tem valores próprios reais;

iii) $-iA^{\times}$ é exponencialmente dicotómico.

Demonstração: $(i \Leftrightarrow ii)$ Suponha-se que $detW_A(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 4.1.3 que contínua válido para o caso de A não ser limitado e porque W_A é invertível, $W_A(\lambda)^{-1} = I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Segue-se que $A^{\times}$ não tem valores próprios reais.

Por sua vez, suponha-se que $A^{\times}$ não tem valores próprios reais. Logo, $\overline{W}(\lambda) = I_Y - C(\lambda I_X - A^{\times})^{-1}B$ está definido para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1.3, $\overline{W} = W_A^{-1}$ e, portanto, W_A é invertível, ou seja, $detW_A(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(iii \Rightarrow ii)$ Suponha-se que $-iA^{\times}$ é exponencialmente dicotómico. Então, $-iA^{\times} = A_- \oplus A_+$, onde $-A_-$ e A_+ são geradores de semigrupos fortemente contínuos que decaem exponencialmente. Além disso, devido à forma de W_A, A não tem valores próprios reais. Assim, a decomposição de $-iA^{\times}$ é feita ao longo do eixo imaginário e, portanto, $A^{\times}$ não tem valores próprios reais.

$(i \Rightarrow iii)$ Suponha-se que $det W_A(\lambda) \neq 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$. Já se provou que isto equivale a $A^\times$ não ter valores próprios reais. Então, $W_A(\lambda)^{-1} = I_Y - C(\lambda I_X - A^\times)^{-1}B$ e, sabendo que $BC = A - A^\times = (A - \lambda I_X) + (\lambda I_X - A^\times)$ tem-se,

$$\begin{aligned}
& (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} B W_A(\lambda)^{-1} C (\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} B (I_Y - C(\lambda I_X - A^\times)^{-1} B) C (\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A)^{-1} + \\
& (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A^\times)^{-1} BC (\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A)^{-1} - \\
& (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A^\times)^{-1} (\lambda I_X - A)(\lambda I_X - A)^{-1} + \\
& (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A^\times)^{-1} (\lambda I_X - A^\times)(\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A)^{-1} - \\
& (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A^\times)^{-1} + (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} BC (\lambda I_X - A^\times)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} + (\lambda I_X - A)^{-1} (\lambda I_X - A)(\lambda I_X - A^\times)^{-1} - \\
& (\lambda I_X - A)^{-1} (\lambda I_X - A^\times)(\lambda I_X - A^\times)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A)^{-1} + (\lambda I_X - A^\times)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} \\
= \ & (\lambda I_X - A^\times)^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\lambda I_X - A^\times)^{-1} = (\lambda I_X - A)^{-1} - (\lambda I_X - A)^{-1} B W_A(\lambda)^{-1} C (\lambda I_X - A)^{-1}.$$

Para $\lambda = 0$, tem-se $(A^\times)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B W_A(0)^{-1} C A^{-1}$ e $W_A(0) = I_Y - CA^{-1}B$. Uma vez que A, B e C são limitados, $(A^\times)^{-1}$ é limitado. Como $A^\times$ não tem valores próprios reais, então o eixo real divide o espectro de $A^\times$. Assim, o eixo imaginário divide o espectro de $-iA^\times$. Logo, a projecção de separação pode ser construída ao longo do eixo imaginário, resultando, assim, que $-iA^\times$ é exponencialmente dicotómico. $\diamondsuit$

4.4 Equações Integrais de Wiener-Hopf

No ramo da Física-Matemática, têm surgido inúmeras equações integrais –conhecidas como equações integrais de Wiener-Hopf– que são casos particulares das equações apresentadas no Capítulo 3. O interesse do seu estudo estende-se a outras áreas da matemática, especialmente ao estudo de um largo número de problemas de valores de fronteira. O nome destas equações deve-se ao facto da sua resolução passar pela consideração de uma factorização de Wiener-Hopf.

Na presente secção, é sucintamente ilustrada uma ligação entre as equações integrais de Wiener-Hopf e as realizações racionais. Na verdade, determinadas factorizações de Wiener-Hopf que caracterizam os operadores presentes nessas equações têm grande ligação com as realizações racionais (designadamente no sentido do Corolário 4.4.11.)

Recorreu-se fundamentalmente a [2, 4, 5, 30] e destacando-se, ainda, [19, 26]. Também é de mencionar [14, 16, 29].

Considere-se a equação integral

$$\phi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\phi(s)ds = f(t), \quad t \geq 0, \tag{4.4.1}$$

onde $k \in L^1_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f, \phi \in L^p_n[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Esta equação é conhecida como equação integral de Wiener-Hopf.

Definição 4.4.1 $W(\lambda) = I_n - Fk(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *onde F é a transformada de Fourier, diz-se símbolo de Fourier da equação (4.4.1) (cf. Definição 3.1.1).*

Tal símbolo permite reescrever a equação (4.4.1) em termos do uso da transformação de Fourier e sua inversa,

$$r_{\mathbb{R}_+}F^{-1}(I_n - Fk)\cdot F\phi = f,$$

onde $r_{\mathbb{R}_+}$ é o operador de restrição à semi-recta positiva nos espaços correspondentes.

Para este último efeito, nomeadamente ao nível da consideração dos operadores $F^{\pm 1}$, tem-se em atenção os usuais resultados sobre a sua limitação (que se enunciam de seguida sem demonstração), assim como os multiplicadores de Fourier (que também se definem a seguir).

O resultado que se enuncia, imediatamente a seguir, pode ser encontrado em [16]:

Proposição 4.4.2 *Para todo $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$||F\phi||_\infty \leq ||\phi||_1.$$

É demonstrado (por exemplo) em [29], que

Proposição 4.4.3 *Se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, então $F\phi \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$||F\phi||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ||\phi||_2.$$

Tanto em [14] como em [29], se prova que

Teorema 4.4.4 (Hausdorff-Young) *Sejam $1 \leq p \leq 2$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo, se $f \in L^p$ então tem-se que $Ff \in L^q$ e existe uma constante c, independente de f, tal que*

$$||Ff||_p \leq c||f||_q.$$

Definição 4.4.5 *Diz-se que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ é um multiplicador de Fourier em $L^p(\mathbb{R})$ se existe uma constante c tal que para todo $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ se tem*

$$||F^{-1}\varphi \cdot F\phi||_p \leq c||\phi||_p.$$

Observação 4.4.6 Observa-se que se $F^{-1}\varphi \cdot F$ for limitado (no sentido da definição anterior) e $p < \infty$, então $F^{-1}\varphi \cdot F$ possui uma única extensão contínua a todo o espaço $L^p(\mathbb{R})$.

Passa-se a enunciar, agora, resultados concernentes à solução da equação (4.4.1).

