GeoGebra e ferramentas *tradicionais* – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias

Jorge Manuel Pedrosa Gaspar[1], *Isabel Cabrita*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Rio Novo do Príncipe, gasparix2@gmail.com
[2] Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, icabrita@ua.pt

Resumo. *O presente artigo propõe-se divulgar parte de uma investigação que perseguiu como uma das principais finalidades analisar o potencial da exploração do GeoGebra, complementada com ferramentas tradicionais, no desenvolvimento de competências geométricas, relacionadas com as isometrias e os frisos, em alunos do 1.º ciclo do ensino básico. No âmbito do trabalho empírico, desenvolveu-se um estudo de caso múltiplo centrado em dois pares de alunos do 4.º ano de escolaridade que resolveram autonomamente, por recurso àquelas tecnologias, uma bateria de tarefas de natureza essencialmente exploratória. Os dados foram recolhidos através das técnicas de inquirição, observação direta e participante e análise documental. A análise de conteúdo a que foram submetidos permitiu concluir que uma abordagem didática centrada em sequências de tarefas a resolver com recurso a tecnologias tradicionais conjugadas com o GeoGebra potencia uma apropriação mais sólida dos conceitos geométricos em causa e sua aplicação. Além disso, contribuiu ainda para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à matemática e à geometria, em particular.*

Abstract. *This article intends to disseminate part of an investigation that aims to analyze the potential of GeoGebra, complemented with traditional tools, in the development of geometric competences related to isometries and the friezes, in elementary school. Within the empirical work, we developed a case study focused on two pairs of students in the 4th grade who solved autonomously, using those technologies, a battery of exploratory tasks. The data was collected mainly through inquiry techniques, direct observation and documentary analysis. Its content analysis allowed us to conclude that the didactical approach, centered on sequences of tasks to be solved using traditional technologies combined with GeoGebra, enhances a more solid appropriation of the focused geometric concepts and its application. Moreover, it has also contributed to the development of positive attitudes towards Mathematics and particularly to Geometry.*

Palavras-chave: GeoGebra; Isometrias; Ferramentas tradicionais; Ensino Básico.

Introdução

Segundo Lévy (1990), as "tecnologias da inteligência" ou "da mente", cada vez mais presentes na sociedade, propiciam um novo debate sobre a filosofia do conhecimento. Serão responsáveis por novas formas de elaboração do saber e de comunicação e colocam

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 169–190

em questão alguns dos pilares da epistemologia contemporânea – a dualidade sujeito-objeto e mente-matéria.

No entanto, parece ser opinião generalizada que a escola e, em particular, a Matemática, está muito longe de incorporar as tecnologias informáticas no processo educativo. Ao que se assiste hoje nas escolas é ao uso esporádico e desadequado dessas ferramentas, não obstante a mais-valia no contexto educativo que se lhe reconhece (Costa, 2007; Matos, 2005). Mas não se defende que tais tecnologias substituam as ferramentas mais tradicionais, como a régua, e outros materiais manipuláveis, como os miras. Apesar de não ter sido muito investigada, a coexistência de ambas as tecnologias, numa lógica de complementaridade, poderá trazer vantagens para o processo educativo.

Assim, muito tem de ser feito no sistema de ensino e de aprendizagem da matemática, uma das áreas fundamentais para o desenvolvimento da humanidade, mas, paradoxalmente, uma das mais votadas ao insucesso educativo e escolar (Brunello, 2010), diretamente relacionado com uma visão negativa em torno dessa área. A este facto não são alheias, nomeadamente, as dificuldades dos professores em praticarem um ensino motivador e consequente, também causadas pelas sucessivas reformas que se têm introduzido nos últimos anos no sistema educativo.

No caso de Portugal, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007)[1] introduzia alterações significativas relativamente às orientações anteriores. Uma das áreas em que isso é notório é a da Geometria e, mais concretamente, a das transformações geométricas no plano euclidiano, a cuja aprendizagem estão associadas algumas dificuldades identificadas na literatura.

Neste contexto, desenvolveu-se uma investigação norteada pela principal questão – Poderá a exploração de uma sequência de tarefas, que variam quanto à abertura e complexidade, suportada pelo GeoGebra e por outras ferramentas mais tradicionais, contribuir para uma mais sólida apropriação e aplicação de conceitos relacionados com transformações geométricas isométricas e para uma visão mais positiva da geometria?

[1] Apesar deste programa já ter sido revogado em 2013, foi nele que a presente investigação se baseou, por ser o que se encontrava em vigor à data da realização do trabalho empírico.

Aprendizagem das Transformações Geométricas mediada por tecnologias

Neste ponto, faz-se referência: à Geometria nos *curricula* e a atitudes sobre a mesma; às transformações geométricas, focando-se dificuldades na sua aprendizagem e formas de as superar; e, finalmente, ao uso do GeoGebra e das ferramentas tradicionais na aprendizagem deste tópico.

A geometria é uma área à qual, durante muito tempo, não se deu a ênfase devida (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; APM, 2009; Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011; NCTM, 2007). Quando a sua importância foi reforçada (Guimarães, Belfort, & Bellemain, 2002;), os currículos apresentavam uma geometria muito fechada sobre si mesma, muito ligada ao reconhecimento e nomeação de formas geométricas, às definições e à utilização de fórmulas em medições geométricas (Breda et al., 2011; Costa, 2001; Veloso, 1999). Por outro lado, muito influenciados por pedagogias mais centradas no ensino do que na aprendizagem dos alunos (Nóvoa, 2009), os professores não estavam preparados para a abordar da forma mais adequada nem havia materiais de qualidade que apoiassem devidamente a sua atividade (Clements, 2003). Tudo isto contribuía para o baixo desempenho dos alunos neste tema e para que não tivessem uma atitude muito positiva em relação ao mesmo:

> Experiências com métodos pouco adequados para o ensino desta disciplina, sucessivos fracassos ao desempenhar tarefas que exigem habilidade espacial e baixa crença de auto-eficácia na capacidade de resolução de problemas geométricos são fatores que podem influenciar as atitudes em relação à geometria (Viana, 2004, p. 7).

Tal situação pode provocar insucesso temporário ou mesmo uma completa repulsa para com toda a disciplina porque, sendo a Geometria um tema da Matemática, pode-se tomar o todo pela parte ou vice-versa (Hershkowitz, 1990).

Presentemente, a geometria ganhou relevo nos programas curriculares muito motivado por documentos como os do NCTM (2007).

Em 2007, Portugal viu-se confrontado com o PMEB (Ponte et al., 2007), que esteve a ser implementado, de forma generalizada, desde 2011 e até à sua revogação em 2013. Aí explicita-se que "Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência" constitui uma duas principais finalidades do seu ensino. No tema de Geometria, tal Programa refere como propósito principal o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, no plano e no espaço, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos em contextos diversos. Refere também que se devem estudar, desde o 1.º Ciclo, diversas transformações geométricas isométricas que, segundo Bastos (2007), se podem constituir como verdadeiras ferramentas para raciocinar sobre o plano e o espaço.

