Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2013

Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Adelaide Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

O júri

Presidente	Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira Professora auxiliar da Universidade de Aveiro
	Professor. Doutor José António da Silva Fernandes Professor associado da Universidade do Minho
	Professora Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas Professora auxiliar da Universidade de Aveiro

AGRADECIMENTOS

Chegado ao fim deste percurso, gostaria de expressar o meu agradecimento:

- à Professora Doutora Adelaide Freitas, que aceitou orientar-me neste desafio e cujo apoio e incentivo foram inestimáveis;
- aos professores que permitiram a envolvência dos seus alunos, que possibilitaram a realização deste trabalho;
- aos meus amigos por tantas vezes me terem encorajado, apoiado e incentivado a realizar este trabalho;
- aos meus pais que me ensinaram a perseguir os meus sonhos sem nunca pensar em desistir e em especial ao meu pai, pela constante presença;
- aos restantes familiares pelas palavras de incentivo, encorajamento, pelo apoio prestado e orgulho demonstrado, que tantas vezes me motivaram, nos momentos menos bons, quando fraquejei devido às dúvidas e incertezas com que me deparei;
- à Ana e ao Ricardo pelos momentos juntos que lhes “furtei”, com a certeza, porém, de que a minha valorização pessoal será um contributo precioso na sua educação;
- por último, um agradecimento especial ao Rui, pela compreensão nas minhas ausências e pelo incentivo neste projeto. Sem ele nada faria o mesmo sentido.

Palavras-Chave probabilidade condicionada, independência de acontecimentos, perspetiva ontosemiótica, grau de desempenho, grau de rigor, mediana, correlação de Spearman

RESUMO

Esta investigação pretendeu identificar e analisar dificuldades reveladas por alunos do 12.º ano e universitários, em problemas de probabilidade condicionada e independência. Trata-se de um estudo descritivo interpretativo das respostas a duas situações-problema, dadas por 43 alunos do Secundário e uma análise descritiva das respostas a uma questão de escolha múltipla, dadas por 204 alunos universitários numa disciplina de Estatística comum a várias Engenharias. Os dados foram recolhidos em dezembro de 2012, no Secundário, e um mês depois, na Universidade, mediante provas escritas.

Utilizaram-se ferramentas teóricas do enfoque *ontosemiótico* do conhecimento e do Ensino da Matemática, investigando o tipo de objetos e relações utilizadas pelos alunos na resolução e apontando possíveis confusões entre conceitos em Probabilidade.

Foram formuladas as seguintes questões de investigação:

1. Qual é o nível de conhecimento, nos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes, evidenciado pelos alunos?
2. Existem diferenças nos níveis de conhecimento evidenciado pelos alunos naqueles dois conceitos?
3. Existe associação entre o nível de conhecimento e a formulação/interpretação do problema e os procedimentos, argumentos e/ou linguagem usada?
4. Que tipos de erros geram eventuais conflitos na interpretação, face aos conceitos base de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes?

Sem interferir no tipo de problema a propor aos alunos universitários, a pesquisa focou-se mais no Ensino Secundário. Para responder às questões de investigação, propõem-se quantificar cada resposta escrita segundo duas perspetivas: grau de desempenho (GD) e grau de rigor (GR). Da análise global dos resultados, constatam-se: i) dificuldade entre acontecimentos independentes e incompatíveis, sendo calculada uma probabilidade para justificar a incompatibilidade; ii) imensa dificuldade em formalizar o problema, ou por má interpretação ou por incapacidade de formalização matemática ou execução esquemática do enunciado, conduzindo a uma resposta errada ou ao seu abandono; iii) confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta e, entre probabilidade condicionada e independência, tanto na compreensão intuitiva como na sua aplicação. Da análise individual das respostas, constatam-se erros a nível dos conceitos, dos procedimentos e da linguagem.

Recomendações emergentes do estudo apontam para uma maior atenção à lecionação do conceito de independência e uma maior prática na formulação matemática de enunciados envolvendo aqueles dois conceitos.

Keywords conditional probability, independence of events, onto-semiotic approach, degree of performance, degree of accuracy, median, Spearman correlation

ABSTRACT This research was aimed for the identification and analysis of difficulties revealed by students in 12th grade and University students when confronted with problems involving conditional probability and independence. Both a descriptive and interpretive analysis of responses to two problem-situations, given by 43 students in 12th grade, and a descriptive analysis of responses to a multiple choice question, given by 204 university students in a subject of statistics common to several engineering courses, were executed. The data were collected in December/2012 and January/2013 through written tests.

For a systemic analysis of the objects and mathematical processes involved in solving problems on Probability, theoretical tools of the onto-semiotic focus to mathematical knowledge were used.

The following research questions were formulated:

1. What is the level of knowledge in the concepts of conditional probability and independent events, evidenced by the students?
2. Are there differences in the levels of knowledge evidenced by the students in those two concepts?
3. Is there association between the level of knowledge and the ability for interpreting the problem and the procedures, arguments and language used?
4. What kinds of mistakes generate conflicts of interpretation, given the basic concepts of conditional probability and independent events?

To answer these four research questions in the Secondary Education, each written response was quantified according to two perspectives: performance and accuracy. Globally, the analysis of the results detected: i) difficulty to distinguish between the concepts of independent events and disjoint events ii) extremely difficult in formalizing the problem, leading to a wrong answer or its abandonment; iii) confusion between conditional probability and joint probability and between conditional probability and independence, both in the intuitive understanding as in its application. Individually, errors in the concepts, procedures and language were detected.

Recommendations emerging from the study suggest more attention on how teaching the concept of independence and greater practice in mathematical formulation of statements involving those two concepts.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS ... v

Resumo ... vii

Abstract ... ix

LISTA DE SIGLAS E ACRÓNIMOS ... xiv

LISTA DE FIGURAS ... xv

LISTA DE TABELAS ... xvii

LISTA DE QUADROS ... xix

LISTA DE GRÁFICOS ... xx

Capítulo I - Introdução ... 1

1. Contextualização do estudo ... 2
2. Caracterização do estudo ... 6
3. Estrutura da dissertação ... 7

Capítulo II – Enquadramento Teórico ... 9

1. Ferramentas teóricas do enfoque ontosemiótico ... 10
2. Probabilidade condicionada e Independência ... 16

    2.1Probabilidade Condicionada ... 17

    2.2 Acontecimentos Independentes ... 19

3. Dificuldades na compreensão de conceitos envolvendo Probabilidades ... 22

    3.1 Compreensão intuitiva dos conceitos ... 25

    3.2 Relação entre Independência e probabilidade condicionada ... 28

    3.3 Identificação do condicionamento ... 28

    3.4 Troca de papéis dos acontecimentos na probabilidade condicionada ... 30

    3.5 Confusão entre Probabilidade condicionada e Probabilidade conjunta ... 31

    3.6 Localização temporal dos Acontecimentos ... 31

    3.7. Ilustração de problemas ... 32

Capítulo III – Metodologia ... 35

1. Opções metodológicas ... 36
2. Participantes ... 40

    2.1 Escolha do grupo de alunos ... 40

    2.2 Caracterização dos grupos de alunos ... 41

    2.3 Caracterização dos problemas ... 42

3. Método de recolha e análise de dados ... 43

3.1. Recolha dos dados 43
3.2. Metodologia de análise dos dados 44
3.2.1. Ensino Secundário 44
3.2.2. Ensino Superior 47
Capítulo IV – Análise e discussão de dados 49
1. Respostas e procedimentos apresentados pelos alunos 50
1.1 Análise das respostas dadas na questão de escolha múltipla apresentada aos alunos universitários 50
1.1.1 Caracterização segundo o enfoque ontosemiótico 50
1.1.2 Análise descritiva e interpretativa das respostas 51
1.2 Análise das respostas dadas no Problema 1 resolvido pelos alunos do 12.º ano 53
1.2.1 Caracterização segundo o enfoque ontosemiótico 53
1.2.2 Análise descritiva e interpretativa das respostas 55
1.2.2.1 Pergunta 1.1 56
1.2.2.2 Pergunta 1.2. 58
1.2.2.3 Pergunta 1.3 62
1.2.2.4 Pergunta 1.4 65
1.3 Problema 2 resolvido pelos alunos do 12.º ano 73
1.3.1 Análise da resposta segundo o enfoque ontosemiótico 73
1.3.2 Análise descritiva e interpretativa das respostas 75
1.3.2.1 Pergunta 2.1 76
1.3.2.2 Pergunta 2.2 80
1.3.2.3. Pergunta 2.3 82
1.3.2.4. Pergunta 2.4 84
2. Síntese 86
2.1 Síntese relativamente a objetos e relações primárias 86
2.2 Síntese de resultados 89
Capítulo V – Conclusões 97
1. Síntese do estudo 98
2. Reflexão global 100
2.1 Primeira questão de investigação 100
2.2 Segunda questão de investigação 101
2.3 Terceira questão de investigação 101
2.4 Quarta questão de investigação 102

3. Principais conclusões e recomendações ... 104
Bibliografia ... 107
Anexos ... 117
Anexo I: Carta às Escolas ... 118
Anexo II: Carta aos Encarregados de Educação ... 120
Anexo III: Prova ... 121
Anexo IV: Resolução das Situações-Problema ... 123
1.Resposta esperada da questão de escolha múltipla ... 123
2. Resposta esperada da situação problema 1 ... 123
3.Resposta esperada da situação problema 2 ... 125
Anexo V: Prova alterada ... 126

LISTA DE SIGLAS E ACRÓNIMOS

APM- Associação de Professores de Matemática

DEB - Departamento da Educação Básica

DGEBS - Direção Geral do Ensino Básico e Secundário

DGIDC – Direção geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

NCTM -National Council of Teacher of Mathematics

PAM - Plano de Ação para a Matemática

SPM – Sociedade Portuguesa de Matemática

UNESCO – United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

EOS – Enfoque Ontosemiótico

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aparência dos objetos primários [Figura adaptada de Neto (2009)]. 15
Figura 2 - Resposta do aluno 1 da turma C, à questão 1.1 57
Figura 3 - Resposta do aluno 14 da turma, à questão 1.1 57
Figura 4 - Resposta do aluno 7 da turma B, à questão 1.1 57
Figura 5 - Resposta do aluno 7 da turma A, à questão 1.1. 58
Figura 6 - Resposta do aluno 6 da turma B, à questão 1.1 58
Figura 7 - Resposta do aluno 1 da turma C, à questão 1.1 58
Figura 8 - Resposta do aluno 1 da turma A, à questão 1.2. 59
Figura 9 - Resposta do aluno 2 da turma A, à questão 1.2. 60
Figura 10 – Resposta do aluno 3 da turma C, à questão 1.2. 60
Figura 11 – Resposta do aluno 3 da turma B, à questão 1.2. 60
Figura 12 - Resposta do aluno 4 da turma A, à questão 1.2. 60
Figura 13 - Resposta com falhas: aluno 11 da turma A (a., acima), 8 da turma B (b., abaixo), à questão 1.2. 61
Figura 14 - Resposta dos alunos 12 da turma C (à esquerda) e 18 da turma A (à direita), à questão 1.3. 63
Figura 15 - Resposta do aluno 18 da turma A, à questão 1.3. 63
Figura 16 - Respostas dos alunos: 3 da turma C (a. no topo), 10 da turma A (b. no centro) e 11 da turma C (c. na base), à questão 1.3. 64
Figura 17 - Resposta do aluno 19 da turma A, à questão 1.3. 65
Figura 18 - Resposta do aluno 8 da turma A, à questão 1.4 alínea a) 68
Figura 19 - Resposta do aluno 6 da turma A, à questão 1.4 alínea b) 68
Figura 20 - Resposta do aluno 8 da turma A, à questão 1.4 alínea c) 68
Figura 21 - Resposta do aluno 18 da turma A, à questão 1.4 alínea d) 69
Figura 22 - Resposta dos alunos 14 da turma C (à esquerda) e 17 da turma A (à direita) à questão 1.4 alínea a). 70
Figura 23 - Respostas dos alunos: 15 da turma A (a. no topo), 8 da turma B (b. no centro) e 11 da turma C (c. na base) à questão 1.4 alínea b). 71
Figura 24 - Resposta do aluno 4 da turma B, à questão 1.4 alínea b). 71
Figura 25 - resposta do aluno 10 da turma A, à questão 1.4 alínea b) 72
Figura 26 - Respostas dos alunos 12 da turma C (à esquerda) e 4 da turma B (à direita), à questão 1.4 alínea c) 72
Figura 27 - Respostas, com solução final certa mas formalização errada, dos alunos 6 (acima), 1 (centro), ambos da turma A, e resposta, errada, do aluno 14 da turma A, à questão 1.4, alínea c). 72

Figura 28 - Resposta dos alunos: 7 (no topo) e 3 (na base) da turma A, à questão 2.1............. 78
Figura 29 - Resposta do aluno 14 da turma C, à questão 2.1 79
Figura 30 - Resposta do aluno 19 da turma A, à questão 2.1 79
Figura 31 - Resposta dos alunos: aluno 4 da turma B (à esquerda) e aluno 5 da turma C (à direita), à questão 2.1 80
Figura 32 - Resposta dos alunos: 4 da turma B (à esquerda) e 1 da turma C (à direita), à questão 2.1.. 80
Figura 33 - Resposta do aluno 1da turma A, à questão 2.2 81
Figura 34 - Resposta do aluno 14 da turma C, à questão 2.2 82
Figura 35 - Resposta do aluno 18 da turma A, à questão 2.3 83
Figura 36 - Respostas dos alunos 10 (à esquerda) e 17 (à direita) da turma A, à questão 2.3... 84
Figura 37 - resposta do aluno 20 da turma A, à questão 2.4 85
Figura 38 - Respostas dos alunos: 3 da turma B (no topo) e 4 da turma A (na base), à questão 2.4.. 86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Contagem das respostas dadas em cada opção da questão de escolha múltipla. .. 52

Tabela 2 - Número de alunos que não respondem a pelo menos uma das 7 questões do problema 1. 55

Tabela 3 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 1.1. 56

Tabela 4 - Frequência absoluta do GR avaliado para as respostas totalmente corretas dadas pelos alunos à questão 1.1. 56

Tabela 5 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 1.2. 59

Tabela 6 - Frequência absoluta do GR das respostas corretas dadas, à questão 1.2. 59

Tabela 7 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 1.3. 62

Tabela 8 - Frequência absoluta do GR das respostas corretas dadas, à questão 1.3. 62

Tabela 9 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 1.4. 66

Tabela 10 - Percentagem de alunos cujo GD da resposta de cada alínea da questão 1.4 foi avaliada com cotação máxima. 66

Tabela 11 - Número de alunos com resposta correta, no cálculo de probabilidades de cada acontecimento 67

Tabela 12 - Frequência absoluta do GR das respostas corretas dadas à questão 1.4, por alíneas. 67

Tabela 13 - Percentagem de alunos cujo GD e GR da resposta de cada alínea da questão 1.4 foi avaliada com cotação máxima. 68

Tabela 14 - Número de alunos que não respondem, a pelo menos uma questão da segunda situação problema. 75

Tabela 15 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 2.1 76

Tabela 16 - Frequência absoluta do GR avaliado nas respostas corretas dadas, à questão 2.1 77

Tabela 17 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 2.2 81

Tabela 18 - Frequência absoluta do GR avaliado nas respostas corretas dadas, à questão 2.2. 81

Tabela 19 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 2.3 82

Tabela 20 - Frequência absoluta do GR avaliado nas respostas corretas dadas, à questão 2.3 83

Tabela 21 - Frequência absoluta do GD avaliado nas respostas dadas, à questão 2.4 85

Tabela 22 - Frequência absoluta do GR avaliado nas respostas corretas dadas, à questão 2.4 85

Tabela 23 - Número de alunos que não efetuaram pelo menos uma questão na prova. 87

Tabela 24 - Mediana dos valores observados para o GD das respostas entre os problemas 1 e 2. 93

Tabela 25 - Mediana dos valores observados para o GR das respostas entre os problemas 1 e 2. 93

Tabela 26 - Mediana dos valores observados para o GD das respostas entre o grupo das questões subjacentes mais ao conceito de probabilidade condicionada e o grupo das questões mais subjacentes ao conceito de independência. 94

Tabela 27 - Mediana dos valores observados para o GR das respostas entre o grupo das questões subjacentes mais ao conceito de probabilidade condicionada e o grupo das questões mais subjacentes ao conceito de independência... 94

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tipologia de entidades primárias dos objetos ligados a práticas matemáticas. 13
Quadro 2 - Suporte esquemático da situação 26
Quadro 3 - Conceção de carácter cognitivo no raciocínio da probabilidade condicionada [Adaptado de Cunha, 2010] 30
Quadro 4 A) - Exemplos de enunciados e identificação da natureza das dificuldades inerente ao problema 33
Quadro 4 B) - Exemplos de enunciados e identificação da natureza das dificuldades inerente ao problema (CONTINUAÇÃO) 34
Quadro 5 - Conteúdo primário avaliado nas alíneas das várias questões da prova 43
Quadro 6 - Tabela de corresponde para quantificar o grau de rigor de uma resposta 46
Quadro 7 - Objetos e relações primárias da Questão de escolha múltipla 51
Quadro 8 - Objetos e relações primárias da questão do problema 1 54
Quadro 9 - Objetos e relações primárias do problema 2 74

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Gráfico com a frequência absoluta de respostas nulas ao problema 1, por questão e para as três turma. 56

Gráfico 2 - Gráfico com a frequência absoluta de respostas nulas ao problema 2, por questão e para as três turma. 76

Gráfico 3 - Gráfico com a frequência absoluta de respostas nulas ao problema 1, por questão e para as três turma. 88

Gráfico 4 - Gráfico com os valores medianos do GD por questão para as três turmas. 92

Gráfico 5 - Gráfico com os valores medianos do GR por questão para as três turmas. 92

Gráfico 6 - Gráfico com os valores do coeficiente de correlação de Spearman entre o GD e GR por questão e para as três turmas. 95

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1. Contextualização do estudo
2. Caracterização do estudo
3. Estrutura da dissertação

Neste capítulo preliminar, explicita-se a problemática do estudo, a pertinência do trabalho proposto e evidencia-se, de seguida, as questões e os objetivos de investigação e, como síntese final, faz-se uma abordagem à estrutura da dissertação.

1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO ESTUDO

Em termos históricos, as primeiras interpelações sobre *probabilidades* surgem com problemas levantados pelo acaso e associados a "jogos de azar" (Eves, 2011). Na realidade, a Teoria da Probabilidade é um ramo da Matemática também associado à criação de estratégias de ganho de jogos, servindo aqueles que constroem os jogos e nunca o jogador.

O cálculo das probabilidades teve a sua aparição no século XVII, tendo sido atribuída a Laplace uma primeira formalização do conceito (Murteira & Antunes, 2012). Segundo Grima (2010), na época de Laplace e anterior, a ideia predominante era que os resultados dependentes do acaso seriam imprevisíveis, e portanto fora do alcance do homem, relegando-os assim para a intervenção divina. Daí que, durante muito tempo, o seu estudo fosse tido como perigoso.

No princípio do século XIX é adotada a relação hoje em dia amplamente usada na disciplina de Matemática, no 3º ciclo e no secundário do ensino português, para determinar a probabilidade de um acontecimento, dada pela relação entre número de casos favoráveis ao acontecimento e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis. Esta relação estabelece uma fórmula de cálculo e não é uma definição. Na verdade, "a probabilidade é uma noção primitiva, e consequentemente um ponto de partida, não definível. A cristalização desta ideia só se deu tardiamente, depois de várias tentativas de definição em que se procurava remendar defeitos de anteriores conceitos" (Pestana & Velosa, 2010, p. 195).

Atualmente, a Teoria da Probabilidade tem um papel importante em quase todos os ramos da ciência, desde a medicina onde se avaliam os riscos dos efeitos de diversos tratamentos (por exemplo, na tomada de decisões sobre diversas campanhas) até ao controlo de qualidade, na indústria, para se obter uma maior precisão nas decisões, perante situações de incerteza (Murteira & Antunes, 2012).

Estudos realizados sobre raciocínio, no campo da Educação Matemática, revelaram a existência de raciocínios errados e de erros de compreensão e de aplicações intuitivas erradas (Díaz, 2006; Sobreiro, 2011). Tais falhas encontram-se enraizadas e um ensino formal da noção de probabilidade pode revelar-se insuficiente para as superar, sendo por isso necessária uma consciência de tais dificuldades para que, desta forma, seja possível aprender a trabalhar os problemas envolvendo probabilidades com ferramentas adequadas. Vários autores analisaram e identificam em particular diversas dificuldades na compreensão de problemas envolvendo a noção de probabilidade condicionada e na interpretação das noções teóricas de acontecimentos independentes e de probabilidade condicionada (Kataoka & *al*.,2010; Cunha, 2010; Guilherme, 2011; Sobreiro, 2011). Na presente dissertação pretende-se analisar, avaliar e apontar dificuldades existentes na compreensão desses dois tópicos em particular.

As probabilidades condicionadas e os acontecimentos independentes são dois tópicos inseridos no tema genérico *Probabilidade e Combinatória* no ensino português atual da disciplina de Matemática no 12º ano de escolaridade. Esse tema contribui para o desenvolvimento de raciocínios indutivos e dedutivos e, destreza da intuição, atrás da observação e análise de problemas com ligações à vida real ou não, e o desenvolvimento progressivo do rigor na linguagem, " sem esquecer a importância da comunicação, da argumentação, e da utilidade do esboço" ([Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário]DGEBS, 1991, p.47).

Há fortes razões de ordem social para incentivar o ensino da Teoria da Probabilidade no ensino educativo pré-universitário. Segundo Pereira-Mendonza & Swift (1981) tais razões assentam em três intuitos: a sua utilidade na vida quotidiana, a comunicação e entendimento de estudos futuros e o desenvolvimento do sentido estético. No que concerne à utilidade no quotidiano, diversas referências a conhecimentos associados à probabilidade estão patentes no dia-a-dia (ex.: taxa de cura de uma doença, chance de ganhar na lotaria), pelo que as pessoas necessitam de entendê-los para se integrarem socialmente. Segundo Holmes (1981), a importância deste aspeto ganha maior relevo, quanto mais desenvolvida for a sociedade em que se vive. A noção de probabilidade associada a um fenómeno fornece uma oportunidade de se questionar a dicotomia, verdade *versus* falsidade, avolumando a categoria do possível e permitindo estabelecer a distinção entre a importância do valor aproximado, em relação ao valor exato, salientando também a impossibilidade de se controlar o resultado de uma única experiência. Podemos ainda enfatizar a utilidade da probabilidade na construção de modelos probabilísticos que modelam diretamente uma realidade (ex.: previsão meteorológica). As aplicações envolvendo probabilidades abundam na vida social e nas ciências em geral, conferindo à Teoria da Probabilidade uma grande importância. Batanero (2005) defende que, para os alunos que tomem decisões, na sua vida quotidiana é importante introduzir-se a noção de probabilidade condicionada como base da conceção de probabilidade.

Na perspetiva do desenvolvimento do raciocínio matemático, Borovcnik & Peard (1996), citado por Fernandes (1999), destacam a importância da introdução de tópicos de Probabilidade para colocar o nível do pensamento probabilístico mais próximo ao do pensamento geométrico e algébrico.

O atual currículo nacional, da disciplina de Matemática do ensino pré-universitário, dá importância ao estudo de conceitos envolvendo probabilidades introduzindo o tópico "Probabilidades e Estatística" no plano de estudo daquela disciplina desde o primeiro ciclo. Segundo o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB, 2001) revogado em abril deste ano, o aluno deve começar no primeiro ciclo a desenvolver as primeiras noções de incerteza, através da experimentação como seja, por exemplo, no lançamento de uma moeda ao ar. Neste ciclo, deve explorar-se diversas situações, em particular as relacionadas com o dia-a-dia, que ajudem os alunos a "compreender que existem acontecimentos impossíveis, prováveis e improváveis, e a apropriarem-se desse vocabulário"(NPMEB, 2001, p.27). No segundo ciclo continuam o estudo de situações aleatórias simples e a realização de experiências que possibilitam a exemplificação da regularidade a longo termo, consolidando simultaneamente o vocabulário básico introduzido no primeiro ciclo. No terceiro ciclo, nomeadamente no 9.º ano, as recomendações do NPMEB salientam a necessidade de os alunos desenvolverem "a compreensão do conceito de probabilidade"(Ponte *et al.*, 2007, p. 58). O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) e a Associação de Professores de Matemática (APM) recomendam igualmente o desenvolvimento deste conteúdo: "o estudo das probabilidades proporciona um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões, entre a Matemática e as outras disciplinas escolares, e as suas experiências quotidianas" (NCTM, 2008, p. 52). Acrescentam ainda que, do 9.º ao 12º ano, "os alunos deverão aprender a identificar acontecimentos mutuamente exclusivos, complementares e condicionados, recorrendo aos seus conhecimentos sobre combinações, permutações e contagem, para calcularem as probabilidades associadas a esses acontecimentos"(NCTM, 2008, p.390).

O estudo da probabilidade condicionada ganha especial relevo no 12.º ano. A noção de acontecimentos independentes é também introduzida nesse ano de escolaridade pois "independência e condicionamento são os dois polos em torno dos quais se organizam Probabilidade e Estatística" (Pestana & Velosa, 2010, p.18). Contudo, professores no terreno e trabalhos publicados sobre a temática têm revelado que o significado de probabilidade condicionada não é de fácil apreensão por parte da generalidade dos alunos com o nível de maturidade esperado num 12º ano (Kataoka & *al*.,2010; Guilherme, 2011). Na realidade, atualmente, estudos de investigação apontam para a existência de intuições incorretas, erros de raciocínio, erros de compreensão de enunciado e erros de aplicação do conceito de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes. Em geral, face a situações-problema, a aplicação de diferentes processos na sua resolução providenciam a revelação de várias características dos conceitos envolvidos (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009). Assim, em particular, a resolução de problemas envolvendo probabilidades por diferentes vias poderá ajudar a superar erros e dificuldades manifestadas, pelo que a aplicação de diferentes estratégias de resolução, na perspetiva de Díaz & la Fuente (2006), deve ser tida em conta no ensino da Matemática e, em particular, de tópicos relativos a probabilidades. O desempenho dos alunos na compreensão de conceitos da Teoria da Probabilidade, na perspetiva de Sobreiro (2011), diz respeito à dificuldade em relacionar, entre si, conceitos e ideias, quando propostos de forma implícita, alcançando especial relevo em momentos de avaliação formal.

Dada a natureza descritiva do estudo proposto na presente dissertação relacionar-se com o Ensino e Aprendizagem da Matemática, uma análise sucinta ao modelo teórico, conhecido por Enfoque Ontosemiótico (EOS), do Conhecimento e do Ensino da Matemática introduzido por Godino *et al.* (2007), deve ser evidenciada no contexto dos tópicos probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Nos diferentes trabalhos desenvolvidos por Godino e colaboradores (Godino *et al.*, 2007, 2008, 2009, entre outros) um conjunto de noções teóricas tem sido discriminadas cujo objetivo é "apontar ferramentas teóricas que analisam conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento" (Godino, Batanero & Fonte, 2008, p.11). Em Godino *et al.* (2009*)* são descritas diferentes categorias de objetos matemáticos de modo a caracterizar os diferentes significados de cada objeto. Para Godino *et al.* (2008), uma ontologia de objetos matemáticos contêm, como ponto de partida do EOS, a formulação de uma teoria de objetos matemáticos incorporando aspetos base da matemática como sejam a resolução de problemas, a linguagem simbólica e o sistema conceptual logicamente organizado. Aqueles autores referem ainda que, a prática matemática não é mais do que toda a atuação ou expressão, seja ela verbal, gráfica ou outra, que pode ser realizada durante a resolução de um problema matemático, comunicando a solução obtida e validada, podendo mesmo generalizar essa solução a outros contextos ou problemas. Segundo esta perspetiva de prática matemática interpõem-se diversos tipos de objetos matemáticos cuja representação poderá ser na forma de texto, oral, gráfica e, inclusivamente, gestual.

Nesta investigação a probabilidade condicionada e a noção de acontecimentos independentes são os objetos matemáticos de interesse no modelo EOS e de análise na perspetiva de prática matemática, evidenciando-se ferramentas conceptuais do EOS propostas por Godino *et al.*(2009)

como sejam a linguagem, os conceitos, as propriedades, os procedimentos, as conjeturas e os argumentos ligados aos conceitos base. O estudo tem como suporte uma análise sistemática de resoluções, em resposta às situações problemas propostos envolvendo probabilidades e operações de acontecimento, apresentadas a alunos do ensino secundário e o universitário. O estudo incide na comunicação escrita dos conceitos, na formalização matemática dos dois problemas, na interpretação dos conceitos adjacente a cada pergunta e no rigor científico das respostas dadas. Em Portugal começam a surgir estudos que se debruçam sobre esta temática, como sejam: Neto (2009), Cunha (2010), Sobreiro, (2011), Guilherme (2011).

2. CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO

Neste estudo de natureza qualitativa pretende-se descrever e interpretar (Gall et *al.,* 1996) os processos desenvolvidos por alunos do 12.º ano e do Ensino Universitário, em tempo real e num contexto natural de sala de aulas (Yin, 1989; Bogdan & Biklen, 1994), num estudo envolvendo conceitos de probabilidades com recurso a duas situações-problemas. Os documentos produzidos pelos alunos, aquando da sua resolução num momento avaliativo, serão a base da descrição e avaliação do estudo a realizar, com recurso a algumas noções baseadas no EOS através das suas ferramentas conceptuais.

O propósito principal da investigação são os objetos matemáticos: probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Pretende-se analisar a linguagem, os conceitos, as propriedades, os procedimentos, as conjeturas e os argumentos ligados à resolução de problemas envolvendo, explicita e implicitamente, aqueles dois conceitos base.

As situações problema propostas foram realizadas por três diferentes grupos de alunos: ensino regular, ensino profissional do secundário e alunos universitários de vários cursos de Engenharia da Universidade de Aveiro, durante janeiro de 2012/13. É expectável que os três grupos de alunos apresentem graus de conhecimento e ensino de Matemática diferenciados. Sobre esses três grupos há o objetivo comum de descrever e apresentar o entendimento e compreensão dos conceitos base sobre probabilidade condicionada e acontecimentos independentes, tendo por suporte o conjunto de respostas dadas.

De uma forma simples, no estudo implementado, pretende-se alcançar respostas às seguintes questões de investigação, tendo por base as situações-problema propostas:

- qual é o nível de conhecimento, nos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes, evidenciado pelos alunos?

- existem diferenças nos níveis de conhecimento evidenciado pelos alunos naqueles dois conceitos?

- existe associação entre o nível de conhecimento e a formulação/interpretação do problema e os procedimentos, argumentos e/ou linguagem usada?

- que tipos de erros determinam eventuais conflitos na interpretação envolvendo os conceitos base de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes?

O presente estudo patenteia algumas limitações. Atendendo à natureza qualitativa da investigação desenvolvida, através da operacionalização do Estudo de Caso, e de acordo com McMillan & Schumacher (2001), os resultados obtidos são válidos apenas para esta experiência, podendo o mesmo estudo, com outros alunos ou noutra instituição poder conduzir a resultados totalmente diferentes. Além disso, a amostra não foi escolhida aleatoriamente, o que torna impossível uma generalização dos resultados. Também, perante as situações propostas, os alunos irão estabelecer relações que nem sempre são esclarecedoras, uma vez que saber resolver um problema, pode não ser sinónimo de conhecimento dos conceitos base.

3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação apresenta uma estrutura delineada em cinco capítulos onde são abordados o enquadramento teórico do estudo, a implementação da investigação no terreno, a análise dos dados e os seus resultados e conclusões alcançados.

Neste **primeiro capítulo**, a introdução, contextualiza-se o estudo evidenciando a sua pertinência. É feita a abordagem sucinta à finalidade e os objetivos do estudo, bem como a sua importância para o processo de desenvolvimento da capacidade de aprendizagem dos alunos e as limitações da análise decorrentes da natureza qualitativa.

O **segundo capítulo** integra vários pontos, começando por se abordar alguns aspetos relacionados com o modelo do conhecimento matemático. Nesse capítulo, a abordagem dos conceitos matemáticos teóricos em estudo, focam-se os conceitos base sobre probabilidade da interseção, probabilidade condicionada, acontecimentos incompatíveis e, acontecimentos independentes, no enquadramento do processo de ensino e aprendizagem no ensino secundário. Discutem-se ainda alguns problemas que poderão contribuir para se obter, por parte de quem ensina, uma maior maturidade sobre a temática em causa e melhorar a linguagem e interpretabilidade de problemas associados àqueles conceitos.

O **terceiro capítulo** é dedicado à metodologia adotada para a realização da análise objeto deste trabalho. Apresenta-se as opções metodológicas do estudo, seguindo-se a caracterização das variáveis do estudo: a escolha das turmas a envolver no estudo, as turmas e a escola, os docentes e os alunos, e a forma como foi feita a implementação do estudo e a comparação de respostas entre os intervenientes. Segue-se a apresentação dos materiais utilizados neste estudo: os documentos produzidos pelos alunos. Por último, faz-se a análise dos dados relativos às condições de implementação das situações-problema.