Definição 4.4.7 *Diz-se que a equação (4.4.1) é univocamente solúvel se, para cada $f \in L_n^p[0,\infty)$, existe uma única solução $\phi \in L_n^p[0,\infty)$ que satisfaz a equação.*

Observação 4.4.8 Observe-se que se a equação (4.4.1) é univocamente solúvel, então o símbolo correspondente é invertível.

Supondo ser possível, identificar o símbolo da equação (4.4.1) através de uma realização racional da seguinte forma (de matrizes de funções),

$$I_n - Fk(\lambda) = I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}B, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.4.2}$$

onde A é uma matriz racional $m \times m$, B é uma matriz racional $m \times n$ e C é uma matriz racional $n \times m$, podem-se inferir resultados adicionais. Nestas condições, o símbolo W dado por $W(\lambda) = I_n - Fk(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma função matricial racional $n \times n$.

Teorema 4.4.9 *Nas presentes circunstâncias, a equação (4.4.1) é univocamente solúvel se e só se o símbolo W admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf (no sentido da Definição 4.2.1).*

Demonstração: Suponha-se que a equação (4.4.1) é univocamente solúvel. Então, W é invertível. Vem que $detW(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Como W admite a realização (4.4.2), tem-se que

$$detW(\lambda) = det[I_n + C(\lambda I_m - A)^{-1}B].$$

Prova-se em [12] que para E, F matrizes $n \times n$, se tem que $det(I - EF) = det(I - FE)$. Assim, tendo ainda em conta que $A^{\times} = A - BC$,

$$\begin{aligned}
detW(\lambda) &= det[I_n + (\lambda I_m - A)^{-1}BC] \\
&= det[I_n + (\lambda I_m - A)^{-1}(A - A^{\times})] \\
&= det[I_n + (\lambda I_m - A)^{-1}(A - \lambda I_m + \lambda I_m - A^{\times})] \\
&= det[I_n + (\lambda I_m - A)^{-1}(A - \lambda I_m) + (\lambda I_m - A)^{-1}(\lambda I_m - A^{\times})] \\
&= det[(\lambda I_m - A)^{-1}(\lambda I_m - A^{\times})] \\
&= det(\lambda I_m - A)^{-1} \cdot det(\lambda I_m - A^{\times}) \\
&= \frac{det(\lambda I_m - A^{\times})}{det(\lambda I_m - A)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim, se $detW(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, então $det(\lambda I_m - A^{\times}) \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, $A^{\times}$ não tem valores próprios reais. Sendo assim, o eixo real divide os valores próprios de $A^{\times}$. Então, é possivel decompor $\mathbb{C}^m$ da seguinte forma

$$\mathbb{C}^m = M \oplus M^{\times}$$

onde M e $M^{\times}$ são os subespaços espectrais associados aos valores próprios de A e de $A^{\times}$ localizados no semi-planos fechados superior e inferior, respectivamente.

Segue-se, então, pelo Teorema 4.2.2, que W admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf.

Reciprocamente, suponha-se que W admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf. Devido à invertibilidade dos factores, W é também invertível.

Seja T o operador de Wiener-Hopf associado ao símbolo W. Então,

$$(T\phi)(t) = \phi(t) - \int_0^{\infty} k(t,s)\phi(s)ds.$$

Por sua vez, seja $\overline{T}$ o operador de Wiener-Hopf associado a W^{-1}.

Como $WW^{-1} = I_n = W^{-1}W$, então prova-se (os pormenores podem ser encontrados em [12] e são aqui omitidos, pois vão além do objectivo desta dissertação) que $T\overline{T} = I_{L_n^p[0,\infty)} = \overline{T}T$.

Logo, T é invertível. Por conseguinte, a equação (4.4.1) é univocamente solúvel.

$\diamondsuit$

Observação 4.4.10 Note-se que em contextos mais gerais, onde não existe uma identificação do tipo (4.4.2), resultados similares ao anterior são ainda possíveis em várias circunstâncias.

Corolário 4.4.11 *Suponha-se que a equação (4.4.1) é univocamente solúvel. Sejam M e $M^\times$ os subespaços espectrais de A e $A^\times$ localizados nos semi-planos fechados superior e inferior, respectivamente.*

Então, a solução única da equação (4.4.1) é dada por

$$\phi(t) = f(t) - \int_0^\infty \gamma(t,s) f(s) ds, \qquad t \geq 0,$$

onde

$$\gamma(t,s) = \begin{cases} -iCe^{-itA^\times} P e^{isA^\times} B, & s < t \\ iCe^{-itA^\times}(I_m - P) e^{isA^\times} B, & s > t \end{cases}$$

com P a ser a projecção de $\mathbb{C}^m$ sobre $M^\times$ ao longo de M.

Demonstração: Como a equação (4.4.1) é univocamente solúvel, pelo Teorema 4.4.9 o símbolo, W, admite uma factorização canónica de Wiener-Hopf. Pelo Teorema 4.2.2, tem-se que $W = W_1 W_2$, onde

$$W_1(\lambda)^{-1} = I_n - C(I_m - P)(\lambda I_m - A^\times)^{-1} B, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$W_2(\lambda)^{-1} = I_n - C(\lambda I_m - A^\times)^{-1} P B, \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

com P a ser a projecção de $\mathbb{C}^m$ sobre $M^\times$ ao longo de M.

Como W é o símbolo da equação (4.4.1), tem-se que $F^{-1}W \cdot F\phi = f$ e, portanto, sendo W invertível, a solução é dada por

$$\phi = F^{-1}W^{-1} \cdot Ff. \tag{4.4.3}$$

Pelo Teorema 4.2.3, tem-se que existe γ_- e γ_+ tais que

$$W_1^{-1} = I_n - F\gamma_-$$

e

$$W_2^{-1} = I_n - F\gamma_+,$$

onde

$$\gamma_-(t) = \begin{cases} -iC(I_m - P)e^{-itA^\times}(I_m - P^\times)B, & t > 0 \\ iC(I_m - P)e^{-itA^\times}P^\times B, & t < 0 \end{cases}$$

e

$$\gamma_+(t) = \begin{cases} -iCe^{-itA^\times}(I_m - P^\times)PB, & t > 0 \\ iCe^{-itA^\times}P^\times PB, & t < 0, \end{cases}$$

com $P^\times$ a ser a projecção associada ao espectro de $A^\times$ localizado no semi-plano superior.