Em relação aos conteúdos, o PMEB apresenta apenas um tópico relacionado com as isometrias – "Reflexão" – e, para os 1.º e 2.º anos, enuncia três objetivos específicos: a) Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo; b) Desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical; e c) Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais (p. 22). Para os 3.º e 4.º anos, os objetivos específicos são: a) Identificar no plano eixos de simetria de figuras; b) Construir frisos e identificar simetrias; c) Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais (p. 23). Em sintonia com estes objetivos, definiram-se metas de aprendizagem – finais e intermédias[2] – (também já revogadas), que se pretendiam constituir uma referência para a avaliação (Serrazina et al., 2010).

Propõe-se, assim, uma mudança ao nível da conceptualização das transformações geométricas, mais próxima da usada na literatura matemática internacional (Veloso, 2012), que pode acarretar dificuldades acrescidas no processo educativo deste tópico, que não é de fácil aprendizagem.

De facto, apesar de não se terem encontrado muitos estudos centrados nas transformações geométricas e nem todas as conclusões serem consensuais, poder-se-á sintetizar que: a translação (principalmente a horizontal) será a isometria que menos dificuldades acarreta; a rotação será mais difícil nos casos em que o centro de rotação é externo à figura e a de meia-volta parece ser facilmente confundida com a reflexão; a reflexão será gradativamente mais difícil consoante a posição do eixo – vertical, horizontal ou oblíqua;

[2] Meta Final 25 - Compreende a noção de reflexão.

Metas intermédias até ao 2.º Ano

- Identifica no meio natural e físico o transformado de uma figura numa reflexão de eixo vertical ou de eixo horizontal.
- Identifica polígonos com simetria de reflexão (p. 22).

Metas intermédias até ao 4.º Ano

- Identifica eixos de simetria em figuras no plano.
- Identifica simetrias em figuras diversas, nomeadamente: polígonos; frisos.
- Representa frisos com simetrias de reflexão (p. 23).

a aplicação de uma isometria será mais difícil do que a identificação de objetos que possam ser o transformado um do outro pelas isometrias; objetos mais elaborados provocam piores desempenhos; é mais difícil a identificação de isometrias presentes num friso do que a sua continuação, completamento ou criação (Coelho, 2013; Gomes, 2012; Oliveira, 2012; Vieira, 2010).

Para além de medidas transversais a todo o currículo, como um ensino centrado na perspetiva construtivista e apoiado por tarefas ricas e desafiantes, devidamente sequenciadas (ver p.e. Cabrita et al., 2011), têm-se proposto medidas mais específicas para se tentar ultrapassar tais dificuldades. Assim, defende-se que o aluno vá construindo o conceito de congruência – por sobreposição, pelas propriedades das figuras e depois pela translação, rotação e reflexão, assim como pelas suas composições (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Clements, 2003; Del Grande, 1990). A simetria deve começar por ser reconhecida, por exemplo, por dobragem e por exploração com espelhos, começando-se pelas que apresentam um só eixo de simetria e evoluindo-se para as que apresentam rotação; em relação à composição de figuras com simetria de rotação e reflexão, devem-se explorar alguns 'movimentos' e proporcionar conhecimentos gradativamente mais formais e sistematizados (Breda et al., 2011; NCTM, 2007; Schattschneider, 2009).

Nesta mesma lógica, o PMEB também defende uma abordagem das isometrias primeiro de forma intuitiva, em associação com os frisos, e depois com crescente formalização (Ponte et al., 2007).

As tecnologias informáticas, em particular ambientes dinâmicos de geometria dinâmica[3], têm contribuído para o desenvolvimento do sentido geométrico, a finalidade principal da Geometria, e, portanto, poderão desempenhar um papel fundamental na aprendizagem destes tópicos (Laborde, 2000). O rigor e pormenor das imagens dinâmicas que proporcionam de objectos muito mais complexos dos que os habitualmente usados em ambientes clássicos de papel e lápis, desencadeando fenómenos visuais muito ricos e

[3] A propósito desta designação, concorda-se com Piteira e Matos (2000) quando dizem: "Falo em ADGD, não em Ambientes Dinâmicos de Geometria (ADG), nem em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por considerar que este termo define melhor o tipo de software. Se por um lado é um tipo especial de aplicação que cria acção entre a interface e o utilizador, por outro, torna dinâmica a forma de abordar e trabalhar a geometria euclidiana" (p. 62).

fortes, favorecem a compreensão dos conceitos e de relações geométricas, conduzindo a um progresso intelectual. Assim, devem ser utilizadas para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas (Cabrita, Neto, Breda, & Santos, 2013; Coelho, 2013; Jonassen, Howland, Marra, & Crismond, 2008; Laborde, 2000; Matos, 2011). Por isso, defende-se que, desde cedo, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através da utilização das tecnologias que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais (NCTM, 2007). As mais usadas têm sido o Cabri-Géomètre e o Geometer's Sktetchpad, com resultados interessantes ao nível do ensino e da aprendizagem da geometria envolvendo a construção de conhecimento, capacidades para o aplicar e o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à matemática e à geometria (ver p.e. Goldenberg, Scher, & Feurzeig, 2008; Hershkowitz, 1990; Oliveira, 2012; Silva, 2012). Mais recentemente, surgiu o GeoGebra, que se constitui uma mais-valia quando comparado com outras aplicações, por aliar a manipulação gráfica às representações algébrica e de cálculo (ver p.e. Berger, 2012; Hohenwarter, 2013; Mehanovic, 2009; Misfeldt, 2009). Além disso, é muito intuitivo e de distribuição gratuita.

As vantagens de tais ambientes não menorizam, no entanto, a importância da utilização de outras ferramentas mais tradicionais como a régua e de materiais como os georrefletores. Assim, diversos autores, como Breda et al. (2011), defendem a convivência de tais ferramentas e ambientes no contexto educativo, o que está consignado no PMEB (Ponte et al., 2007):

> No estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho – régua, esquadro, transferidor, compasso – bem como a utilização de materiais manipuláveis – geoplanos, tangrans, puzzles, mosaicos, peças poligonais encaixáveis, cartolina e elásticos, armações e palhinhas, mira e espelhos. Todos estes instrumentos e materiais são um apoio importante para a aprendizagem em Geometria, em particular na exploração, análise e resolução de problemas de natureza geométrica e na realização de desenhos e construções com um rigor adequado. Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os applets favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados (p. 37).

A propósito, Ponte, Branco, & Matos (2009) interrogam-se:

> Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos «métodos tradicionais», baseados no papel e lápis, ou devem aprendê-los, desde o início, usando estes instrumentos? E com que propósito devem usar a

> tecnologia – para confirmar os resultados já obtidos com métodos de «papel e lápis» ou como instrumento de exploração?" (p. 17).

Em forma de resposta, os mesmos autores defendem que a abordagem depende da familiaridade dos alunos com os instrumentos tecnológicos subjacente ao seu meio cultural, aos seus interesses e preferências, além dos recursos existentes na escola e da experiência professor (Ponte et al., 2009).

Num estudo realizado por Vieira (2010), embora o foco fosse nas tecnologias informáticas, também foram utilizados materiais manipuláveis no estudo de isometrias no 1º CEB, e a autora pôde constatar o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes dos alunos envolvidos.