A apresentação e análise dos dados fazem-se **no quarto capítulo.** Este incide essencialmente sobre o modelo organizacional e científico das respostas elaboradas pelos participantes, na resolução das situações propostas, e uma análise às respostas dadas.

O **último capítulo** é reservado às conclusões e considerações finais. Inicia-se com um resumo das conclusões do estudo, através de uma síntese das evidências obtidas, apresentando-se estas alinhadas de acordo com o seu enquadramento relativo aos objetivos estabelecidos. Por fim seguem-se as considerações gerais, onde são feitas referências a todos os momentos pertinentes, abordados ao longo do trabalho, aí se referindo também as sugestões futuras de investigação.

CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

1. Ferramentas teóricas do enfoque ontosemiótico
2. Probabilidade condicionada e independência
3. Dificuldades na compreensão de conceitos envolvendo Probabilidades

1. FERRAMENTAS TEÓRICAS DO ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

A Matemática foi vista como uma linguagem simbólica, em comparação com a língua escrita corrente, no entanto houve necessidade de recorrer a esta última, quando se exige uma explicitação de raciocínio. Segundo Corrêa (2005), as duas linguagens, a simbólica e a corrente, coexistem já que ambas servem de suporte de leitura e representação do mundo. Cada uma delas desempenha as suas funções, ora como referência quantitativa, ora como expressão qualitativa. Ainda segundo a mesma autora, o que importa é que, qualquer que seja a representação do mundo, o simbolismo está sempre presente, pois é o recurso disponível, face à literatura, à música, à política, ou, de um modo geral, às artes. A linguagem simbólica da Matemática, na sua globalidade, possibilita o desenvolvimento de um raciocínio lógico bem elaborado, e a preparação para a sua utilização nas restantes disciplinas, que lhe estão diretamente ligadas e que dependem dessa simbologia adequada, para se fazerem entender.

Para Machado (1998) o homem comum utiliza a Matemática na sua contabilidade pessoal ou em questões de medida. É sistematicamente bombardeado por múltiplas informações veiculadas por diferentes meios de comunicação, em jornais ou revistas, impregnados de dados numéricos como percentagens, taxas, gráficos, médias, probabilidades, etc. "Assim, acostuma-se a conviver com essas manifestações epidérmicas da utilização da Matemática, e, na ausência de uma perspetiva mais medular, passa a utilizá-las como um referencial válido para a avaliação da pertinência dos diversos conteúdos curriculares ensinados na escola" (Machado,1998, p. 66).

"A rejeição em aceitar a linguagem matemática como simbólica pode ser a causa das dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, caracterizando um problema vinculado à questão didático pedagógica" (Corrêa, 2005, p.1). Esta autora entende que tal rejeição não existe, uma vez que pressupõe que a linguagem matemática e a linguagem corrente, em termos de escrita, coexistem paralelamente.

É importante salientar que a existência de uma linguagem matemática possibilita o acesso, de forma simples, a expressões de pensamento, geralmente ligadas técnicas bem elaboradas de procedimentos, o que permite universalmente comunicar, e, por essa razão, utilizam uma simbologia regida e suportada por leis fixas. Para Corrêa (2005), fica caracterizada a importância da linguagem matemática no contexto educacional.

Segundo Ponte *et al.* (2007), a comunicação numa sala de aula de Matemática, marca de forma decisiva a natureza do processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Estes autores defendem que tanto a comunicação, em geral, como a comunicação matemática, em particular, podem ser entendidas segundo diferentes perspetivas, destacando duas em especial:

> "(i) a comunicação como organização e transmissão de informações; ou (ii) a comunicação como um processo de interação social. Cada uma destas perspetivas sobre a comunicação está associada a uma perspetiva sobre a Matemática e sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Na verdade, […] ou se considera a Matemática como um conjunto de verdades objetivas, como algo existente e documentado de modo independente dos indivíduos, ou se veem as práticas de sala de aula como um processo de matematização partilhada, guiada por regras e normas que emergem da própria prática" (Ponte *et al.*, 2007, p.1).

Em diversos estudos, realizados nos últimos anos em Portugal, é possível encontrar referências e novas abordagens a modelos e ferramentas teóricos, sobre o enfoque ontosemiótico (EOS) do conhecimento e do ensino da matemática, que têm vindo a serem desenvolvidos por Godino e seus colaboradores na última década. É, por exemplo, o trabalho de Neto (2009), no âmbito de um projeto sobre o raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário. Godino, Batanero e Font (2007) apresentam um conjunto de conceitos teóricos que unem o enfoque ontológico e semiótico do conhecimento e da aprendizagem da Matemática, com base na importância da linguagem nos processos de comunicação e de interpretação e face à diversidade de objetos intervenientes. O referido enfoque acolhe ferramentas teóricas que servem para analisar, conjuntamente, o pensamento matemático, os manifestos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento (Godino, Batanero & Font, 2007).

No presente estudo importa identificar e padronizar as dificuldades que os alunos sentem em conteúdos relacionados com noções de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes. Para tal, recorrer-se-á às ideias do EOS implementadas por Godino e colaboradores. No EOS, a compreensão de qualquer conceito matemático está associado à competência do saber fazer, no sentido que cada sujeito compreende determinado objeto matemático quando o usa de maneira capaz em diferentes práticas e não no sentido de um processo meramente mental (Godino, Batanero & Font, 2008). Em Godino *et al.* (2002) são estabelecidas noções teóricas, sobre o conhecimento e sobre o ensino da matemática, com o objetivo de utilizá-las para descrever qualquer atividade matemática ligada à resolução de problemas. Em particular, importa aqui analisar problemas relacionados com probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

A Matemática, segundo esta teoria desenvolvida por Godino e colaboradores, é concebida como um conjunto de práticas envolvendo *objetos matemáticos*. Consideram-se *objetos matemáticos* como formas conceptuais de atividade reflexiva, mediada histórica, social e culturalmente. Os objetos matemáticos servem para indicar qualquer entidade ou coisa que se pretende referir ou falar, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém, de alguma maneira, na atividade matemática, como seja a resolução de problemas envolvendo, por exemplo, conceitos da Teoria da Probabilidade. Segundo Godino *et al.* (2009), a *prática matemática* é todo o ato ou expressão (verbal, gráfica, etc.), realizado por alguém, para resolver problemas envolvendo conceitos e ferramentas da Matemática, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas (Godino, 2006). Aqueles autores categorizam os objetos como enunciados de proposições, procedimentos e argumentação ligados às práticas matemáticas, como sendo *objetos institucionais.* Estes são objetos emergentes do *sistema de práticas* associadas a um campo de problemas. Tais sistemas não são mais do que toda a atuação ou manifestação (linguística ou não) realizada na prática matemática. Os *objetos pessoais* incluem os constructos cognitivos, tais como conceções, esquemas, representações internas, etc.. (Godino, 1994).

Sobreiro (2011) realça que, no EOS, o significado dos objetos matemáticos se obtém das práticas levadas a cabo por quem as pratica, ao resolver problemas relacionados com o objeto em causa, que por sua vez leva à sua consolidação e permite o cruzamento de relações entre distintos objetos. Nessas práticas envolvem-se diferentes tipos de objetos. Ao realizar, interpretar e avaliar uma prática matemática, está-se a configurar o sistema de esses objetos que foram usados; no EOS, esse sistema é constituído por objetos definidos entre os seguintes seis que definem a tipologia de entidades primárias dos objetos ligados à prática matemática: linguagem, situações-problema, conceitos, proposições, procedimentos e argumento. A linguagem serve de instrumento para a ação. A situação-problema é a origem da atividade. Quanto aos argumentos, eles justificam os procedimentos e as proposições, relacionando os conceitos entre si. Na Tabela 1, adaptada de Neto (2009), encontra-se descrito o significado de cada objeto na sua entidade primária, exemplificando-os na resolução de problemas relacionados com os objetos matemáticos de interesse neste estudo: probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

É de salientar, segundo Sobreiro (2011), que, considerar uma determinada entidade primária é uma questão relativa e não absoluta, visto serem entidades funcionais relativas, já que um argumento pode colocar em jogo conceitos, proposições, procedimentos, etc., tendo por isso um carácter recursivo, no sentido de que cada objeto, dependendo do nível de análise, pode ser composto por entidades dos demais tipos.

QUADRO 1 - TIPOLOGIA DE ENTIDADES PRIMÁRIAS DOS OBJETOS LIGADOS A PRÁTICAS MATEMÁTICAS.

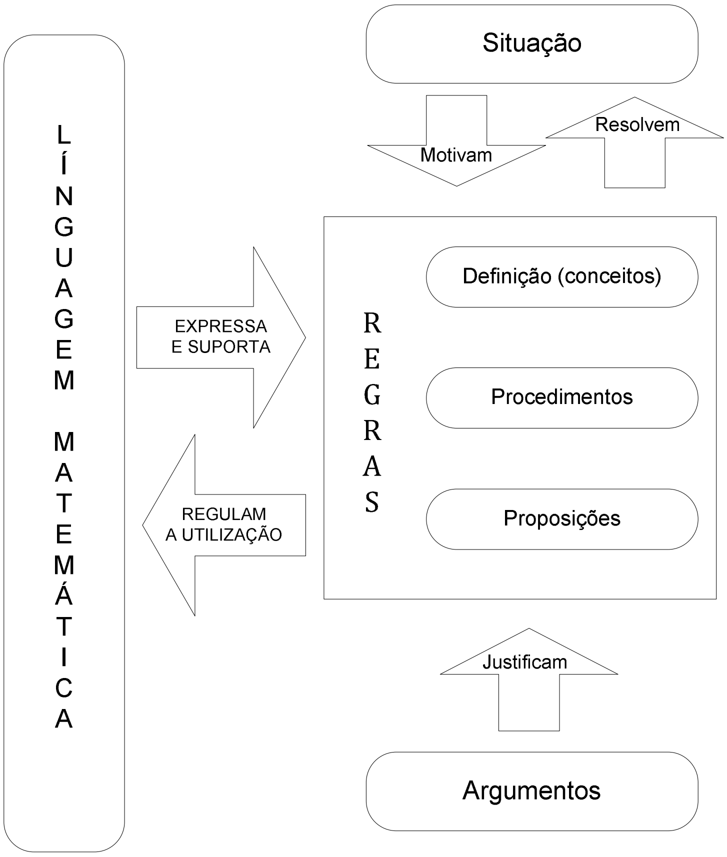
Objeto	Significado/correspondência de cada objeto	Exemplo	Observação estudo da probabilidade condicionada e independência de acontecimentos
Linguagem	Termos, expressões, notações, gráficos que se usam para representar os dados de um problema, as operações que se fazem, os objetos matemáticos que se utilizam e a solução encontrada em seus diversos registos (escrito, oral, gestual…).	Expressão da probabilidade de A condicionada a B, seus diversos registos (símbolos e expressões associadas)	A linguagem verbal (termos como probabilidade conjunta, probabilidade condicionada) tem um peso muito importante, sendo igualmente importante a linguagem simbólica (expressões associadas)
Situação-problema	Aplicações, de onde surgem os objetos, exercícios, problemas mais ou menos abertos, ações que induzem uma atividade matemática	Enunciado de um problema envolvendo probabilidade condicionada	Proporciona e contextualiza atividades a desenvolver com objetivo de uma melhor compreensão destes conceitos, permitindo a fundamentação de situações simuladas como por exemplo, realização de acontecimentos, P(A|B) e acontecimentos independentes.
Conceitos-definição	Definições ou descrições. Práticas realizadas pelos alunos para resolver um problema matemático (neste caso, quando se trabalha com o conceito de probabilidade condicionada) que implicam o uso implícito ou explicito de objetos matemáticos, dos quais o aluno tem que se lembrar ou aplicar a definição.	Noções implícitas e/explícita de objeto matemáticos: aleatoriedade, espaço de resultados, sucesso, probabilidade segundo Laplace, probabilidade da intersecção, probabilidade condicionada e independência.	Nas práticas matemáticas, quando se trabalha com o conceito de acontecimentos independentes na resolução de um problema matemático, tal implica o uso implícito de outros objetos matemáticos como seja, por exemplo, a definição de probabilidade da intersecção.
Proposição	Enunciados sobre relações ou propriedades dos conceitos que se utilizam para resolver problemas matemáticos.	Consequências da axiomática de Kolmogorov (ex: a soma das probabilidades dos resultados elementares é igual a um).	Enuncia os conceitos necessários à solução pretendida: regra de Laplace, probabilidade da união, probabilidade conjunta, etc., com evidência para relações de igualdade, implicações e diferenças entre conceitos.
Procedimentos	Algoritmos, operações, técnicas de cálculo.	Construção do diagrama de árvore, de uma tabela de dupla entrada ou de outras técnicas intuitivas para auxiliar no cálculo da probabilidade de um acontecimento condicionando a outro acontecimento.	A interpretação dos dados possibilita a tradução da linguagem do enunciado e a utilização de algoritmos, operações e técnicas de cálculo, com o fim de resolver a situação apresentada.
Argumentos	Enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos ou a solução dos problemas. Podem ser dedutivos, indutivos, formais ou informais.	A formulação matemática de um enunciado em termos de probabilidades condicionadas.	Facilita a resolução do problema, aplicando as operações numéricas necessárias e o raciocínio empírico.

Os objetos de uma prática matemática podem originar entidades mais complexas como, por exemplo, teorias. Godino *et al.* (2009) referem que os objetos, na sua entidade primária descrita na Tabela 1, relacionando-se entre si, criam configurações de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas. Estes autores classificam tais configurações em epistémicas e cognitivas. As primeiras referem-se a objetos institucionais e as segundas, a objetos pessoais. Se os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados *objetos institucionais*; se estes sistemas são específicos de uma pessoa são considerados como *objetos pessoais* (Godino & Batanero, 1994). O conhecimento matemático deve contemplar as duas facetas: pessoal e institucional. Entre estas estabelecem-se relações dialéticas complexas e cujo estudo é essencial para a educação matemática. A *cognição pessoal* resulta do pensamento e da ação do sujeito individual perante uma certa classe de problemas, enquanto a *cognição institucional* resulta do diálogo, o acordo e a regulação no âmbito de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas.

Godino *et al.* (2009) consideram que a configuração epistémica não é mais que o conjunto de objetos envolvidos na resolução de atividades/tarefas. Dentro dessa configuração distingue-se a prévia e a emergente. Estas configurações são distintas, uma vez que, os objetos matemáticos que o aluno deve saber antes de trabalhar o tema, se referem à configuração epistémica prévia e a configuração epistémica emergente se refere aquela que se supõem que se vá aprender.

A Figura 1, referida por Neto (2009), Sobreiro (2011) e Guilherme (2011), apresenta os seis objetos mencionados no Quadro 1 que, em articulação entre si, formam configurações epistémicas.

FIGURA 1 - APARÊNCIA DOS OBJETOS PRIMÁRIOS [FIGURA ADAPTADA DE NETO (2009)].



Relativamente aos sistemas e práticas operativas e discursivas, ligadas a campos ou tipos de problemas, num estudo matemático como este, o que interessa é analisar o sistema de práticas, sejam elas quais forem as opções desempenhadas pelo individuo, perante uma situação-problema (Godino *et al.,* 2008). Supondo-se que a questão é sobre a probabilidade condicionada, pode obter-se dois tipos de resposta, para resolução de um determinado tipo de situação problema, em que este objeto matemático intervém; o sistema de práticas realizadas por um sujeito — significado pessoal — ou o compartilhado por uma instituição — significado institucional — que consiste em descobrir um valor para a probabilidade de um acontecimento que é condicionado por outro acontecimento (Guilherme, 2011).

A Didática da Matemática estuda os processos de ensino e de aprendizagem dos saberes matemáticos, sendo uma área científica que caracteriza os fatores que condicionam tais processos. Na opinião de Neto (2009), os significados que os alunos atribuem aos termos e símbolos matemáticos, aos conceitos e proposições, devem ser alvo de análise, assim como a construção destes significados como consequência de processos de ensino.

Godino *et al.* (2006) consideram que o EOS pode ajudar a superar algumas das limitações existentes a nível da análise da cognição e do ensino da Matemática. Pode considerar-se que se trata de uma expectativa, baseada na generalidade com que se define as noções de problema matemático, prática matemática, instituição, objeto matemático, entre outas. São estas noções que permitem estabelecer conexões coerentes na elaboração do marco teórico pretendido com o EOS do conhecimento e do ensino da Matemática na procura de uma focagem unificada do tema.

2. Probabilidade condicionada e Independência

O tema Probabilidades e Combinatória consta do currículo atual do 12.º ano de escolaridade. Entre os tópicos inseridos nesse tema estão probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Watson (1995) reconhece que o estudo da probabilidade condicionada deve ser introduzido desde cedo, no Ensino Básico, trabalhado de forma intuitiva, tal como é recomendado para o ensino da Matemática em Portugal em NPMEB (Ponte *et al.*, 2008). Contudo, o grupo de trabalho envolvido neste estudo, não foi abrangido por este programa, isto é, apenas trabalharam Probabilidade no 9.º ano.

Segundo Cunha (2010), é nestes conceitos que os alunos "apresentam muitas dúvidas e dificuldades, apesar da grande importância que lhes é atribuída nos Exames Nacionais e nos Testes Intermédios, uma vez que são temas constantes em todas essas provas de avaliação externa, da responsabilidade do Ministério da Educação" (Cunha, 2010, p.28).

Em estudos recentes, Cunha (2009), Sobreiro (2011) e Guilherme (2011), constataram que os alunos inventam as suas próprias estratégias, para fazer juízos válidos, em problemas envolvendo probabilidades condicionada. Também o conceito de independência, implicitamente indissociável ao conceito de probabilidade condicionada, tem-se mostrado alvo de confusão por parte da classe estudantil suscitando interesse de investigação (Kataoka *et al.*, 2010).

Dado, por um lado, a identificação da dificuldade de interpretar os conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes e, por outro lado, a diversidade de estratégias intentadas por parte dos alunos na aplicação a situações-problemas concretos envolvendo aqueles dois conceitos, torna-se importante que se investigue raciocínios e estratégias emergentes na resolução desse tipo de problemas. Neste estudo consideram-se três grupos distintos de alunos: alunos universitários, alunos do secundário profissional e alunos do secundário regular. Tal motivou a observância do tipo de definições que servem de suporte ao estudo da probabilidade condicionada e da independência em manuais de Matemática do 12º ano e livros de referência básica de Estatística para cursos universitários de Ciências e Engenharia. Consideraram-se livros recentemente publicados ou reeditados. Numa primeira análise foram examinados os manuais escolares de Matemática do 12.º ano, do ensino regular e do ensino profissional, que estes serviram de suporte à aprendizagem dos alunos do secundário envolvidos neste estudo. Numa segunda análise, focou-se a atenção nos livros que podem servir de base ao estudo de alunos universitários. A seguir, em separado, para a probabilidade condicionada e para a independência, apresenta-se uma compilação a informação recorrida dos manuais observados e faz-se uma síntese de resultados teóricos sobre aqueles dois conceitos.

2.1 PROBABILIDADE CONDICIONADA

Segundo Díaz & de la Fuente (2005), a probabilidade condicionada pode ser definida com diferentes graus de formalização. Em geral, a abordagem do conceito de probabilidade condicionada, por diversos manuais escolares de Matemática do Ensino Secundário, é uma definição formal mais ou menos extensível em termos de complementaridade de informação. Veja-se:

- Oliveira (2012): "probabilidade condicionada de A sabendo que B ocorreu é a razão entre a probabilidade da interseção de A e B e a probabilidade de B, desde que P(B) > 0. Representa-se por P(A|B)" (Oliveira, 2012, p.13);
- Andrade *et al.* (2012): "dados os acontecimentos A e B de um espaço de resultados E, com P(A) ≠0, chama-se probabilidade condicionada de A, dado B, e escreve-se P(A|B), ao valor definido por: $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$" (Andrade *et al.*, 2012, p.34);
- Costa & Rodrigues (2012), "sendo A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória e tais que P(B)≠0, chama-se probabilidade condicionada de A, dado B, e representa-se por P(A|B), ao valor $\frac{\mathrm{P}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$. $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$. Da igualdade resulta que P(A∩B) = P(A|B) P(B)"(Costa & Rodrigues, 2012, p.40);
- Neves *et al.* (2012)," Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço S. Representa-se por P(A|B) a probabilidade de ocorrência de A, na hipótese de B se ter realizado. Supor que se realizou B equivale a restringir o universo aos acontecimentos elementares de B. Assim, a probabilidade condicionada P(A|B) pode ser interpretada como uma probabilidade que tem subjacente um novo espaço amostral, B, subconjunto do espaço original. Os acontecimentos elementares de A, tendo-se realizado B, correspondem aos acontecimentos A∩B. Assim somos conduzidos à definição: $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$, P(B)≠0, A⊆S e B⊆S" (Neves *et al.,* 2012, p.108).

Em livros de nível universitário, a definição de probabilidade condicionada é tanto encontrada numa redação curta, no sentido de relembrar um conceito já adquirido no passado, como também com um conteúdo mais formal recorrendo à Teoria dos Conjuntos (referencia à σ-álgebra). Destacam-se aqui duas obras recentes:

- Pestana & Velosa (2010) define a probabilidade condicionada "de A dado B como $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\ (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$" (Pestana & Velosa, 2010, p. 232).
- Murteira & Antunes (2012), "dados dois acontecimentos A, B $\subset\ \Omega, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}^*$($\sigma$-álgebra), $\mathrm{P}(\mathrm{B}) >\ 0$, a probabilidade para que A se realize dado ou sabendo-se que B se realizou, designa-se probabilidade condicionada, representa-se por P(A|B), e define-se pelo quociente $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\ (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}, \mathrm{P}(\mathrm{B}) >\ 0$". A probabilidade de A, condicionada pela realização de B, que acaba de definir-se, representa a reavaliação da probabilidade de A em face da informação de que B se realizou. (Murteira & Antunes, 2012, p.67).

Uma noção intuitiva de probabilidade condicionada, no sentido de ser a probabilidade de um acontecimento na condição de se ter conhecimento prévio da realização de um outro acontecimento, é mais explorada com a proposta de exercícios de aplicação nos manuais do secundários e com exemplos nos livros a nível universitário.

Em termos de propriedades, uma vez que a probabilidade condicionada é uma probabilidade, então ela também satisfaz os três axiomas de Kolmogorov. Assim, a probabilidade condicionada de qualquer acontecimento é sempre maior ou igual a zero; a probabilidade condicionada do acontecimento certo é igual a um; dados dois acontecimentos disjuntos, a probabilidade condicionada da união daqueles acontecimentos é igual à soma das probabilidades condicionadas de cada um. Concretamente:

- ✓ P(A|B) $\geq$0, qualquer que seja A. De facto, P(A|B) é o quociente de dois números não negativos $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\ (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}, \mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$ e por hipótese P(B) é maior do que zero, bem como P(A∩B) $\geq$0, atendendo ao 1.º axioma das probabilidades. Logo, P(A|B) $\geq$0.
- ✓ Dado o acontecimento certoΩ, P(Ω|B) = 1. Ora,

$$\mathrm{P}(\Omega|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\ (\Omega\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = 1, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$$

- ✓ Dados dois acontecimentos C e D, disjuntos (C∩D =∅),

$$\mathrm{P}((\mathrm{C}\cup\mathrm{D})|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}\big((\mathrm{C}\cup\mathrm{D})\cap\mathrm{B}\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}\big((\mathrm{C}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{D}\cap\mathrm{B})\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}\big((\mathrm{C}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{D}\cap\mathrm{B})\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{C}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{D}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{C}|\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{D}|\mathrm{B}),$$

uma vez que a interseção goza da propriedade distributiva em relação à união e se os acontecimentos C e D são disjuntos, também os acontecimentos $(C \cap B)$ e $(D \cap B)$ o são.

Como consequência da axiomática de Kolmogorov, veja-se, por exemplo, Murteira (1999), Jorge *et al.* (2006). Mencione-se seguidamente:

- $P(A|A) = 1$;
- $P(A|A^c) = 0$;
- Se $B \subset A$, então $P(A|B) = 1$;
- $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$ (pois $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$) ;
- $P(\emptyset|B) = \cancel{0;}$
- $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$ (resulta a relação $P(A|B) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$);
- $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B) - P((A \cap C)|B)$

Segundo Díaz (2007), no ensino importa diferenciar com clareza a probabilidade condicionada, $P(A|B)$, da probabilidade conjunta, $P(A \cap B)$, e ressalva algumas relações de ordem como sejam:

- $P(A \cap B)$ é sempre menor que as probabilidades simples, P(A) e P(B);

- $P(A|B)$ pode ser maior, menor ou igual a P(A) ;

No ensino das probabilidades é conveniente frisar que $P(A|B)$ é diferente de $P(B|A)$. Sobre esta última é um erro frequente considerar-se, sobre a compreensão da probabilidade condicionada, a permuta dos acontecimentos A e B, não se tendo consciência que $P(A|B)$ pode ser diferente de $P(B|A)$, surgindo habitualmente, nas primeiras abordagem ao conceito e na formulação matemática de uma situação-problema, confusão na identificação destas probabilidades. No cálculo de $P(A|B)$, o espaço amostral fica restrito ao acontecimento *B,* enquanto que $P(B|A)$ o espaço amostral coincide com o acontecimento *A.*

2.2 ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

Pode definir-se, de forma intuitiva, acontecimentos independentes, como sendo aqueles em que a informação acerca da realização de um dos acontecimentos não altera a probabilidade da realização de outro acontecimento. Em termos formais, dados os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, o acontecimento A é independente do acontecimento B, se a probabilidade de A se verificar é igual à probabilidade condicionada de A se realizar dado que B se realizou, $P(A) = P(A|B)$. É daqui evidente que o conceito de independência entre acontecimentos está anexado à teoria da probabilidade e não apenas à teoria dos conjuntos como é o caso do conceito de acontecimentos disjuntos. Dois acontecimentos são disjuntos, ou mutuamente exclusivos ou incompatíveis, se não têm elementos comuns, ou seja, a realização de um acontecimento implica a não realização do outro acontecimento. Deste modo, A e B são dois acontecimentos incompatíveis, se e só se $A \cap B = \emptyset$. Para clarificar, considere-se o seguinte exemplo.

<u>Exemplo:</u>

Associado a uma experiência aleatória, sejam os acontecimentos: A: "selecionar um número natural" e B:"seleccionar um número inteiro inferior a 2". Nestas condições, como $A \cap B=\{1\}$ então os acontecimentos A e B não são disjuntos não havendo necessidade de recorrer ao cálculo de qualquer probabilidade para estabelecer sobre a não incompatibilidade de A e B. Porém, para avaliar a propriedade da independência ou não entre A e B, deverá recorrer-se ao cálculo de pelo menos duas probabilidades, como sejam, por exemplo, $P(A|B)$ e $P(A)$.

Feita a análise de conteúdo dos quatro manuais para o 12º ano mencionados em acima, constatou-se que, para a noção de acontecimentos independentes, existe alguma falta de rigor científico. Veja-se:

- Oliveira (2012): "Seja S o espaço de resultados de uma experiência aleatória. Os acontecimentos A e B de S dizem-se independentes se a ocorrência de um deles não interfere na realização do outro.

  $P(A|B)= P(A)$ e como $P(A|B) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$, resulta que,

  A e B independentes $<=>$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$" (Oliveira, 2012, p.15);

- Costa & Rodrigues (2012), Neves *et al.* (2012) e Andrade *et al.* (2012), consideram que dois acontecimentos, A e B, associados a uma experiência aleatória, são independentes, se e só se : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. De uma forma geral, se A_1, A_2, ..., A_n, são n acontecimentos independentes, de um mesmo espaço de resultados, verifica-se que:

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$$

Em Oliveira (2012) a redação apresentada não refere o sentido probabilístico associado ao conceito de acontecimentos independentes confundindo-o com o de acontecimentos disjuntos. Já os três restantes manuais investigados confundem a definição formal de acontecimentos independentes com uma condição necessária e suficiente de independência de dois acontecimentos dada por "A e B independentes se e sómente se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$". Mais ainda, estes últimos três manuais introduzem uma condição necessária de independência de n acontecimentos (dada por "se A_1, A_2, …, A_n, são n acontecimentos independentes então $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$) a qual pode baralhar as mentes menos atentas levando-as a crer que também seja suficiente para validar a independência de n acontecimentos simultaneamente.

Em Jorge *et al.* (2006) e Neves *et al.* (2012) é também referenciada a importância de distinguir os conceitos de acontecimentos incompatíveis e acontecimentos independentes. Em particular, destacam a situação de dois acontecimentos A e B, associados a uma mesma experiência aleatória, se são incompatíveis então não podem ser independentes, a não ser que pelo menos um deles seja um acontecimento impossível (Neves *et al.*, 2012). Este resultado é demonstrado por redução ao absurdo. Suponha-se então que A e B são dois acontecimentos incompatíveis e também são independentes; então $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Ora, se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$ pelo que que a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se reduz a $P(A) \times P(B) = 0$. Tal significa que, pela lei do anulamento do produto, se tem: $P(A) = 0 \vee P(B) = 0$, concluindo-se que A e B só pode ser, simultaneamente, incompatíveis e independentes quando A ou B é, pelo menos um deles, o acontecimento impossível ($\emptyset$).

Relativamente aos livros que podem servir de base ao estudo de alunos universitários, encontra-se a definição de acontecimento independente relatada do seguinte modo:

- Pestana & Velosa (2010): "$P(A|B) = P(A)$, a informação de que B se realizou não tem qualquer relevância para a atribuição de probabilidade a A, e também a informação de que A se realizou é indiferente para a reavaliação da probabilidade de B; dizemos então que A e B são independentes" (Pestana & Velosa, 2010, p. 236).
- Murteira & Antunes (2012), "A e B dizem-se acontecimentos independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Esta definição é válida com $P(A) \geq 0$, $P(B) \geq 0$" . (Murteira & Antunes, 2012, p.80).

Em Murteira & Antunes (2012) os autores optaram por recorrer à condição necessária e suficiente para a definição de dois acontecimentos independentes à semelhança dos manuais Costa & Rodrigues (2012), Neves *et al.* (2012) e Andrade *et al.* (2012). Esses mesmos autores salientam que o conceito de independência é suscetível de várias extensões para fazer a passagem para a independência de n acontecimentos. A classe de acontecimento $\{A_1, A_2, \dots\}$ diz-se constituída por acontecimentos independentes, dois a dois, quando, qualquer que seja o par de acontecimentos distintos A_i, $A_j \in \{A_1, A_2, \dots\}$, se verifica $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$. "Conceito mais forte e de maior interesse é o de classe de acontecimentos mutuamente independentes ou complementares independentes. Está-se em presença de uma tal classe quando, dada qualquer subclasse finita $\{A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha m}\}$, se tem,

$P(A_{\alpha 1} \cap A_{\alpha 2} \cap \ldots \cap A_{\alpha m}) = P(A_{\alpha 1}) \times P(A_{\alpha 2}) \times \ldots \times P(A_{\alpha m})$, onde $_{\alpha 1}, _{\alpha 2}, \ldots, _{\alpha m}$ são inteiros positivos distintos e m um inteiro positivo qualquer"(Murteira & Antunes, 2012, p. 83).

Em termos de propriedades associada a acontecimentos independentes, uma propriedade útil na resolução de situações problemas a nível do secundário é a seguinte:

- ✓ Se os acontecimentos A e B são independentes, também o são A e B^C, A^C e B, A^C e B^C , onde A^C representa o complementar de A.

  A demonstração dos três casos é muito idêntica. No primeiro caso tem-se que A e B^C são independentes. $P(A \cap B^C) = P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$. Como A e B são independentes, então $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(B^C)$. Logo, A e B^C são independentes.

Pode-se salientar propriedades importantes envolvendo acontecimentos incompatíveis e probabilidades condicionadas:

- ✓ Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$, são n acontecimentos incompatíveis dois a dois no mesmo espaço de resultados, então:

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)|B) = \sum_{j=1}^{n} P(Aj|B).$$

  Em particular, para dois acontecimentos, tem-se:

  $$P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

- ✓ Se *A* e *B* são incompatíveis, então $P(A|B) = 0$.

3. Dificuldades na compreensão de conceitos envolvendo Probabilidades

Segundo Díaz & de la Fuente (2005), probabilidade condicionada e independência são definições que não apresentam grande dificuldade sob o ponto de vista matemático pois dependem de expressões algébricas simples e não requerem cálculos matemáticos complexos. Contudo, sob o ponto de vista cognitivo e didático, dificuldades surgem quando tais conceitos são associados a resoluções de problemas-situação e a tomadas de decisão. Torna-se particularmente mais complicado em aplicações próximas de situações reais (por exemplo, mostrar a existência ou não existência de independência entre o tabagismo e o cancro do pulmão). Para Díaz (2007) e Díaz e Fuente (2005), as dificuldades existem, até mesmo em alunos com boa preparação matemática.

Pollatsek, Well, Konold & Hardiman (1987) afirma que os professores, geralmente, consideram que existem grandes dificuldades em identificar uma probabilidade condicionada numa redação fornecida em contexto académico. Tais dificuldades podem ser causadas pela linguagem formal de enunciados de problemas, os quais não destacam claramente a informação adicional que determina que no enunciado se está a tratar de uma probabilidade condicionada (Borovcnik *et al*. 1991).