Observa-se que, sendo P a projecção de $\mathbb{C}^m$ sobre $M^\times$ ao longo de M, tem-se que $(I_m - P)P^\times = I_m - P$ e $P^\times P = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \gamma_-(t) &= \begin{cases} -iCe^{-itA^\times}(I_m - P)(I_m - P^\times)B, & t > 0 \\ iCe^{-itA^\times}(I_m - P)P^\times B, & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -iCe^{-itA^\times}(I_m - P)B + iCe^{-itA^\times}(I_m - P)P^\times B, & t > 0 \\ iCe^{-itA^\times}(I_m - P)B, & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & t > 0 \\ iC(I_m - P)e^{-itA^\times}B, & t < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_+(t) &= \begin{cases} -iCe^{-itA^\times}PB + iCe^{-itA^\times}P^\times PB, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -iCe^{-itA^\times}PB, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Deste modo, pode-se escrever

$$W_1(\lambda)^{-1} = I_n - \int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t}\gamma_-(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$W_2(\lambda)^{-1} = I_n - \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t}\gamma_+(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Então, sabendo que $\gamma_-(t) = 0$ para $t > 0$ e que $\gamma_+(t) = 0$ para $t < 0$, conclui-se nestas condições que W_1^{-1} e W_2^{-1} são símbolos dos operadores

$$(V_1 f)(t) = f(t) - \int_{t}^{\infty} \gamma_-(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

e

$$(V_2 f)(t) = f(t) - \int_{0}^{t} \gamma_+(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

respectivamente.

Assim, como $W^{-1} = W_2^{-1}W_1^{-1}$ e por (4.4.3), tem-se que a solução ϕ é tal que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= (V_2V_1f)(t) \\
&= (V_1f)(t) - \int_0^{\infty} \gamma_+(t-s)(V_1f)(s)ds \\
&= f(t) - \int_0^{\infty} \gamma_-(t-s)f(s)ds - \int_0^{\infty} \gamma_+(t-s)f(s)ds + \\
&\quad \int_0^{\infty} \gamma_+(t-u)\int_0^{\infty} \gamma_-(u-s)f(s)ds \; du, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini e tendo em conta que, $\gamma_-(t) = 0$ para $t > 0$ e que $\gamma_+(t) = 0$ para $t < 0$, é possível trocar a ordem de integração da última parcela, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= f(t) - \int_t^{\infty} \gamma_-(t-s)f(s)ds - \int_0^{t} \gamma_+(t-s)f(s)ds + \\
&\quad \int_0^{\infty}\int_0^{\min(t,s)} \gamma_+(t-u)\gamma_-(u-s)du \; f(s)ds, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi(t) = f(t) - \int_0^\infty \gamma(t,s) f(s) ds, \quad t \geq 0,$$

onde

$$\gamma(t,s) = \begin{cases} \gamma_+(t-s) - \int_0^s \gamma_+(t-u)\gamma_-(u-s)du, & 0 \leq s < t < \infty, \\ \gamma_-(t-s) - \int_0^t \gamma_+(t-u)\gamma_-(u-s)du, & 0 \leq t < s < \infty. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Relembrando que P é a projecção de $\mathbb{C}^m$ sobre $M^\times$ ao longo de M, tem-se que $PA(I_m - P) = 0$ e $PA^\times(I_m - P) = PA^\times - PA^\times P = PA^\times - A^\times P$. Então,

$$PBC(I_m - P) = P(A - A^\times)(I_m - P) = -PA^\times + A^\times P = A^\times P - PA^\times.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left(e^{iuA^\times} P e^{-iuA^\times}\right) &= ie^{iuA^\times} A^\times P e^{-iuA^\times} - ie^{iuA^\times} PA^\times e^{-iuA^\times} \\ &= ie^{iuA^\times}(A^\times P - PA^\times)e^{-iuA^\times} \\ &= ie^{iuA^\times} PBC(I_m - P)e^{-iuA^\times}. \end{aligned}$$

Conjungando este resultado com (4.4.6), (4.4.4) e (4.4.5), tem-se que para $0 \leq s < t < \infty$

$$\begin{aligned} \gamma(t,s) &= \gamma_+(t-s) - \int_0^s \gamma_+(t-u)\gamma_-(u-s)du \\ &= \gamma_+(t-s) - \int_0^s (-iCe^{-i(t-u)A^\times} PB) iC(I_m - P)e^{-i(u-s)A^\times} B \; du \\ &= \gamma_+(t-s) + iCe^{-itA^\times} \int_0^s ie^{iuA^\times} PBC(I_m - P)e^{-iuA^\times} du \; e^{isA^\times} B \\ &= \gamma_+(t-s) + iCe^{-itA^\times} \left[e^{iuA^\times} P e^{-iuA^\times}\right]_0^s e^{isA^\times} B \\ &= -iCe^{itA^\times} P e^{isA^\times} B. \end{aligned}$$

De forma análoga, prova-se que para $0 \leq t < s < \infty$

$$\gamma(t,s) = iCe^{itA^\times}(I_m - P)e^{isA^\times}B.$$

$\diamondsuit$

4.5 Emparelhamento Matricial

Para finalizar o presente capítulo, apresenta-se uma relação entre operadores, conhecida como relação de emparelhamento matricial, que equivale à relação de equivalência após extensão. Esta apresentação é realizada através de uma aplicação aos operadores e equações em estudo.

Os resultados aqui apresentados são baseados nos trabalhos [2, 4, 5].

Considere-se, de novo, a equação integral de Wiener-Hopf,

$$\phi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\phi(s)ds = f(t), \quad t \geq 0, \tag{4.5.1}$$

onde $k \in L^1_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f, \phi \in L^p_n[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$ e as considerações feitas na Secção 4.4, acerca dos multiplicadores de Fourier.

Adicionalmente, denota-se por K, o operador em $L^p_n[0,\infty)$, definido por

$$(K\phi)(t) = \int_0^\infty k(t-s)\phi(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Teorema 4.5.1 *Suponha-se que o núcleo da equação (4.5.1), k, admite a representação exponencial espectral (cf. Observação 4.2.4),*

$$k(t) = iCE(t; -iA)B = \begin{cases} -iCe^{-itA}PB, & t < 0 \\ iCe^{-itA}(I_n - P)B, & t > 0, \end{cases} \tag{4.5.2}$$

onde sendo X é um espaço de Banach complexo, tem-se $B : X \to \mathbb{C}^n$, $C : \mathbb{C}^n \to X$ e $A : X \to X$ tal que $-iA$ é exponencialmente dicotómico (cf. Definição 4.3.1). Sejam, ainda, P e $P^\times$ as projecções de separação associadas a $-iA$ e a $-iA^\times$, respectivamente.