No âmbito do estudo empírico que se passa a descrever, optou-se pela coexistência do GeoGebra e de ferramentas e materiais mais tradicionais, enquanto suporte da resolução de adaptações de tarefas previamente experimentadas[4] (ver Cabrita et al., 2011; Cabrita et al., 2013; Vieira, 2010).

Método

A opção por um método qualitativo e por um *design* de estudo de caso (Ponte, 2006) múltiplo, na aceção de Bogdan e Biklen (1994), prende-se com a própria natureza da investigação (Coutinho, 2011). Além disso, a investigação qualitativa fornece informação acerca do ensino e da aprendizagem que de outra forma não se pode obter (Fernandes, 1991).

O estudo desenvolveu-se com dois dos cinco pares de alunos do 4.º ano de escolaridade de uma turma mista que também tinha 13 alunos do 1.º ano, ao longo de cerca de seis semanas. Os dois pares referidos, selecionados por terem participado em todas as atividades relativas ao estudo empírico, constituíram-se os *casos* em estudo. No âmbito deste artigo, a análise foca-se no par G1, constituído por André e Tadeu[5]. O professor/investigador (P/I) teve uma participação ativa neste estudo, visto que planeou e conduziu todos os acontecimentos decorrentes desta investigação.

---

[4] Designadamente por diversos professores, no âmbito dos programas de formação contínua em matemática com professores do 1ºCEB da Universidade de Aveiro - m@c1.

[5] Nomes fictícios.

As técnicas de recolha de dados foram a observação direta, a inquirição e a análise documental. Na tentativa de ilustrar, de forma mais completa possível, as situações e as experiências dos sujeitos, usaram-se diversos instrumentos: Questionários Inicial (QI) e Final (QF), Teste aplicado no início (TI) e no fim (TF) da experiência, Diário de Bordo (DB) e produções dos alunos. Na opinião de Ludke e André (1986), na procura do conhecimento da realidade, todos os detalhes são importantes.

Num primeiro momento, os alunos responderam ao QI, na sala de aula (ver figura 1).

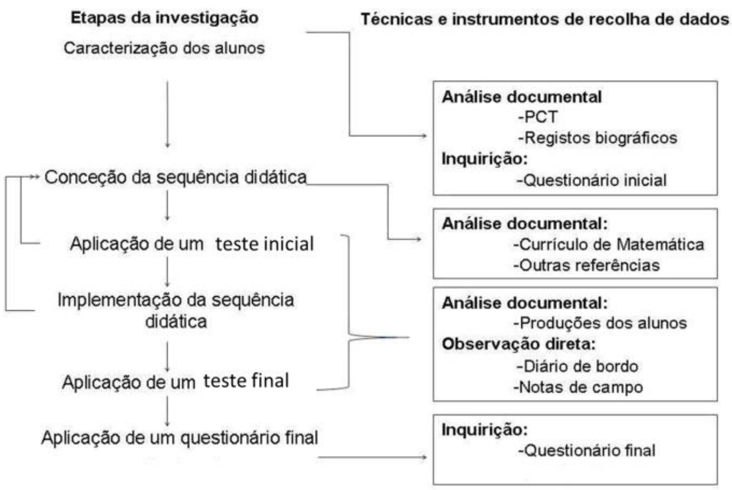


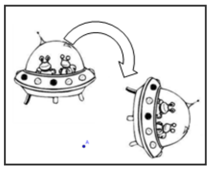
Figura 1. Esquema da investigação

Com esse QI pretendia-se, principalmente, recolher dados sobre os seus gostos em relação à Matemática e às tecnologias e sobre os seus hábitos e conhecimentos básicos de utilização do computador. Admite, ainda, questões orientadas para a Geometria (gosto e importância que lhe atribuem) e para o uso de *software* dinâmico de exploração da mesma.

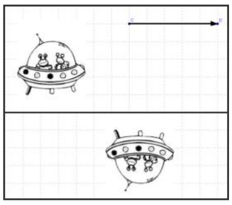
De seguida, foi resolvido o TI a pares. Com ele pretendia-se, num primeiro momento, analisar os conhecimentos que os alunos detinham sobre o tema, mesmo que construídos para além do contexto formal. Tal avaliação poderia aconselhar alterações à planificação. Posteriormente, facilitou a análise da evolução do desempenho dos alunos por comparação com o TF.

Numa fase posterior e ao longo de seis sessões de cerca de 90 min. cada, os alunos, em díades, realizaram tarefas que apresentam duas partes – uma na qual se faz apelo à utilização de ferramentas ditas tradicionais, como lápis, régua, transferidores, etc, e uma outra que implicou o uso do software GeoGebra[6] (Gaspar, 2013).

A título de exemplo, refira-se que a 3.ª tarefa, encadeada nas anteriores através de um pequeno texto introdutório, apresenta uma imagem representando uma rotação de 90º.



Pede-se: *"Completa a imagem que se segue desenhando a nave após ter realizado uma rotação de 180° em torno do ponto (x). Se precisares, recorre a uma folha de acetato e ao transferidor. Indica qual o sentido da rotação"*. Na alínea 2, questiona-se sobre qual o efeito, sobre a figura, de uma rotação com a mesma medida de amplitude de ângulo, mas efetuada em sentido inverso. Na última alínea propõe-se: *"No GeoGebra, desenha livremente estrelas e planetas e aplica-lhe diferentes rotações. Podes mesmo criar bonitas rosáceas"*.



Na tarefa 6, começa-se por pedir que, no GeoGebra, efetuem uma composição de uma reflexão com uma translação tendo o eixo e o vetor a mesma direção, como no exemplo. E explicita-se que essa transformação se designa por 'reflexão deslizante'.

Por fim, pede-se: "*Numa folha de papel, desenha uma figura a gosto e aplica-lhe uma reflexão deslizante à tua escolha, mas com um eixo e um vetor verticais"*.

Enquanto realizavam as tarefas, o P/I ia circulando pelos vários grupos e dando a orientação necessária para o desenvolvimento da atividade. Numa fase posterior, passava-se à apresentação e discussão de resoluções criteriosamente selecionadas. Em relação às construções feitas no GeoGebra e usando-se um sistema de projecção, o P/I aproveitava para as manipular e discutiam-se, no coletivo, aspetos particulares dos 'movimentos' em causa para que mais facilmente os alunos os pudessem realizar usando as ferramentas tradicionais. Por fim, sintetizavam-se os aspetos principais relativos aos tópicos abordados.

[6] A iniciação ao uso deste *software* aconteceu durante o TI, quando o professor introduziu os comandos básicos para a utilização do programa. A partir desse momento e contando sempre com o apoio do professor, os alunos exploraram potencialidades do mesmo, com grande motivação e destreza.

No final, foram aplicados o TF e o QF. Com o QF pretendeu-se recolher a opinião dos alunos principalmente acerca: da utilidade das ferramentas utilizadas no âmbito do estudo empírico desenvolvido; do conhecimento adquirido ao nível das transformações geométricas; e da construção de uma visão mais positiva da matemática em geral e da geometria em particular.

Principais resultados e conclusões

Os dados foram sujeitos a análise de conteúdo, subordinada a categorias de análise. No que respeita a competências geométricas, tais categorias incidiram sobre: a) conhecimento e capacidades relacionadas com isometrias – a reflexão, a rotação, a translação, a reflexão deslizante – e frisos; e b) atitudes sobre a geometria e a matemática em geral.