Existem diferentes interpretações para o conceito de probabilidade: intuitivo, clássico, frequencista, subjetiva, lógico, propensão e axiomático. Todas estas interpretações têm subjacente um raciocínio do tipo dedutivo, de análise e síntese, de uso de exemplos e contraexemplos (Cunha, 2010). Trabalhos de investigação (Batanero, 2005; Batanero, Henry e Parzysz, 2005) sugerem que o ensino do conceito de probabilidade não se pode limitar a uma destas diferentes perspetivas, uma vez que elas estão ligadas dialeticamente. (Batanero & Díaz, 2007, p.2). Porém, segundo Henry (1977), citado em Batanero (2005), o foco na aprendizagem da interpretação axiomática conducente a uma abstração excessiva ao centrar-se mais na formalização do conceito e menos na sua aplicabilidade a temas de interesse para os alunos, em particular no Ensino pré-universitário.

Atualmente, a noção de probabilidade propostas nas escolas baseiam-se em três interpretações (Albert, 2006) tendo, em todas elas, a interpretação axiomática como suporte mais matemático e formal: (i) Interpretação Clássica, baseada em fórmulas, que assenta na definição clássica de probabilidade e onde as probabilidades são atribuídas *a priori* e se assume que os acontecimentos elementares são equiprováveis; (ii) Interpretação frequencista, de carácter experimental, baseada na definição frequencista de probabilidade e onde a probabilidade de um acontecimento está associado ao valor da frequência relativa desse acontecimento, assumindo-se que nas mesmas condições de aleatoriedade esse valor pode ser associado a uma probabilidade; (iii) Interpretação subjetiva, que reflete os pontos de vista pessoais acerca de um acontecimento. Em todas, são trabalhados axiomas e teoremas deles resultantes, independentemente da definição estudada.

A introdução às diferentes interpretações para a probabilidade deve ser feita progressivamente, começando desde as ideias intuitivas que os alunos têm sobre o azar e a probabilidade, (Batanero, 2005). A compreensão de um conceito é um processo contínuo e crescente no qual o aluno constrói e relaciona diferentes elementos de interpretação que são inerentes ao conceito. Portanto, é importante efetuar uma boa planificação para que todo o processo de ensino-aprendizagem seja efetuado ao longo dos diferentes níveis (Batanero, 2005).

O conhecimento da existência de conceções erradas por parte dos alunos pode também influenciar todo o processo de ensino-aprendizagem (Fernandes (1990)). Na sua investigação, aquele autor verificou que não existia qualquer diferença nos erros cometidos em situações probabilísticas contraintuitivas, pelos alunos que tinham experiência de ensino e aprendizagem de probabilidades daqueles que não a tinham. Na mesma linha, Totohasina (1992), citado por Díaz (2007), no seu estudo realizado a alunos pré-universitários e envolvendo problemas de probabilidade simples e condicionada, constatou que mais de cinquenta por cento destes resolveram corretamente os problemas propostos de probabilidade simples e apenas um quarto utilizou uma representação como diagrama de árvore, tabelas de dupla entrada ou outros esquemas auxiliares de contagem. O investigador concluiu que as dificuldades dos alunos se prendem com a noção de independência e o não cuidado de observar se os acontecimentos são equiprováveis. Sendo não equiprováveis fazia aumentar o grau de dificuldade da tarefa. Ainda no mesmo estudo, foi constatado que alguns alunos não formulavam, em termos de probabilidades, o enunciado, outros ainda não restringiam o espaço amostral ao calcular a probabilidade condicionada ou confundiam-na com probabilidade conjunta. Acrescentou ainda que tal facto não é exclusivo de alunos. Professores de Matemática, que participaram num programa de formação no México e, simultaneamente, participaram num estudo realizado por Sánchez (1996), mostraram terem este tipo de dificuldades frequentemente.

Investigações efetuadas por Konold (1995) (citado por Serrano, Batanero, Ortiz & Cañizares, 2001), sobre o raciocínio probabilístico, sugerem que as observações dos resultados obtidos experimentalmente com a realização de experiencias aleatórias simples podem não ser suficiente para os alunos estabelecerem claramente a noção de regularidade estatística e de probabilidade de um acontecimento. Em situações aplicadas, as propriedades matemáticas associadas a noção de probabilidade e de aleatoriedade nem sempre são assimiladas revelando os alunos ideias incorretas e/ou imaturidade científica. Vários autores consideram essenciais que se tenha em atenção as conceções que os alunos têm, mesmo que erradas, como ponto de partida para a aquisição de conceitos envolvendo probabilidades. Na perspetiva de Garfield (1995), é necessário construir o conhecimento dos novos conceitos de probabilidade assente no conhecimento prévio dos conceitos adquiridos anteriormente para que, quando se ensina algo de novo, os estudantes consigam estabelecer ligações entre este novo conhecimento com aquela anteriormente conhecida. Na verdade, tem sido largamente considerado o conhecimento das conceções e a evolução do desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos como sendo um ponto-chave para assegurar o êxito das propostas curriculares. Gras & Totohasina (1995a) consideram ser delicado o reconhecimento das conceções erradas relativas à noção de probabilidade condicionada pois estas efetivamente existem, sendo que muitos alunos se recusam a responder a questões envolvendo tal conceito ou, quando as resolvem, utilizam procedimentos supérfluos e superficiais.

No Ensino Superior, as investigações realizadas por Díaz (2009), envolvendo alunos daquele grau de ensino, revelam igualmente a existência de dificuldades na resolução de situações-problema envolvendo probabilidade condicionada e independência. Para Díaz & de la Fuente (2007), uma lista de dificuldades também é observada no Ensino Básico e Secundário. Essencialmente, as dificuldades concentram-se i) na compreensão intuitiva destes conceitos, ii) na relação entre independência e probabilidade condicionada, iii) na identificação do condicionamento, o qual pode ser de causalidade e de temporalidade, iv) na troca de papéis dos acontecimentos envolvidos na probabilidade condicionada e ainda, v) na confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, e iv) na observância de situações sincrónicas e diacrónicas.

3.1 COMPREENSÃO INTUITIVA DOS CONCEITOS

Importa antes de mais definir a noção de “intuição” que, segundo Fischbein & Gazit (1984), corresponde a avaliações ou previsões sintéticas ou globais, não justificáveis explicitamente. Esse conhecimento global não é mais do que sentida pelo sujeito como sendo autoevidente, auto consistente, dificilmente questionável, isto é, uma intuição é uma crença cognitiva. Estes autores acrescentam ainda que as atitudes intuitivas nem sempre são coincidentes com o que é cientificamente correto, embora nunca devam ser ignoradas no processo de ensino-aprendizagem, pois sendo corretas ajudam o aluno a adquirir e a integrar o correspondente conhecimento científico e, não sendo objetivamente aceitáveis, devem ser eliminadas e desenvolvidas representações intuitivas adequadas. Nem sempre o programa de ensino atende à existência de possíveis pré-conceitos intuitivos, contudo eles permanecerão nos alunos apesar das estruturas conceituais ensinadas. Batanero & Díaz (2007) consideram que para além da sua compreensão intuitiva, a probabilidade pode ser considerada como uma razão de possibilidades a favor e contra, a evidência proporcionada pelos dados, o grau de crença lógica ou pessoal, propensão e modelo matemático que nos ajuda a compreender a realidade.

Os problemas clássicos do paradoxo de Simpson e o problema de Monty Hall evidenciam duas situações distintas onde a assimilação do conceito de probabilidade condicionada ultrapassa a mera compreensão intuitiva requerendo uma maior maturidade de raciocínio probabilístico de modo a interpretar corretamente os condicionamentos em causa.

O problema de Monty Hall refere-se que um concurso televisivo onde o concorrente deve escolher uma porta. Há três portas. Por trás de uma das portas está um automóvel e por trás de cada uma das outras duas está uma bota velha. O concorrente começa por escolher uma porta. Seguidamente o apresentador abre uma das duas não escolhidas, a qual ele sabe que está uma das botas. O apresentador dá agora ao concorrente a possibilidade de trocar a sua escolha da porta inicial para a outra porta ainda fechada. O problema é: o que é mais vantajoso para o concorrente: trocar de portas ou manter a escolha inicial? Ou é indiferente?

Numa interpretação mais intuitiva pode ser-se levado à conclusão mais óbvia: é indiferente a troca de portas, uma vez que a questão é feita no momento em que só restam duas portas fechadas (aquela que tem o carro e a outra que não o tem), conduzindo a uma probabilidade de 1/2 de sucesso. Contudo a situação não é bem essa. Na verdade, é ao contrário do que a intuição parece ditar; a probabilidade de sucesso duplicam se decidir trocar a escolha! Este fenómeno contraintuitivo, foi defendido por Marilyn vos Savant (1990), que escrevia numa pequena coluna na revista Parede, semanalmente em "Ask Marilyn" sobre assuntos relacionados, indiretamente, com ciência. Esta defendia que teria preferido trocar de porta, já que probabilidade de sucesso seria de 2/3, superior à situação de manter a escolha inicial, pois a probabilidade de sucesso seria de apenas 1/3. Marilyn defendia que o raciocínio intuitivo era uma falácia. O seguinte Quadro 2 ilustra as três possíveis posições do carro.

QUADRO 2 - SUPORTE ESQUEMÁTICO DA SITUAÇÃO

	Porta A	**Porta B**	**Porta C**
Caso 1	Carro	Bota	Bota
Caso 2	Bota	Carro	Bota
Caso 3	Bota	Bota	Carro

No momento inicial da escolha existiam três portas e a escolha seria uma das três portas, correspondendo a uma probabilidade de um terço de sucesso, isto é apenas uma vez em cada três terá escolhido a porta certa, o que corresponde a que duas vezes em cada três terá escolhido a porta errada. Quando o apresentador abre uma das outras portas, este facto não se altera. Assim, se decidir trocar, uma vez em cada três perderá o carro, escondido pela porta escolhida inicialmente, e duas em cada três ganhá-lo-á. Ou seja, a probabilidade de sucesso se trocar de portas é de 2/3, e se não trocar é de apenas de 1/3. Formalmente, suponha-se que o concorrente escolhe a porta A, a probabilidade de apresentador Monty abrir (P(M)) a porta B é de 1/2, a probabilidade de o prémio estar em A se Monty abre a porta B é

$$P(A|M)= P(A) \times P(M|A)/ P(M) = (1/6)/(1/2) = 1/3$$

e, analogamente, a probabilidade de o prémio estar em C se Monty abre a B é

$$P (C|M)= P(C) \times P(M|C)/ P(M) = (1/3)/(1/2) = 2/3.$$

Assim, a probabilidade de sucesso para a estratégia de troca é de 2/3 e para a de manutenção da escolha é de 1/3.

A falácia resulta do acontecimento

"*o apresentador mostra uma bota por trás de uma porta (diferente da escolhida)* "

é independente do acontecimento

"*o carro está por trás da porta escolhida*",

mas não é independente do acontecimento

"*o carro está por trás da porta que não foi escolhida (nem mostrada)* "

(Pestana & Velosa, 2010, p.250). Note-se que este último acontecimento não é complementar ao acontecimento "*o carro está por detrás da porta escolhida*".

O paradoxo de Simpson é outro exemplo onde a compreensão da probabilidade dos acontecimentos de interesse não é intuitiva, isto é, foge ao senso comum. Simpson é o nome do matemático que pela primeira vez chamou à atenção, em 1951, para um intrigante fenómeno que ocorre em tabelas de contingência. Este paradoxo estatístico é pouco conhecido fora do mundo dos que estudam e lidam com Estatística. Importa referir que paradoxo não é mais do que opinião contrária à opinião comum ou ao sentir comum; contradição ou contrassenso, pelo menos aparente; coisa que não liga bem com outra; coisa incrível; discordância, discrepância, desarmonia (Tenreiro, 2006). A explicação matemática do paradoxo de Simpson vem da forma como são adicionados e divididos os números. Imagine-se dois carpinteiros. Cada um deles tem de fazer 110 cadeiras em 2 meses. Um dos carpinteiros compromete-se a fazer 100 cadeira no primeiro mês, mas só faz 60, ou seja, faz 60% do que se comprometeu. No segundo mês, compromete-se com 10, mas só faz 1, ou seja 10%. O segundo carpinteiro compromete-se a fazer 10 no primeiro mês e faz 9, ou seja 90%, e no segundo mês comprometesse a fazer 100 e faz 30, ou seja 30%. Ou seja, em cada um dos 2 meses, o segundo carpinteiro cumpriu mais com o prometido que o primeiro, contudo, das 110 cadeiras, o primeiro carpinteiro fez 61 e o segundo só fez 39. O paradoxo (de Simpson) neste caso ocorre porque a realização de um carpinteiro nada tem a ver com a realização do outro pois os acontecimentos são incompatíveis.

3.2 Relação entre Independência e probabilidade condicionada

Segundo Díaz (2007) e Diaz e Fuente (2005), as dificuldades de compreensão da probabilidade condicionada são devidas, por vezes, à falta de perceção da independência. Muitas vezes, o aluno supõe a independência $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, calculando a probabilidade da intersecção como produto das probabilidades. Outras vezes determinam a probabilidade da união como sendo a soma das probabilidades individuais de cada acontecimento $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, supondo que são incompatíveis mas baralhando o conceito de incompatibilidade com o conceito de independência.

Analisando respostas a problemas envolvendo o cálculo de probabilidades condicionada a acontecimentos em situações com e sem reposição, Tarr & Jones (1997) e Tarr e Lannin (2005) mostram a existência de falhas na determinação do espaço amostral associado a cada experiência aleatória, em alunos do Ensino Básico e Secundário. Tarr & Lannin (2005) revelam que os alunos têm dificuldades nos conceitos de independência e de probabilidade condicionada, tanto a nível de os entenderem como em relacioná-los. Em Tarr & Jones (1997) são propostos quatro níveis de avaliação do pensamento dos alunos em probabilidade condicionada quando em presença de situações-problemas associados à experiencias aleatórias com ou sem reposição. Uma vez que os problemas apresentados aos alunos no presente estudo não são desse tipo, os quadros cognitivos desenvolvidos por Tarr & Jones (1997) não são aqui explorados.

3.3 Identificação do condicionamento

Segundo Díaz (2009) a causalidade é um conceito construído numa base de relação causa-efeito entre diferentes acontecimentos. Relativamente à probabilidade condicionada, se o acontecimento A é a causa estrita do acontecimento B significa que sempre que acontece A verifica-se B, e tem-se $P(B|A) = 1$. Quando acontecimento *A* altera a probabilidade de ocorrer *B*, ou seja, $P(B|A)$ é diferente da $P(B)$. É comum dizer-se que uma relação de causalidade implica uma dependência entre os acontecimentos envolvidos. A reciprocidade não é verdadeira, pois existem acontecimentos que, sendo estocasticamente dependentes, não são a causa um do outro. Por exemplo, um maior número de horas de treino de uma dada modalidade desportiva, aumenta a probabilidade de um melhor resultado numa competição, pois a competição pode correr mal por um cansaço excessivo, ou por um outro motivo qualquer (Díaz, 2009).

De acordo com o processo psicológico, a pessoa que avalia a probabilidade condicionada encontra uma entre duas relações diferentes entre A (acontecimento condicionado) e B (acontecimento condicionante), dependendo do contexto. Assim, o contexto condiciona o tipo de relação:

- se dentro do contexto se percebe que B é uma causa de A, estabelece-se uma relação causal entre A e B. Portanto, ao calcular P(A|B), estabelece-se uma relação causal;
- se dentro do contexto se percebe A como uma causa de B, estabeleceremos entre A e B uma *relação diagnóstica.* Portanto, ao calcular a P(A|B) , estabelece-se uma relação diagnóstica.

Embora, em termos matemáticos, as expressões sejam iguais, do ponto de vista psicológico, aquelas probabilidades não são percebidas como idênticas.

De acordo com Falk (1986) e citado por Guilherme (2011), a maioria das pessoas indica que as relações causais são mais fortes que as relações diagnósticas. Nesta medida, justifica esta relação citando Tversky e Kahneman (1982) que recorre à prevalência de relações de causalidade na perceção do mundo. Por exemplo, as pessoas consideram interessante determinar a probabilidade sobre "*uma filha tenha cabelos encaracolados se a sua mãe os tiver também*" (relação causal) do que "*a mãe ter cabelos encaracolados sabendo que a sua filha tem cabelos encaracolados*" (relação diagnóstica).

Associada à relação de causalidade encontra-se a sequência temporal. Segundo Falk (1986), existe uma convicção de que um acontecimento não pode condicionar outro que ocorra anteriormente, designando-a por *falácia da inversão do eixo temporal*. Aquele autor propõe que, através de recurso a exemplos, o cálculo de probabilidade de acontecimentos com falácia do eixo temporal faça parte do ensino da probabilidade condicionada. Relativamente à sequência temporal dos acontecimentos que intervêm na probabilidade condicionada, Gras e Totohasina (1995a), com base nas investigações desenvolvidas por Totohasina (1992), identificam três tipos de conceções de carácter cognitivo que podem constituir entraves ao correto raciocínio em probabilidade condicionada. Essas encontram-se descritas no seguinte Quadro 3.

QUADRO 3 - CONCEÇÃO DE CARÁCTER COGNITIVO NO RACIOCÍNIO DA PROBABILIDADE CONDICIONADA [ADAPTADO DE CUNHA, 2010]

CONCEÇÃO	INTERPRETAÇÃO
Cronológica	P(A|B) é interpretada como uma relação temporal, onde o acontecimento condicionamento B precede sempre o acontecimento A. Se o acontecimento B se realiza necessariamente antes do acontecimento A, uma questão que inverta a sequência temporal, pedindo a probabilidade do acontecimento passado, conhecido o futuro, parecerá desprovida de sentido.
Causal	P(A|B) é interpretada como uma relação causal implícita, onde o acontecimento condicionamento B é a causa e o acontecimento condicionado A a consequência. Neste caso, inverter relação e calcular a probabilidade de uma causa conhecendo a consequência pode também ser considerado desprovido de sentido;
Cardinal	P(A|B) é interpretada como a razão $\frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (B)}$, que é correto no caso particular de equiprobabilidade.

De acordo com os autores acima referidos, as duas primeiras conceções são mais suscetíveis de constituírem entraves de carácter epistemológico, isto é, uma resistência à reversibilidade da noção.

3.4 TROCA DE PAPÉIS DOS ACONTECIMENTOS NA PROBABILIDADE CONDICIONADA

Falk, (1986), Totohasina, (1992), Díaz, (2007) e Sobreiro (2011), constataram, em estudos experimentais realizados, que as maiores dificuldades e erros exibidos pelos alunos correspondem à troca dos acontecimentos na probabilidade condicionada.

Falk (1986) designou de *falácia da condicional transposta* esse tipo de erro de não conseguir distinguir os dois sentidos da probabilidade condicionada, P(A|B) e P(B|A). Falk (1986) salienta que muitas vezes a linguagem corrente utilizada no enunciado dos problemas não é suficientemente clara e precisa, levantando dificuldades na interpretação. Uma vez que a notação matemática é explícita na identificação do acontecimento condicionante e do condicionado, aquela autora propõe dispensar a linguagem corrente e utilizar a linguagem simbólica para reduzir os riscos de confusão.

Na mesma linha, Batanero, Estepa, Godino e Green (1996), citados por Díaz (2007), referem que os alunos mostram dificuldades em problemas onde a informação se encontra sumariada em tabelas de dupla entrada. As confusões surgem em ler e identificar os dados necessários para calcular uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada, chegando a confundir estes conceitos.

3.5 CONFUSÃO ENTRE PROBABILIDADE CONDICIONADA E PROBABILIDADE CONJUNTA

Em busca de diagnosticar dificuldades e obstáculos em alunos que iniciam o estudo do conceito de probabilidade condicionada, Totohasina (1992), referenciado por Díaz (2007), constatou que os alunos confundem probabilidade condicionada, $P(A|B)$, com probabilidade conjunta, $P(A \cap B)$.

Einhorn & Horgarth (1986) e Ojeda (1995), questionando sobre qual seria a probabilidade de ir ao supermercado e comprar café, constataram que cerca de 38% responderam com a probabilidade condicionada de comprar café dado que foram ao supermercado. Na análise realizada, aqueles autores sugerem que enunciados que utilizam a conjunção "e" podem levar à confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada. A *falácia da conjunção* (Tversky & Kahneman, 1983) consiste na convicção de que é mais provável a intersecção de dois acontecimentos do que a probabilidade de qualquer dos seus acontecimentos constituintes. Este erro surge nos alunos ao considerarem a conjunção como sendo mais provável do que cada um dos acontecimentos em separado (Díaz, 2007).

3.6 LOCALIZAÇÃO TEMPORAL DOS ACONTECIMENTOS

Segundo Díaz e Fuente (2005) existem dois tipos de situações na descrição dos acontecimentos em qualquer problema envolvendo probabilidades condicionadas: *situação sincrónica* e *situação diacrónica*. Na primeira é descrito um procedimento estático, não existe uma sequência, mas realização em simultâneo de experiências aleatórias; Na segunda há uma clara sequência temporal nas quais se realiza uma experiência seguida da outra, isto é, quando o problema se coloca em situações sequenciais. As situações sincrónicas são particularmente difíceis para os alunos, em particular em identificar a redução do espaço amostral em função do acontecimento condicionado (Falk, 1986) e também, em perceber as experiências compostas como uma série de experiências simples sucessivas (Díaz, 2009).

3.7. Ilustração de problemas

Em jeito de síntese, conclui-se neste capítulo o Quadro 4, onde são ilustrados exemplos concretos para os quais os investigadores mencionados neste capítulo constataram e descreveram as dificuldades dos alunos em aplicar os conceitos de probabilidade na resolução de situação-problemas.

QUADRO 4 A) - EXEMPLOS DE ENUNCIADOS E IDENTIFICAÇÃO DA NATUREZA DAS DIFICULDADES INERENTE AO PROBLEMA

Identificação do tipo de dificuldades detetada na aplicação de conceitos envolvendo probabilidade	Exemplo de problemas	Análise da dificuldade
Compreensão intuitiva da probabilidade condicionada e independência	Numa cadeia estão três prisioneiros: A, B e C. O director da prisão vai escolher ao acaso dois deles para serem libertados no Natal. O A tem-se esforçado por ter um comportamento exemplar e está ansioso por ser libertado. Fazia tenções de perguntar a um guarda por um nome de um dos libertados, que não fosse o seu, mas pensou melhor e decidiu não o fazer, pois ao ser conhecedor de mais informação alteraria a probabilidade referente à sua libertação. Como é que uma resposta que não é informativa sobre o que lhe vai acontecer pode alterar a probabilidade? Problema referido em Pestana & Velosa (2010)	O espaço de acontecimentos é: A e B são libertados e o guarda referir "B"; A e C são libertados e o guarda referir "C"; B e C são libertados e o guarda referir "B" ou referir "C". Como P(AB) = P(AC) = P(BC) =1/3, então P(A ser libertado)=2/3. Ora, pelo que P(A ser libertado| guarda referir B)= $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$ Assim, P(A|B) = P(A), e portanto P(A)P(B) = P(A∩B) A dificuldade reside em considerar que o acontecimento A é independente de B e B é independente de A, pelo que são mutuamente independentes.
Relação entre independência e probabilidade condicionada	Uma pessoa lança uma moeda ao ar e anota se sai a face frente (F) ou a face verso (V). Em 6 lançamentos da moeda obtiveram-se os resultados: V F V V V V. Lançando novamente a moeda, então: (A)É mais provável sair a face frente. (B) É mais provável sair a face verso. (C) É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso. Explica o raciocínio que usaste. Problema utilizado em Cunha (2010)	A resposta correta: "É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso" face à equiprobabilidade dos acontecimentos elementares. Se por um lado é importante analisar a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares com base na sequência observada ou ter informação prévia se a moeda e' honesta, por não ser mencionado no enunciado. A maior dificuldade dos alunos reside no recurso da *heurística da representatividade*, sob a forma de *conceções erradas do acaso* (Tversky & Kahneman, 1982)
Condicionamento, causalidade e temporalidade	Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraem-se, ao acaso, duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Qual é a probabilidade de: a) a segundo bola ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca. b) a primeira ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca. Problema utilizado em Falk (1986) e citado em Guilherme (2011)	No que respeita à alínea a) trata-se de uma questão em que a influência causal é uma situação natural e compatível com eixo temporal, pelo que os alunos não apresentaram dificuldades. Quanto à alínea b) envolve um raciocínio probabilístico que é diferente da ordem temporal o que poderá criar dificuldades a nível psicológico. Os alunos consideraram que a segunda extração não afeta a primeira revelando confusão entre condicionalismo e causalidade. Esta situação realça a crença de que um acontecimento não pode condicionar outro que ocorre anteriormente.

QUADRO 4 B) - EXEMPLOS DE ENUNCIADOS E IDENTIFICAÇÃO DA NATUREZA DAS DIFICULDADES INERENTE AO PROBLEMA (CONTINUAÇÃO)

Identificação do tipo de dificuldades detetada na aplicação de conceitos envolvendo probabilidade	Exemplo de problemas	Análise da dificuldade
Confusão entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta	Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que: * se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,005; * se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é de 0,65. Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora do prazo. Escolhendo, ao acaso, um desses iogurtes, qual a probabilidade de ele estar estragado? Exame Nacional 2000, utilizado em Sobreiro (2011)	Este enunciado, que utiliza a conjunção, através de uma “,” que é interpretado como sendo “e”, leva à confusão entre a probabilidade conjunta e a probabilidade condicionada. Esta observância foi sugerida como uma das principais dificuldades sentida pelos alunos ao resolverem esta questão, levando-os a uma identificação incorreta dos acontecimentos a que se refere o problema e, consequentemente, a uma confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada.
Troca entre os papéis dos acontecimentos envolvidos na probabilidade condicionada	Um teste de diagnóstico de cancro foi administrado a todos os residentes de uma grande cidade onde há poucos casos de cancro. Um resultado positivo no teste é indicativo de ter cancro e um resultado negativo é indicativo de ausência de cancro. O que é mais provável? □ Que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo. □ Que o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro. □ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis. Explica o raciocínio que usaste. Problema utilizado em Cunha (2010)	Quando os alunos consideram que a opção correta é a última revelam confusão entre a orientação dos acontecimentos envolvidos, já que a linguagem utilizada no enunciado pode tornar-se ambígua. A resposta correta a esta questão era considerar que “o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro”, pois o acontecimento “teste positivo” é a consequência e o acontecimento “ter cancro” é a causa.
Situações síncronas e diacrónicas	Admite que num saco há três bolas, sendo duas azuis e uma vermelha. a) São retiradas, uma a uma, sem reposição, três bolas. Determina a probabilidade de: i) as bolas azuis ocorrerem em ordens consecutivas; ii) a bola vermelha ocorrer na primeira extração. b) São retiradas, uma a uma, com reposição, três bolas. Determina a probabilidade de: i) as bolas retiradas serem da mesma cor; ii) ocorrerem exatamente duas bolas vermelhas. Problema apresentado em Cunha (2010)	Na questão a ii) pretendia-se verificar se os alunos, ao calcular a probabilidade pedida, tinham em consideração que se estava perante uma situação diacrónica, neste caso, uma inversão do eixo temporal.

Capítulo III – Metodologia

1. Opções metodológicas
2. Participantes
3. Método de recolha e análise de dados

Neste ponto justifica-se a escolha dos instrumentos de recolha, bem como dos materiais utilizados no presente estudo. Procede-se a uma breve caracterização das Escolas onde o estudo foi efetuado, dos seus participantes e descreve-se o papel do investigador, a sua intervenção e o processo de recolha de dados. É ainda referido a seleção das técnicas de recolha de dados e a descrição e validação dos instrumentos.

1. Opções metodológicas

Para dar resposta às quatro questões de investigação referidas no Capitulo I (pág.7), procurou-se observar, descrever e interpretar os processos desenvolvidos por alunos, em tempo real em ambiente natural de sala de aulas, e ainda intervir nesse desenvolvimento. A investigação em causa insere-se numa perspetiva qualitativa, efetuando-se uma abordagem interpretativa do assunto em estudo (Guba & Lincoln, 1994), procurando-se uma descrição e explicação dos fenómenos ocorridos no ambiente natural expectável, a sala de aulas (Ludke & André, 1986).

Segundo Bogdan & Biklen (1994), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos sem qualquer convivência direta do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo seu contexto. Para esses autores, as cinco principais características da investigação qualitativa são: (1) a recolha de dados em “ambiente natural”, sendo o investigador o “instrumento principal” dessa recolha; (2) a natureza descritiva dos dados recolhidos; (3) a preferência pelos processos, o “como”, em preterição dos resultados ou produtos; (4) a análise indutiva dos dados e (5) a importância das perspetivas dos participantes como “vital” para a investigação (Bogdan & Biklen, 1994, pp.47-51).

Também Costa (1986) refere que, o método qualitativo é particularmente adequado para uma descrição quer dos aspetos em análise, quer das suas interligações. Por isso, este método, é frequentemente escolhido para estudar as inovações educacionais.

Para Merriam (1988), nas metodologias qualitativas, os intervenientes da investigação não são reduzidos apenas a variáveis isoladas, mas são vistos como parte de um todo no seu contexto natural. É de salientar que, quando se reduz pessoas a dados estatísticos, ignoram-se determinadas características do comportamento humano. A mesma autora refere que, para se conhecer melhor os seres humanos, a nível do seu pensamento, deverá utilizar-se para esse fim dados descritivos, derivados dos registos e anotações pessoais de comportamentos observados. Nesta perspetiva e de acordo com esse método, Bogdan & Taylor (1986) consideram que, o investigador deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, uma vez que, na sua essência, este método de investigação baseia-se principalmente em conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes.

Na mesma linha de pensamento, os autores atrás referidos, acrescentam que a investigação qualitativa, por permitir a subjetividade do investigador na procura do conhecimento, implica a existência de uma maior diversidade nos procedimentos metodológicos utilizados na investigação.

Por todas estas características acima referidas, considera-se que o tipo de abordagem qualitativa se coaduna bem à natureza das quatro questões de investigação alvo da presente dissertação. Nesta investigação, inserida no paradigma descritivo, os participantes são os alunos e os dados são os documentos escritos produzidos por estes no contexto escolar juntos dos seus docentes titulares de turma e em momento avaliativo. A interpretação desses documentos constitui o instrumento essencial da análise qualitativa.

De entre os vários desenhos de investigação qualitativa, destaca-se aqui a modalidade de Estudo de Caso que, segundo Denzin & Lincoln (2000), é particularmente indicado para entender e interpretar fenómenos educacionais. Trata-se de um plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida, o caso (Coutinho & Chaves, 2002).

Quando se conduz um Estudo de Caso em determinada turma e se relatam os resultados desse estudo, o investigador não está a sugerir que todas as turmas se assemelham (Bogdan & Biklen, 1994). Como defende Ponte (1994b), a verdadeira função do Estudo de Caso não é a generalização, mas sim a análise das particularidades do caso, uma vez que o investigador se preocupa mais com o processo do que com os produtos, ficando por isso a sua generalização a cargo do leitor, por sendo este a decidir em que medida é que certos aspetos se podem aplicar a outros casos (Merriam, 1988; Stake, 2000).

O Estudo de Caso é utilizado quando o tipo de questão de pesquisa é da forma “como” e “porquê”, ou quando o controlo que o investigador tem sobre os eventos é muito reduzido, como aconteceu com o estudo em causa; ou quando o foco temporal está em fenómenos contemporâneos dentro do contexto de vida real (Yin, 2003).

O Estudo de Caso visa a apresentação holística e sistémica dos vários aspetos que o compõem, independentemente da sua diversidade. Funciona, então, como meio de organização de dados respeitando a singularidade e especificidade do seu objeto de análise, podendo ter uma grande diversidade de objetivos.

A modalidade de Estudo de Caso foi a modalidade optada no desenvolvimento do estudo das quatro questões sob investigação por se acreditar ser viável a recolha e análise de documentos no espaço de tempo definido para esta dissertação e, apesar da presente autora não ter nunca lecionado aqueles tópicos (i.e., o12º ano de escolaridade), foi-lhe possível obter os dados nas condições necessárias para a investigação com a colaboração dos colegas docentes titulares de turmas do 12º ano no presente ano letivo. Também considerou-se que a não experiência da presente autora na lecionação daqueles tópicos seria aconselhado uma análise descritiva detalhada de documentos produzidos por alunos sem a pretensão de obter uma generalização de resultados.

Quando se faz investigação qualitativa utilizando a modalidade de Estudo de Caso também é importante ter em conta critérios de qualidade do estudo (Ponte, 2006).

Goetz & LeCompte (1984) propõe cinco critérios para a avaliação de Estudo de Caso: (1) adequação; (2) clareza; (3) carácter completo; (4) credibilidade; e (5) significado. Em relação à fidedignidade, ou fiabilidade, é referente aos instrumentos usados na recolha e à maneira como são analisados os dados, especialmente se ao serem as operações do estudo repetidas nas mesmas condições, os resultados obtidos sejam semelhantes (Ponte, 2006). Considerando a dinâmica inerente à investigação científica, os casos de estudo realizados nesta dissertação poderem ser alvo de extensão e comparação com novos casos no futuro pelo que, tendo em atenção aqueles cinco critérios de avaliação, apresenta-se, nas Secções 2 e 3 do presente capítulo, uma descrição detalhada dos instrumentos usados e dos procedimentos realizados.