Considere-se, também, os operadores

$$\begin{array}{ll}
U : ImP^\times \to L_n^p[0,\infty), & Ux(t) = iCE(t; -iA)x, \\
U^\times : ImP \to L_n^p[0,\infty), & U^\times x(t) = iCE(t; -iA^\times)x, \\
R : L_n^p[0,\infty) \to ImP, & R\varphi = \int_0^\infty E(-t; -iA)B\varphi(t)dt, \\
R^\times : L_n^p[0,\infty) \to ImP^\times, & R^\times\varphi = -\int_0^\infty E(-t; -iA^\times)B\varphi(t)dt, \\
J : ImP^\times \to ImP, & Jx = Px, \\
J^\times : ImP \to ImP^\times, & J^\times x = P^\times x, \\
K^\times : L_n^p[0,\infty) \to L_n^p[0,\infty), & K^\times\varphi(t) = \int_0^\infty k^\times(t-s)\varphi(s)ds,
\end{array}$$

onde $k^\times$ é a representação exponencial espectral

$$k^\times(t) = -iCE(t; -iA^\times)B, \quad t \neq 0.$$

Então, os operadores anteriores são lineares e limitados. Além disso,

$$\begin{pmatrix} I_n - K & U \\ R & J \end{pmatrix} : L_n^p[0,\infty) \oplus ImP^\times \to L_n^p[0,\infty) \oplus ImP$$

é invertível e o inverso é dado por

$$\begin{pmatrix} I_n - K^\times & U^\times \\ R^\times & J^\times \end{pmatrix} : L_n^p[0,\infty) \oplus ImP \to L_n^p[0,\infty) \oplus ImP^\times.$$

Demonstração: Como $\mathbb{C}^n$ é de dimensão finita e as representações exponenciais são contínuas em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, tem-se que os operadores são lineares e limitados.

Considere-se as matrizes $N = \begin{pmatrix} I_n - K & U \\ R & J \end{pmatrix}$ e $N^\times = \begin{pmatrix} I_n - K^\times & U^\times \\ R^\times & J^\times \end{pmatrix}$. Verifica-se que

$$N^\times N \;=\; \begin{pmatrix} I_n - K^\times - K + K^\times K + U^\times R & U - K^\times U + U^\times J \\ R^\times - R^\times K + J^\times R & R^\times U + J^\times J. \end{pmatrix}$$

Como o cálculo de cada uma das componentes da matriz é feita de forma análoga e é moroso, aqui será apenas exposto o cálculo da terceira componente, $R^\times - R^\times K + J^\times R$.

Seja $\varphi \in L_n^p[0,\infty)$. Observa-se que

$$R^\times K\varphi = -i\int_0^\infty \int_0^\infty E(-t;-iA^\times)BCE(t-s;-iA)B\varphi(s)ds\ dt.$$

Pelo Teorema de Fubini, é permitido trocar a ordem de integração, obtendo-se

$$R^\times K\varphi = \int_0^\infty \left[-i\int_0^\infty E(-t;-iA^\times)BCE(t-s;-iA)Bdt\right]\varphi(s)ds. \tag{4.5.3}$$

Seja x pertencente ao domínio de A. Atendendo ao facto de que

$$\frac{d}{dt}E(t;-iA)x = -iE(t;-iA)Ax = -iAE(t;-iA)x, \quad t \neq 0$$

e que $A^\times = A - BC$, tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(E(-t;-iA^\times)E(t-s;-iA)x) \\ = \;& iE(-t;-iA^\times)A^\times E(t-s;-iA)x - iE(-t;-iA^\times)AE(t-s;-iA)x \\ = \;& -iE(-t;-iA^\times)BCE(t-s;-iA)x, \quad t\neq 0, s. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Além disso, de (4.5.2), verifica-se que

$$\lim_{t\to 0^-} E(t;-iA)x = -Px, \quad \lim_{t\to 0^+} E(t;-iA)x = (I_m - P)x.$$

Conjugando este facto com (4.5.3) e (4.5.4), resulta que

$$\begin{aligned} R^\times K\varphi &= \int_0^\infty \left[E(-t;-iA^\times)E(t-s;-iA)B\right]_0^\infty \varphi(s)ds \\ &= \int_0^\infty \left[P^\times E(-s;-iA) - E(-s;-iA^\times)\right] B\varphi(s)ds \\ &= P^\times R\varphi + R^\times\varphi. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$R^{\times}(I_n - K) + J^{\times}R = 0. \tag{4.5.5}$$

Seguindo esta linha de raciocínio, obtém-se que

$$\begin{pmatrix} I_n - K^{\times} & U^{\times} \\ R^{\times} & J^{\times} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n - K & U \\ R & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \tag{4.5.6}$$

Analogamente, prova-se que

$$NN^{\times} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \tag{4.5.7}$$

Assim, conclui-se que $N^{\times}$ é o inverso de N. $\diamondsuit$

Observação 4.5.2 Nestas condições, diz-se que os operadores $I_n - K$ e $J^{\times}$ estão matricialmente emparelhados com relação de emparelhamento dada por

$$\begin{pmatrix} I_n - K & U \\ R & J \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n - K^{\times} & U^{\times} \\ R^{\times} & J^{\times} \end{pmatrix}. \tag{4.5.8}$$

Diz-se, ainda, que $J^{\times}$ é o indicador para $I_n - K$.

Definição 4.5.3 ([4]) *Em espaços de Banach X_1, X_2, Y_1, Y_2, diz-se que os operadores lineares e limitados $T : X_1 \to Y_1$ e $V : X_2 \to Y_2$ são equivalentes após extensão se existirem operadores invertíveis e limitados $E : Y_2 \times Z_1 \to Y_1 \times Z_2$ e $F : X_1 \times Z_2 \to X_2 \times Z_1$, com adicionais espaços de Banach Z_1 e Z_2, tais que*

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_{Z_2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{Z_1} \end{pmatrix} F.$$

Observação 4.5.4 De referir que esta noção de equivalência após extensão é equivalente à noção de emparelhamento matricial (tradicionalmente usada nas situações que envolvem espaços de dimensão finita) [4].

Teorema 4.5.5 *Nas condições do Teorema 4.5.1, existem matrizes E e F invertíveis, tais que*

$$\begin{pmatrix} I_n - K & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} J^\times & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} F,$$

i.e., $I_n - K$ e $J^\times$ são equivalentes após extensão.

Demonstração: Sejam

$$E = \begin{pmatrix} -U & (I_n - K)(I_n - K^\times) \\ I_n & R^\times \end{pmatrix}$$

e

$$F = \begin{pmatrix} R & J \\ I_n - K & U \end{pmatrix}.$$

Então, E^{-1} e F^{-1} são obtidos através da relação de emparelhamento obtida no Teorema 4.5.1.