No QI, André e Tadeu afirmaram: gostar de matemática; ter computador em casa com acesso à Internet; possuir conhecimentos medianos a nível de informática; nunca terem tido contacto com *software* de geometria dinâmica; que a geometria é importante; e gostar deste tema. André assinalou que gostava de trabalhar com computadores, embora raramente o fizesse, e considerou-se muito bom a matemática. De facto, segundo dados recolhidos pelo P/I, sempre teve os melhores resultados de toda a turma a matemática, manifestando uma capacidade invulgar de resolver problemas. Tadeu considerou-se razoável a matemática e afirmou gostar muito de trabalhar com o computador, o que fazia diariamente. Segundo registos do P/I, o aluno era desmotivado, só se aplicando quando as temáticas abordadas o interessavam particularmente.

Construção e aplicação de conhecimento

No início da abordagem do tema, G1 revelou desconhecer as isometrias, não tendo conseguido responder a qualquer das primeiras 4 questões do TI. Apenas tentou uma resposta à questão inicial que incidia sobre a reflexão. No entanto, revelou que desconhecia a noção de eixo de reflexão, não sendo capaz de identificar qual a figura resultante de uma reflexão de eixo oblíquo (figura 2).

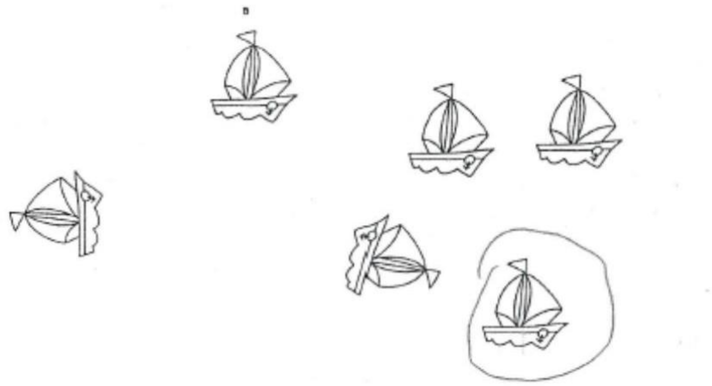
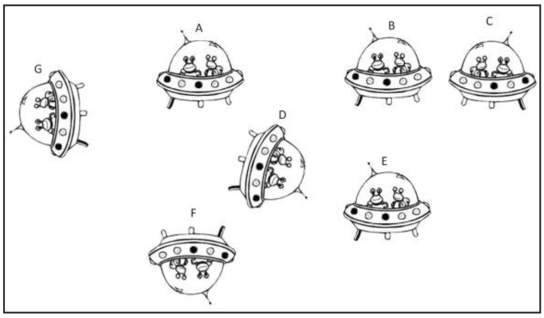


Figura 2. Resolução de G1 da questão 1 do TI

Na resolução da tarefa 1, G1 revelou confusão de conceitos relativos à reflexão. Para descrever cada um dos 'movimentos' da forma mais precisa possível, considerou que, de



A para C, a nave "refletiu para a direita e deslizou 3 cm" e, de A para D, "refletiu com um eixo oblíquo e fez um ângulo obtuso". Seguiu-se um momento de apresentação das resoluções dos vários grupos e de discussão e síntese coletiva dos principais aspetos relativos a esta isometria, nas quais principalmente André se envolveu, manifestando vontade de aprender.

Relativamente à tarefa 2, G1 revelou ser capaz de identificar eixos de reflexão verticais, horizontais ou oblíquos, por recurso ao mira. No entanto, revelou dificuldades para os traçar uma vez que, na utilização da régua, não tinham em conta o afastamento provocado pela espessura do lápis, não revelando também a preocupação de, no final, verificar se as distâncias estariam corretas e a questão da perpendicularidade assegurada (ver figura 3).

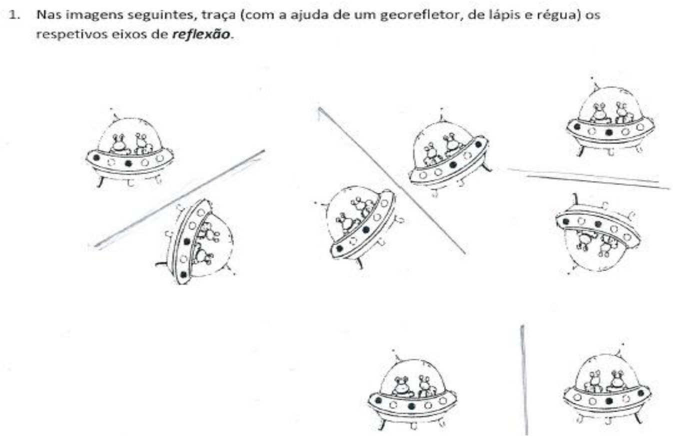


Figura 3. Resolução do par G1 da questão 1 da tarefa 2

À medida que o trabalho foi progredindo, o par foi esclarecendo algumas dúvidas tendo sido capaz de efetuar, no GeoGebra, a reflexão presente na figura 4.

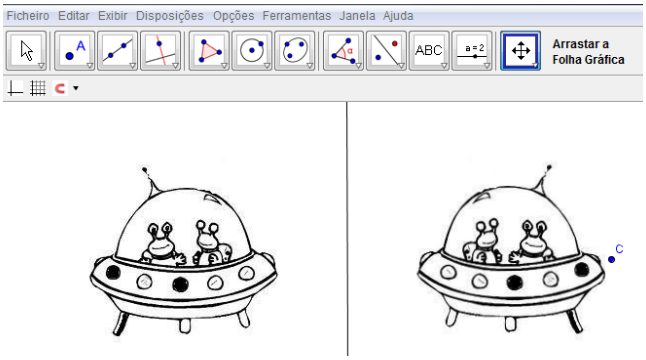


Figura 4. Resolução do par G1 da questão 2[7] da tarefa 2

Aquando do momento de apresentação dos trabalhos, o P/I aproveitou para manipular uma das construções projetadas e questionar, designadamente, acerca da distância das figuras ao eixo e da posição relativa do eixo e do segmento que une pontos correspondentes nas figuras inicial e final, tendo Tadeu e André, respetivamente, respondido corretamente.

No TF, o par resolveu a tarefa relativa à reflexão de eixo oblíquo com grande facilidade, sem hesitações e com um grau de rigor aceitável para este nível de escolaridade (ver figura 5). Recorde-se que este tipo de reflexão foi considerado como um dos que se revela mais difícil para os alunos.