Segundo Tesch (1990), a análise de dados na metodologia de um Estudo de Caso pode visar um propósito: (1) interpretativa, visando uma analise pormenorizada de todos os dados recolhidos com vista a organizá-los e classificá-los em categorias, de modo a explorar e explicar o fenómeno em estudo; (2) estrutural, que analisa dados com a finalidade de encontrar padrões que possam clarificar e/ou explicar a situação em estudo; e (3) reflexiva, que visa essencialmente, interpretar ou avaliar o fenómeno a ser estudado, muitas vezes por julgamento ou intuição do investigador. No presente trabalho, nomeadamente no Capítulo 4, é apresentada uma análise interpretativa de Estudo de Caso, com base em situações- problemas propostos, com vista a descrever e a explicar possíveis dificuldades nos tópicos probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

O investigador pode recorrer a variadas técnicas para recolher dados para análise. Entre estas, figuram a entrevista, a observação participante, e a análise de documentos. No presente estudo recorreu-se à análise de documentos construídos por alunos em sala de aulas. No que se refere a técnicas de análise de dados a que é possível recorrer, no âmbito deste tipo de investigação, destaca-se a análise de conteúdo, como forma de explicitação do conteúdo das mensagens expressas pelos sujeitos.

Matos & Carreira (1994) apresentam versatilidade que o investigador deve assumir no decurso de uma investigação, nomeadamente: (1) *instrumento/meio,* fundamental na recolha de dados; (2) *inquiridor*, o estudo depende da capacidade que ele tem para fazer as perguntas certas no momento certo; (3) *ouvinte*, deve ouvir em todo o lado, mas em certos momentos ouvir os participantes com especial atenção; (4) *observador*, deve registar os comportamentos e acontecimentos à medida que vão ocorrendo; (5) *explorador*, no decurso de um Estudo de Caso pode surgir a necessidade de realizar alterações, até mesmo ao próprio caso; (6) *intérprete*, deve interpretar todos os sinais, apresentando os factos como legítimos e adequados para quem está por dentro; (7) *negociador*, recorrendo à negociação para ter acesso a determinados ambientes e fontes de informação; (7) *avaliador*, deve realizar uma avaliação contínua dos participantes; (9) *comunicador-narrador*, tem de ser capaz de comunicar o que aprendeu, relatando no relatório da investigação uma grande parte de descrição e narração.

Como já foi implicitamente mencionado atrás, a autora da presente dissertação não teve qualquer contato com os alunos envolvidos neste estudo. Contudo, procurou saber junto de cada um dos docentes titulares das turmas envolvidas, do Ensino Secundário, as reações manifestadas pelos investigados e a modalidade e ambiente em que a prova foi realizada. Estas conversas foram informais sem recurso a qualquer questionário previamente elaborado. Segundo Vale (2000), na investigação educacional de natureza qualitativa, pode tirar-se partido desta relação de proximidade. Não tendo sido possível beneficiar de uma proximidade com os alunos, aquelas conversas informais foram importantes e esclarecedores sobre o grau de desempenho expectável de cada turma em geral, bem como o foco dado nas aulas sobre os tópicos probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Em particular, foi esclarecido quanto à linguagem, procedimentos e argumentos considerados no processo de ensino daqueles conceitos. Tendo sido desenvolvido o ensinamento daqueles dois conceitos conforme o previsto no NPMEB, uma análise dos documentos produzidos pelos alunos contribuirá então para detetar diferentes processos de resolução usados pelos alunos, reconhecer tipos de erros, observar estratégias que seguem e analisar o nível de conhecimento que dominam sobre aquelas matérias. Na realidade, como refere Lessard-Hébert (2005), os documentos escritos constituem uma fonte de recolha de dados particularmente importante por permitirem confirmar inferências sugeridas por outras fontes de dados.

2. Participantes

2.1 Escolha do grupo de alunos

Neste tipo de abordagem metodológica, como é o Estudo de Caso, não se privilegia uma amostragem aleatória e numerosa, mas sim criteriosa ou intencional, ou seja, a seleção da amostra está sujeita a determinados critérios que permitam ao investigador aprender o máximo possível sobre o fenómeno em estudo (Vale, 2000).

Os alunos, que colaboraram neste estudo, foram os alunos de duas turmas do Ensino Regular do Curso de Ciências e Tecnologias do 12.º ano, uma turma do Ensino Profissional também do 12.º ano de Escolas Secundárias diferentes, do distrito do Porto e ainda os alunos do Ensino Superior dos Cursos de Engenharia, que se submeteram ao exame final da unidade curricular Métodos Numéricos e Estatísticos (afrente designada de disciplina E) no presente ano letivo.

As turmas do Ensino Secundário envolvidas tiveram conhecimento prévio dos objetivos deste projeto, pois como refere Almeida (1995) “em investigação educacional a colaboração voluntária deve, na grande maioria dos casos, ser conseguida” (Almeida, 1995, p. 130). Os correspondentes alunos mostraram-se muito entusiasmados e expectantes. Para os dados do Ensino Universitário, os alunos não tiveram conhecimento do estudo pois, neste caso, os dados analisados são contagens de respostas a uma pergunta com 4 escolhas múltiplas e não respostas a uma questão aberta.

Por questões legais e éticas, para o Ensino Secundário, foi solicitada autorização às direções das escolas envolvidas, para a realização da experiência e aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos no estudo para serem objeto de recolha de dados (Anexos I e II). No Ensino Superior o processo foi mais simples tendo sido apenas pedida, e obtida, autorização do responsável da referida unidade curricular para quantificar os resultados. Este processo simplificado sucedeu-se pois a presente autora não teve acesso à prova antes da sua realização tendo sido posteriormente constatado que a questão envolvendo probabilidade condicionada era uma questão de escolha múltipla.

Para facilitar as explicações vai designar-se por Escola A (com turma A), Escola B (com turmas B e C) e Universidade E (com a disciplina E).

Para a implementação do estudo realizaram-se reuniões individuais com cada um dos docentes titulares das turmas A, B e C, onde entre outros temas, foram debatidos, o tipo de linguagem utilizada no enunciado a ser submetido, a metodologia a utilizar e a forma de recolha das respostas dos alunos.

Na turma da Escola A o enunciado proposto não sofreu qualquer alteração, enquanto que na Escola B o enunciado sofreu ligeiras adaptações (Anexo III).

Relativamente aos alunos do Ensino Superior, as condições foram diferentes não tendo havido qualquer intervenção da autora quanto ao enunciado e tipo de questão a propor. Foi autorizado pelo responsável da disciplina E a contagem das respostas dadas pelos alunos submetidos ao exame final à primeira pergunta (Questão 1) do exame, única relacionada com tópicos envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

2.2 CARACTERIZAÇÃO DOS GRUPOS DE ALUNOS

Nas reuniões com as docentes foi solicitado uma breve caracterização das suas turmas.

A turma A é constituída por 24 alunos, 10 do sexo feminino e 14 do sexo masculino. Todos os alunos estão dentro da escolaridade obrigatória, cuja média de idades é de 16,53 anos. Nenhum aluno desta turma usufruiu de apoio educativo no ano anterior. Todos os alunos revelam gostar da escola. Saliente-se que a docente de Matemática da turma A é efetiva na Escola A, com larga experiência na lecionação do 12.º ano e acompanhou os seus alunos desde o Ensino Básico (7.º ano), conhecendo muito bem o trabalho individual destes.

A turma B é constituída por 9 alunos, todos do sexo masculino. Apenas 5 alunos estão dentro da escolaridade obrigatória. A média de idades é de 17,56 anos.

A turma C é constituída por 14 alunos, 6 do sexo feminino e 8 do sexo masculino. Todos os alunos estão dentro da escolaridade obrigatória à exceção de um aluno. A média de idades é de 16,84 anos.

Saliente-se que as docentes de Matemática das turmas B e C são efetivas da Escola B e com uma larga experiência de lecionação do 12.º ano. Refira-se ainda que estas docentes também acompanham há muito tempos os seus alunos, não tendo sido referido desde quando o fazem.

Com os projetos, de âmbito nacional, Plano de Matemática (PM) e NPMEB, ao nível do Ensino Básico, houve um recente reajustamento do programa de Matemática com entrada em vigor do NPMEB em 2010/2011; já a nível do Ensino Secundário o reajustamento fez-se em 2012.

No que concerne ao grupo de alunos da Universidade E envolvidos no presente estudo, este é constituído por 204 alunos inscritos em cursos de Engenharia e que frequentam a disciplina de E pertencente ao 2º ano do plano de estudos daqueles cursos. Nenhuma caracterização deste grupo foi disponibilizada.

2.3 Caracterização dos problemas

Relativamente às situações-problema que constituem a prova para ser aplicada aos alunos do Ensino Secundário, elaborou-se uma primeira prova com questões envolvendo os tópicos de interesse (probabilidade condicionada e acontecimentos independentes). Depois de uma análise mais cuidada foram retiradas algumas questões e substituídas por outras.

A elaboração dos dois problemas a implementar na prova de avaliação, baseou-se nos manuais escolares adotados nas escolas que participaram no estudo. Não foram retirados apenas de um, mas de todos os manuais, com adaptações pertinentes para o fim em vista.

Para testar a adequabilidade dos dois problemas em termos de conteúdo programático e de linguagem usada, foi pedido aos professores de Matemática das turmas A, B e C que o resolvessem e verificassem se estava com um nível de dificuldade indicado para os alunos de 12º ano, e se os conteúdos correspondiam aos programados pelo currículo para os alunos desse nível. Foram sugeridas ligeiras alterações na questão 1.4 do problema 1 e no problema 2. Todos os professores que analisaram o teste declararam que o seu conteúdo estava conforme e adequado às capacidades e à faixa etária destes alunos. O único ponto menos positivo foi referenciado por uma professora, sobre as letras utilizadas para definir acontecimentos, que não eram aquelas que habitualmente eram utilizadas em aula.

A docente da turma B considerou complicada a abordagem linguística da versão final proposta para o problema 1 afirmando que poderia levar a uma maior dificuldade na interpretação da questão. Sugeriu a substituição da designação do acontecimento P por B, já que os alunos estavam mais familiarizados com este tipo de letras para os acontecimentos e ainda, foi indicado o arredondamento pretendido. Portanto, na Escola B houve uma ligeira alteração do enunciado (Anexo V), mas não se julga ter havido alteração ao grau de dificuldade das questões. As alterações efetuadas não foram significativas para que o tratamento dos resultados tenha que ser de forma diferente.

A versão final do enunciado dos dois problemas, com as respetivas soluções encontra em Anexo III e IV, respetivamente.

Foi ainda solicitado a um aluno do 12.º ano, que não pertencia a nenhuma das escolas envolvidas, que realizasse a prova e se pronunciasse sobre o grau de dificuldade e linguagem utilizada. O referido aluno realizou-a tendo considerado a prova acessível e com linguagem clara e objetiva.

Relativamente ao problema 1, na questão 1.4, foi feita uma sugestão aos docentes, caso entendam simplificar a resolução das alíneas a e b, substituir o enunciado desta questão referindo que "a probabilidade do filho do casal ser do sexo masculino é igual à probabilidade de ser do sexo feminino". Nesse caso, os 8 elementos de Ω serão equiprováveis, mas nenhum docente entendeu ser necessário proceder a essa alteração que iria reduzir significativamente o grau de dificuldade. Esta sugestão é mantida na apresentação dos problemas.

A prova, na versão final, contém dois problemas: o primeiro é constituído por seis alíneas e os dados do problema são fornecidos numa tabela de dupla entrada, e o segundo apresenta quatro alíneas, sendo necessário traduzir as probabilidades dadas no texto para fórmulas. Nos dois problemas propostos, o conteúdo primário de cada alínea versa conceitos envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos de acordo com a descrição sumariada no Quadro 5.

QUADRO 5 - CONTEÚDO PRIMÁRIO AVALIADO NAS ALÍNEAS DAS VÁRIAS QUESTÕES DA PROVA

Item	Conteúdo do item
1.1	Calcular uma probabilidade simples.
1.2	Calcular uma probabilidade condicionada.
1.3	Realizar uma composição comparando o valor de duas probabilidades condicionadas, $P(M^C \mid R^C)$ e $P(M \mid R)$,
1.4 a)	Calcular três probabilidades de acontecimentos definidos num espaço amostral finito com resultados elementares não equiprováveis. Para esses cálculos é necessário usar a noção de independência entre acontecimentos.
1.4b) **1.4c)**	Distinguir entre acontecimentos independentes e incompatíveis.
1.4d)	Mostrar que os acontecimentos não podem ser independentes e apresentar uma situação onde se verificaria a independência de acontecimentos.
2.1 **2.4**	Calcular uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada.
2.2 **2.3**	Distinguir entre acontecimentos incompatíveis e independentes, apresentando justificações adequadas.

3. MÉTODO DE RECOLHA E ANÁLISE DE DADOS

3.1. RECOLHA DOS DADOS

A recolha dos dados relativos ao Ensino Secundário foi realizada no mês de dezembro de 2012, data em que no 12.º ano se concluiu o estudo do tema "Probabilidade e Combinatória" e termina o primeiro período letivo.

A implementação das questões formuladas para as turmas A, B e C foi meticulosamente planejada. Os dois problemas propostos foram apresentados aos alunos num momento de avaliação escrito individual. Na Escola A, o enunciado não sofreu qualquer alteração, como foi referido anteriormente, mas os alunos tinham opção de escolha sobre a inclusão ou não da classificação desta prova na sua avaliação individual. Desta forma, foi encarado como um elemento extra de avaliação. Na Escola B a situação foi diferente. Como envolvia uma turma do Ensino Profissional, houve necessidade de alterar o enunciado, em termos de linguagem usada, mantendo o grau de dificuldade. Tanto a turma do Ensino Regular (turma C) como do Ensino Profissional (turma B) foram submetidos à mesma prova e a classificação foi incluída na avaliação de final do primeiro período individual de cada aluno.

Os alunos foram autorizados a usar uma calculadora, mas não era uma condição necessária. No entanto, não foram autorizados a consultar outro tipo de informação ou a aceder a referências.

Os docentes titulares das turmas A, B e C, imediatamente após a implementação da prova, permitiram ao autor desta dissertação o acesso à prova elaborada por cada aluno, antes destas terem sido cotadas pelos respetivos professores; as cópias das provas foram guardadas em suporte digital, para posterior análise. Há a realçar que na Escola B os alunos receberam e arquivaram as suas provas originais, após a classificação atribuída pelos respetivos docentes, enquanto que na Escola A os alunos arquivaram as cópias após classificação atribuída pelo respetivo docente, tendo o autor arquivado os originais. A digitalização das provas foi igualmente efetuada por uma questão de uniformização do trabalho.

No que concerne aos dados do Ensino Superior, os dados foram recolhidos imediatamente a seguir à realização da prova de exame final da disciplina E, realizado em janeiro de 2013. Junto a um docente da disciplina E, que procedia à correção da Questão 1, fez-se, de seguida, a contagem pretendida das respostas dadas para cada uma das 4 opções.

Num Estudo de Caso, o investigador é o instrumento primário de recolha de dados (Merriam, 1988; Ponte, 1994b).

3.2. Metodologia de análise dos dados

3.2.1. Ensino Secundário

Nesta investigação, os dados correspondem às respostas escritas fornecidas pelos alunos do Ensino Secundário durante a realização da prova. Atendendo ao carácter essencialmente qualitativo adotado para esta investigação, as respostas recolhidas são analisadas de modo a caracterizar, em termos descritivo o seu conteúdo.

Para a descrição de cada resposta, procede-se a uma análise de conteúdo e de interpretação de raciocínio subjacente à resposta, tendo por base comparativa a resposta correta expectável. Essa análise comparativa permite a categorização de cada resposta e, consequentemente, o agrupamento de respostas por classes de respostas similares em termos de qualidade. Díaz & Batanero (2009), citados por Kataoka, Trevethan & Borim da Silva (2010), propuseram estabelecer uma correspondência entre a qualidade das respostas dos alunos e um numeral entre 0 a 2 do seguinte modo: a resposta errada é representada por 0; resposta parcialmente errada é representada por 1; resposta parcialmente certa é representada por 2.

No presente estudo propõe-se estender aquela categorização e dividir a apreciação das respostas dos alunos segundo duas perspetivas qualitativas ordinais distintas: o grau de desempenho da resposta (GD) e grau de rigor (GR). O desempenho diz respeito à capacidade da resposta conter a solução e referência dos pontos-chave para chegar ao resultado pretendido na pergunta. O rigor diz respeito à capacidade argumentativa e à linguagem apresentada na resposta escrita.

Para maior detalhe da qualidade da resposta é aqui considerado o GD na resposta distribuído segundo a seguinte escala ordinal: ausência de resposta é representada pelo numeral 0; resposta totalmente errada é representada por 1; resposta parcialmente errada é representada por 2; resposta com início de uma estratégia que é abandonada ou concluída de forma errada é representada por 3; resposta parcialmente certa ou certa mas sem justificação ou com justificação incompleta é representada por 4; por fim, resposta totalmente certa é representada pelo numeral 5.

No que concerne ao grau de rigor (GR) foi escolhida uma escala de Likert, traduzida numericamente do seguinte modo: 0 corresponde a resposta com ausência de rigor; 1 resposta com pouco rigor; 2 resposta com algum rigor; e 3 resposta com rigor. A opção de um número par de correspondências alternativas obriga a atribuir uma opção definitivamente positiva ou negativa, já que não é possível optar por uma atitude neutra por esta não existir.

A necessidade de proceder a extensões das categorias propostas por Díaz & Batanero (2009) para as escalas acima referidas para o GD e o GR está intimamente relacionada com a natureza diversa das turmas A, B e C (Ensino Regular e Profissional) consideradas neste estudo. Daí prever-se, eventualmente, diferenças quer quanto ao GD quer quanto ao GR que, com esta divisão poderão ser detetadas, caso existam, nas respostas fornecidas pelos alunos.

No que concerne à aplicação destas duas escalas, a escala referente ao grau de desempenho não constituiu qualquer dificuldade, contudo relativamente ao GR houve necessidade de introduzir parâmetros de uniformização de critérios. Os critérios de qualificação são apresentados no quadro seguinte:

QUADRO 6 - TABELA DE CORRESPONDE PARA QUANTIFICAR O GRAU DE RIGOR DE UMA RESPOSTA.

Grau de rigor (GR)	Critérios de qualificação
0	• Apresenta uma resposta sem evidenciar a origem dos dados; • Apresenta uma justificação sem correção científica e sem coerência; • Ausência de qualquer referência aos acontecimentos tratados; • Apresenta muitos erros grosseiros de cálculo; • Aplica conceitos erradamente.
1	• Apresenta uma resposta onde evidência a origem de alguns dos dados; • Apresenta uma justificação com pouca correção científica e com alguma coerência; • Apresenta os acontecimentos tratados de forma pouco explícita; • Comete erros de leitura de dados que condicionam a resolução, mas sem erros grosseiros de cálculo; • Os conceitos aplicados revelam algum conflito entre estes, mas aplica as fórmulas de forma correta, sem as explicitar.
2	• Apresenta uma resposta onde evidência a origem de todos os dados; • Apresenta uma justificação com alguma correção científica e com alguma coerência; • Apresenta os acontecimentos tratados de forma explícita; • Apresenta arredondamentos de cálculo que condicionam a resposta; • Os conceitos aplicados revelam pouca clareza, mas sem conflito entre estes, embora as justificações escritas sejam pouco claras, contudo aplica as fórmulas de forma corretamente, podendo ou não explicitá-las.
3	• Apresenta uma resposta onde evidência a origem de todos os dados; • Apresenta uma justificação com correção científica e com muita coerência; • Apresenta os acontecimentos tratados de forma explícita e bem estruturados; • Não apresenta erros de cálculo nem de leitura de dados; • Os conceitos aplicados revelam clareza e correção na sua utilização, sem qualquer conflito entre estes, já que são acompanhados de justificação correta, com utilização e aplicação de fórmulas com exatidão, explicitação e correção.

Para a análise das respostas dadas às 11 perguntas listadas no Quadro 5, procede-se a uma análise estatística descritiva dos valores observados para GD e GR calculando o mínimo, 1º e 3ª quartil, mediana e o máximo por aluno e por questão. Para relacionar o GD e GR utiliza-se o coeficiente de correlação de Spearman, que mede o grau de associação linear daquelas variáveis ordinais.

Uma fórmula fácil para calcular o coeficiente ρ de Spearman é dada por:

$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$ em que *n* é o número de pares de observações (x_i, y_i) e d_i = (número de ordem de x_i de entre os valores de x) – (número de ordem de y_i de entre os valores de y). O coeficiente ρ de Spearman varia entre -1 e 1. Quanto mais próximo estiver destes extremos, maior será a associação entre as variáveis. O sinal negativo da correlação significa que as variáveis variam em sentido contrário, isto é, as categorias mais elevadas de uma variável estão associadas a categorias mais baixas da outra variável.

3.2.2. ENSINO SUPERIOR

Para os dados do Ensino Superior, procede-se a uma análise simples das contagens das respostas obtidas em cada opção.

Capítulo IV – Análise e discussão de dados

1. Respostas e procedimentos apresentados pelos alunos
2. Síntese

1. Respostas e procedimentos apresentados pelos alunos

Tendo sido implementado a realização e recolha das respostas às provas contendo os problemas 1 e 2 nas turmas A (com 20 alunos), B (com 9 alunos) e C (com 14 alunos) do Ensino Secundário e do exame final da disciplina E (com 204 alunos) do Ensino Superior, conforme referido no Capítulo 3, neste ponto faz-se uma análise qualitativa e descritiva das respostas dadas a cada uma das questões. Por ser mais simples, começar-se-á por analisar as respostas dadas na questão de escolha múltipla pelos alunos universitários e depois, as respostas dadas aos problemas 1 e 2 pelos alunos do Ensino Secundário. A análise é apresentada primeiro separadamente por alínea; e, depois globalmente, em contexto de grupo.

1.1 Análise das respostas dadas na questão de escolha múltipla apresentada aos alunos universitários

Este problema foi proposto a alunos universitários, sem qualquer interferência de qualquer tipo, contudo refira-se os objetos e relações que podem intervir na solução do problema.

1.1.1 Caracterização segundo o enfoque ontosemiótico

No Quadro 7, apresenta-se a configuração dos objetos e relações primárias do problema realizado pelos alunos universitários.

QUADRO 7 - OBJETOS E RELAÇÕES PRIMÁRIAS DA QUESTÃO DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Linguagem		Objetos e relações
		Situação Problema: enunciado da questão de escolha múltipla
		Motivação ↓ / Resolução ↑
Linguagem: <u>Verbal (termos e expressões)</u> - Acontecimentos - Intersecção de acontecimentos - União de acontecimentos - Probabilidade simples - Probabilidade conjunta - Probabilidade da união - Cálculo de probabilidades <u>Gráfica:</u> tabela de probabilidades <u>Simbólica</u> A: “processo de fabrico A” B: “processo de fabrico B” P(A); P(B); P(A∩B) P (A ∪ B) <u>Numérica</u> - Cálculo de probabilidades - Operações com números racionais Exemplo: P (A ∪ B) = = P(A) + P(B) – P(A∩B) = =0,95 + 0,91 – 0,90 = 0,96	Expressa → Ajuda →	**Conceitos/definições** <u>Preliminares</u> Acontecimentos: simples, condicionados e independentes; intersecção de acontecimentos; união de acontecimentos; probabilidade simples; <u>Decorrentes</u> Probabilidade conjunta; propriedades da probabilidade;
		Propriedades/proposições <u>Preliminares</u> - A e B são acontecimentos independentes se a ocorrência de um deles não interfere, em termos probabilísticos, na realização do outro. - Acontecimento união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se ocorrer um pelo menos dos acontecimento A ou B. - Acontecimento interseção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só A e B se realizarem simultaneamente. <u>Decorrentes</u> A e B são independentes se e só se P(A∩B) = P(A) × P(B); para qualquer que seja A e B tem-se, P (A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
		Procedimentos - Interpretar dados em tabela e completá-la - Identificar acontecimentos independentes e acontecimentos dependentes - Identificar a probabilidade pedida - Calcular a probabilidade pedida: simples, conjunta e união - Operar com números racionais
		Fundamentação ↓ / Justificação ↑
		Argumentos - Cálculo matemático (da probabilidade) - Comparação de resultados

1.1.2 ANÁLISE DESCRITIVA E INTERPRETATIVA DAS RESPOSTAS

Importa referir que os alunos ao responderem a esta questão estavam conscientes de que cada uma das questões de escolha múltipla tinha apenas uma opção correta e conheciam a respetiva cotação. No cabeçalho da prova podia ainda ler-se que caso a resposta fosse errada, seria descontado um terço da sua cotação, desencorajando aqueles que pretendiam proceder a uma escolha aleatória.

Feita a contagem das respostas constatou-se que responderam a 1ª opção: 5 alunos, à 2ª opção (resposta correta): 147 alunos; à 3ª opção: 10 alunos; à 4ª opção: 30 alunos; não responderam: 12 alunos, num total de 204 alunos. Numa primeira análise, constata-se que o número de alunos que optaram pela 4ª opção é o dobro da soma das respostas dos alunos que optaram pela 1ª e 3ª opção. Esta quantidade não será de estranhar atendendo às condições acima referidas, mas pode fazer-se outra leitura, já que poderá haver conflitos na interpretação e na resolução das situações.

Tendo em conta que cada opção contém duas perguntas (independência e cálculo de $P(A\cup B)$) quase dicotómicas, os resultados dos 192 alunos que responderam à questão estão sumariados numa tabela (Tabela 1) para uma análise mais fina dos resultados obtidos.

Foram contabilizados o número mínimo e máximo de respostas correspondente a cada item (Independência ou não; valor de $P(A\cup B)$ certo ou errado)

TABELA 1 - CONTAGEM DAS RESPOSTAS DADAS EM CADA OPÇÃO DA QUESTÃO DE ESCOLHA MÚLTIPLA.

	$P(A\cup B) = 0{,}96$ *(certa)*	$P(A\cup B) \neq 0{,}96$		
		Outros valores para $P(A\cup B)$	$P(A\cup B) = 0{,}86$	Total de respostas relativo à noção de independência
A e B independentes	4ª opção (30)		1ª opção (5)	5 a 35 erradas
A e B dependentes *(certa)*	2ª opção (147)		3ª opção(10)	157 a 187 certas
Total de respostas relativo ao cálculo de $P(A\cup B)$	147 a 177 certas	15 a 45 erradas		

Por observação da Tabela 1, e com base nos valores marginais possíveis, tem-se um rácio de 157/35 e 187/5 de acertar na noção de independência e um rácio de 147/45 a 177/15 de acertar no cálculo de $P(A\cup B)$. Isto significa que há uma chance entre 4,5 a 37,4 superior de acertar no item sobre a independência e uma chance entre 3,2 a 11,8 superior de acertar no cálculo de $P(A\cup B)$. Sendo os valores dos rácios inferiores para neste último, é então de suspeitar ter existido uma maior dificuldade no cálculo da probabilidade da reunião do que na noção de independência.

Ainda da Tabela 1, relativamente aos alunos que optaram pela 3ª opção (ou seja, que salientam corretamente a dependência dos dois acontecimentos, contudo os cálculos relativos à probabilidade da união desses acontecimentos está incorreta), pode conjeturar-se que os alunos, ao efetuarem os cálculos de $P(A\cup B)$ se tenham enganado ou tenham cometido erros numéricos.

Sendo indicado em duas opções o valor 0,86 para aquela probabilidade, poderá especular-se a procura do número 0,86 tomando erradamente $P(A\cap B)= 1$ e o seguinte raciocínio: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)= 0,95 + 0,91 – 1 = 0,86$. São especulações…

Nesta questão não será possível almejar muito mais, já que a resolução não era solicitada.

1.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS DADAS NO PROBLEMA 1 RESOLVIDO PELOS ALUNOS DO 12.º ANO

A prova implementada no Ensino Secundário, contém dois problemas que serão tratados separadamente. Nesta secção vai ser feita uma breve referência aos objetos e relações que intervém na solução do primeiro problema.

1.2.1 CARACTERIZAÇÃO SEGUNDO O ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

No quadro seguinte (Quadro 8), apresenta-se a configuração dos objetos e relações primárias do problema.

QUADRO 8 - OBJETOS E RELAÇÕES PRIMÁRIAS DA QUESTÃO DO PROBLEMA 1

Linguagem:

Verbal (termos e expressões)

- Acontecimentos
- Intersecção de acontecimentos
- União de acontecimentos
- Probabilidade simples
- Probabilidade conjunta
- Probabilidade da união
- Probabilidade condicionada
- Cálculo de probabilidades

Gráfica

- Tabela de probabilidades

Simbólica

M: "Ser menino"
M^c: "Ser menina"
R: "Previsto ser menino"
R^C: "Previsto ser menina"
A: "O casal ter no máximo uma menina"
B: "O casal ter filhos de ambos os sexos"
C: "O casal só ter rapazes"

$P(M)$, $P(M^C)$, $P(R)$, $P(R^C)$

$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

$P(M| R^C)$, $P(M^C| R^C)$, $P(M| R)$,

$P(M\cap R)$, $P(A\cap B)$, $P(A \cup B)$

Numérica

- Cálculo de probabilidades
- Operações com números racionais

Exemplo:

(1.1) $P(M|R^C) = \frac{P(M\cap R^C)}{P(R^C)} = \frac{96}{223} = 0{,}43$

(1.4.b) $P(A\cap B) = 3\times 0{,}54^2\times 0{,}45 = 0{,}36$

$P(A)\times P(B) = 0{,}55 \times 0{,}75 = 0{,}41$

Expressa

Ajuda

Situação Problema: enunciado das questões do problema 1

Motivação

Resolução

Conceitos/definições

Preliminares
- Espaço de resultados [1.4a]
- Acontecimento complementar [1.1,1.2,1.3,1.4a]
- Acontecimentos simples, incompatíveis, independentes [1.4b,1.4c, 1.4d]
- Intersecção de acontecimentos [1.2,1.4c,1.4d]
- União de acontecimentos [1.4a]
- Probabilidade simples [1.2, 1.3]
- Lei de Laplace [1.1,1.2, 1.3];

Decorrentes
- Probabilidade simples; [1.1, 1.2,1.3,1.4a,1.4b,1.4d]
- Probabilidade conjunta; [1.2,1.3,1.4b,1.4d]
- Probabilidade da união; [1.4a]
- Probabilidade condicionada; [1.2,1.3]
- Propriedades da probabilidade;

Propriedades/proposições

Preliminares
- A e B são acontecimentos independentes se a ocorrência de um deles não interfere, em termos probabilísticos, na realização do outro.
- Dois acontecimentos são incompatíveis se a realização de um deles implica a não realização do outro.
- M^C é o acontecimento contrário do acontecimento M e realiza-se se e só se M não se realiza.
- Acontecimento união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se ocorrer um pelo menos dos acontecimento A ou B
- Acontecimento interseção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B realizarem simultaneamente.
- Acontecimento certo realiza-se sempre qualquer que seja o resultado da experiência e o acontecimento impossível nunca se realiza.

Decorrentes
- A é um acontecimento qualquer, $P(A) \geq 0$; $P(A) = 1$, se A é o acontecimento certo; e $P(A) = 0$, se A é o acontecimento impossível.
- $P(A\cap B) \neq P(A|B)$
- $P(M|R^C) \neq P(R^C|M)$
- para qualquer que seja A e B tem-se, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.
- A e B são independentes se e só se $P(A|B) = P(A)$; e daqui decorre A e B são independentes se e só se $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$
- $A\cap B$ e C são incompatíveis se e só se $A\cap B) \cap C = \phi$;
logo $P((A\cap B) \cap C) = 0$, pelo que $P((A\cap B)\cup C) = P(A\cap B) + P(C)$.
- M e M^C são acontecimentos contrários ou complementares se e só se $M\cup M^C = \Omega$ e $M \cap M^C = \phi$; logo $P(M\cup M^C) = 1$ e $P(M \cap M^C) = 0$.
- sendo M um acontecimento qualquer, a probabilidade do acontecimento contrário a M, M^C, é $P(M^C) = 1 - P(M)$.

Procedimentos
- Interpretar dados em tabela de dupla entrada e completá-la
- Identificar os dados do problema a que se referem cada um dos acontecimentos
- Identificar a probabilidade pedida e usar corretamente a notação científica
- Determinar o espaço de resultados
- Calcular a probabilidade pedida: simples, conjunta, união e condicionada.
- Identificar acontecimentos incompatíveis, Distinguir acontecimentos Independentes e acontecimentos incompatíveis
- Operar com números racionais

Fundamentacão

Justificação

Argumentos
- Cálculo matemático (da probabilidade)
- Raciocínio dedutivo.