Na realidade, de (4.5.8), obtém-se

$$(I_n - K)(I_n - K^\times) + UR^\times = I_n,$$

$$(I_n - K)U^\times + UJ^\times = 0,$$

$$(I_n - K^\times)U + U^\times J = 0$$

e

$$R^\times U + J^\times J = I_n.$$

Assim, resulta que

$$\begin{aligned}
& E \begin{pmatrix} -R^\times & J^\times J \\ I_n & U \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} UR^\times + (I_n - K)(I_n - K^\times) & -UJ^\times J + (I_n - K)(I_n - K^\times)U \\ -R^\times + R^\times & J^\times J + R^\times U \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} I_n & (I_n - K)U^\times J + (I_n - K)(I_n - K^\times)U \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se $\begin{pmatrix} -R^\times & J^\times J \\ I_n & U \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Logo, $E^{-1} = \begin{pmatrix} -R^\times & J^\times J \\ I_n & U \end{pmatrix}$.

Além disso, devido a (4.5.8)

$$\begin{aligned} F^{-1} &= \begin{pmatrix} R & J \\ I_n - K & U \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n - K & U \\ R & J \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_n - K^\times & U^\times \\ R^\times & J^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U^\times & I_n - K^\times \\ J^\times & R^\times \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, E e F são invertíveis. Além disso, tendo em conta (4.5.5), (4.5.6) e (4.5.7), tem-se

$$\begin{aligned} & E \begin{pmatrix} J^\times & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} F \\ = & \begin{pmatrix} -U & (I_n - K)(I_n - K^\times) \\ I_n & R^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^\times R & J^\times J \\ I_n - K & U \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -UJ^\times R + (I_n - K)(I_n - K^\times)(I_n - K) & -UJ^\times J + (I_n - K)(I_n - K^\times)U \\ J^\times R + R^\times (I_n - K) & J^\times J + R^\times U \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} UR^\times (I_n - K) + (I_n - K)(I_n - K^\times)(I_n - K) & -UJ^\times J - (I_n - K)U^\times J \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (UR^\times + (I_n - K)(I_n - K^\times))(I_n - K) & -(UJ^\times + (I_n - K)U^\times)J \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} I_n - K & -(UJ^\times - UJ^\times)J \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} I_n - K & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Capítulo 5

Concretizações

Como já anteriormente mencionado, os operadores e as equações de Wiener-Hopf ocorrem frequentemente, por exemplo, em diversos ramos da Física e da Bioquímica. Ocorrem, com especial atenção em difracção acústica, elástica e electromagnética, em mecânica, problemas de fluxo, modelos de difusão e em aplicações geológicas.

Muitos problemas de valores de fronteira e transmissão podem ser reduzidos a equações de Wiener-Hopf, sendo estas resolvidas, quando possível, via as factorizações acima citadas ou concretizações destas.

Neste último capítulo, identificam-se particularizações dos objectos mais gerais anteriormente descritos.

5.1 Identificação de Operadores de Wiener-Hopf

Nesta primeira secção, são apresentados exemplos onde se identificam operadores de Wiener-Hopf em situações concretas. Numa primeira abordagem, consegue-se obter um operador de Toeplitz, a partir de um operador de Wiener-Hopf (sendo o recíproco também possível), de modo a exibir que existe uma relação entre o estudo de operadores de Toeplitz e o estudo de operadores de Wiener-Hopf (no caso em apreço, ter-se-á espaços L^p, $p = 2$). Noutra situação, obtém-se a equivalência após extensão algébrica entre um operador de Wiener-Hopf e um operador de tipo de convolução, reflectindo uma ligação estreita entre ambos (no quadro das possíveis extensões de espaços suportados sobre partes da recta real).

Os exemplos aqui apresentados são adaptados dos trabalhos [9, 10, 11, 25, 34].

Exemplo 5.1.1 Seja $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ a semi-recta positiva. Ao estender funções em $L^2(\mathbb{R}_+)$ por zero para todo $\mathbb{R}$, constrói-se o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$ que se passa a denotar por $L^2_+(\mathbb{R})$.

Seja $P_{\mathbb{R}_+}$ a projecção canónica de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2_+(\mathbb{R})$.

Seja $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Define-se W^0_ϕ como

$$\begin{aligned} W^0_\phi : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto F^{-1}\phi \cdot Ff. \end{aligned}$$

Nestas condições, W^0_ϕ é um operador de convolução [11, 25].

A restrição de W^0_ϕ para $L^2_+(\mathbb{R})$ (tanto na imagem como no domínio) representa o operador de Wiener-Hopf W_ϕ (comparar com (2.1.1)),

$$\begin{aligned} W_\phi : L^2_+(\mathbb{R}) &\to L^2_+(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto P_{\mathbb{R}_+} W^0_{\phi_{|P_{\mathbb{R}_+} L^2(\mathbb{R})}} f. \end{aligned}$$

Para $\phi = \gamma + Fk$, onde $\gamma \in \mathbb{C}$ e $k \in L^1(\mathbb{R})$, verifica-se que em conformidade com a Secção 4.4, W_ϕ actua em $L^2_+(\mathbb{R})$ na forma

$$W_\phi f(t) = \gamma f(t) + \int_{\mathbb{R}_+} k(t-s) f(s) ds, \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De acordo com a Definição 4.4.1, observa-se que ϕ é o símbolo de Fourier do operador W_ϕ.

Considera-se, agora, uma matriz semi-infinita $(c_{i-j})_{i,j \geq 0}$, construída a partir de uma sucessão (c_i) em ℓ^1 e considere-se ainda uma função $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, onde $\mathbb{T}$ denota a circunferência unitária complexa, com φ definida por

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}.$$

O operador $T_\varphi : \ell^2_+(\mathbb{Z}) \to \ell^2_+(\mathbb{Z})$ tal que

$$T_\varphi((x_i)_{i\geq 0}) = (y_i)_{i\geq 0},$$

onde

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i-j} x_j, \qquad i \geq 0,$$

é conhecido como operador de Toeplitz e φ diz-se o seu símbolo.

Observa-se que se pode definir ϕ em termos de φ de tal modo que,

$$\phi(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}\right).$$

Nestes termos, o operador de Wiener-Hopf W_ϕ e o operador de Toeplitz T_φ são equivalentes, no sentido de que possuem as mesmas propriedades de regularidade. Na verdade, algumas destas propriedades podem ser descobertas por via de uma análise dos respectivos símbolos ϕ ou φ. Neste âmbito, muitas vezes o operador de Toeplitz T_φ é designado por análogo discreto do operador de Wiener-Hopf W_ϕ.

Exemplo 5.1.2 Existem problemas de difracção e transmissão que são possíveis de serem traduzidos por equações, onde figuram operadores do tipo de convolução. Por vezes, dependendo da geometria do problema, estes operadores são mesmo operadores de Wiener-Hopf [21]; noutros casos, tais operadores do tipo de convolução são possíveis de serem equivalentes após extensão (ver Definição 4.5.3) a operadores de Wiener-Hopf [9, 10].