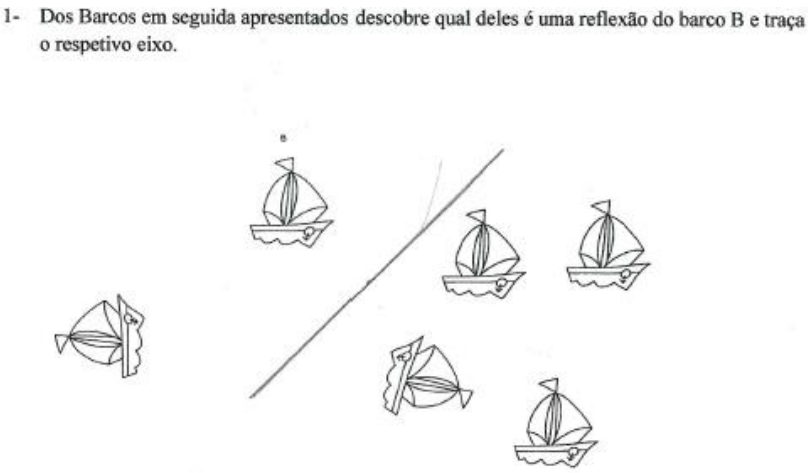


Figura 5. Resolução do par G1 da questão 1 do TF

---

[7] Nesta questão, pedia-se que tentassem reproduzir reflexões apresentadas na questão 1.

Além disso, revelou-se seguro na justificação da resolução, tendo mesmo explicado o porquê de as outras representações não respeitarem a reflexões. Conseguiu, ainda, identificar e descrever uma reflexão numa composição de isometrias, como se evidencia na resposta dada a outra questão do TF (ver figura 6).

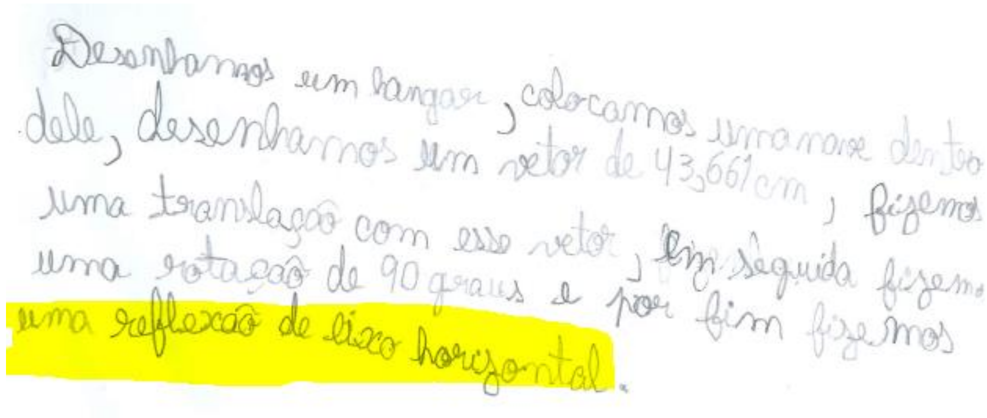


Figura 6. Resolução do par G1 da questão 6 do TF - reflexão

Relativamente à rotação, no TI, o grupo não conseguiu identificar a apresentada numa composição de isometrias (ver figura 7).

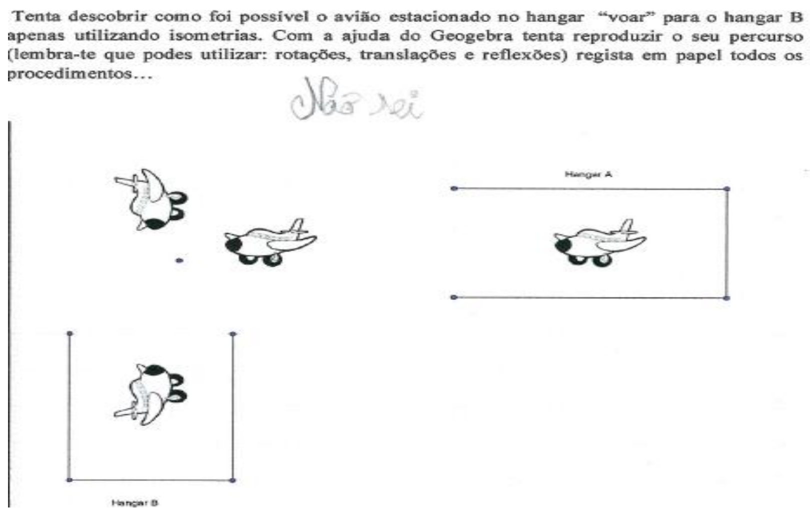


Figura 7. Resolução do grupo G1 da questão 4 do TI

Ao longo do trabalho, foi-se apropriando das noções envolvidas. Por exemplo, conseguiu identificar qual seria o resultado da aplicação de uma rotação de 180º e com o centro exterior (que alguns autores reportaram de mais difícil) à figura (bastante elaborada), esboçando prontamente a respetiva imagem, utilizando somente o lápis, como se pode ver na figura 8.

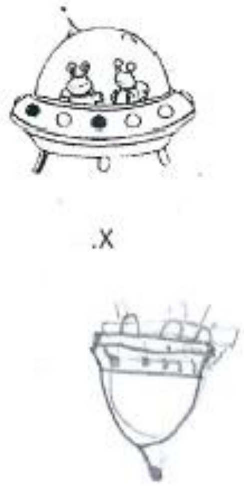


Figura 8. Resolução do grupo G1 da questão 1 da tarefa 3

No final desta tarefa, propôs-se que efetuassem diferentes rotações ou rosáceas a figuras criadas por eles, no GeoGebra. De início, G1 sentiu algumas dificuldades na construção da rosácea, pois não tinha compreendido que era necessário aplicar, sucessivamente, uma determinada rotação a cada uma das figuras resultantes. Logo que esta situação foi clarificada, conseguiu concretizar rapidamente a tarefa (figura 9).

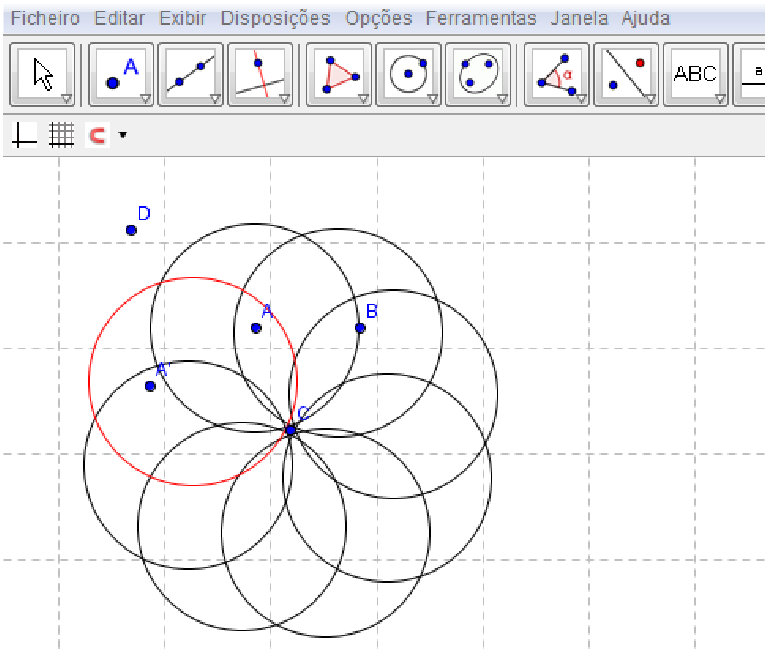


Figura 9. Trabalho do par G1 para a atividade proposta na alínea 3 da tarefa 3

No TF, o grupo melhorou o seu desempenho relativamente a esta isometria, tendo sido capaz, designadamente, de identificar e apresentar algumas características de uma rotação usada numa composição de isometrias (ver figura 10).