1.2.2 ANÁLISE DESCRITIVA E INTERPRETATIVA DAS RESPOSTAS

A situação-problema tem como objetivo estimular a capacidade de leitura dos dados da tabela de dupla entrada e a compreensão da diferença entre os diversos tipos de probabilidade. Pretende-se que o aluno calcule as seguintes probabilidades: probabilidade simples, probabilidade conjunta e probabilidade condicionada. Tem ainda por objetivo tratar de acontecimentos independentes e incompatíveis.

A linguagem utilizada no problema é a verbal (termos e expressões), a simbólica (expressar acontecimentos), a gráfica (tabela) e a numérica (cálculo de probabilidades). Estas devem constituir uma ajuda para a compreensão da situação-problema. É de referir que a situação-problema motiva a abordagem de conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos, alguns já abordados no Ensino Básico (acontecimento, lei de Laplace, probabilidade simples e probabilidade conjunta).

Os procedimentos fundamentam os argumentos apresentados, os quais por sua vez justificam os procedimentos adotados. O domínio destes conceitos/definições e propriedades /proposições, por parte dos alunos, vai permitir-lhes resolver o problema.

A seguir, analisa-se em detalhe as respostas e raciocínios apresentados pelos alunos a cada uma das questões do problema 1. Dar-se-á ênfase à qualidade das respostas em termos do grau de desempenho (GD) e do grau de rigor (GR) discutido no capítulo anterior.

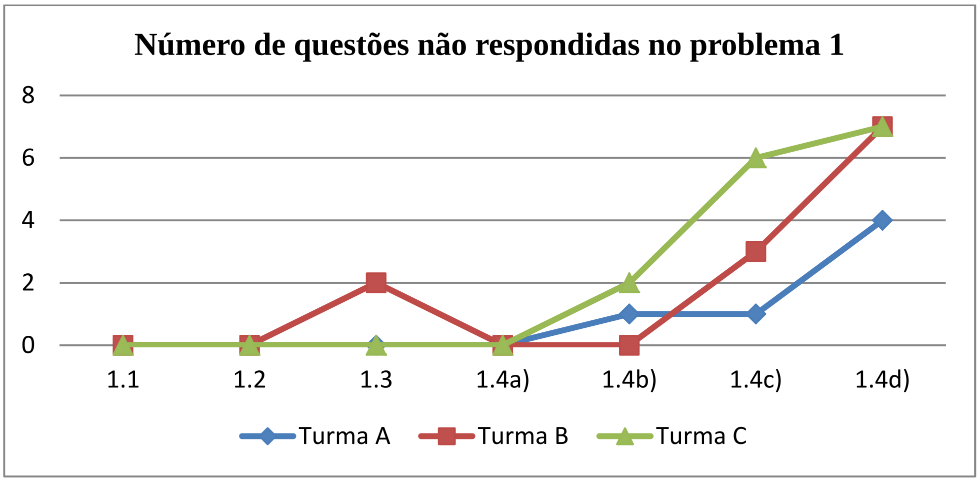
Em primeiro lugar, nota-se que 37% dos alunos que não responde a pelo menos uma das questões sendo a turma A a que apresenta menor tendência em deixar questões em branco, de acordo com a Tabela 2. Este facto está em concordância com a indicação dada pela docente titular da turma A de esta ser uma turma com alunos bastante empenhados.

TABELA 2 - NÚMERO DE ALUNOS QUE NÃO RESPONDEM A PELO MENOS UMA DAS 7 QUESTÕES DO PROBLEMA 1.

	Número de questões não respondidas			
Turma	**Uma**	**Duas**	**Três**	**Quatro ou mais**
A	1	1	1	0
B	2	5	0	0
C	1	3	2	0
Global	4	9	3	0

Esta situação tem mais visibilidade em termos gráficos. O Gráfico 1 ilustra a situação, por turma, dos alunos que obtiveram zero nas questões da pergunta 1, isto é, não apresentaram qualquer resposta.

GRÁFICO 1 - GRÁFICO COM A FREQUÊNCIA ABSOLUTA DE RESPOSTAS NULAS AO PROBLEMA 1, POR QUESTÃO E PARA AS TRÊS TURMA.



1.2.2.1 Pergunta 1.1

Relativamente à pergunta 1.1, os alunos tiveram de calcular uma probabilidade simples. Era expectável que os dados retirados da tabela do enunciado fossem evidenciados e os acontecimentos exigidos apresentados inequivocamente. Na Tabela 3 avalia-se o desempenho dos alunos nessa pergunta 1.1.

TABELA 3 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 1.1.

	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	0	0	0	0	20
B	0	0	0	0	1	8
C	0	2	2	0	0	10
Global	0	2	2	0	1	38

Da Tabela 3, pode concluir-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente à questão 1.1, 88% do total de alunos envolvidos: na turma A, 100%, na turma B, 89%, e na turma C, 71%. Analisando o grau de rigor de cada uma das 38 respostas totalmente corretas (Tabela 4), constatou-se ainda que nem sempre uma resposta correta continha rigor na sua formalização.

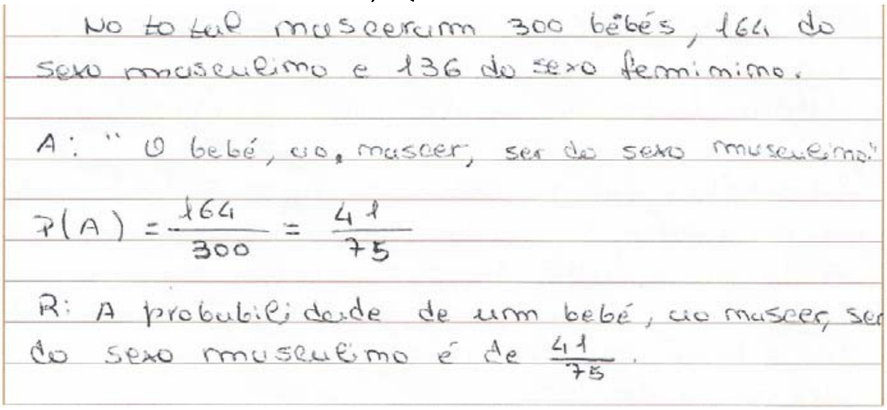
TABELA 4 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR AVALIADO PARA AS RESPOSTAS TOTALMENTE CORRETAS DADAS PELOS ALUNOS À QUESTÃO 1.1.

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**
A	1	1	2	16
B	2	4	1	1
C	3	0	3	4
Global	6	5	6	21

Confrontado o GD e o GR, observou-se que os alunos obtiveram valor máximo tanto no GD como no GR, correspondente a 49% das respostas dos alunos envolvidos: 80% na turma A, 11% na turma B e 29% na turma C.

Na Figura 2 é ilustrado um exemplo de uma resposta correta.

FIGURA 2 - RESPOSTA DO ALUNO 1 DA TURMA C, À QUESTÃO 1.1.


No total nasceram 300 bebés, 164 do sexo masculino e 136 do sexo feminino.

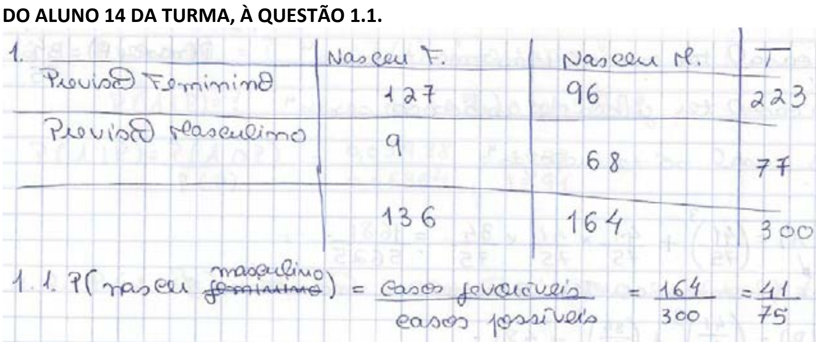
A: " O bebé, ao nascer, ser do sexo masculino"

$P(A) = \frac{164}{300} = \frac{41}{75}$

R: A probabilidade de um bebé, ao nascer, ser do sexo masculino é de $\frac{41}{75}$.

Há ainda a salientar que poucos alunos recorreram, explicitamente por escrito na prova, a representações esquemáticas (como sejam, tabelas, diagrama de árvores, ou outro), como se exemplifica na Figura 3, observando-se apenas 25% dos alunos da turma A.

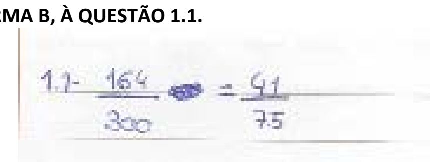
FIGURA 3 - RESPOSTA DO ALUNO 14 DA TURMA, À QUESTÃO 1.1.


1.	Nasceu F.	Nasceu M.	T
Previsão Feminino	127	96	223
Previsão Masculino	9	68	77
	136	164	300

1.1. P(nasceu ~~feminino~~ masculino) = $\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{164}{300} = \frac{41}{75}$

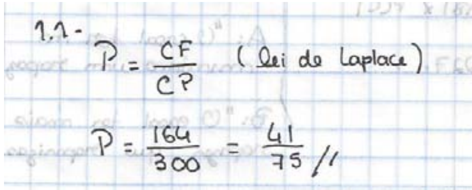
Saliente-se alguns exemplos de respostas de alunos que, tendo a resposta correta, não o fizeram com o rigor esperado (Figura 4). A resposta correta, mas sem rigor (valor 0) mais vezes observada, é aquela que não apresenta qualquer explicação suporte. Nesta situação encontram-se 16% dos alunos envolvidos.

FIGURA 4 - RESPOSTA DO ALUNO 7 DA TURMA B, À QUESTÃO 1.1.


1.1- $\frac{164}{300} = \frac{41}{75}$

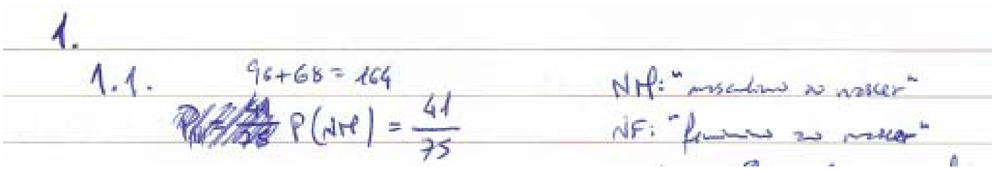
Há 13% dos alunos que apresentam uma resposta com pouco rigor (valor 1), recorrendo à lei de Laplace, mas sem identificação rigorosa dos acontecimentos, como é ilustrado na Figura 5.

FIGURA 5 - RESPOSTA DO ALUNO 7 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.1.



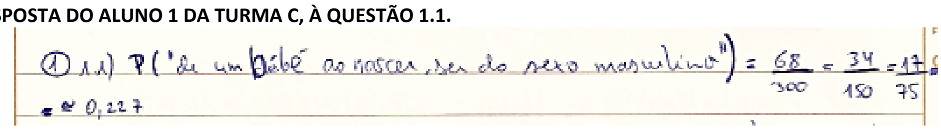
Na resposta com algum rigor (valor 2), correspondente a 16% das respostas dos alunos envolvidos, verifica-se que aplicam a lei de Laplace, mas existe pouco rigor na apresentação dos dados, como se pode ver no exemplo da Figura 6.

FIGURA 6 - RESPOSTA DO ALUNO 6 DA TURMA B, À QUESTÃO 1.1.



Constatou-se que existiam 12% das respostas apresentadas pelos alunos que continham erros, a saber: 0% na turma A, 11% na turma B e 29% na turma C, que se devem essencialmente a uma má leitura dos dados da tabela do enunciado. A Figura 7 mostra um exemplo.

FIGURA 7 - RESPOSTA DO ALUNO 1 DA TURMA C, À QUESTÃO 1.1.



Face aos resultados observados, poder-se-á eventualmente conjeturar que as probabilidades marginais de uma tabela não apresentam para os alunos, em termos gerais, dificuldades de interpretação e de cálculo. Há porém, neste cálculo simples, tendência para não aprimorar a resposta a nível do rigor de linguagem matemática.

1.2.2.2 PERGUNTA 1.2.

Relativamente à pergunta 1.2, os alunos tiveram de identificar e calcular uma probabilidade condicionada. Era expectável que os alunos identificassem e calculassem a probabilidade do acontecimento “ser menino” condicionado ao acontecimento “a ecografia prever uma menina”, evidenciando todos os cálculos efetuados ou a origem dos dados extraído da tabela dada, com recurso à matematização do conceito de probabilidade condicionada.

Para facilitar a análise destes dados foram elaboradas tabelas (Tabela 5 e Tabela 6) onde se sumariam o GD das respostas dadas pelos alunos à pergunta 1.2 e o GR que cada uma das respostas corretas evidenciava.

TABELA 5 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 1.2.

	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	0	2	1	0	17
B	0	1	4	0	0	4
C	0	3	3	1	0	7
Global	0	4	9	2	0	28

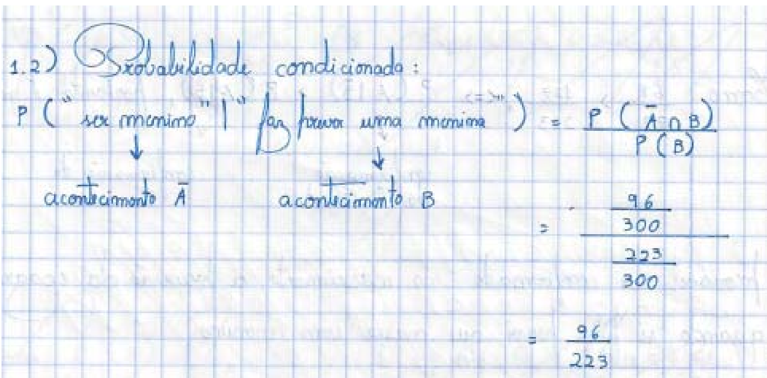
TABELA 6 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR DAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 1.2.

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**
A	0	2	4	11
B	0	1	2	1
C	2	1	2	2
Global	2	4	8	14

Face aos dados da Tabela 5, pode-se concluir que a maioria dos alunos respondeu corretamente à questão 1.2, 67% dos alunos envolvidos: na turma A, 85%, na turma B, 44% e na turma C, 50%. Foi ainda constatado que 47% dos alunos responderam com recurso explícito à fórmula de probabilidade condicionada: 60% das respostas da turma A, 44% das respostas da turma B e 29% das respostas da turma C. Da Tabela 6, constatou-se nem sempre uma resposta certa contém rigor na sua formalização.

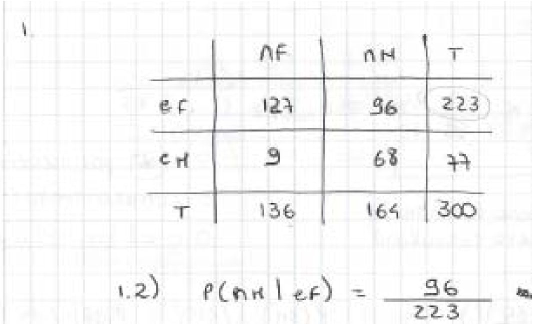
Pode observar-se também situações em que os alunos obtiveram valor máximo tanto no grau de desempenho como no grau de rigor (exemplo ilustrado na Figura 8), correspondente a 35% dos alunos envolvidos: 55% na turma A, 11% na turma B e 14% na turma C.

FIGURA 8 - RESPOSTA DO ALUNO 1 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.2.



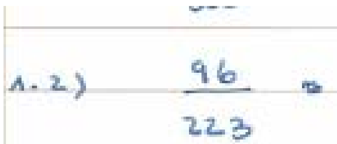
Há ainda a salientar que poucos alunos explicitam o raciocínio com recurso a representação esquemática; apenas 25% dos alunos da turma A o fizeram. A Figura 9 ilustra uma resposta.

FIGURA 9 - RESPOSTA DO ALUNO 2 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.2.



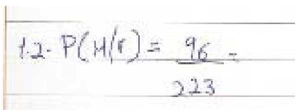
Salientam-se alguns exemplos de respostas de alunos que tendo acertado, o fizeram sem o rigor esperado. Foi considerada resposta sem rigor e com resultado correto, aquela que não apresenta qualquer explicação de suporte. Nesta situação há 1 aluno dos 14 que acertaram na resposta. A sua resposta, ilustrada na Figura 10, é curta e sem apresentação do valor final.

FIGURA 10 – RESPOSTA DO ALUNO 3 DA TURMA C, À QUESTÃO 1.2.



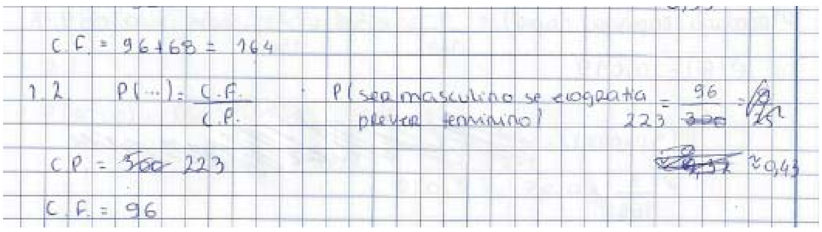
Uma resposta com pouco rigor, embora correta, como ilustrada na Figura 11, apresenta recurso à fórmula da probabilidade condicionada mas sem identificação rigorosa dos acontecimentos ou sem explicitação dos dados da tabela do enunciado. Observaram-se 2 respostas nessas condições entre as 11.

FIGURA 11 – RESPOSTA DO ALUNO 3 DA TURMA B, À QUESTÃO 1.2.



Na resposta com algum rigor, correspondente a 28% das respostas dos alunos envolvidos (i.e., 4 respostas), verifica-se que estes aplicam a lei de Laplace, sem qualquer referência à fórmula da probabilidade condicionada, como é exemplo a resposta apresentada na Figura12.

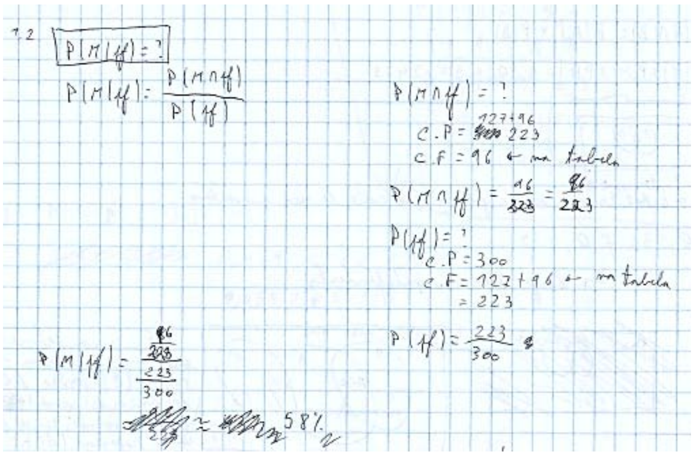
FIGURA 12 - RESPOSTA DO ALUNO 4 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.2.



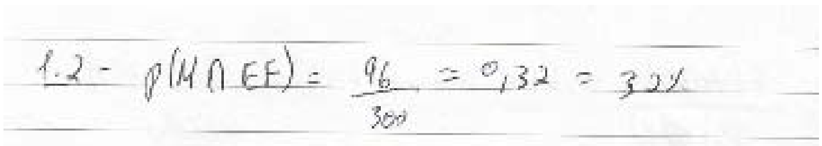
Os erros cometidos pelos alunos, 33 % dos alunos envolvidos, a saber: 15 % na turma A, 56% na turma B e 50% na turma C, devem-se essencialmente a erros de interpretação de dados, a erros de cálculo grosseiros ou a má leitura dos dados da tabela ou ainda por confusão de conceitos. Por exemplo, na Figura 13, ilustram-se confusão de conceitos entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta: na primeira situação (13.a) há o reconhecimento da fórmula que os relaciona, enquanto que na segunda (13.b) tal não acontece.

FIGURA 13 - RESPOSTA COM FALHAS: ALUNO 11 DA TURMA A (A., ACIMA), 8 DA TURMA B (B., ABAIXO), À QUESTÃO 1.2.

a.



b.



Sintetizando, na questão 1.2, onde se esperava a identificação e cálculo de uma probabilidade condicionada tendo por base uma esquematização dos dados sumariados sob a forma de tabela, quase metade dos alunos (47%) utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada. Contudo, nem todos eles o fizeram de forma correta, ou porque efetuaram cálculos erradamente ou por dificuldade em selecionar os dados adequados. São notórias as dificuldades em identificar o que é pedido, talvez porque a questão não está formalmente escrita, e ainda, confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. Saliente-se que todos os alunos responderam à questão, tendo-se verificado que os alunos do Ensino Profissional (turma B) e do Ensino Regular (turma C) apresentam tendência para respostas menos corretas com valores mais baixos (1 ou 2) do GD. Os alunos da turma C apresentam ainda tendência para valores mais baixos (0 ou 1) do GR.

1.2.2.3 PERGUNTA 1.3

Na pergunta 1.3 solicitou-se aos alunos que realizassem uma pequena composição e que comparassem duas situações: probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Ana é do sexo feminino e a probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Berta é do sexo masculino. Era expectável que os alunos se socorressem da fórmula de probabilidade condicionada e dos dados da tabela.

À semelhança das questões anteriores, foram elaboradas tabelas (Tabela 7 e Tabela 8) onde se sumariam o GD e o GR correspondente às respostas dadas pelos alunos à pergunta 1.3.

TABELA 7 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 1.3.

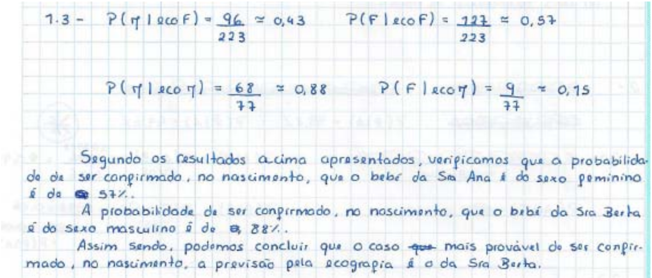
	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	1	3	0	1	15
B	2	4	0	1	1	1
C	0	3	1	0	1	9
Global	2	8	4	1	3	25

TABELA 8 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR DAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 1.3.

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turmas	**0**	**1**	**2**	**3**
A	1	1	2	11
B	0	1	0	0
C	0	2	4	3
Total	1	4	6	14

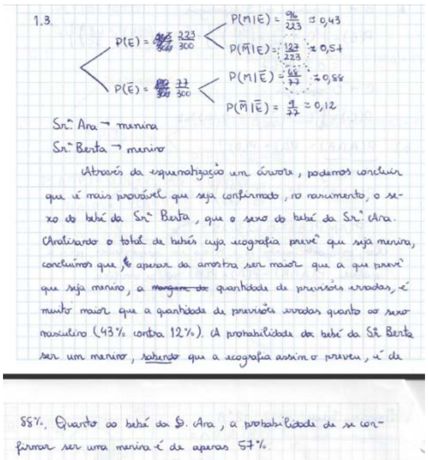
Face aos dados, pode-se concluir que pouco mais de metade dos alunos respondeu corretamente à questão 1.3, 58% dos alunos envolvidos: na turma A, 75%, na turma B, 11% (i.e., apenas 1 aluno), e na turma C, 64%, (Tabela 7). A utilização da fórmula da probabilidade condicionada, independentemente do resultado obtido foi a escolha de 28% dos alunos: na turma A, 55%, na turma B, 0%, e 7% na turma B. Constatou-se, mais uma vez, que nem sempre uma resposta certa continha rigor na sua formalização (Tabela 8). Pode observar-se situações (como ilustradas na Figura 14) em que os alunos obtiveram valor máximo tanto no grau de desempenho como no grau de rigor, correspondente a 35% dos alunos envolvidos sendo: 11 alunos da turma A, 1 da turma B e 2 da turma C.

FIGURA 14 - RESPOSTA DOS ALUNOS 12 DA TURMA C (À ESQUERDA) E 8 DA TURMA A (À DIREITA), À QUESTÃO 1.3.



Há ainda a salientar que dos 43 alunos analisados apenas 2 recorreram a representações esquemáticas. A Figura 15 fornece uma dessas respostas.

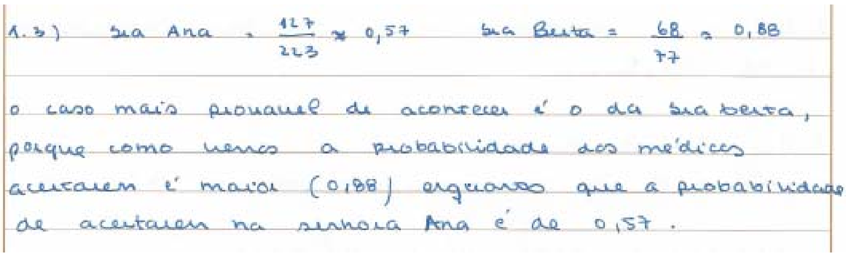
FIGURA 15 - RESPOSTA DO ALUNO 18 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.3.



Saliente-se alguns exemplos (Figura 16) de respostas de alunos que, tendo acertado na resposta, não o fizeram com o rigor máximo esperado. Na Figura 16.a é reportado um caso com inexistência de rigor, correspondendo a 2% das respostas dos alunos. Na Figura 16.b apresenta-se uma resposta correta, embora com pouco rigor pois estabelece relações mas sem referir, explicitamente, o conceito de probabilidade condicionada e sem recurso à fórmula da probabilidade condicionada para determinar a probabilidade de cada uma das situações; este tipo de respostas corresponde a 20 % do total de alunos envolvidos. Em relação a respostas corretas e com algum rigor, correspondente a 24% das respostas dos alunos envolvidos, têm, por exemplo, a Figura 16.c onde é aplicada a lei de Laplace, sem qualquer referência à fórmula da probabilidade condicionada.

FIGURA 16 - RESPOSTAS DOS ALUNOS: 3 DA TURMA C (A. NO TOPO), 10 DA TURMA A (B. NO CENTRO) E 11 DA TURMA C (C. NA BASE), À QUESTÃO 1.3.

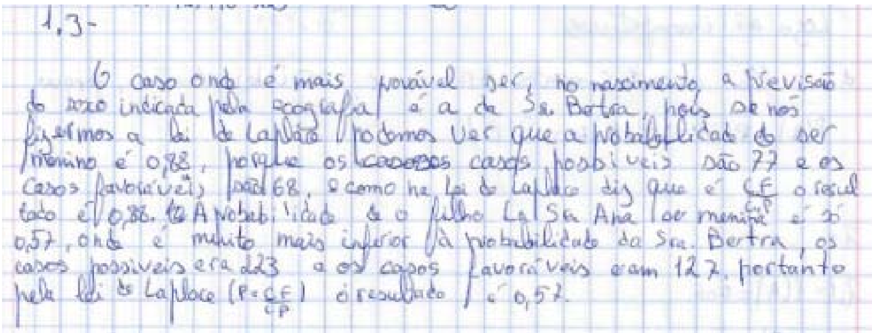
a.



1.3) Sra Ana = $\frac{127}{223} \approx 0,57$ Sra Berta = $\frac{68}{77} \approx 0,88$

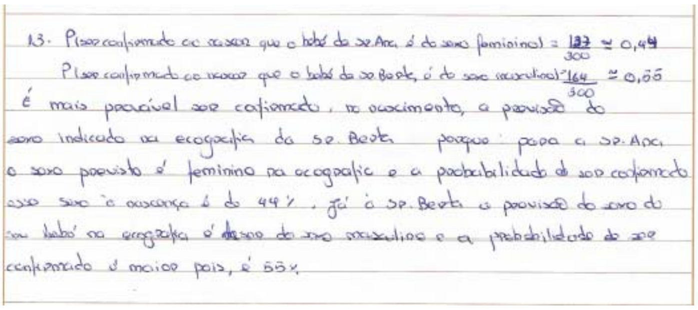
o caso mais provável de acontecer é o da sra berta, porque como vemos a probabilidade dos médicos acertarem é maior (0,88) enquanto que a probabilidade de acertarem na senhora Ana é de 0,57.

b.



1,3- O caso onde é mais provável ser, no nascimento a previsão do sexo indicada pela ecografia é a da Sr. Berta, pois se nós fizermos a lei de Laplace podemos ver que a probabilidade de ser menino é 0,88, porque os casos possíveis são 77 e os casos favoráveis são 68, e como na lei de Laplace diz que é $\frac{CF}{CP}$ o resultado é 0,88. A probabilidade do filho da Sra Ana ser menina é de 0,57, onde é muito mais inferior à probabilidade da Sra. Berta, os casos possíveis era 223 e os casos favoráveis eram 127, portanto pela lei de Laplace ($P = \frac{CF}{CP}$) o resultado é 0,57.

c.



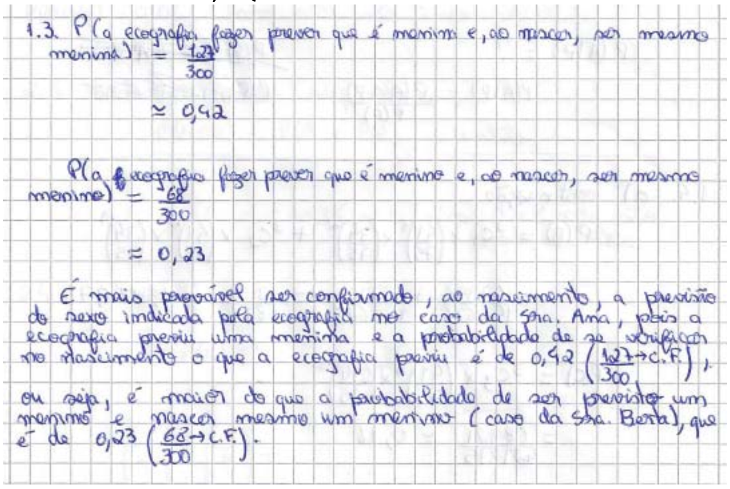
1.3. P(ser confirmado ao nascer que o bebé da sr. Ana é do sexo feminino) = $\frac{133}{300} \approx 0,44$

P(ser confirmado ao nascer que o bebé da sr. Berta é do sexo masculino) = $\frac{164}{300} \approx 0,55$

É mais provável ser confirmado, no nascimento, a previsão do sexo indicado na ecografia da sr. Berta porque: para a sr. Ana o sexo previsto é feminino na ecografia e a probabilidade de ser confirmado esse sexo à nascença é de 44%, já à sr. Berta a previsão do sexo do seu bebé na ecografia é de ser do sexo masculino e a probabilidade de ser confirmado é maior pois, é 55%.

Os erros cometidos por 42 % dos alunos envolvidos, a saber: 25% na turma A, 89% na turma B e 36% na turma C, devem-se essencialmente a falhas de interpretação do enunciado, a uma má leitura dos dados da tabela ou a conflito de conceitos. A Figura 17 mostra uma resposta nessas condições.

FIGURA 17 - RESPOSTA DO ALUNO 19 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.3.



1.3. P(a ecografia fazer prever que é menina e, ao nascer, ser mesmo menina) $= \frac{127}{300}$

$\simeq 0,42$

P(a ecografia fazer prever que é menino e, ao nascer, ser mesmo menino) $= \frac{68}{300}$

$\simeq 0,23$

É mais provável ser confirmado, ao nascimento, a previsão do sexo indicada pela ecografia no caso da Sra. Ana, pois a ecografia previu uma menina e a probabilidade de se verificar no nascimento o que a ecografia previu é de 0,42 $\left(\frac{127}{300} \to C.F.\right)$, ou seja, é maior do que a probabilidade de ser previsto um menino e nascer mesmo um menino (caso da Sra. Berta), que é de 0,23 $\left(\frac{68}{300} \to C.F.\right)$.

Sumariando os dados observados e acima descritos relativos às respostas à questão 1.3, poder-se-á dizer que, em termos gerais, a realização de uma composição sobre a temática probabilidade é um tópico fraco para alunos do Ensino Profissional (turma B), que apresentam tendência para valores mais baixos (0 ou 1) do GD. Quanto à argumentação apresentada nas composições nem sempre foi clara, concisa e objetiva. Na realidade, várias vezes o rigor demonstrado nos cálculos nem sempre foi coerente com a explanação escrita e, outras vezes, foi descrito não rigorosamente por palavras o que se realizara em cálculos. Realce-se que os alunos do Ensino Regular (turma B) apresentam maior dificuldade em se exprimirem, pois manifestam tendência para valores mais baixos (1 ou 2) do GR. É notória a dificuldade manifestada em expressar um raciocínio argumentativo coeso e coerente com os resultados obtidos.

1.2.2.4 PERGUNTA 1.4

A pergunta 1.4 envolve quatro alíneas. Para a resolução desta questão, solicitou-se, implicitamente, descrever o espaço dos resultados elementares, os quais não são equiprováveis. Na alínea a) solicitou-se aos alunos que calculassem a probabilidade de três acontecimentos para os quais seria necessário interpretá-los e defini-los em termos de reuniões de resultados elementares convenientes. Uma vez que os resultados elementares não eram equiprováveis, este pormenor dificultava o cálculo das três probabilidades pedidas na alínea a). Nas outras alíneas solicitou-se que distinguissem acontecimentos independentes (alíneas b) e d)) e acontecimentos incompatíveis (alínea c)). Nesta última, era solicitado que se mostrasse a incompatibilidade de dois acontecimentos.