Neste contexto, a título de exemplo, ilustram-se a seguir algumas particularidades do problema considerado em [10]. Trata-se de um problema de difracção de ondas planas pela união de n faixas

$$\Omega =]\gamma_1, \gamma_2[\cup \cdots \cup]\gamma_{2n-1}, \gamma_{2n}[\subset \mathbb{R},$$

com $0 = \gamma_1 < \cdots < \gamma_{2n}$ e $n \in \mathbb{N}$ (aqui representados no caso bidimensional, por via de simplificações provenientes da propagação de ondas perpendiculares a estes objectos). Tal problema foi considerado no quadro dos espaços de potenciais de Bessel $H^\sigma(\mathbb{R})$, onde $\sigma \in \mathbb{R}$, constituídos pelas distribuições φ tais que

$$||\varphi||_{H^\sigma(\mathbb{R})} = ||F^{-1}(1+\xi^2)^{\sigma/2} \cdot F\varphi||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Em termos matemáticos, o problema pode ser equacionado no sentido de se conhecer um único $u \in L^2(\mathbb{R})$, com $u_{|\mathbb{R}^2_\pm} \in H^1(\mathbb{R}^2_\pm)$ tal que

$$(\Delta + \eta^2)u = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^2_\pm \tag{5.1.1}$$

$$\begin{cases} a_0 u_0^+ + b_0 u_0^- = h_0 \\ a_1 u_1^+ + b_1 u_1^- = h_1 \end{cases} \qquad \text{em } \Omega \tag{5.1.2}$$

$$\begin{cases} a_0' u_0^+ + b_0' u_0^- = 0 \\ a_1' u_1^+ + b_1' u_1^- = 0 \end{cases} \qquad \text{em } \mathbb{R}\backslash\Omega \tag{5.1.3}$$

onde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o Laplaciano, η representa o número de onda, que devido às condições do meio verifica $\Im m\ \eta > 0$, $u_0^\pm = u_{|y=\pm 0}$, $u_1^\pm = (\partial u/\partial y)_{|y=\pm 0}$, $a_j, b_j, a_j', b_j' \in \mathbb{C}$ com $j \in \{0, 1\}$ e tais que

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 \neq 0 \qquad a_0' b_1' + a_1' b_0' \neq 0$$

e $h_\rho \in H^{-\rho+1/2}$ $(\rho = 0, 1)$ são arbitrariamente dados.

Nestas condições, tomando um operador linear tal que

$$\mathcal{P} : D(\mathcal{P}) \to H^{-\rho+1/2}(\Omega),$$

onde $D(\mathcal{P})$ é um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2_+) \times H^1(\mathbb{R}^2_-)$ cujos elementos satisfazem (5.1.1) e (5.1.3), tem-se que $\mathcal{P}$, cuja acção é dada por (5.1.2), descreve o problema.

Denotando por P_Ω a restrição de $\mathbb{R}$ para Ω e considerando, em ramos apropriados, a função t,

$$t(\xi) = (\xi^2 - \eta^2)^{1/2}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

prova-se em [10] que $\mathcal{P}$ é equivalente a um operador de tipo de convolução dado por

$$W_{\Phi,\Omega} = P_{\mathbb{R}\to\Omega} F^{-1} \Phi \cdot F : \widetilde{H}^s(\Omega) \to H^s(\Omega),$$

onde $P_{\mathbb{R}\to\Omega} : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\Omega)$ denota o correspondente operador de restrição,

$$\Phi = \frac{1}{a_0' b_1' + b_0' a_1'} \begin{pmatrix} a_0 b_1' + b_0 a_1' & (-a_0 b_0' + b_0 a_0') t^{-1} \\ (-a_1 b_1' + b_1 a_1') t & a_1 b_0' + b_1 a_0' \end{pmatrix},$$

$\widetilde{H}^s(\Omega)$ denota o subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R})$ definido pelas distribuições com suporte em $\overline{\Omega}$ e $s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

É demonstrado, ainda, que o operador do tipo de convolução $W_{\Phi,\Omega}$ é algebricamente equivalente após extensão [8, 9, 18] a um operador de Wiener-Hopf $W_{\Psi,\mathbb{R}_+}$, definido por

$$W_{\Psi,\mathbb{R}_+} = P_{\mathbb{R}_+} F^{-1} \Psi \cdot F : \widetilde{H}^\delta(\mathbb{R}_+) \to H^\delta(\mathbb{R}_+),$$

onde $P_{\mathbb{R}_+}$ denota a projecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ e

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tau_{-\gamma_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{-(\gamma_4-\gamma_3)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{-(\gamma_{2n}-\gamma_{2n-1})} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{-(\gamma_3-\gamma_2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \tau_{-(\gamma_{2n-1}-\gamma_{2n-2})} & 0 \\ \Phi & \Phi\tau_{\gamma_3} & \cdots & \Phi\tau_{\gamma_{2n-1}} & \tau_{\gamma_2} & \cdots & \tau_{\gamma_{2n-2}} & \tau_{\gamma_{2n}} \end{pmatrix},$$

onde $\tau_a(\xi) = e^{i\xi a}$ e δ é um multi-índice associado a Ψ da forma $\delta = (s, s, ..., s)$.

Na realidade, seguindo os métodos de [8] e [18] é possível provar existência de um espaço de Banach X e operadores invertíveis (não necessariamente limitados) tais que

$$\begin{pmatrix} W_{\Phi,\Omega} & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} = E \ W_{\Psi,\mathbb{R}_+} \ F,$$

o que determina a equivalência após extensão algébrica entre $W_{\Phi,\Omega}$ e $W_{\Psi,\mathbb{R}_+}$.

5.2 Identificação de Factorizações de Wiener-Hopf

Nesta secção, pretende-se obter factorizações de Wiener-Hopf para situações concretas, tanto no sentido do Capítulo 2 como no sentido do Capítulo 4. Verifica-se, ainda, que tais factorizações, em alguns casos, ajudam na pesquisa da solução da equação em questão.

Os resultados aqui apresentados tem como base os trabalhos [6, 32, 34].

Observação 5.2.1 Atendendo à definição de factorização de Kreĭn (Definição 2.2.1) e à Figura 2.3.1 da factorização cruzada, verifica-se que a factorização de Kreĭn é um caso particular da factorização cruzada, no sentido que $X_0 = Y_0 = \{0\}$ ou $X_2 = Y_2 = \{0\}$.

Exemplo 5.2.2 Considere-se o espaço $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ e seja P, neste caso concreto, a projecção canónica de $L^p(\mathbb{R})$ em $L^p_+(\mathbb{R})$ (cf. $L^2_+(\mathbb{R})$ do Exemplo 5.1.1). Seja U um operador de convolução tal que

$$U = F^{-1}\Omega \cdot F \tag{5.2.1}$$

onde F é a transformação de Fourier e $\Omega(\xi) = \left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^{\omega}$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{Z}$.