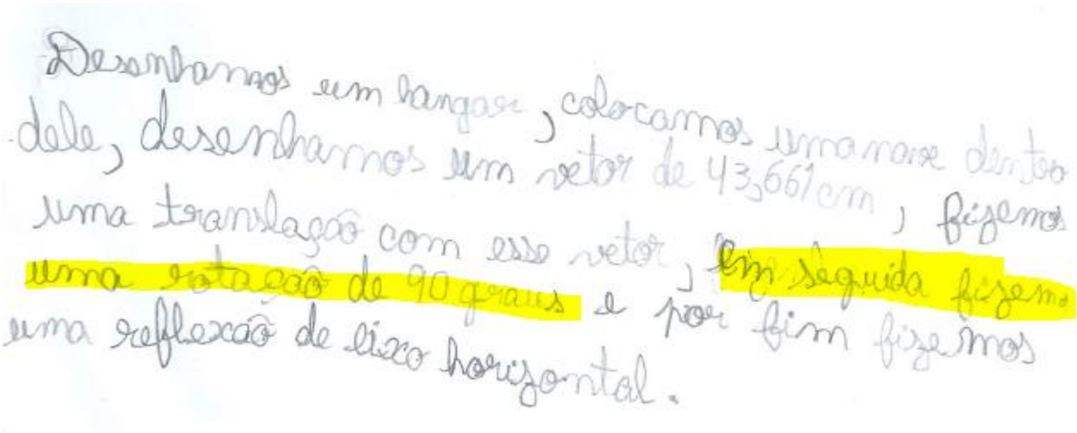
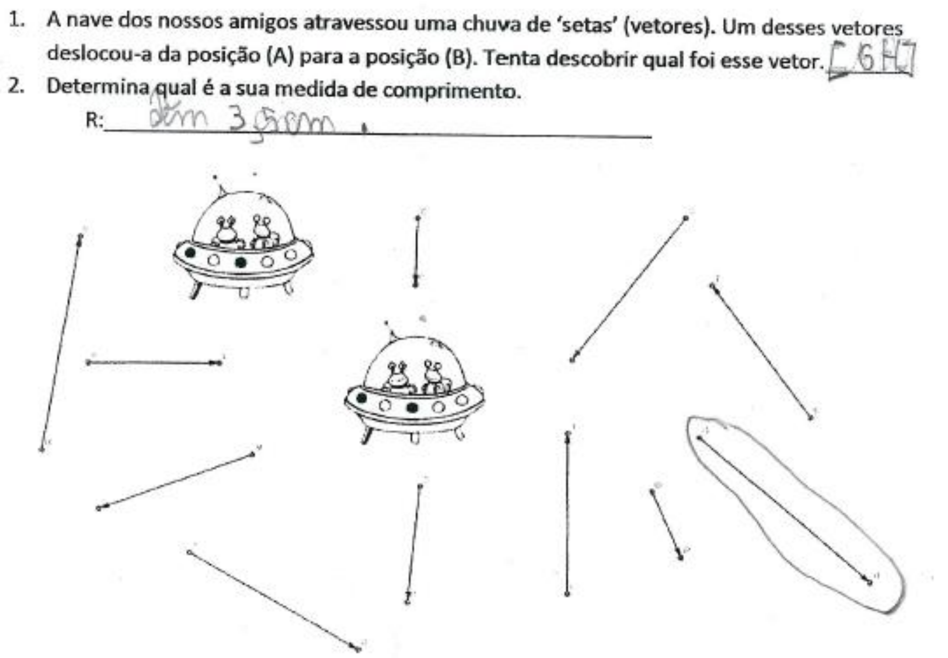

Desenhamos um hangar, colocamos uma nave dentro dele, desenhamos um vetor de 43,661cm, fizemos uma translação com esse vetor, em seguida fizemos uma rotação de 90 graus e por fim fizemos uma reflexão de eixo horizontal.

Figura 10. Resolução do par G1 da questão 6 do TF – rotação[8]

Depois de um primeiro contacto intuitivo com a translação e após alguma discussão, G1 conseguiu identificar o vetor e indicar a medida de comprimento, tendo sido apenas ajudado pelo P/I na forma de o identificar usando simbologia (ver figura 11).


1. A nave dos nossos amigos atravessou uma chuva de 'setas' (vetores). Um desses vetores deslocou-a da posição (A) para a posição (B). Tenta descobrir qual foi esse vetor. [GH]
2. Determina qual é a sua medida de comprimento.

R: Tem 3,5cm.

Figura 11. Resolução do par G1 das alíneas 1 e 2 da tarefa 4

O par não revelou qualquer dificuldade em efetuar uma translação com o auxílio do GeoGebra (veja-se a figura 12), não tendo solicitado qualquer tipo de ajuda.

[8] A digitalização é a mesma da figura 6 mas reporta-se a outro aspeto.

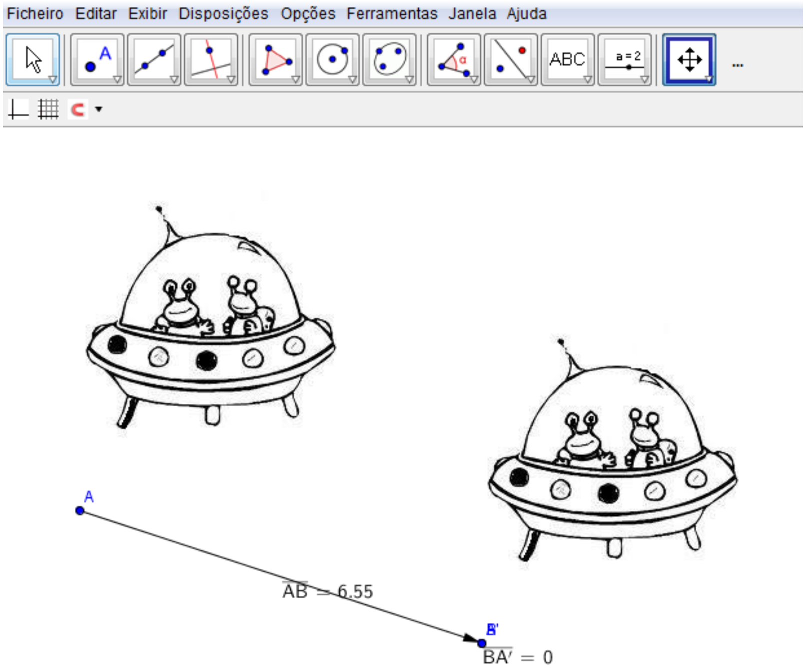


Figura 12. Resolução do grupo G1 alínea 3 da tarefa 4

No que respeita à reflexão deslizante, no início do estudo o par não respondeu a qualquer questão relacionada com este tema. Ao longo do trabalho, foi compreendendo que envolvia uma reflexão e uma translação, tendo o eixo e o vetor a mesma direção. E foi capaz de, no GeoGebra, realizar o trabalho que se apresenta na figura 13.