Para facilitar a análise destes dados foi elaborada uma tabela (Tabela 9) que contém o nível de conhecimento dos alunos, medido em termos do GD das respostas dadas nas 4 alíneas da questão 1.4.

TABELA 9 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 1.4.

	Grau de desempenho das respostas nas alíneas a) / b) / c) / d)					
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0 / 1 / 1 / 4	4 / 2 / 1 / 1	9 / 0 / 0 / 0	1 / 2 / 0 / 0	3 / 0 / 0 / 3	3 / 15 / 18 / 12
B	0 / 0 / 3 / 7	3 / 5 / 3 / 1	3 / 0 / 0 / 0	1 / 1 / 0 / 0	0 / 3 / 1 / 1	2 / 0 / 2 / 0
C	0 / 2 / 6 / 7	3 / 1 / 0 / 0	5 / 0 / 0 / 0	2 / 1 / 0 / 0	4 / 0 / 0 / 0	0 / 10 / 8 / 7
Global	0 / 3 / 10 / 18	10 / 8 / 4 / 2	17 / 0 / 0 / 0	4 / 4 / 0 / 0	7 / 1 / 1 / 4	5 / 25 / 28 / 19

Observando a Tabela 9, e analisando as 3 turmas em conjunto (excluindo os alunos cujo GD é 5), tem-se que a moda do GD é: 2, 1, 0 e 0 para as alíneas a), b) c) e d), respetivamente. Estes valores baixos registados, em particular, nas alíneas c) e d), são reveladores de maiores dificuldades sentidas pelos alunos nesses itens, ou seja, nas alíneas envolvendo a noção de acontecimentos incompatíveis e acontecimentos independentes mas também nas alíneas onde é exigido argumentação e explicação de raciocínio.

Também foi notado que 40% dos alunos não responderam a pelo menos uma das alíneas da questão 1.4. Foram contabilizados os alunos que responderam corretamente a cada uma das alíneas da questão 1.4 (veja-se Tabela 10), tendo sido detetado, globalmente, uma menor percentagem para a primeira alínea. Tal se deveu à não observação, por parte dos avaliados, da não equiprobabilidade dos resultados elementares. Uma vez que essa alínea a) envolvia o cálculo da probabilidade de três acontecimentos distintos, averiguou-se se para algum deles teriam surgido menos soluções corretas. Efetuadas as contagens, foi construída a Tabela 11.

TABELA 10 - PERCENTAGEM DE ALUNOS CUJO GD DA RESPOSTA DE CADA ALÍNEA DA QUESTÃO 1.4 FOI AVALIADA COM COTAÇÃO MÁXIMA.

	Alíneas			
Turma	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
A	15%	75%	90%	60%
B	22%	0%	22%	0%
C	0%	71%	57%	50%
Global	12%	63%	65%	44%

Da Tabela 11 é de crer que maior dificuldade no cálculo da probabilidade do primeiro acontecimento (A) tenha ocorrido já que, para esse acontecimento, se observa tendência para um menor número de soluções corretas. Na verdade, dos acontecimentos pedidos, A, B e C, o acontecimento C é o que pode ser descrito de forma mais simples, envolvendo um número menor de resultados elementares, e é sobre esse acontecimento C que se regista um maior número de respostas corretas no cálculo da sua probabilidade (Tabela 11). Ao efetuar-se uma análise mais cuidada das Tabelas 10 e 11, pode-se aventurar que os alunos apresentam dificuldades, por existir um número significativo de alunos (40%) que não responde à questão, e, apesar de 37% dos alunos envolvidos terem respondido à questão, não conseguiram obter nenhuma das alíneas corretas. Esta situação, talvez se possa atribuir ao facto de na questão ser necessário recorrer ao cálculo da probabilidade da união. Uma vez mais verifica-se, que os resultados parecem apontar que os alunos do Ensino Profissional (turma B) apresentam maiores dificuldades em responder à questão, embora haja 2 alunos (22%) que respondem corretamente às três alíneas, que por isso obtiveram cotação máxima no GD, enquanto que nas turmas do Ensino Regular (turma A e C) se verifica que na primeira turma (turma A) apenas 3 alunos (15%) o fazem e, na outra turma (turma C) nenhum aluno o consegue.

TABELA 11 - NÚMERO DE ALUNOS COM RESPOSTA CORRETA, NO CÁLCULO DE PROBABILIDADES DE CADA ACONTECIMENTO

	Resposta correta somente no cálculo da probabilidade dos acontecimentos …							
Turma	… A	… B	… C	… todos	… A e B	… A e C	…B e C	… nenhum
A	1	0	8	3	0	0	4	4
B	0	0	0	2	0	0	1	6
C	0	1	6	0	0	1	0	6
Global	1	1	14	5	0	1	5	16

A Tabela 12 mostra que nem sempre uma resposta certa apresenta rigor na sua formalização.

TABELA 12 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR DAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS À QUESTÃO 1.4, POR ALÍNEAS.

	Grau de rigor das respostas corretas a) / b) / c) / d)			
Turma	0	1	2	3
A	0 / 0 / 0 / 0	0 / 3 / 3 / 0	0 / 3 / 6 / 5	3 / 9 / 9 / 7
B	0 / 0 / 0 / 0	0 / 0 / 1 / 0	2 / 0 / 1 / 0	0 / 0 / 0 / 0
C	0 / 0 / 0 / 0	0 / 0 / 1 / 2	0 / 7 / 0 / 2	0 / 3 / 7 / 3
Global	0 / 0 / 0 / 0	0 / 3 / 5 / 2	2 / 6 / 7 / 7	3 / 18 / 16 / 10

Em oposição, pode observar-se situações em que os alunos obtiveram valor máximo tanto no grau de desempenho como no grau de rigor. As percentagens de respostas nessas condições estão sumariadas na Tabela 13. Analisando os resultados das Tabelas 10 e 13 constata-se que, em termos globais, o desempenho dos alunos foi pior na questão 1.4a), quer a nível de GD, quer a nível de GR. Há a salientar que nenhum aluno da turma C teve cotação máxima, na alínea a), no GD, pois não houve nenhum aluno que tivesse determinado corretamente a probabilidade dos três acontecimentos. Foi visível a dificuldade dos alunos do Ensino Profissional (turma B), já que nenhum aluno apresentou valor máximo do GR, a qualquer alínea.

TABELA 13 - PERCENTAGEM DE ALUNOS CUJO GD E GR DA RESPOSTA DE CADA ALÍNEA DA QUESTÃO 1.4 FOI AVALIADA COM COTAÇÃO MÁXIMA.

	Alíneas			
Turma	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
A	15%	45%	45%	35%
B	0%	0%	0%	0%
C	0%	21%	50%	21%
Global	7%	42%	37%	23%

Na Figuras 18-21 apresentam-se exemplos de respostas de alunos nas diferentes alíneas cujo GD e GR da resposta de cada alínea da questão 1.4 foi avaliada com cotação máxima.

FIGURA 18 - RESPOSTA DO ALUNO 8 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA A)

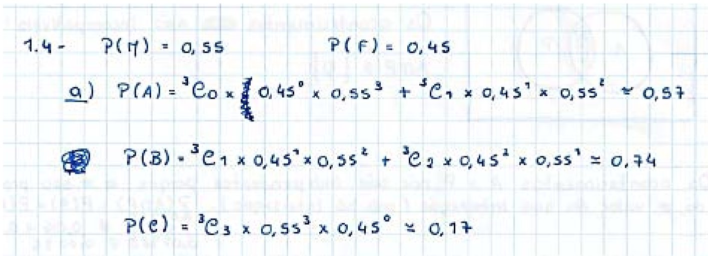


FIGURA 19 - RESPOSTA DO ALUNO 6 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA B)

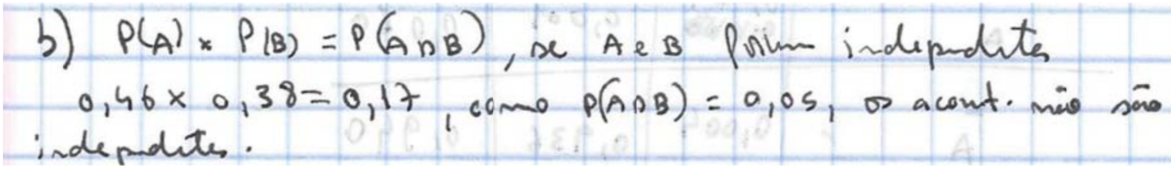


FIGURA 20 - RESPOSTA DO ALUNO 8 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA C)

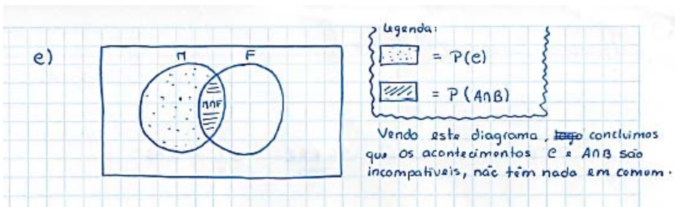
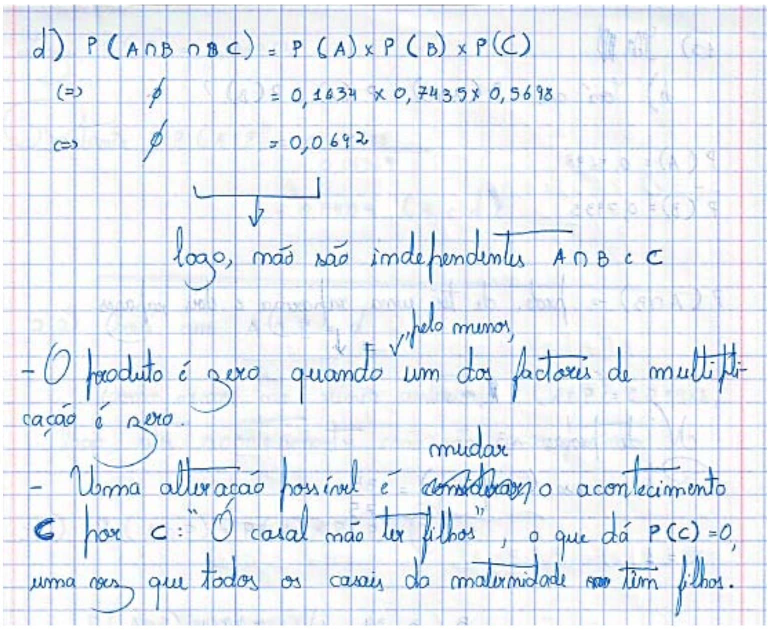


FIGURA 21 - RESPOSTA DO ALUNO 18 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA D)


d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

$(\Leftrightarrow) \quad \emptyset = 0,1634 \times 0,7435 \times 0,5698$

$(\Leftrightarrow) \quad \emptyset = 0,0692$

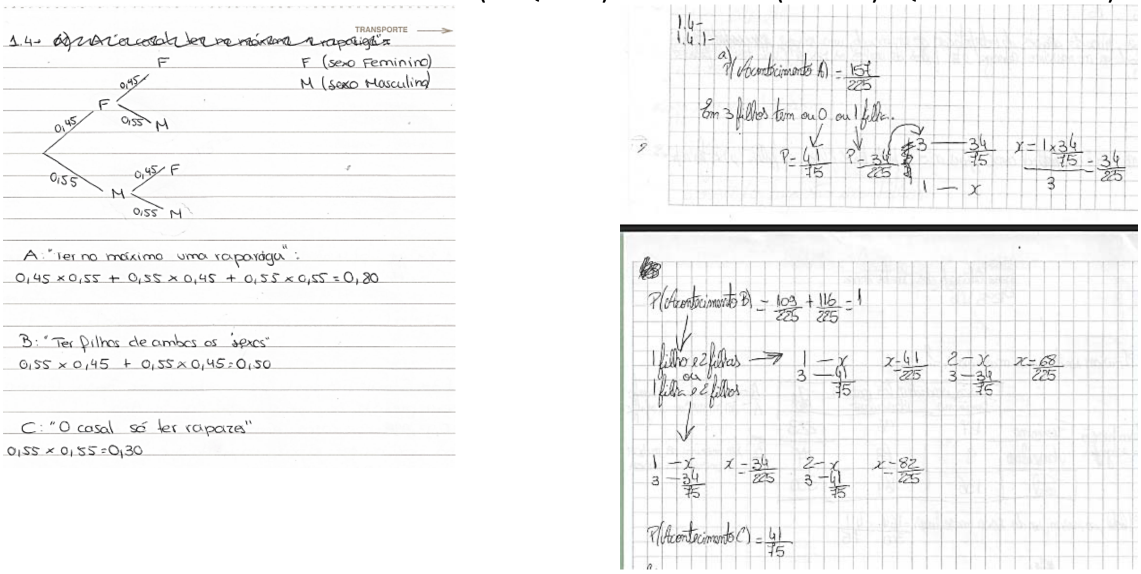
logo, não são independentes A ∩ B e C

- O produto é zero quando pelo menos um dos factores de multiplicação é zero.
- Uma alteração possível é ~~considerar~~ mudar o acontecimento C por C: "O casal não ter filhos", o que dá P(C) = 0, uma vez que todos os casais da maternidade têm filhos.

Há ainda a salientar que poucos alunos recorreram a uma representação esquemática. Apenas nas alíneas b) e c) alguns alunos dos 20 da turma A assim o fizeram, concretamente, 2 e 3 alunos, respetivamente. Salienta-se ainda que dois alunos da turma A recorreram à Distribuição Binominal para resolverem a alínea a).

Nesta pergunta 1.4 verificou-se que os alunos não apresentaram respostas tão claras e rigorosas como nas anteriores, por isso, é importante proceder à análise dos erros cometidos. Relativamente à alínea a) pretendia-se que os alunos evidenciassem o espaço de resultados e que reconhecessem que os acontecimentos "ser do sexo masculino" e "ser do sexo feminino" não eram equiprováveis. Era expectável que no cálculo da probabilidade simples de cada um dos acontecimentos, A, B e C, tivessem em conta a independência entre o sexo dos irmãos e que tais probabilidades fossem determinadas com recurso ao espaço de resultados favoráveis a cada uma das situações. Foram cometidos erros diversos, essencialmente por falhas na interpretação dos dados, por 60% dos alunos envolvidos no estudo: da turma A, 55%; turma B, 44%; turma C, 79%. Por desconhecimento da noção de probabilidade (4 % e todos da turma B) e por erro de cálculo, 28% dos alunos envolvidos no estudo: 30% na turma A, 33% na turma B e 21% na turma C. Nas Figuras 22 - 27 exibem-se algumas destas situações.

FIGURA 22 - RESPOSTA DOS ALUNOS 14 DA TURMA C (À ESQUERDA) E 17 DA TURMA A (À DIREITA) À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA A).

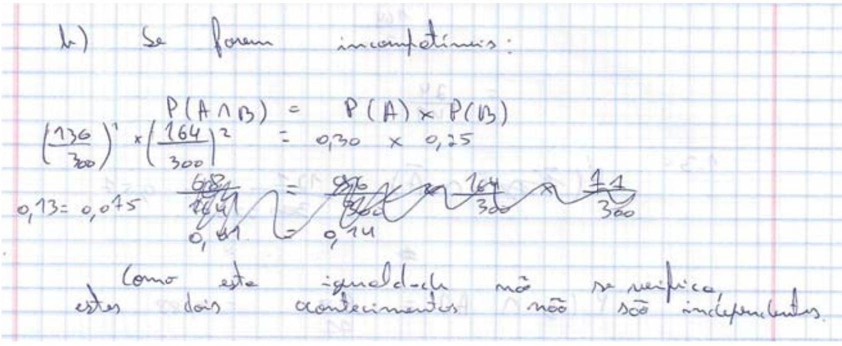


Na Figura 22 pode-se observar que o aluno 14 da turma C, apresenta a construção de um esquema inacabado, já que apenas considera a existência de dois filhos e não três como solicitado e, o aluno 17 da turma A, obtém a probabilidade dos acontecimentos segundo uma proporcionalidade direta, sem ter em conta que os acontecimentos não são equiprováveis.

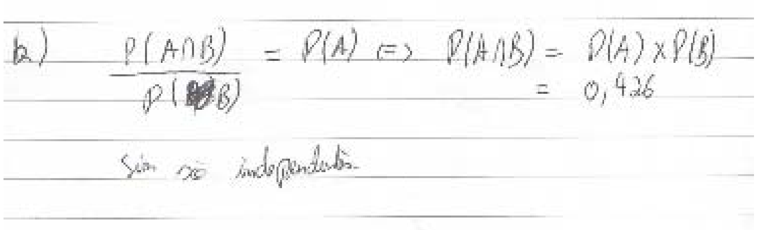
No caso da alínea b) pretendia-se averiguar em que medida os alunos sabiam aplicar o conceito de independência e era expectável que os alunos calculassem a probabilidade conjunta e depois as probabilidades marginais e que, ao relacioná-las, respondessem em conformidade. De facto existe um grande número de alunos (49%) cujas respostas aplicam a condição necessária e suficiente de independência: 70 % na turma A, 56% na turma B e 14% na turma C e há muitos alunos (44%) que apenas recorrem à definição de acontecimentos independentes: 25% na turma A, 67% na turma B e 57% na Turma C. A Figura 23 ilustra três casos em que os alunos não responderam de modo rigoroso ou correto: na primeira situação (a.) é visível a facilidade com que se trocam os conceitos de independência e incompatibilidade de acontecimentos, embora aplique bem a condição necessária e suficiente de independência; nas duas últimas, em (b.) o aluno revela confusão na compreensão intuitiva de probabilidade condicionada e independência e em (c.) o aluno denota não entender a noção probabilística associada ao conceito de independência.

FIGURA 23 - RESPOSTAS DOS ALUNOS: 15 DA TURMA A (A. NO TOPO), 8 DA TURMA B (B. NO CENTRO) E 11 DA TURMA C (C. NA BASE) À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA B).

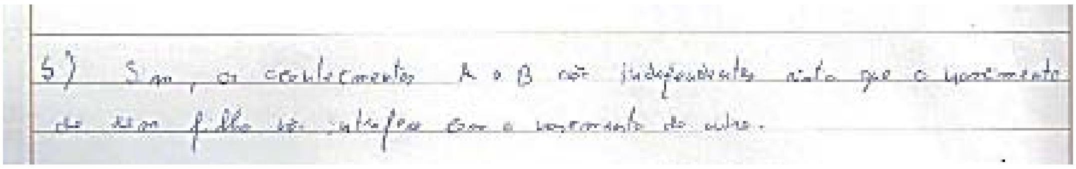
a.



b.

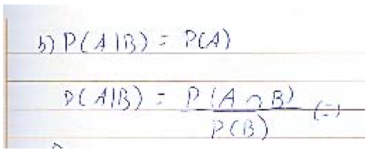


c.



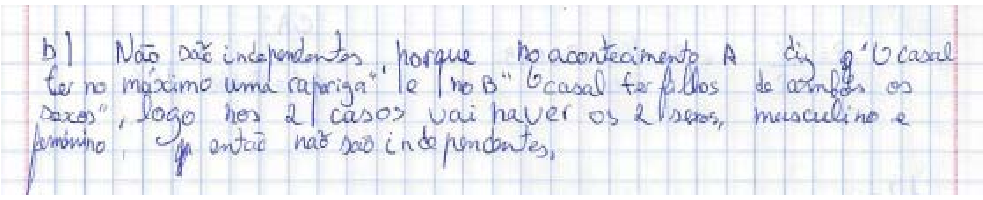
Há dois alunos que iniciam uma estratégia adequada, abandonando-a depois, como ilustra a Figura 24.

FIGURA 24 - RESPOSTA DO ALUNO 4 DA TURMA B, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA B).



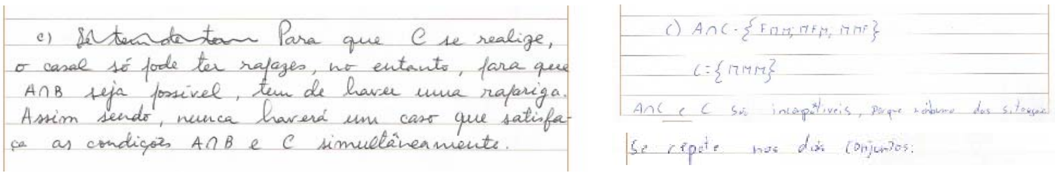
Os alunos ao realizarem a sua resposta respondem de forma correta à questão, no entanto ao procederem à justificação demonstram desconhecer o conceito de acontecimentos independentes, 74% dos alunos envolvidos: 85% na turma A, 44% na turma B e 79% na turma C. Também, alguns, 23%, revelam enorme confusão entre acontecimentos independentes e incompatíveis, já que apenas é referido a existência de elementos comuns aos dois conjuntos, sem nunca determinarem a probabilidade conjunta e as probabilidades marginais: 25% na turma A, 22% na turma B e 21% na turma C, como se ilustra na Figura 25.

FIGURA 25 - RESPOSTA DO ALUNO 10 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA B)



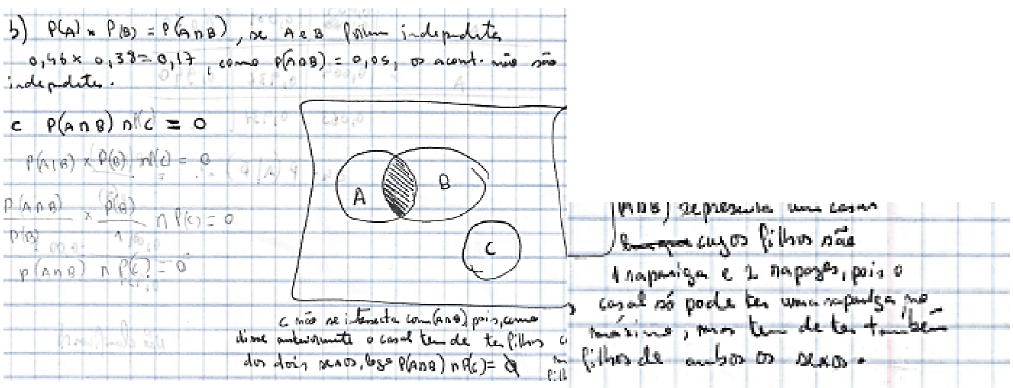
Em relação à alínea c), correspondente à noção de incompatibilidade, duas respostas eram esperadas: i) recorrendo à interpretação textual dos três acontecimentos e à observância da impossibilidade de se realizarem simultaneamente, ou ii) verificando os elementos comuns aos acontecimentos em causa após a identificação dos elementos de cada acontecimento. Refira-se que 47% dos alunos optaram por descrever a situação apresentada sem recurso à formalização, a saber, 60% na turma A, 33% na turma B e 36% na turma C. A Figura 26 ilustra duas respostas com esses dois tipos de abordagens.

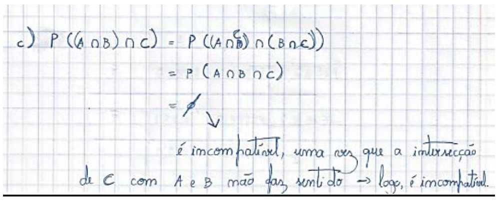
FIGURA 26 - RESPOSTAS DOS ALUNOS 12 DA TURMA C (À ESQUERDA) E 4 DA TURMA B (À DIREITA), À QUESTÃO 1.4 ALÍNEA C)

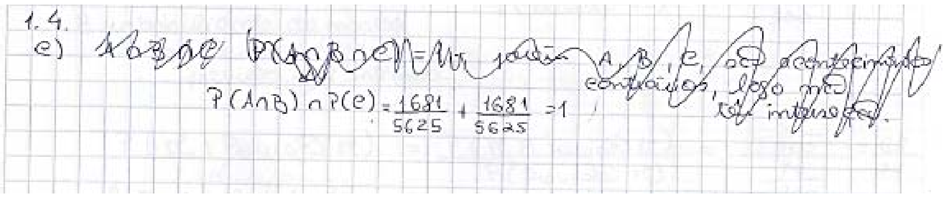


Salienta-se que há diversas respostas, com resultado final certo ou errado, onde claramente os alunos confundem, na noção de incompatibilidade, acontecimentos com a probabilidade da sua ocorrência, como se ilustram na Figura 27 e 28% dos alunos referem uma probabilidade para expressarem a incompatibilidade de acontecimentos: 30% na turma A, 33% na turma B e 21% na turma C, como ilustra a Figura 27

FIGURA 27 - RESPOSTAS, COM SOLUÇÃO FINAL CERTA MAS FORMALIZAÇÃO ERRADA, DOS ALUNOS 6 (ACIMA), 1 (CENTRO), AMBOS DA TURMA A, E RESPOSTA, ERRADA, DO ALUNO 14 DA TURMA A, À QUESTÃO 1.4, ALÍNEA C).







Por fim, relativamente à alínea d), era expectável que as respostas fossem seletiva já que esta pergunta, apesar de corresponder a uma demonstração simples, implica descrever consequências dos factos observados nas duas alíneas anteriores e, a partir daí, sugerir novas circunstâncias onde a independência fosse viável. Na realidade, responderam a esta alínea d) apenas 58% dos alunos envolvidos no estudo. A maior dificuldade revelada pelas suas respostas manifestou-se a nível da sugestão que teriam que dar para um outro acontecimento, em que se verificassem as condições solicitadas. Saliente-se que apenas 44%, dos alunos que responderam à questão, fizeram essa referência, sendo 50% dos alunos da turma A, e 43% da turma C.

1.3 PROBLEMA 2 RESOLVIDO PELOS ALUNOS DO 12.º ANO

A prova implementada no Ensino Secundário contém dois problemas, como já referido. Nesta secção vai ser feita uma breve referência aos objetos e relações que intervém na solução do segundo problema.

1.3.1 ANÁLISE DA RESPOSTA SEGUNDO O ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

No Quadro 9 apresenta-se a configuração dos objetos e ralações primárias que intervém na solução do segundo problema.

QUADRO 9 - OBJETOS E RELAÇÕES PRIMÁRIAS DO PROBLEMA 2

Linguagem:

Verbal (termos e expressões)

- Acontecimentos
- Intersecção de acontecimentos
- União de acontecimentos
- Probabilidade simples
- Probabilidade conjunta
- Probabilidade da união
- Probabilidade condicionada
- Cálculo de probabilidades

Simbólica

P: “rato ter teste positivo”
A: “rato ser portador das bactérias”
P^C: “rato ter teste negativo”
A^C: “rato não ser portador de bactérias”

$P(P)$, $P(P^c)$, $P(A)$, $P(A^C)$

$P(A| P^C)$, $P(P^C| A^C)$, $P(P|A)$

$P(A\cap P)$, $P(A^C\cap P)$

$P(A\cap P^C \cup A^C \cap P)$

$P=(A\cap P) \cup(A^C \cap P)$

Numérica

- Cálculo de probabilidades
- Operações com números racionais

Exemplos:

(2.1) $P\ (A|P) = \frac{P(A\cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}05988}{0{,}06364} = 0{,}940918$, pois
$P(A\cap P) = P(A)\times P(A|P) = 0{,}06 \times 0{,}998 = 0{,}05988$, uma vez que
$P(P) = P(A\cap P^C \cup A^C\cap P) =$
$= P(A\cap P) + P(A^C\cap P) =$
$= 0{,}05988 + P(A^C) \times P(P|A^C) =$
$= 0{,}05988 + (1-0{,}06)\times(1-0{,}996) =$
$= 0{,}06364$

(2.3) $P(A)\times P(P) = 0{,}065 \times 0{,}06364 = 0{,}003818$

(2.4) $P(P^C)$ 1- $P(P) = 1-0{,}06364 = 0{,}93636$

Expressa

Ajuda

Situação Problema: enunciado das questões do problema 2

Motivação

Resolução

Conceitos/definições

Preliminares

- Acontecimento complementar [2.1, 2.4]
- Acontecimentos simples, incompatíveis, independentes [2.2, 2.3]
- Intersecção de acontecimentos [2.1, 2.2, 2.4]
- União de acontecimentos [2.1, 2.4]
- Probabilidade simples [2.1, 2.3, 2.4]

Decorrentes

- Probabilidade simples; [2.1, 2.3, 2.4]
- Probabilidade conjunta; [2.1, 2.2, 2.3, 2.4]
- Probabilidade da união; [2.1, 2.4]
- Probabilidade condicionada; [2.1, 2.3, 2.4]
- Propriedades da probabilidade;

Propriedades/proposições

Preliminares

- A e P são acontecimentos independentes se a ocorrência de um deles não interfere, em termos probabilísticos, na realização do outro.
- $A\cap P$ são acontecimentos disjuntos, mutuamente exclusivos ou incompatíveis se a realização de um deles implica a não realização do outro.
- P^C é o acontecimento contrário do acontecimento P e realiza-se se e só se P não se realiza.
- Acontecimento união dos acontecimentos A e P é o acontecimento que se realiza se e só se ocorrer um pelo menos dos acontecimentos A ou P
- Acontecimento interseção dos acontecimentos A e P é o acontecimento que se realiza se e só A e P se realizarem simultaneamente.
- Acontecimento certo realiza-se sempre qualquer que seja o resultado da experiência e o acontecimento impossível nunca se realiza.

Decorrentes

- A é um acontecimento qualquer, $P(A) \geq 0$, $P(A) = 1$ se A acontecimento certo e $P(A) = 0$, se A acontecimento impossível.
- $P(A\cap P) \neq P(A|P)$
- $P(A|P) \neq P(P|A)$
- para qualquer que seja A e P tem-se, $P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A\cap P)$.
- A e P são independentes se e só se $P(A\cap P) = P(A) \times P(P)$.
- $A\cap B$ e C são incompatíveis se e só se $A\cap B) \cap C = \phi$;nesse caso $P((A\cap B) \cap C) = 0$, pelo que $P((A\cap B)\cup C) = P(A\cap B) + P(C)$.
- A e A^C são acontecimentos contrários ou complementares se e só se $A\cup A^C = \Omega$ e $A \cap A^C = \phi$; logo $P(A\cup A^C) = 1$ e $P(A \cap A^C) = 0$.
- sendo A um acontecimento qualquer, a probabilidade do acontecimento contrário a A, A^C, é $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Procedimentos

- Traduzir o problema de linguagem corrente para simbólica.
- Identificar os dados do problema a que se referem cada um dos acontecimentos
- Identificar a probabilidade pedida e usar corretamente a notação científica
- Calcular a probabilidade pedida: simples, conjunta, união e condicionada.
- Identificar acontecimentos incompatíveis, Distinguir acontecimentos Independentes e acontecimentos incompatíveis
- Operar com números racionais

Fundamentação

Justificação

Argumentos

- Cálculo matemático (da probabilidade) e Raciocínio dedutivo

1.3.2 ANÁLISE DESCRITIVA E INTERPRETATIVA DAS RESPOSTAS

O problema proposto é uma aproximação a uma situação de vida real, em que os dados estão apresentados em texto sem qualquer formalização matemática. Estes dados estão em percentagem e, pretende-se, uma vez mais, que o aluno calcule as seguintes probabilidades: probabilidade simples, probabilidade conjunta e probabilidade condicionada, e investigue sobre a independência e a incompatibilidade de alguns acontecimentos. A grande alteração de conteúdo estrutural que ocorre da primeira situação-problema reside no facto de se ter alterado a forma como se fornecem os dados: de tabela para forma textual.

Uma vez mais a linguagem utilizada é a verbal (termos e expressões), simbólica (expressar acontecimentos) e numérica (cálculo de probabilidades). É com eles que se devem constituir uma ajuda para a compreensão da situação-problema.

Refira-se que a situação-problema motiva a abordagem de conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos, alguns já abordados no Ensino Básico (acontecimento, probabilidade simples e probabilidade conjunta). Os procedimentos que fundamentam os argumentos apresentados, são estes que por sua vez justificam os procedimentos adotados. O domínio destes conceitos/definições e propriedades /proposições, por parte dos alunos, vai permitir resolver o problema e facilitar a fundamentação e argumentação.

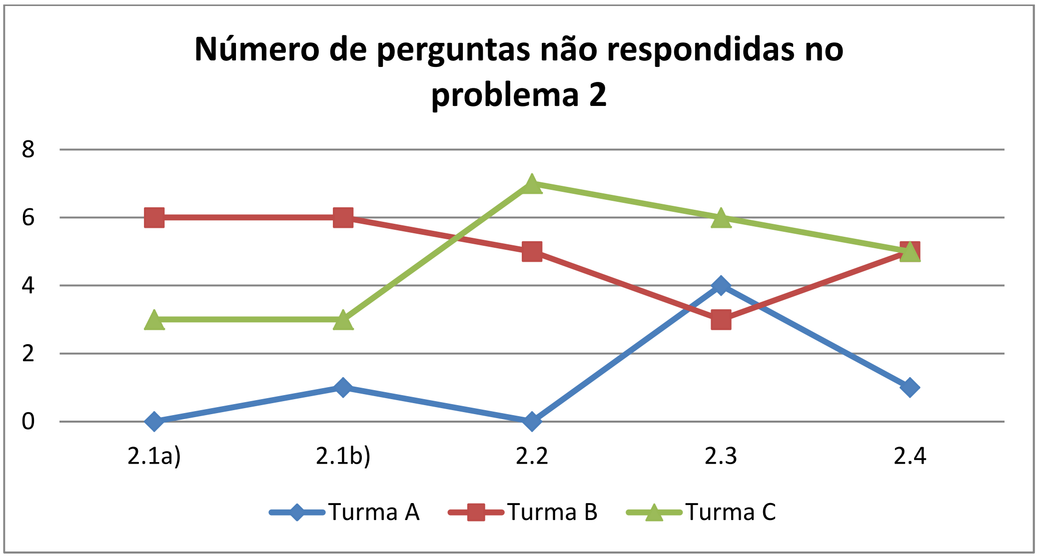
A seguir, analisa-se em detalhe as respostas e raciocínios apresentados pelos alunos a cada uma das perguntas do problema 2. Dar-se-á ênfase à qualidade das respostas em termos do grau de desempenho (GD) e do grau de rigor (GR) discutido no capítulo anterior.