Para operadores do tipo de convolução $A = W_\phi$ exibidos no Exemplo 5.1.1, com as ideias de factorização presentes em [17] é possível aí identificarem-se factorizações de Kreĭn [32], $A = A_- U A_+$, onde U toma a forma (5.2.1).

Exemplo 5.2.3 Considere-se a equação integral de Wiener-Hopf,

$$\int_0^\infty k(x-y)f(y)dy = f(x), \quad x \geq 0, \tag{5.2.2}$$

onde k é definida em $L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$k(x) = \frac{1}{2}\int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-iy}}{y} dy$$

e $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

A equação (5.2.2) é conhecida como equação de Milne e a sua solução representa a intensidade da radiação de equilibrio na atmosfera estelar [34].

Para encontrar uma solução para a equação (5.2.2), começa-se por estender f a todo $\mathbb{R}$, de tal modo que se verifique

$$\int_0^{\infty} k(x-y)f(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

De seguida, a ideia passa por decompor f nas suas componentes em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$, obtendo-se $f = f_- + f_+$.

Então, resulta que

$$Fk \cdot Ff_+ = Ff_+ + Ff_-,$$

ou seja,

$$(1 - Fk)Ff_+ = -Ff_-$$

e, portanto,

$$\left(1 - \frac{\arctan \xi}{\xi}\right) Ff_+(\xi) = -Ff_-(\xi). \tag{5.2.3}$$

Prova-se (em [34]) que para

$$\gamma(\xi) = \frac{\xi^2+1}{\xi^2}\left(1 - \frac{\arctan \xi}{\xi}\right)$$

e considerando as funções

$$\gamma_{\pm}(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \gamma(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta\right\},$$

onde γ_+ é definido para ξ tais que $\Im m(\xi) > 0$ e γ_- é definido para ξ tais que $\Im m(\xi) < 0$, tem-se

$$\gamma(\xi) = \frac{\gamma_+(\xi)}{\gamma_-(\xi)}, \quad |\Im m(\xi)| < 1.$$

Este resultado permite inferir que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\arctan \xi}{\xi} &= \frac{\xi^2}{\xi^2+1} \, \frac{\gamma_+(\xi)}{\gamma_-(\xi)}, \quad |\Im m(\xi)| < 1, \\ &= \left[\xi^2 \ \gamma_+(\xi)\right] \left[(\xi^2+1)^{-1}\gamma_-^{-1}(\xi)\right] \end{aligned}$$

que representa a factorização canónica de Wiener-Hopf do símbolo $I - Fk(\xi)$ (no sentido do Capítulo 4).

Multiplicando ambos os membros de (5.2.3) por $(\xi^2+1)\gamma_-(\xi)$, obtém-se

$$\xi^2\gamma_+(\xi)Ff_+(\xi) = -(\xi^2+1)\gamma_-(\xi)Ff_-(\xi). \tag{5.2.4}$$

Tendo em conta que $Ff_\pm$ são transformadas de Fourier, bem como, o comportamento assimptótico de $\gamma_\pm$, prova-se em [34] que (a menos de uma constante),

$$Ff_+(\xi) = \frac{\xi+i}{\xi^2}\gamma_+^{-1}(\xi).$$

Logo, combinando o resultado anterior com (5.2.4), obtém-se Ff_-.

Assim, encontrou-se a solução da equação (5.2.2), recorrendo à factorização do seu símbolo.

Exemplo 5.2.4 No âmbito dos processos unidimensionais de Markov de parâmetro discreto [6], existe pertinencia em conhecer a forma dos factores de Wiener-Hopf da função $1 - f$, onde f é uma função característica ou uma função de densidade.

Neste quadro e numa perspectiva geral, assume-se que f é definida no círculo unitário $|s| = 1$ e tem a forma

$$f(s) = E(s^X)$$

onde E denota a esperança matemática e X denota uma variável aleatória aperiódica com valores inteiros.

A função $1-f$ pode ser factorizada fortemente do modo seguinte,

$$1 - f(s) = [1 - g_+(s)][1 - g_-(s)],$$

onde g_+ e g_- são funções geradoras em escada, associadas a f.

Prova-se que os factores de Wiener-Hopf tomam a forma,

$$1 - g_+(s) = \exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E(s^{S_n} \ \ \chi_{\{S_n \geq 0\}})\}, \quad |s| \leq 1$$

e

$$1 - g_-(s) = \frac{s-1}{s} \exp \sum_{n=1}^{\infty} [s^{-n} - E(s^{S_n} \ \ \chi_{\{S_n < 0\}})], \quad |s| \geq 1$$

onde S_n denota a soma de n amostras independentes de f.

Estes factores representam funções das trajectórias associadas aos processos de Markov.

5.3 Identificação de Realizações

Em diversas áreas, especialmente em teoria de controlo e na área de electrónica, encontra-se situações e problemas que podem ser formulados em termos de realizações. Nesta secção, pretende-se ilustrar pequenos exemplos de como obter realizações para alguns operadores e funções matriciais.

Os exemplos indicados podem ser encontrados em [1, 27].

Exemplo 5.3.1 Considere-se a função matricial W dado por

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} (\mu_2 - \lambda)/(\lambda_1 - \lambda) & 0 \\ 0 & (\mu_1 - \lambda)/(\lambda_2 - \lambda) \end{pmatrix}$$

com entradas em $\mathbb{R}$ e tais que $\lambda_1 \neq \mu_2$ e $\lambda_2 \neq \mu_1$. Então, escolhendo [27]

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \mu_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

obtém-se, muito simplesmente, que W admite a realização

$$W(\lambda) = I_2 + C(\lambda I_2 - A)^{-1}B.$$

Exemplo 5.3.2 Sejam X um espaço de Hilbert e W o operador da forma

$$W(\lambda) = I_X + \frac{1}{\lambda}A_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda^m}A_m$$

onde $A_k \in L(X)$, para $k \in \{1, ..., m\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere-se $A, B \in L(X^m)$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ I_X & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & I_X & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & I_X & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 & ... & -A_{m-1} & -A_m \\ I_X & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & I_X & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & I_X & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, obtém-se as realizações

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= I_X + P^*B(A - \lambda I_{X^m})^{-1}P \\ W^{-1}(\lambda) &= I_X - P^*B(B - \lambda I_{X^m})^{-1}P \end{aligned}$$

onde $P \in L(X, X^m)$ é dado por

$$Pg = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g \in X$$

e P^* é operador adjunto de P [27].

Exemplo 5.3.3 Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que $dimX = m$ e $dimY = 1$. Considere-se a função matricial $m \times m$ tal que

$$W(\lambda) = I_X - \frac{D}{a - \lambda}$$

onde $\lambda, a \in \mathbb{R}$ e $D \in L(X)$ tal que $rkD = 1$, com rkD a denotar a característica de D.