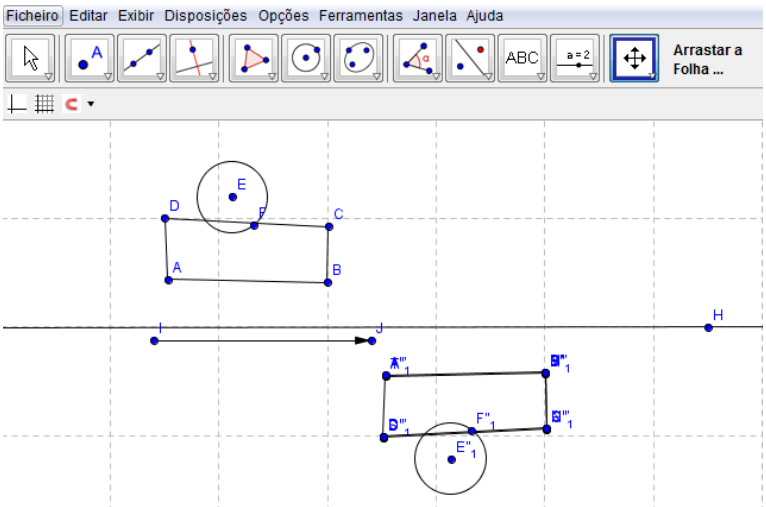


Figura 13. Resolução do par G1 da tarefa 6

À semelhança das sessões anteriores, nesta também se manipulou uma das construções projetadas e discutiram-se aspetos da sua construção, de forma a facilitar o trabalho com ‘papel e lápis’. G1 foi muito participativo.

Na fase final do estudo, foi solicitado que realizassem uma tarefa semelhante com o auxílio do papel quadriculado, o que G1 fez com sucesso[9] (figura 8).

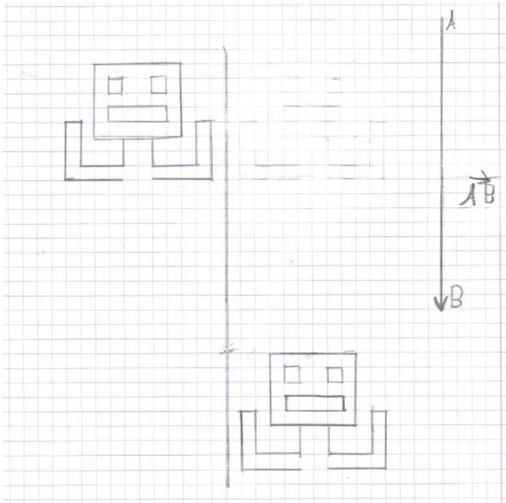


Figura 14. Resolução do par G1 par a alínea 4 da tarefa 6

No TI, nenhum aluno do par foi capaz de responder à questão colocada sobre frisos.

Na 5.ª tarefa, depois de terem criado uma imagem e um vetor, no GeoGebra, algo em que não sentiram qualquer dificuldade, o investigador exemplificou que, para a obtenção de um friso, poderiam 'aplicar', sucessivamente, o mesmo vetor à imagem resultante de cada translação. G1 compreendeu a explicação e concretizou-a (figura 15).

Figura 15. Resolução do par G1 da alínea 5 da tarefa 5

Mais uma vez, manipulou-se uma das imagens projetadas e discutiram-se aspetos da sua construção e de características do friso.

[9] Apesar da simetria do objeto inicial, o P/I anotou no DB a correção da resolução.

No TF, embora de forma não muito clara e nem sempre utilizando as designações exatas, G1 conseguiu explicar uma forma de obter um friso, tarefa que implica já um domínio interessante dos conceitos envolvidos e que alguns autores concluíram que se revela muito difícil (figura 16).

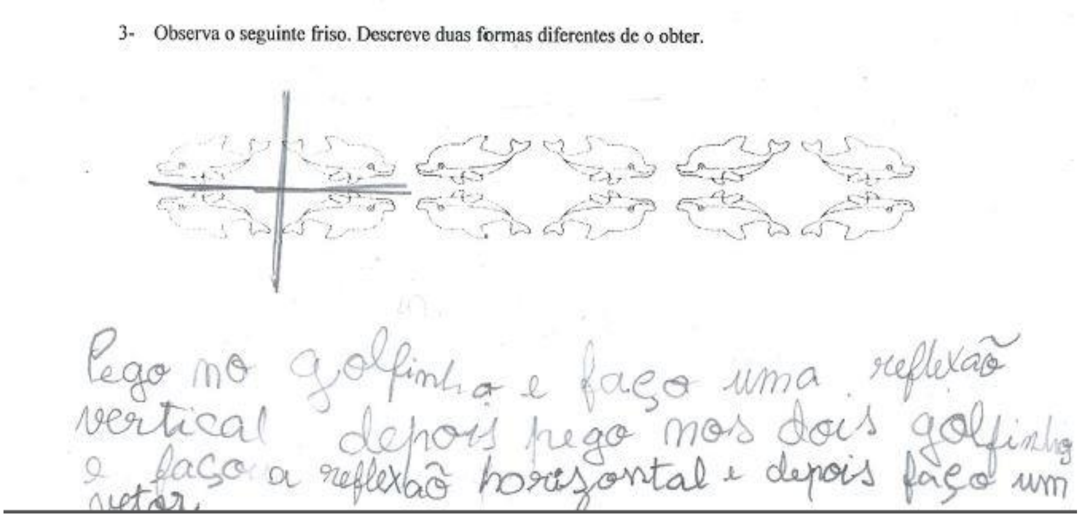


Figura 16. Resolução do par G1 da alínea 3 do TF

Assim, no que se refere à utilização do GeoGebra a par de outros materiais e ferramentas mais tradicionais para a aprendizagem das isometrias neste ciclo de ensino, parece poder concluir-se que apresenta vantagens, o que corrobora resultados idênticos obtidos por outros autores (Vieira, 2010), permitindo superar dificuldades retratadas na literatura (Coelho, 2013; Gomes, 2012; Oliveira, 2012).

Atitudes em relação à geometria

No que respeita às atitudes face à Matemática, no início do estudo, os alunos do par G1 revelaram já gostar de matemática, como referiram no QI e como o investigador registou no DB. No entanto, até ao final do mesmo, o seu interesse pela disciplina e, em particular pela Geometria, aumentou. De facto, ao longo da aplicação da sequência de tarefas, G1 mostrou-se muito empenhado na resolução e discussão de todas as propostas de trabalho, como se registou no DB, por diversas vezes. Pese embora tenha sentido algumas dificuldades na resolução de algumas tarefas, o par revelou vontade de progredir. Tal evolução concretizou-se e ficou patente no TF, onde se esforçou por resolver empenhadamente todas as questões, tendo comentado:

> André - Este teste é muito mais fácil…
> Tadeu - Nós agora já sabemos isto! E gostamos! (DB, 23-03-2012)

No QF, relativamente às ferramentas, ambos os alunos assinalaram 'concordo' ou 'concordo fortemente' com as afirmações *'foi importante ter trabalhado com "papel e lápis"'; 'foi importante ter utilizado outros instrumentos de medida e de desenho – régua, esquadro, compasso e transferidor'; 'foi fácil a familiarização com o GeoGebra'; 'Este software permite uma aprendizagem mais ativa e dinâmica da Geometria'; 'Este software facilita o trabalho com as transformações geométricas'; 'Este software promove a autonomia dos alunos nas aprendizagens'*.