Em primeiro lugar, salienta-se que 56% dos alunos não respondem a pelo menos uma das questões. Uma vez mais, é a turma A a que apresenta menor tendência em deixar questões em branco, de acordo com a Tabela 14 e Gráfico 2. A Tabela 14 fornece a frequência de alunos que não respondem a uma, duas, três ou quatro, das quatro questões da pergunta 2, por turma. O Gráfico 2 mostra a frequência de respostas não dadas a cada uma das questões da pergunta 2, por turma.

TABELA 14 - NÚMERO DE ALUNOS QUE NÃO RESPONDEM, A PELO MENOS UMA QUESTÃO DA SEGUNDA SITUAÇÃO PROBLEMA.

	Número de questão não respondidas			
Turma	**Uma**	**Duas**	**Três**	**Quatro**
A	4	1	0	0
B	1	2	2	3
C	3	4	0	3
Global	8	8	2	6

GRÁFICO 2 - GRÁFICO COM A FREQUÊNCIA ABSOLUTA DE RESPOSTAS NULAS AO PROBLEMA 2, POR QUESTÃO E PARA AS TRÊS TURMA.



1.3.2.1 Pergunta 2.1

Relativamente à pergunta 2.1, os alunos tiveram que calcular duas probabilidades: uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada. A solicitação destas duas probabilidades estava em notação simbólica. Era expectável que os alunos previamente retirassem os dados fornecidos textualmente no enunciado com o auxílio de um algum esquema, tabela, diagrama em árvore, ou outro para facilitar a interpretação da questão. Com vista a investigar eventuais diferenças na capacidade dos alunos responderem à determinação de uma probabilidade conjunta versus uma probabilidade condicionada, a análise das respostas à questão 2.1 será subdividida em duas alíneas: 2.1 a) cálculo da probabilidade conjunta e 2.1 b) cálculo da probabilidade condicionada. Na Tabela 15 encontra-se sumariado a avaliação do desempenho dos alunos através do GD, e na Tabela 16 o rigor das respostas corretas através do GR nessa pergunta 2.1.

TABELA 15 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 2.1

	Grau de desempenho das respostas dadas nas alíneas2.1 a) / 2.1b)					
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0 / 1	1 / 1	2 / 5	1 / 3	2 / 1	14 / 9
B	6 / 6	1 / 1	0 / 1	1 / 3	0 / 0	1 / 0
C	3 / 3	4 / 6	1 / 0	0 / 1	0 / 0	6 / 4
Global	9 / 10	6 / 8	3 / 6	2 / 7	2 / 1	21 / 13

TABELA 16 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR AVALIADO NAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 2.1

	Grau de rigor das respostas corretas dadas corretas nas alíneas 2.1a) / 2.1b)			
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**
A	0 / 0	0 / 0	3 / 0	11 / 9
B	0 / 0	0 / 0	1 / 0	0 / 0
C	0 / 0	0 / 1	0 / 0	6 / 3
Global	0 / 0	0 / 1	4 / 0	17 / 12

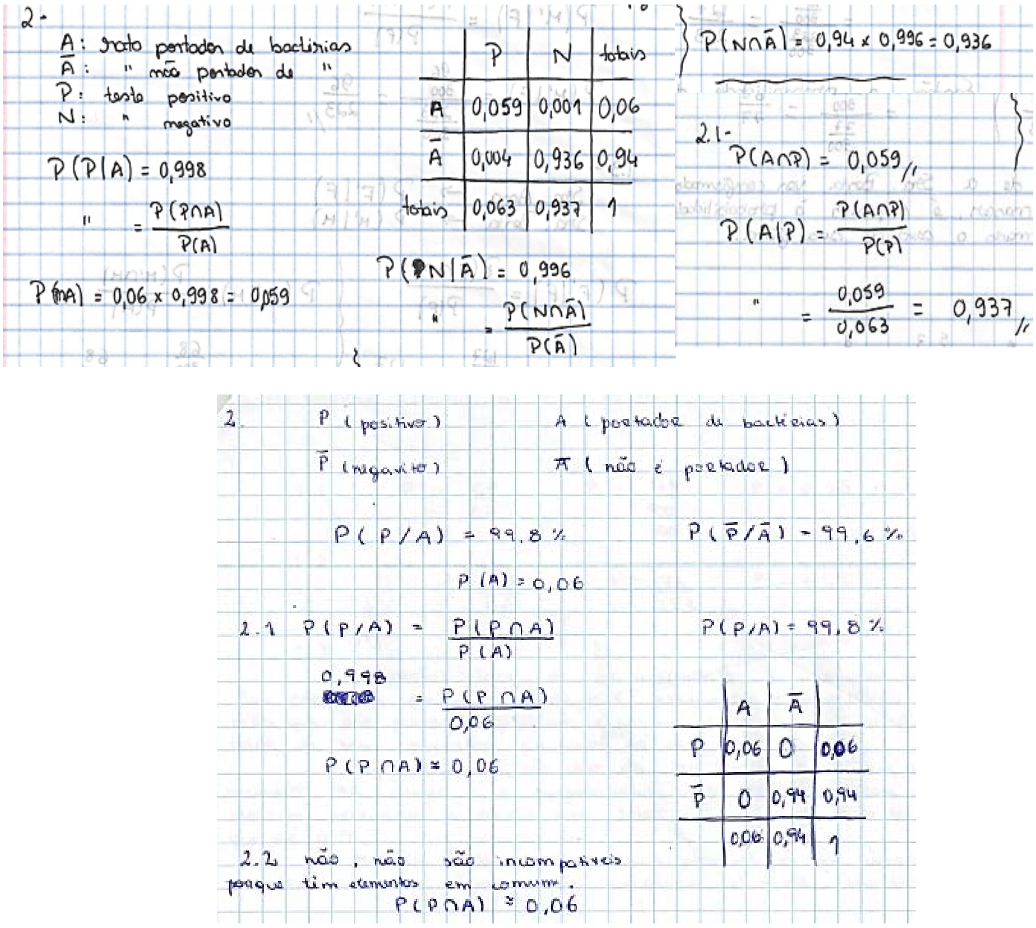
Da Tabela 15, 1ª coluna (GD = 0) deduz-se que há alunos que não respondem a pelo menos uma das alíneas: 2.1.a), 2.1.b). Curiosamente, na turma B o aluno que não responde à alínea a), também não responde à alínea b); na turma C esta situação já não se verifica, isto é, há um aluno que não responde à alínea a), mas responde à alínea b) embora incorretamente. Outro aluno responde corretamente e de forma bastante rigorosa, à alínea a), no entanto não responde a alínea b). Refira-se também que 44% do total de alunos envolvidos: 80% dos alunos da turma A, 0% da turma B e 29% dos alunos da turma C, responderam de forma correta.

Observando a Tabela 15, e analisando as 3 turmas em conjunto, tem-se que a moda do GD é 5 para as duas alíneas da questão 2.1. Contudo, para a turma B, a moda do GD é zero, o que denuncia dificuldade sentida pelos 9 alunos do Ensino Profissional na resolução nessa questão. Destaque-se que a questão em causa pede o cálculo de uma probabilidade conjunta e de uma probabilidade condicionada partindo de um enunciado sem uma esquematização prévia dos dados. Confrontando ainda as frequências dos valores de GD e de GR obtidos globalmente (linha dos Totais das Tabelas 15 e 16), entre as alíneas a) e b), constatam-se frequências mais elevadas para os valores mais baixos de GD na questão b) e frequências mais elevadas para os valores mais elevados de GD e GR na alínea a). Este facto indicia, por outro lado, que os alunos que tentam esquematizar o enunciado, manifestaram maior dificuldade em responder acertadamente à alínea b), cálculo de uma probabilidade condicionada, do que no cálculo de um probabilidade conjunta (alínea a)).

Da Tabela 16, constata-se que nem sempre numa resposta certa existe rigor na sua formalização em termos de procedimento, argumentação e linguagem usada. Uma vez mais, a turma B apresenta tendência para valores mais baixos (0 ou 1) do GD e, relativamente ao GR, não demonstra tendência para a obtenção de valor máximo (3). Salienta-se que na alínea a), os alunos da turma C, que responderam corretamente, foram aqueles que obtiveram o grau de rigor máximo. Esta situação repete-se na alínea b), mas para os alunos da turma A. Na turma B, não houve nenhum aluno que acumulasse rigor máximo com desempenho máximo em nenhuma das alíneas da questão 2.1.

A maioria dos erros que são cometidos nesta questão devem-se, essencialmente, ao facto de os alunos revelarem dificuldades na construção de uma representação esquemática (tabela, diagrama ou outro) dos dados fornecidos no enunciado. A Figura 28 ilustra esta situação: na resposta apresenta no topo da figura, é revelado um raciocínio correto, enquanto que na outra resposta é notória a dificuldade na construção da tabela, conduzindo a uma resposta errada.

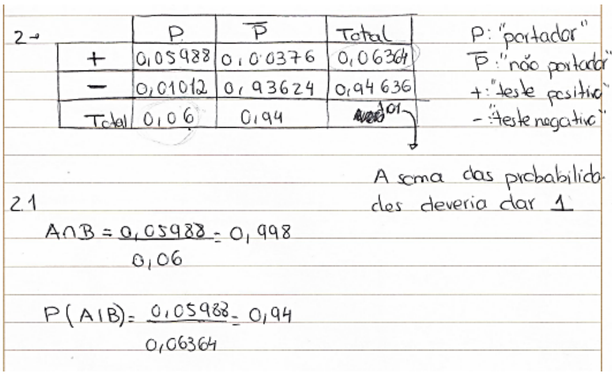
FIGURA 28 - RESPOSTA DOS ALUNOS: 7 (NO TOPO) E 3 (NA BASE) DA TURMA A, À QUESTÃO 2.1



Salienta-se que este tipo de erro ou incapacidade, de discernir corretamente, em termos matemáticos, os dados de um enunciado textual, afetou 20% dos alunos da turma A e 29% dos alunos da turma C, na resposta à alínea a). No caso da alínea b), este "erro" influenciou um maior número de alunos, na turma A 35% dos alunos enquanto que na turma C se manteve nos 29%.

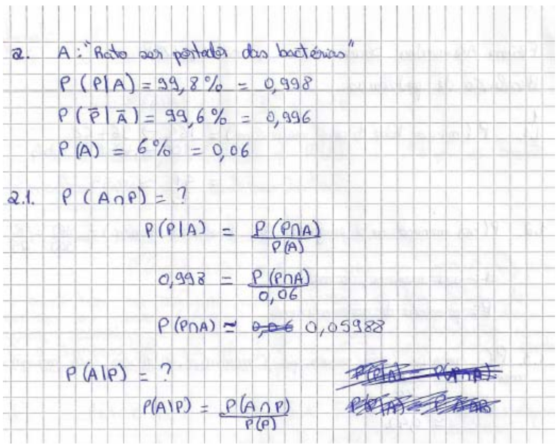
Foi detetado um outro tipo de erro, confusão na aplicação da fórmula da probabilidade conjunta, já que da definição de probabilidade condicionada se pode deduzir que $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$, detetado na resposta de um aluno da turma A (5%) e dois alunos da turma C (14%). A Figura 29 mostra uma dessas respostas.

FIGURA 29 - RESPOSTA DO ALUNO 14 DA TURMA C, À QUESTÃO 2.1



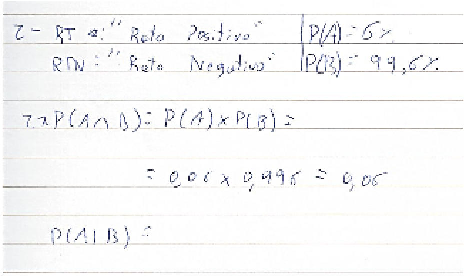
Há alunos que iniciam um raciocínio de forma correta, mas depois não o completam ou, completam-no de forma errada. Um caso é ilustrado na Figura 30, onde o aluno não completa a resolução por aparente impossibilidade de obter o denominador na definição da probabilidade condicionada. O cálculo desse denominador obriga à recorrer à Lei da Probabilidade Total, a qual é menos intuitiva se não se traduzir esquematicamente o problema com recurso a forma de um diagrama de árvore ou de uma tabela, por exemplo.

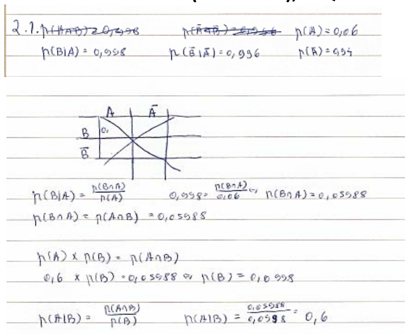
FIGURA 30 - RESPOSTA DO ALUNO 19 DA TURMA A, À QUESTÃO 2.1



Outra situação que também foi observada, nas respostas analisadas na determinação da probabilidade conjunta, prende-se com o facto de os alunos considerarem o pressuposto da independência dos acontecimentos sem tal ser válido ou previamente verificado. Para dois alunos (22%) da turma B e três alunos (21%) da turma C, foi esta a opção de resolução como ilustra a Figura 31.

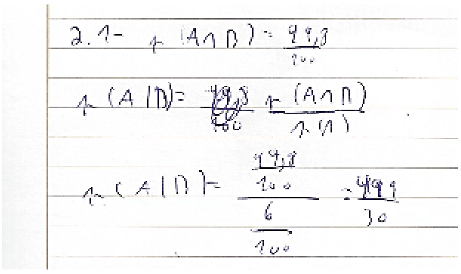
FIGURA 31 - RESPOSTA DOS ALUNOS: ALUNO 4 DA TURMA B (À ESQUERDA) E ALUNO 5 DA TURMA C (À DIREITA), À QUESTÃO 2.1

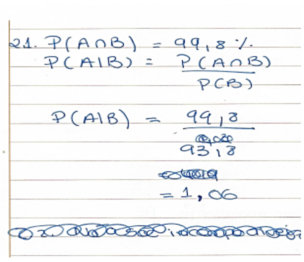




Constataram-se ainda erros graves neste nível de ensino, nomeadamente, de um aluno (11%) da turma B e outro (7%) da turma C ao não terem sido críticos face ao resultado obtido de uma probabilidade dá valor superior à unidade. A Figura 32 ilustra esta situação**.**

FIGURA 32 - RESPOSTA DOS ALUNOS: 4 DA TURMA B (À ESQUERDA) E 1 DA TURMA C (À DIREITA), À QUESTÃO 2.1





Ainda das análises às respostas da questão 2.1, poder-se-á dizer que, em termos gerais, a solicitação do cálculo de uma probabilidade condicionada e de uma probabilidade conjunta, usando no enunciando uma notação matemática explícita, facilitou a identificação das probabilidades solicitadas. Contudo, os dados fornecidos no enunciado careciam de uma representação esquemática, o que condicionou as respostas dos alunos, já que estes manifestaram muita dificuldade em realizar a questão 2.1. Uma vez mais, os alunos do Ensino Profissional (turma B) revelaram mais dificuldades na questão, como se constata com o elevado número de alunos que não responderam à questão (6 alunos , 67%).

1.3.2.2 Pergunta 2.2

Na resolução da questão 2.2, solicitou-se averiguar se dois acontecimentos dados eram incompatíveis. Esperava-se que depois de calcularem a probabilidade da intersecção dos acontecimentos, verificassem, que esta probabilidade era positiva e assim, chegassem à conclusão, por absurdo, que tais acontecimentos não poderiam ser incompatíveis, com uma justificação adequada.

À semelhança das questões anteriores, foram elaboradas tabelas (Tabela 17 e Tabela 18) onde se sumariam o GD e o GR correspondente às respostas dadas pelos alunos à pergunta 2.2.

TABELA 17 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 2.2

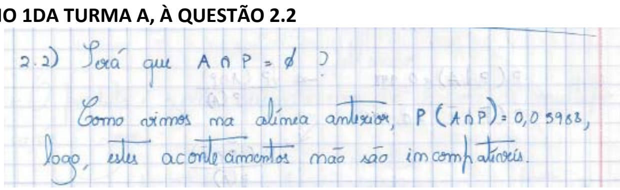
	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	0	0	1	0	19
B	5	0	0	0	2	2
C	7	0	0	0	1	6
Global	12	0	0	1	3	27

TABELA 18 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR AVALIADO NAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 2.2.

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**
A	2	5	4	7
B	2	0	0	0
C	1	2	1	3
Global	5	7	5	10

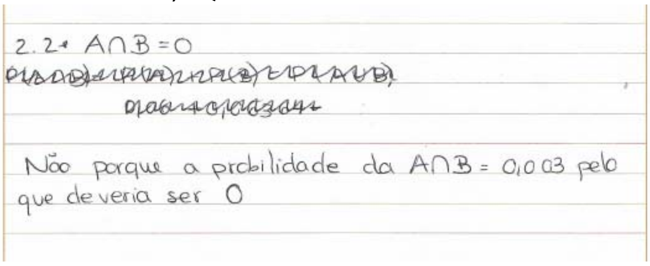
Face à Tabela 17, pode concluir-se que mais de metade dos alunos respondeu corretamente (i.e., GD máximo) à questão 2.2, 63% do total de alunos envolvidos: na turma A, 95%, na turma B, 22% (i.e., apenas 2 aluno), e na turma C, 43%.Constata-se, ainda, que cerca de um quarto dos alunos não respondeu a esta questão sendo, na turma A, 0% , na turma B, 56%, e na turma C, 50%. Verifica-se também, que nem sempre uma resposta certa continha rigor na sua formalização (Tabela 18). Na realidade, das respostas dos alunos, 63% obtiveram cotação máxima no GD, contudo destes, 37% obtiveram cotação máxima também no GR. Pode observar-se situações em que os alunos obtiveram valor máximo tanto no GD como no GR, correspondente a 23% dos alunos envolvidos sendo: 7 alunos da turma A, 0 da turma B e 3 da turma C. Na Figura 33 é ilustrado um caso com GD=5 mas GR=2 já que o aluno não revela explicitamente que se um acontecimento tem probabilidade não nula então esse acontecimento nunca poderá coincidir com o acontecimento impossível.

FIGURA 33 - RESPOSTA DO ALUNO 1DA TURMA A, À QUESTÃO 2.2



Relativamente às respostas consideradas com GR nulo, referem-se a respostas contendo expressões matemáticas ou justificações sem sentido. Na Figura 34 apresentam-se um caso em que o aluno estabelece a resposta correta, mas apresenta procedimentos e argumentações errados, devido à falta de rigor na aplicação de conceitos como sejam o não diferenciar a notação de conjunto vazio com o numeral zero, e o de argumentar, erradamente que um acontecimento com probabilidade nula corresponde, necessariamente, ao acontecimento impossível.

FIGURA 34 - RESPOSTA DO ALUNO 14 DA TURMA C, À QUESTÃO 2.2



Face às respostas individuais analisadas, poder-se-á destacar que respostas corretas nem sempre são acompanhadas de uma justificação correta, principalmente devido à falta de rigor na linguagem. Saliente-se, por outro lado, que o número elevado de alunos que não responderam à questão 2.2 poderá indicar a não compreensão do conceito de incompatibilidade, ou a saturação do aluno em responder a mais uma pergunta que aborda um mesmo conceito já tratado no problema anterior. Na realidade, há 14% do total de alunos (i.e., 6 alunos: 2 da turma B e 4 da turma C) que, tendo respondido à questão 1.4 c) (consultar Tabela 11), não tentaram iniciar qualquer resposta na questão agora em análise. E existem alunos que, não tendo respondido à questão 1.4c), também não o fizeram agora 14% (i.e., 6 alunos: 3 de cada uma das turmas B e C). É ainda de realçar, que houve 9% de alunos (i.e., 4 alunos: 3 alunos da turma C e 1 aluno da turma A) que não responderam à questão 1.4c), mas responderam à questão 2.2.

1.3.2.3. PERGUNTA 2.3

Na pergunta 2.3, os alunos tiveram que averiguar se dois acontecimentos eram independentes. Esta questão apresentava o mesmo enunciado que a questão 1.4b) e uma vez mais, a conclusão seria a dependência dos acontecimentos.

Nas Tabela 19 e Tabela 20 encontram-se sumariados o GD e o GR correspondente às respostas dadas pelos alunos à pergunta 2.3.

TABELA 19 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 2.3

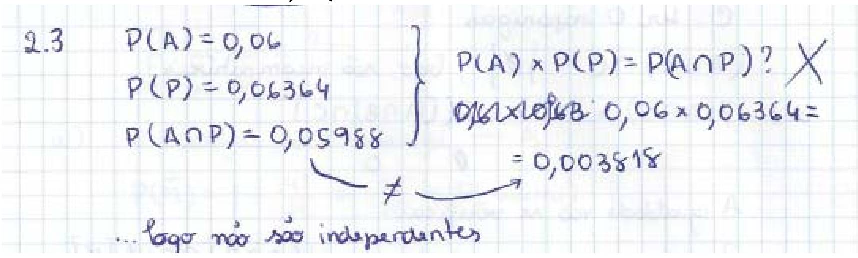
	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	4	2	0	3	0	11
B	3	5	0	0	0	1
C	6	2	0	1	1	4
Global	13	9	0	4	1	16

TABELA 20 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR AVALIADO NAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 2.3

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**
A	0	1	1	9
B	0	0	0	1
C	0	1	1	2
Global	0	2	2	12

Ao observar-se a Tabela 19, pode-se concluir que mais de um quarto dos alunos obteve o resultado final correto (GD=5) à questão 2.3, 37% do total de alunos envolvidos: na turma A, 55%, na turma B, 11% (i.e., apenas 1 aluno), e na turma C, 29%. Constata-se, ainda, que mais de um quarto dos alunos não respondeu a esta questão, 30% do total de alunos envolvidos: na turma A, 20%, na turma B, 33%, na turma C, 43%. Constatou-se, mais uma vez, que nem sempre uma resposta certa continha rigor na sua formalização (Tabela 20), apesar da moda do GR continuar a ser 3 (valor máximo), à semelhança do que acontece com as questões anteriores. Pode observar-se situações (como a ilustrada na Figura 35) em que foram atribuídos valor máximo tanto no GD como no GR, correspondente a 28% dos alunos envolvidos sendo: 9 alunos da turma A, 1 da turma B e 2 da turma C.

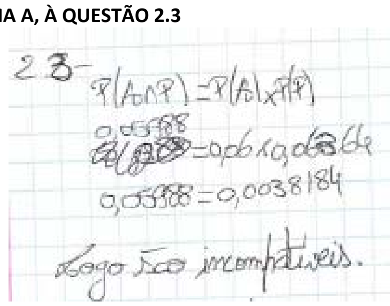
FIGURA 35 - RESPOSTA DO ALUNO 18 DA TURMA A, À QUESTÃO 2.3



Das respostas dadas, 28% correspondem a uma resposta incorreta e 13% correspondem a respostas cuja justificação não é adequada.

Na Figura 36 são evidenciados mais dois tipos de erros cometidos pelos alunos. Um dos casos (ilustrado à esquerda, na Figura 36) o aluno chega à resposta certa mas com justificações erradas devido à existência de conflitos de conceitos (entre acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis) e à aplicação de fórmulas erradas associadas a propriedades das probabilidades. Neste caso, há uma clara imaturidade na compreensão e assimilação de conceitos. Um outro caso (ilustrado à esquerda, na Figura 36), mais comuns, o qual foi detetado em 15% das respostas dos alunos da turma A, prende-se em confundir, crê-se, não o conceito em si, mas as designações "acontecimentos independentes" e acontecimentos incompatíveis".

FIGURA 36 - RESPOSTAS DOS ALUNOS 10 (À ESQUERDA) E 17 (À DIREITA) DA TURMA A, À QUESTÃO 2.3



Os resultados obtidos, mostram que as respostas corretas nem sempre são acompanhadas de uma justificação correta, muitas vezes devido à falta de rigor com que os alunos se expressam. Há alunos que simplesmente trocaram as palavras, escrevem "incompatibilidade" em vez de "independência", observando-se que os alunos que agora o fazem, nesta questão 2.3, não são os mesmos alunos a fazê-lo na questão 1.4 b) (ver Figura 23). Esta situação pode indiciar cansaço por parte do aluno.

Salienta-se que, por outro lado, o número elevado de alunos que não responderam à questão 2.3, poderá indicar, dificuldades em esquematizar o enunciado ou saturação em responderem a mais uma pergunta que aborda o mesmo conceito, já que há 26% do total de alunos (i.e., 11 alunos: 3 na turma A, 3 alunos na turma B e 5 na turma C) que tendo respondido à questão 1.4 b) (consultar Tabela 9), não tentaram sequer iniciar qualquer resposta na questão agora em análise. Outro resultado curioso a constatar aqui é que existe alunos que, não tendo respondido à questão 1.4b), também não o fizeram agora (5%, i. e 2 alunos, 1 da turma A e 1 da turma C), e também 5% dos alunos (2 alunos, 1 da turma B e outro da Turma C) que não responderam à questão 1.4b), mas responderam à questão 2.3.

1.3.2.4. PERGUNTA 2.4

Na pergunta 2.4, solicitou-se o cálculo de uma probabilidade condicionada descrita textualmente sem qualquer formalização matemática. Este tipo de enunciado já tinha sido usado para a questão 1.2, em oposição ao enunciado da questão 2.1 a), que apresenta recurso à formalização.

Nas Tabelas 21 e 22 encontram-se sumariados o GD e o GR correspondentes às respostas dadas pelos alunos à pergunta 2.4.

TABELA 21 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GD AVALIADO NAS RESPOSTAS DADAS, À QUESTÃO 2.4

	Grau de desempenho das respostas dadas					
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	1	2	0	2	5	9
B	5	3	1	0	0	0
C	5	4	0	3	1	1
Global	11	9	1	5	6	10

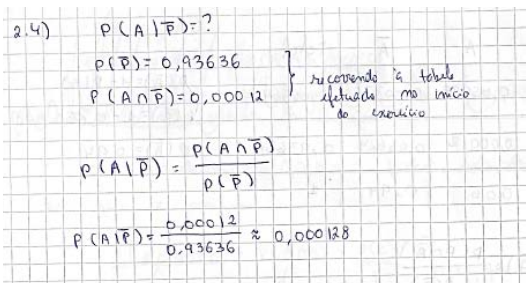
TABELA 22 - FREQUÊNCIA ABSOLUTA DO GR AVALIADO NAS RESPOSTAS CORRETAS DADAS, À QUESTÃO 2.4

	Grau de rigor das respostas corretas			
Turma	**0**	**1**	**2**	**3**
A	0	0	1	8
B	0	0	0	0
C	0	1	0	0
Global	0	1	1	8

Pela análise da tabela relativa ao GD (Tabela 21), e analisando as 3 turmas em conjunto, tem-se que aa duas maiores frequências ocorrerem para GD=0 e GD = 5, sendo que a moda é 0,correspondendo a ter 26% do total de alunos envolvidos, que não respondem à questão 2.4. Uma vez mais, os alunos do Ensino Profissional (turma B) apresentam tendência para valores baixos (0 ou 1) do GD (Tabela 21), no entanto os alunos do Ensino Regular (turma C) apresentam também esta mesma tendência. Das respostas dadas pelo total de alunos, 23% obtiveram GD máximo e, destes, 80% obteve valor máximo de GR (Tabelas 22). Uma vez mais, nem sempre a resposta correta contém uma justificação rigorosa.

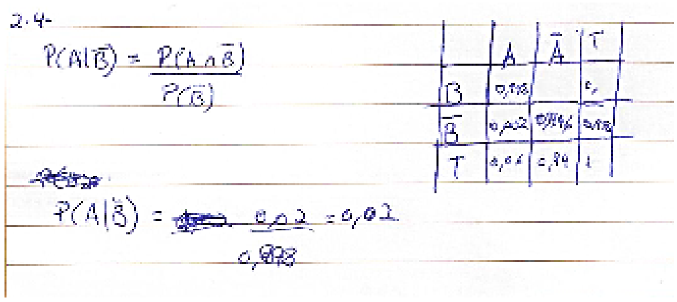
Pode observar-se situações (como a ilustrada na Figura 37) em que os alunos obtiveram valor máximo tanto no grau de desempenho como no grau de rigor.

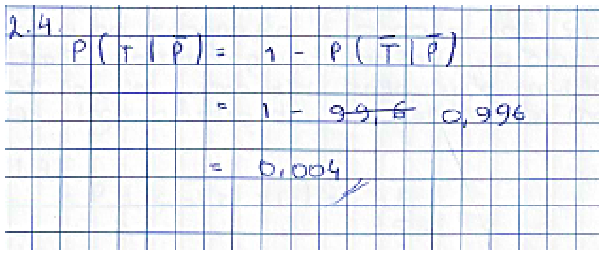
FIGURA 37 - RESPOSTA DO ALUNO 20 DA TURMA A, À QUESTÃO 2.4



Das respostas dadas pelos alunos, constatou-se que uma das falhas mais frequentes se deve ao facto de os alunos não terem conseguido formular em termos matemáticos o problema dado, nomeadamente através da construção correta de uma tabela ou diagrama de árvores com os dados do problema. A Figura 38 ilustra esta situação Em geral, os erros mais comuns revelados pelas respostas dos alunos nesta questão podem ser atribuídos à existência de dificuldades na interpretação dos dados que condicionam a construção da tabela, conduzindo a uma resposta errada (Figura 38, no topo); na base o aluno troca os papéis dos acontecimentos na resolução da probabilidade condicionada. Neste caso, há uma clara imaturidade na compreensão e assimilação de conceitos.

FIGURA 38 - RESPOSTAS DOS ALUNOS: 3 DA TURMA B (NO TOPO) E 4 DA TURMA A (NA BASE), À QUESTÃO 2.4





2. SÍNTESE

2.1 SÍNTESE RELATIVAMENTE A OBJETOS E RELAÇÕES PRIMÁRIAS

As duas situações-problema propostas motivaram a abordagem dos conceitos de probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis e foram aplicados outros conceitos justapostos a esses como sejam: espaço amostral de resultados, acontecimento, intersecção e união de acontecimentos, probabilidade conjunta, probabilidade da união.

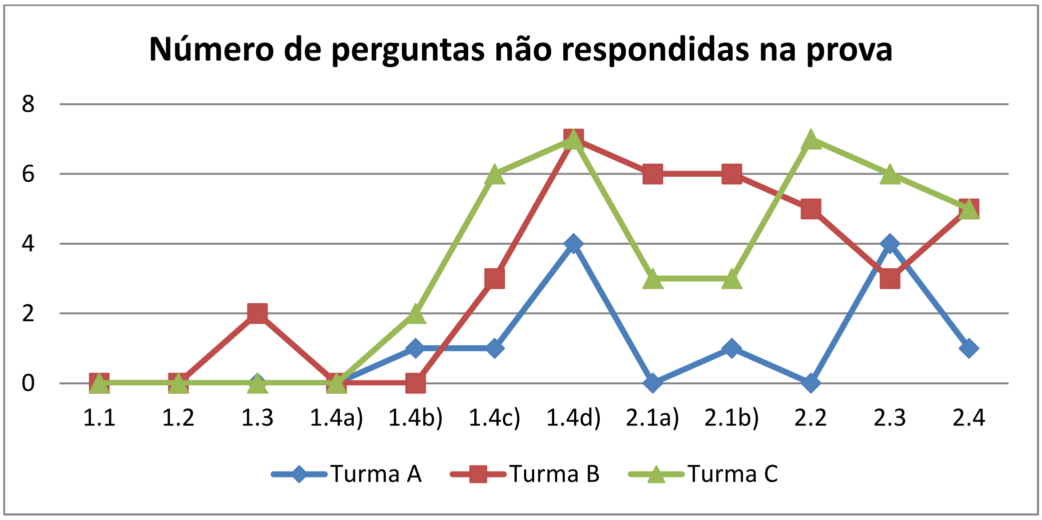
Efetuando uma visão global para o desempenho dos alunos envolvidos, pode afirmar-se que a maioria dos alunos obteve um desempenho positivo já que, cerca de 70% (todos os alunos da turma A, 1 na turma B e 9 na turma C) obtiveram uma soma dos GD, das 12 alíneas contidas nos dois problemas, igual ou superior a metade do valor máximo possível (60). No que concerne ao rigor das respostas corretas, constata-se que uma resposta certa não é geralmente acompanhada de uma linguagem e argumentação de nível elevado. Na verdade, a percentagem de alunos com soma dos GR, das 12 alíneas contidas nos dois problemas respondidas corretamente, igual ou superior a metade do valor máximo possível (36), baixa para 42% (14 da turma A, 0 na turma B e 4 na turma C).