Então, D admite a representação

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

onde $\gamma_i \in L(Y, X)$ e $p_i \in L(X, Y)$, com $i \in \{1, ..., m\}$.

Verifica-se que W admite a realização [27]

$$W(\lambda) = I_X - C(A - \lambda I_Y)^{-1}B, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

onde $A \in L(Y)$ é tal que

$$Ax = ax, \quad x \in Y,$$

$B \in L(X, Y)$ é tal que

$$Bx = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} x, \quad x \in X$$

e $C \in L(Y, X)$ é tal que

$$Cx = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} x, \quad x \in Y.$$

Exemplo 5.3.4 Considere-se a função matricial dada por

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sejam A a matriz $m \times m$, B a matriz $m \times 2$ e C a matriz $2 \times m$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se, então, a realização [1]

$$W(\lambda) = I_2 - C(A - \lambda I_m)^{-1}B, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Referências

[1] Bart, H.: Transfer Functions and Operator Theory, *Linear Algebra and its Applications* **84**, 33-61 (1986).

[2] Bart, H.; Gohberg, I.; Kaashoek, M. A.: Fredholm Theory of Wiener-Hopf Equations in terms of Realization of their Symbols, *Integral Equations and Operator Theory* **8**, 590-613 (1985).

[3] Bart, H.; Gohberg, I.; Kaashoek, M. A.: Wiener-Hopf Equations with Symbols Analytic in a Strip, *Operator Theory: Advances and Applications* **21**, 39-74 (1986).

[4] Bart, H.; Tsekanovskii, V. E.: Matricial Coupling and Equivalence After Extension, *Operator Theory: Advances and Applications* **59**, 143-160 (1992).

[5] Bastos, M. A.; Santos, A. F.; Lebre, A. B.: On the Fredholm Theory of Wiener-Hopf Equations and the Coupling Method, *Integral Equations and Operator Theory* **11**, 297-309 (1988).

[6] Bayer, N.: On the Identification of Wiener-Hopf Factors, *Relatório Interno de Centrum voor Wiskunde en Informatica*, Department of Operations Research, Statistics and System Theory, Amsterdam, 8pp. (1995).

[7] Böttcher, A.; Karlovich, Y.; Spitkovsky, I.: *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Operator Theory: Advances and Applications **131**, Birkäuser Verlag, Basel, 2002.

[8] Castro, L. P.: Wiener-Hopf Operators on unions of Finite Intervals: Relations and Generalized Inversion, *Proceedings of the Meeting on Matrix Analysis and Applications*, University of Sevilla, 148-155 (1997).

[9] Castro, L. P.; Speck, F.-O.: Relations between Convolution Type Operators on Intervals and in the Half-Line, *Integral Equations and Operator Theory* **37**, 169-207 (2000).

[10] Castro, L. P.; Speck, F.-O.: Well-Posedness of Diffraction Problems involving n Coplanar Strips, Preprint 14/00, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 13pp (2000).

[11] Duduchava, R.; *Integral Equations in Convolution with Discontinuous Presymbols. Singular Integral Equations with Fixed Singularities, and their Applications to some Problems of Mechanics*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1979.

[12] Gohberg, I.; Goldberg, S.; Kaashoek, M. A.: *Classes of Linear Operators Vol. I*, Operator Theory: Advances and Applications **49**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[13] Gohberg, I.; Goldberg, S.: Finite-dimensional Wiener-Hopf Equations and Factorization of Matrices, *Linear Algebra and its Applications* **48**, 219-236 (1982).

[14] Hörmander, L.; *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **256**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.

[15] Kachman, S. D.: *Biometry 970 Linear Models*, Department of Biometry, University of Nebraska, Lincoln, 1999, Publicação electrónica disponível via http://www.ianr.unl.edu/ianr/biometry/faculty/steve/970/1999.

[16] Kecs, W.; *The Convolution Product and Some Applications*, Mathematics and its Applications **2**, Editura Academiei, Bucharest, 1982.

[17] Kreĭn, M. G.: Integral Equations on a Half Line with Kernel depending upon the Difference of the Arguments, *American Mathematical Society* **22**, 163-288 (1962).

[18] Kuiper, A. B.: A note on First Kind Convolution Equations on a Finite Interval, *Integral Equations and Operator Theory* **14**, 146-152 (1991).

[19] Kuijper, A. B.: The State Space Method for Integro-Differential Equations of Wiener-Hopf Type with Rational Matrix Symbols, *Operator Theory: Advances and Applications* **58**, 142-188 (1992).

[20] Lucena, P.: *Propriedades de Regularidade dos Operadores Lineares*, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Textos e Notas **47**, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1994.

[21] Meister, E.; Speck, F.-O.: Modern Wiener-Hopf Methods in Diffraction Theory, *Ordinary and Partial Differential Equations* **II**, 130-171 (1989).

[22] Mikhlin, S. G.; Prössdorf, S.: *Singular Integral Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[23] Noble, B.: *Methods based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differntial Equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1988.

[24] Pipkin, A. C.: *A Course on Integral Equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[25] Roch, S.: Spectral Approximation of Wiener-Hopf Operators with Almost Periodic Generating Function, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **21**, 241-253 (2000).

[26] Sakhnovich, L.A.: *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*, Operator Theory: Advances and Applications **84**, Basel, Birkhäuser, 1996.

[27] Sakhnovich, L. A.: *Spectral Theory of Canonical Differential Systems: Method of Operator Identities*, Operator Theory: Advances and Applications **107**, Birkäuser Verlag, Basel, 1999.

[28] Santos, A. F.: *Operadores de Wiener-Hopf Abstractos: Perspectiva Geométrica*, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, U.T.L., 1988.

[29] Sogge, C. D.; *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge Tracts in Mathematics **105**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[30] Speck, F.-O.: *General Wiener-Hopf Factorization Methods*, Pitman, London, 1985.

[31] Speck, F.-O.: On General Wiener-Hopf Operator Theory and Recent Applications, *Demonstratio Mathematica* **XVIII**, 725-742 (1985).

[32] Speck, F.-O.: On Kreĭn Factorization in Banach Spaces, Associated Wiener-Hopf Operators and an Estimate by Devinatz and Shinbrot, *Funtional-Differential Systems and Related Topics* **3**, 223-228 (1983).

[33] Speck, F.-O.: On the Generalized Invertibility of Wiener-Hopf Operators in Banach Spaces, *Integral Equations and Operator Theory* **6**, 458-465 (1983).

[34] Widom, H.: Wiener-Hopf Integral Equations, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society **60**, 391-405 (1997).

[35] Wiener, N.; Hopf, E.: Über eine Klasse Singulärer Integralgleichungen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.*, 696-706 (1931).