Por fim, concordaram fortemente que a forma como trabalharam este tópico contribuiu para '*uma visão mais positiva da Geometria*' e para '*aumentar o meu interesse pela Matemática'*.

Todas as respostas dadas apontam no sentido de que, para estes alunos, a forma como decorreu o processo de aprendizagem deste tópico, por recurso sistemático ao GeoGebra e a outros materiais e ferramentas mais tradicionais, constitui-se um fator de motivação acrescido, o que vai na mesma linha de resultados obtidos por outros investigadores (Jacinto & Carreira, 2013; Vieira, 2010).

Reflexão final

Para o par de alunos em causa, o estudo realizado, aliando a utilização do GeoGebra com outros materiais manipuláveis e ferramentas mais tradicionais, parece ter provocado um impacto positivo no conhecimento, capacidades e atitudes matemáticas, dada: i) a correção matemática que imprimiram às resoluções apresentadas; ii) a facilidade que revelaram em executar tarefas que, somente com a utilização de lápis e papel, seriam extremamente complicadas (como referido por Laborde, 2000); e iii) a motivação com que sempre o fizeram. O acréscimo de motivação tem sido frequentemente referido na literatura quando os estudos envolvem a utilização de ADGD (veja-se, p.e. Coelho, 2013). Por outro lado, notou-se que a utilização do GeoGebra contribuiu para um maior domínio das técnicas necessárias ao uso das ferramentas mais tradicionais, graças à manipulação e discussão das construções realizadas. Assim, em relação ao valor da utilização complementar da tecnologia na aprendizagem das isometrias, o investigador sente algum conforto em o confirmar sem hesitações, dado que lhe foi possível constatá-lo por observação direta, pelos registos no Diário de Bordo e através da análise ao QF.

Outro aspeto evidente neste estudo foi a evolução das atitudes dos alunos face à geometria, assumida de forma explícita pelos próprios alunos no QF.

No entanto, será necessário estudar-se estes aspetos de modo mais aprofundado e abrangente para que se possa inferir das reais vantagens de se aliarem ambientes de geometria dinâmica com tecnologias mais tradicionais.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática* (ed. comemorativa). Lisboa: APM.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o ensino da geometria – Transformações geométricas. *Educação e Matemática*, *94*, 23-27.

Berger, M. (2012). One computer-based mathematical task, different activities. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conf. of the Int.l Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 59-66). Taipei, Taiwan: PME.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, L., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Brunello, P. (2010). ICT for education projects: A look from behind the scenes. *Information Technology for Development*, *16*(3), 232-239.

Cabrita, I., Almeida, J., Amaral, P., Gaspar, J., Malta, E., Nunes, M., Vizinho, I., Coelho, A., Pinheiro, J., Pinheiro, L., Sousa, O., & Vieira, C. (2013). *52 Ideias para o Professor – Matemática, 1.º Ciclo*. Porto: Porto Editora.

Cabrita, I., Almeida, J., Coelho, A., Malta, E., Vizinho, I., Almeida, J., Gaspar, J., Pinheiro, J. Nunes, M., Sousa, O., & Amaral, P. (2011). *Novos desafios para uma matemática criativa*. Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro.

Cabrita, I., Neto, T., Breda, A., & Santos, J. (Eds.). (2013). *Revista Indagatio Didactica*, *5*(1).

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Coelho, A. (2013). *Ferramentas tecnológicas e criatividade em geometria* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Costa, C. (2001). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Acedido em 21 março 2014 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_08_CCosta.pdf

Costa, F. A. (2007). Tecnologias educativas. Análise das dissertações de mestrado realizadas em Portugal. *Sísifo*, *3*, 7-24.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis, 18*, 64-66.

Gaspar, J. M. P. (2013). *Abordagem criativa das isometrias para a criatividade em matemática* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Goldenberg, E. P., Scher, D., & Feurzeig, N. (2008). What lies behind dynamic interactive geometry software? In G.W. Blume & M. K. Heid (Eds), *Research on technology and the teaching and learning of Matematics*. *Cases and perspectives* (vol 2, pp. 53-87). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: Conhecimentos e dificuldades de futuros professores. Acedido em 21 março 2014 em http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/20835/1/Gomes_%20SIEM%20Actas_2012.pdf

Guimarães, L., Belfort, E., & Bellemain, F. (2002). *Geometry: Back to the future?* Acedido em 21 março 2014 em http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap384.pdf

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hohenwarter, M. (2013). GeoGebra 4.4 – From desktops to tablets. *Revista Indagatio Didáctica*, *5*(1), 8-18.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). “Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho.” – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra. Acedido em 21 março 2014 em http://www.apm.pt/files/_S5-C3-Jacinto_529d2bcb1fe6c.pdf

Jonassen, D., Howland, J., Marra, R. M., & Crismond, D. (2008). *Meaningful learning with technology* (3rd ed.). Boston: Pearson Education.

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics. Acedido em 21 março 2014 em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.8182&rep=rep1&type=pdf

Lévy, P. (1990). *Les technologies de l'intelligence: L'avenir de la pensée à l'ère informatique*. Paris: Éditions La Découverte.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Matos, J. F. (2005). *As tecnologias de informação e comunicação e a formação inicial de professores em Portugal: Radiografia da situação em 2003*. Lisboa: GIASE-ME.

Matos, L. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões – Um estudo de caso com alunos do 9.º ano* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Mehanovic, S. (2009). Learning based on dynamic software GeoGebra. Acedido em 21 março 2014 em https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=229084

Misfeldt, M. (2009). Semiotic instruments: Considering technology and representations as complementary. Acedido em 21 março 2014 em http://www.geogebra.org/publications/2008-Misfeldt-Cerme6.pdf

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nóvoa, A. (2009). *Professores – Imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa.

Oliveira, M. M. (2012). *Utilização do Geogebra no tópico Reflexão, Rotação e Translação – Um estudo no 6.º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado). Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal.

Piteira, G., & Matos, J. F. (2000). *Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria*. Acedido em 21 março 2014 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_03_GCPiteira.pdf

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME- DGIDC.

Schattschneider, D. (2009). Enumerating symmetry types of rectangle and frieze patterns: How Sherlock might have done it. In T. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world – Seventy-first yearbook* (pp. 17-32). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Serrazina, L., Lopes A., Oliveira H., Sousa, H., Segurado, M., Teixeira, P., Carrapiço, R., & Candeias, R. (2010). *Metas de aprendizagem*. Lisboa: DGE-MEC.

Silva, G. (2012). Ambientes de geometria dinâmica: Potencialidades e imprevistos. *R.B.E.C.T.*, 5(1), 16-38.

Veloso, E. (1999). Ensino da geometria: Ideias para um futuro melhor. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp.17-32). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Veloso, E. (2012). *Simetria e transformações geométricas*. Lisboa: APM.

Viana, O. (2004). *As atitudes de alunos do ensino médio em relação à geometria: Adaptação e validação de escala*. Acedido em 21 março 2014 em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/CC00596629800.pdf

Vieira, S. D. P. (2010). *Decorar a minha escola – Tecnologias informáticas e padrões geométricos* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.