Centrando a atenção na linguagem do enunciado da prova, convém salientar que i) apenas na questão 2.1 é usada a simbologia como ajuda na identificação do tipo de probabilidade pedida, ao contrário das restantes questões onde é usada a linguagem verbal, e ii) no primeiro problema, os dados do enunciado encontram-se previamente estruturados numa linguagem mais próxima da linguagem simbólica, sendo estes fornecidos na forma de uma tabela de dupla entrada, ao contrário do segundo problema onde os dados do enunciado são descritos em linguagem apenas verbal. Os conceitos solicitados na segunda situação-problema, são os mesmos dos que foram considerados na primeira situação-problema. Comparando as médias do GD para as duas situações-problema em separado por aluno, constata-se valores mais elevados na primeira situação-problema (Tabela 23). Esta sumarização global dos resultados parece denunciar que a utilização da linguagem verbal no enunciado de um problema talvez influencie negativamente a prestação global dos alunos e, por inerência, a qualidade das suas respostas. Também, confrontando o número de questões não respondidas entre as duas situações-problemas, como pretende ilustrar o Gráfico 3 ao visualizar o número de alunos que obtiveram zero no GD (i.e., não apresentaram qualquer resposta) em cada uma das questões dos dois problemas, por turma, observa-se tendência para se registar pior comportamento no problema 2, em particular, nas turmas B e C.

TABELA 23 - NÚMERO DE ALUNOS QUE NÃO EFETUARAM PELO MENOS UMA QUESTÃO NA PROVA.

Turma	**Percentagem de alunos com melhor desempenho na primeira situação (média de GD no problema 1 > média dos GD no problema 2)**
A	50%
B	100%
C	64%
Global	65%

GRÁFICO 3 - GRÁFICO COM A FREQUÊNCIA ABSOLUTA DE RESPOSTAS NULAS AO PROBLEMA 1, POR QUESTÃO E PARA AS TRÊS TURMA.



Constata-se também que, nas respostas apresentadas pelos alunos, é privilegiada, a linguagem verbal e simbólica para representar quer os acontecimentos quer como ajuda na identificação do tipo de probabilidade pedida, quer ainda para analisar a independência e a incompatibilidade de acontecimentos, facto que constituiu uma ajuda essencial para resolver cada uma das situações-problema.

Houve alunos, menos de 50%, que optaram por uma linguagem simbólica, quer para interpretar o enunciado dos problemas, quer para encontrar a solução do problema (47%: 85% dos alunos da turma A, 22% na turma B e 7% na turma C).

Quanto a nível de procedimentos, menos de 50% do total de alunos envolvidos seguiram a sequência: traduzir o problema de linguagem corrente para simbólica; construir uma esquematização; identificar e calcular a probabilidade pedida.

Na avaliação ao nível de procedimentos, os alunos da turma do Ensino Regular (turma A) revelaram facilidades, não se registando muitos conflitos entre conceitos. Já os alunos das turmas do Ensino Regular (turma C) e do Ensino Profissional (turma B) manifestaram dificuldades, quer ao nível dos conceitos, quer ao nível dos procedimentos, quer ainda a nível de esquematização, especialmente nas questões 1.4d, 2.1

No que concerne às justificações apresentadas, estas fundamentam-se nos procedimentos e foram de natureza dedutiva, contendo, em muitos casos, processos de síntese de cálculos realizados e relações observadas.

Os argumentos redigidos baseiam-se nas propriedades ou na relação entre conceitos e, por vezes, basearam-se nos procedimentos apresentados, como na construção de um diagrama de árvore, tabela de dupla entrada ou diagrama de Venn.

2.2 SÍNTESE DE RESULTADOS

De seguida, apresenta-se uma síntese do estudo analisando os resultados mais interessantes, primeiro questão a questão, e depois numa visão mais globalizante.

Na questão 1.1, onde era pedida a determinação de uma probabilidade simples, o comportamento global foi bastante positivo nas três turmas, com GD≥3 em 100% na turma A, 89% na turma B e 71% na turma C. Nesta questão, só 25% dos alunos da turma A realizaram uma esquematização do problema como, por exemplo, completar a tabela fornecida. Relativamente ao rigor das respostas, a situação já não foi tão positiva, uma vez que 16% dos alunos responderam sem qualquer rigor e 13% com pouco rigor, apresentando a resposta sem qualquer contextualização.

Na questão 1.2 era solicitado aos alunos que calculassem uma probabilidade condicionada, sem lhes ser apresentada a formalização, deixando isso ao cuidado do aluno. Estava aí subentendido o cálculo de probabilidade simples, conjunta e condicionada. A percentagem de respostas com desempenho positivo (GD≥3) para a turma A foi 85%, para a turma B foi 44% e para a turma C foi 50%, em menor percentagem que na questão anterior. O nível de desempenho observados nas três turmas não foi acompanhado por similar grau de qualidade no rigor das respostas, quer pelo raciocínio demonstrado, quer pelo menor cuidado de linguagem apresentado. Na verdade, globalmente, apenas 35% dos alunos apresentam GR igual a 3, sendo 55% na turma A,11% na turma B e 14% na turma C. Foi nesta questão 1.2 que os alunos começaram a revelar falhas relacionadas com má interpretação do enunciado e/ou de conflito de conceitos.

Na questão 1.3 era solicitado a realização de uma pequena composição, comparando duas situações que envolviam probabilidade condicionada, ficando, uma vez mais, a formalização da pergunta ao critério do aluno. A maioria dos alunos (58%) apresentou uma composição coerente com o solicitado, o que os levou a responder corretamente. É de realçar que os alunos da turma B, uma vez mais, apresentaram pior comportamento, 11% de respostas corretas, enquanto que a turma A obteve 75% e a turma C, 64%. Nesta questão, a utilização da fórmula de probabilidade condicionada, independentemente do resultado obtido, foi seguida por 28% dos alunos: na turma A, 55%, na turma B, 0% e na turma C, 7%. O recurso a uma representação esquemática foi opção de apenas 5% dos alunos envolvidos, e estes eram todos da turma A.

A última questão encontrava-se dividida em 4 alíneas. Na alínea a) pedia-se a determinação, em separado, da probabilidade de três acontecimentos, A, B e C, sendo este último acontecimento definido por apenas um resultado elementar do espaço de resultados. Todos os alunos responderam a esta alínea a), contudo, globalmente, o grau de desempenho do cálculo de probabilidade dos diferentes acontecimentos foi heterogéneo. Foram poucos os alunos que definiram previamente o espaço de resultados, contabilizaram-se 33% dos alunos que respondeu corretamente e 37% que não determinou corretamente a probabilidade de nenhum dos acontecimentos. No que concerne ao rigor das respostas, ele foi bastante baixo em todas as turmas.

Na alínea b) solicitava-se aos alunos que averiguassem se dois acontecimentos dados eram independentes. A maioria dos alunos respondeu corretamente ao pedido, revelando conhecimento do conceito, mas não contextualizaram a sua resposta, na situação-problema dada, 44% dos alunos envolvidos: 25% na turma A, 67% na turma B e 57% na turma C. Há a salientar a utilização de uma esquematização, por 49% dos alunos envolvidos no estudo: 70 % na turma A, 56% na turma B e 14% na turma C.

Na alínea c) solicitava-se que os alunos demonstrassem que dois acontecimentos eram incompatíveis. Era expectável que os alunos se socorressem do espaço de resultados, o que seria conducente a uma resposta quase imediata. Bastava para tal evidenciar o conhecimento do conceito solicitado. Verificou-se que 63% dos alunos respondem corretamente e 23% deixam a resposta em branco. Refira-se que 47% dos alunos optaram por interpretar a intersecção dos acontecimentos no contexto do problema e que 37% das respostas corretas apresentaram rigor máximo (GR=3).

Por fim, na alínea d) era necessário justificar que os acontecimentos incompatíveis considerados na alínea anterior não poderiam ser independentes, e ainda descrever uma situação extra que garantisse a independência. Apenas responderam a esta questão 58% dos alunos envolvidos no estudo, tendo respondido corretamente 44% destes. Em termos de rigor máximo, este foi registado em apenas 23% dos alunos cuja resposta estava correta. A dificuldade revelada pelas respostas manifestou-se sobretudo a nível da indicação da condição extra que verificasse a independência solicitada. Saliente-se que apenas 44%, dos alunos que responderam à questão, fizeram essa referência.

A segunda situação-problema era constituída por 4 questões. Na alínea 2.1 era solicitado aos alunos que determinassem uma probabilidade condicionada e uma probabilidade conjunta. Era expectável que os alunos efetuassem previamente um esquema que facilitasse a interpretação dos dados fornecidos no texto, mas apenas 44% o fez. Refira-se também que, dos 44% dos alunos que utilizaram um esquema, 80% da turma A, 0% da turma B e 29% da turma C, 33% apresentou o resultado correto (GD = 5). Genericamente, há a salientar que os alunos manifestaram maior dificuldade em obter o valor da probabilidade condicionada do que da conjunta.

Na questão 2.2 os alunos tinham que averiguar se os dois acontecimentos eram incompatíveis. Esperava-se que, a partir do cálculo de uma probabilidade, o aluno concluísse pela impossibilidade do acontecimento intersecção corresponder ao acontecimento impossível. Ora, 28% dos alunos envolvidos deixaram a resposta em branco, não sendo nenhum deles da turma A. Nota-se que 67% dos alunos envolvidos no estudo responderam de forma correta: 95% na turma A, 22% na turma B e 43% na turma C. Em termos de rigor das respostas corretas, nem todas o apresentaram: 19% não apresentaram nenhum rigor, 25% escasso rigor, 19% com algum rigor e 37% com bastante rigor.

Relativamente à questão 2.3, os alunos tinham que averiguar se, dados dois acontecimentos, eles eram independentes. Esperava-se que os alunos respondessem recorrendo à definição ou recorrendo à condição necessária e suficiente de independência. Dos alunos que responderam a esta questão, 47% (14 da turma A, 4 da B e 2 da C) fê-lo com recurso à condição necessária e suficiente e, 14% (1 da turma A, 3 da B e 2 da C) referiu a definição. Regista-se que 30% dos alunos envolvidos no estudo não deram qualquer resposta e que 37% responderam corretamente. Destes últimos, 75% apresentaram respostas com nível de rigor máximo.

Na última questão, questão 2.4, era solicitado aos alunos que calculassem, uma vez mais, a probabilidade condicionada. Nota-se que 26% dos alunos não responderam e 23% responderam corretamente. Destes últimos, 80% apresentam a sua resposta com nível de rigor máximo.

Para uma síntese global dos resultados detalhados anteriormente, tomaram-se os valores medianos de GD e GR observados para todas as questões analisadas nas duas situações problemas e para as turmas A, B e C.

Tomando os valores medianos do GD e do GR, para cada uma das questões e por turma, construíram-se os Gráficos 4 e 5. Com base no Gráfico 4, pode referir-se que, de uma maneira geral, as três turmas mostram comportamentos diferenciados no grau de desempenho das respostas dadas, sendo que a turma A apresenta o melhor grau de desempenho, na maioria das questões, e a turma B os piores. Este resultado vai de acordo com o sentir dos docentes, no terreno, ao afirmarem que os alunos do Ensino Profissional não apresentam os melhores resultados. Relativamente ao grau de rigor manifestado pelas três turmas, analisando o Gráfico 5, pode afirmar-se que as três turmas mostram comportamentos diferenciados, também, no grau de rigor das respostas corretas sendo que, mais uma vez, a turma A, apresenta respostas com maior nível de rigor e a turma B os mais baixos.

GRÁFICO 4 - GRÁFICO COM OS VALORES MEDIANOS DO GD POR QUESTÃO PARA AS TRÊS TURMAS.

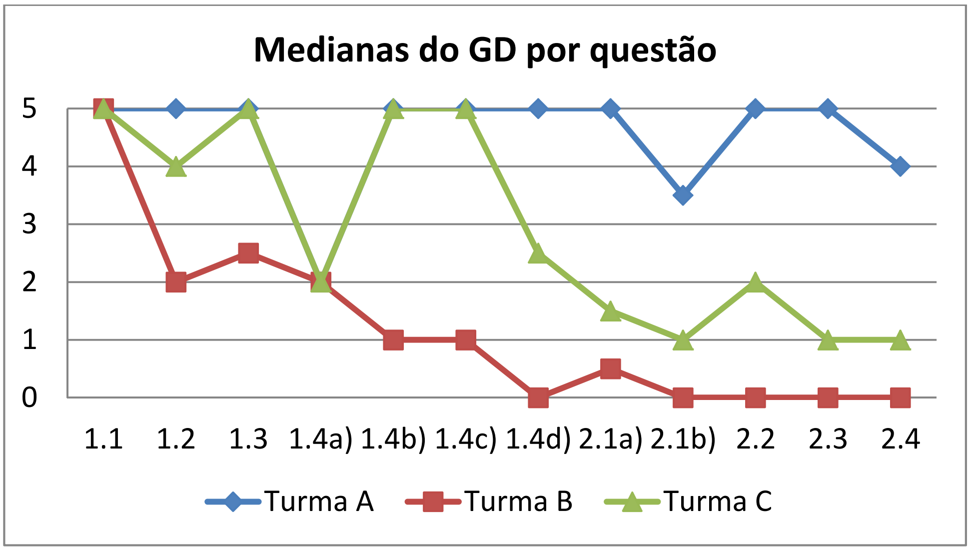
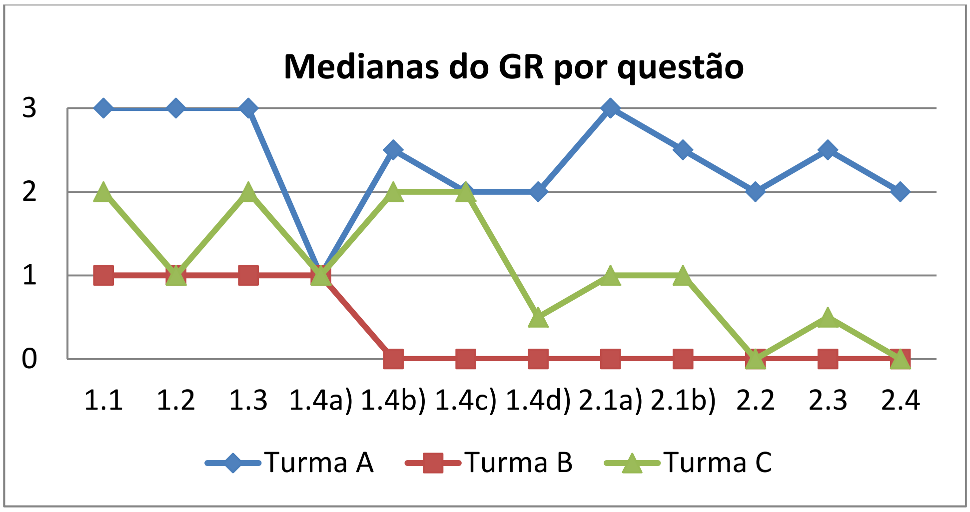


GRÁFICO 5 - GRÁFICO COM OS VALORES MEDIANOS DO GR POR QUESTÃO PARA AS TRÊS TURMAS.



No que concerne às questões envolvidas em cada uma das situações-problemas (problema 1 e problema 2), destaque-se que, no primeiro grupo de questões (1.1, 1.2, 1.3, 1.4), referentes à primeira situação-problema, os dados do problema estão esquematizados por meio de uma tabela de dupla entrada, enquanto que no segundo grupo de questões (2.1, 2.2, 2.3, 2.4), os dados do enunciado são caracterizados por um texto (forma verbal) e, por tal, expectavelmente exigindo uma conveniente formulação matemática da situação-problema para resolvê-la. As Tabelas 24 e 25 contêm as medianas dos valores observados, para o GD e o GR, nas questões do problema 1 e do problema 2 e por turma. Analisando a Tabela 24, observa-se valores medianos do GD máximos para as turmas do Ensino Regular e mais elevados para as respostas do problema 1. Tal facto indicia que há melhor desempenho nas respostas quando no enunciado os dados se encontrar formulados sob uma forma não textual. Pode-se ainda acrescentar, com base nas medianas, que a turma A apresenta similar GD nos dois problemas, 1 e 2, o que sugere que a turma A não demonstra dificuldade em formular matematicamente o enunciado dado na questão 2, contrariamente às outras duas turmas. Conclusões similares foram obtidas atrás quando se confrontaram o número de respostas não respondidas (veja-se Gráfico 3).

TABELA 24 - MEDIANA DOS VALORES OBSERVADOS PARA O GD DAS RESPOSTAS ENTRE OS PROBLEMAS 1 E 2.

	Mediana dos valores para o GD dos problemas 1 e 2	
Turma	Questões 1.1 à 1.4 d)	Questões 2.1a) à 2.4
A	5	5
B	2	0
C	5	1
Global	5	2

TABELA 25 - MEDIANA DOS VALORES OBSERVADOS PARA O GR DAS RESPOSTAS ENTRE OS PROBLEMAS 1 E 2.

	Mediana dos valores para o GR dos problemas 1 e 2	
Turma	Questões 1.1 à 1.4 d)	Questões 2.1a) à 2.4
A	2	2
B	0	0
C	2	1
Global	2	1

Com base na Tabela 25, relativa ao grau de rigor, que pode variar entre 0 e 3, constata-se uma distribuição do nível de rigor mediano similar em ambos os problemas nas turmas A e B. Contudo, é a turma A que apresenta maior grau de rigor, em termos medianos, o que significa uma melhor qualidade na resposta correta dadas pelos alunos daquela turma nos dois problemas.

Seguidamente, para confrontar o nível de conhecimento entre o conceito de probabilidade condicionada e o conceito de independência calcularam-se os valores medianos do GD e do GR das respostas ao grupo das questões subjacentes mais ao conceito de probabilidade condicionada (questões 1.1, 1.2., 1.3, 2.1 e 2.4) e ao grupo das questões mais subjacentes ao conceito de independência (questões 1.4, 2.2 e 2.3). As Tabelas 26 e 27 contêm as medianas da qualidade de desempenho (GD) e níveis de rigor (GR), respetivamente, atribuídos às respostas das questões envolvendo o conceito de probabilidade condicionada e às de acontecimentos independentes, para cada uma das 3 turmas. Relativamente ao GD (Tabela 26), as 3 turmas apresentam, em termos medianos, a mesma qualidade de desempenho, nas respostas para as questões sobre probabilidade condicionada e sobre acontecimentos independentes. Relativamente ao GR avaliado nas respostas corretas usado nas respostas, nota-se, nas 3 turmas e em termos medianos, um menor rigor nas respostas dadas às questões propostas sobre acontecimentos independentes. Tal facto pode indiciar um menor à vontade naquele conceito, por parte dos alunos das 3 turmas.

TABELA 26 - MEDIANA DOS VALORES OBSERVADOS PARA O GD DAS RESPOSTAS ENTRE O GRUPO DAS QUESTÕES SUBJACENTES MAIS AO CONCEITO DE PROBABILIDADE CONDICIONADA E O GRUPO DAS QUESTÕES MAIS SUBJACENTES AO CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA.

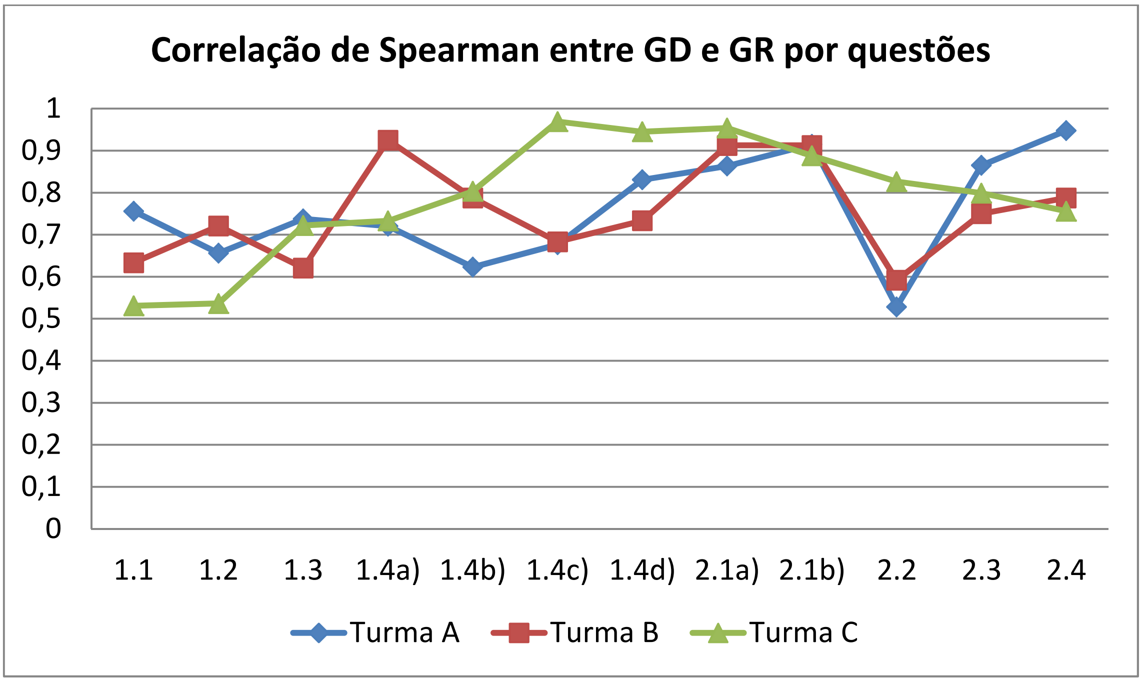
	Mediana dos valores para o GD dos problemas 1 e 2, atendendo aos conceitos de probabilidade	
Turma	Probabilidade Condicionada 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.4	Independência 1.4, 2.2, 2.3
A	5	5
B	1	1
C	3	3
Global	4,5	5

TABELA 27 - MEDIANA DOS VALORES OBSERVADOS PARA O GR DAS RESPOSTAS ENTRE O GRUPO DAS QUESTÕES SUBJACENTES MAIS AO CONCEITO DE PROBABILIDADE CONDICIONADA E O GRUPO DAS QUESTÕES MAIS SUBJACENTES AO CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA.

	Mediana dos valores para o GR dos problemas 1 e 2, atendendo aos conceitos de probabilidade	
Turma	Probabilidade Condicionada 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.4	Independência 1.4, 2.2, 2.3
A	3	2
B	0	0
C	3	1
Global	1,5	1

Para relacionar as medidas GD e GR, aqui propostas para avaliar o nível de conhecimento nos conceitos de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos, calcularam-se os valores do coeficiente de correlação de Spearman entre GD e GR por questão. Os valores encontrados foram sumariados graficamente na Gráfico 6. A escolha desta medida de associação é justificada por GD e GR representarem medidas numa escala ordinal e por aquela medida permitir quantificar a relação linear, se existir, entre as ordens das pontuações dadas no GD e no GR. Analisando o Gráfico 6 constata-se que, para cada uma das 12 questões, as três turmas mostram valores de correlação, entre o GD e GR, similares. Os valores das correlações encontrados são todos positivos, superiores a 0,5, o que significa que, uma melhor qualidade de desempenho de uma resposta, em média, vem acompanhada de um maior nível de rigor. Ou seja, alunos com melhor desempenho na resposta, mostram tendência para responder com maior nível de rigor. Esta característica é comum às três turmas.

GRÁFICO 6 - GRÁFICO COM OS VALORES DO COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE SPEARMAN ENTRE O GD E GR POR QUESTÃO E PARA AS TRÊS TURMAS.



Capítulo V – Conclusões

1. Síntese do estudo
2. Reflexão global
3.Principais conclusões e recomendações

1. SÍNTESE DO ESTUDO

O presente capítulo centra-se nas principais conclusões do estudo. Na primeira secção faz-se uma síntese dos principais aspetos que caracterizam o estudo realizado; na segunda são sumariadas algumas conclusões do estudo, organizadas segundo as questões de investigação, e tendo em conta o enquadramento teórico que sustenta o estudo; e na terceira secção são feitas algumas recomendações consideradas pertinentes para aprofundar a temática da presente dissertação, e relevantes para futuras investigações.

Segundo Ludke e André (1986), analisar dados qualitativos significa trabalhar todo o material obtido na pesquisa.

Procurando encontrar respostas válidas às quatro questões de investigação descritas no Capítulo 1, estabeleceu-se contato com docentes do Ensino Secundário, a lecionar o 12º ano, para colaboração na recolha de dados. Foi selecionado o material para avaliação (enunciado de duas situações-problema) e caracterizada sumariamente as 3 turmas dos docentes contatados. Os dois problemas selecionados foram submetidos aos 43 alunos das turmas escolhidas. Todo o material para análise (respostas elaboradas pelos alunos) foi recolhido e armazenado seguidamente em suporte digital. Este estudo contou também com a envolvência de 204 alunos universitários de uma disciplina de Estatística de vários cursos de Engenharia. Para este caso não houve intervenção sobre o tipo de problema a apresentar aos alunos universitários, limitando-se a investigação a uma análise sumária de contagens de respostas a uma questão de escolha múltipla contida no exame final da disciplina. Assim, a pesquisa realizada focou-se mais na análise das respostas dadas pelos alunos do Ensino Secundário.

Atendendo ao carácter qualitativo da metodologia adotada, na modalidade de Estudo de Caso, a análise das respostas dos alunos foi essencialmente descritiva e interpretativa, com vista a obter, por um lado uma caracterização, o mais completa possível, das situações em estudo e dos raciocínios subjacentes às respostas dadas, e, por outro lado, com o objetivo de responder às questões de investigação propostas.

A probabilidade condicionada é fundamental em diversas aplicações da Estatística, que está presente na vida do dia-a-dia, designadamente aquando da tomada de decisões. Por isso, a sua correta compreensão é considerada, por vários autores, de primordial interesse e justificativa de ser abordada também no ensino não universitário. Por outro lado, intrinsecamente associado ao conceito de probabilidade condicionada, tem-se a noção de independência que também é lecionada, atualmente, no Ensino Secundário. A assimilação deste conceito, por parte de alunos, tem sido menos investigada, contudo, já alguns trabalhos têm alertado para a existência de conflitos entre a noção de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis.

No presente trabalho, no sentido de responder às quatro questões de investigação descritas no Capítulo 1, pretendeu-se compreender as dificuldades sentidas pelos alunos que participaram neste estudo. Tentou-se captar a influência que a assimilação dos dois conceitos transparece nas respostas e nos raciocínios por eles elaborados relativamente às questões com que foram confrontados, em momento de avaliação escrita, e que envolviam probabilidades condicionadas e acontecimentos independentes. Nesse sentido, as respostas apresentadas às duas situações problema propostas constituiu um instrumento de notória utilidade, pois a análise da informação recolhida proporcionou uma avaliação quantitativa da qualidade das respostas e propiciou o encontro de respostas às questões da investigação

Nesta investigação, as respostas dadas pelos alunos às duas situações-problema foram sujeita a avaliação segundo duas perspetivas (desempenho e rigor). Estas duas perspetivas determinaram a criação de duas escalas qualitativas para uma análise pormenorizada das respostas. Ambas as escalas tiveram como objetivo quantificar a qualidade de uma resposta, uma em termos de desempenho e outra em termos de rigor. O desempenho de uma resposta escrita está relacionado com a indicação dos passos básicos para a obtenção do resultado final. O rigor está relacionado com a indicação explícita dos passos fundamentais para a obtenção do resultado final correto tomando em conta a linguagem, a argumentação e procedimentos usados. As duas escalas consideradas são ordinais, em escalas de Likert, e foram designadas por grau de desempenho (GD), a variar entre 0 (não responde) e 5 (resposta correta), e grau de rigor (GR), a variar entre 0 (nenhum rigor) e 3 (máximo rigor).

Na análise descritiva foram determinadas frequências (absolutas e em percentagem), sintetizadas em tabelas, e calculados valores medianos, de modo a comparar o grau de desempenho e de rigor das respostas dos alunos entre turmas e entre questões. Além das frequências, também se recorreu ao cálculo do coeficiente de correlação de Spearman para estudar a correlação entre a qualidade das respostas face ao rigor exercido.

Apenas uma breve referência aos resultados obtidos na questão de escolha múltipla, destinada a alunos universitários. Nessa questão era pedido o cálculo da probabilidade de reunião e a análise da independência entre dois acontecimentos, partindo de dados fornecidos em tabela. Os resultados revelaram que a maioria dos alunos (72%) assinalou a resposta correta, e alguns deles (15%) manifestaram conflito no conceito de independência ao elegerem a opção "A e B independentes e $P(A \cup B) = 0,96$", pois o valor da probabilidade está correto nesta opção.

Em toda a análise estatística realizada recorreu-se ao programa Excel 2010.

2. Reflexão global

Aqui apresentam-se e discutem-se globalmente os resultados do estudo nos alunos do 12º ano, tendo por referência as questões de investigação e estabelecendo possíveis ligações com trabalhos de outros autores.

2.1 Primeira questão de investigação

Qual o nível de conhecimento, nos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimento independente, evidenciado pelos alunos?

Com a ajuda das ferramentas teóricas do enfoque ontosemiótico, (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2009), estabeleceu-se configurações que permitiram criar orientações para analisar as soluções expressas pelos alunos, na resolução das questões propostas, permitindo também verificar como os objetos "probabilidade condicionada" e "independência de acontecimentos" emergem do sistema de práticas, levadas a cabo por cada aluno, ao resolver problemas relacionados com o objeto em causa. Com tais ferramentas considera-se que, para uma determinada "pessoa", a situação-problema é um tipo de situação que permite atividades de matematização, tais como encontrar possíveis soluções, escrever uma notação apropriada, para representar as situações, ou para comunicar com outras pessoas, possibilitando justificar ou generalizar as soluções propostas.

Para os alunos do 12.º ano considerados, verificou-se que o nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência de acontecimentos, medido em termos de GD e GR, é variável (alto, médio ou baixo) e está intrinsecamente associado à *qualidade* (alta, média ou baixa) da turma. As respostas com melhor qualidade foram de alunos da turma A e as piores foram de alunos da turma B. Tal resultado não é de estranhar, uma vez que a turma B é do Ensino Profissional, enquanto as duas outras, A e C, são do Ensino Regular, de Matemática A. Na realidade, é na turma com os melhores alunos que se encontram respostas com melhor desempenho e, simultaneamente, mais rigorosas.

Estes factos levam a crer que o nível de conhecimento nos conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes está dependente da motivação e facilidade de aprendizagem do aluno, entendendo que, como atualmente se crê, os alunos do Ensino Profissional estão menos motivados para continuação de estudos a nível superior e apresentam mais dificuldade para o estudo.

2.2 SEGUNDA QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Existem diferenças nos níveis de conhecimento evidenciado pelos alunos nos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes?

Em termos medianos (Tabelas 26 e 27, Capítulo 4), constatou-se que o nível de conhecimento nos dois conceitos não difere quando avaliado em função do GD. Isto significa que não difere a capacidade ou desempenho do aluno de obter o resultado certo para questões envolvendo probabilidade condicionada ou acontecimentos independentes. Porém, as respostas são mais rigorosas quando aborda a probabilidade condicionada. Assim, os resultados obtidos levam a conjeturar que existe um menor à vontade por parte do aluno no conceito de acontecimentos independentes.

2.3 TERCEIRA QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Existe associação entre o nível de conhecimento e a formulação/interpretação do problema e os procedimentos, argumentos e/ou linguagem usada?

Ambas as situações-problema apresentadas envolviam os conceitos de probabilidade condicionada e o estudo de acontecimentos independentes e incompatíveis. Contudo, na primeira situação-problema, os dados encontravam-se esquematizados numa tabela de dupla entrada, enquanto que, na segunda situação-problema, os dados encontravam-se descritos na forma de texto, o que exigia a formalização prévia do enunciado por parte do aluno.

Analisando os graus de desempenho e de rigor por questão e por situação-problema (Gráficos 4 e 5 e Tabelas 24 e 25, Capítulo 4) é evidente a heterogeneidade de resultados a nível do tipo de problema (com e sem esquematização dos dados do enunciado). Dos resultados obtidos é notório, por exemplo, uma tendência para um decréscimo do nível de desempenho e de rigor da primeira situação-problema à segunda situação-problema, nas turmas B e C, e uma manutenção do nível na turma A. Em termos meramente especulativos, poder-se-á atribuir tal facto a um eventual cansaço dos alunos menos motivados para o estudo, ou então à preguiça em aplicar novamente os mesmos conceitos embora em contextos diferentes. Poder-se-á ainda conjeturar que talvez esta diferença de tipo de enunciado tenha contribuído para uma melhor qualidade de respostas, em termos gerais, na primeira situação do que na segunda situação, ou seja, quando os dados do enunciado estão esquematizados do que quando se deixa ao critério do aluno a sua esquematização. A facilidade de interpretação do problema condiciona a qualidade da resposta. Concretamente, os alunos com maior nível de conhecimento não demonstraram dificuldade de interpretação do problema sendo capazes de formular matematicamente um enunciado, contrariamente aos outros alunos.

Comparando o grau de desempenho e o grau de rigor de uma resposta, constatou-se que nem sempre uma resposta correta é acompanhada pelo rigor na sua elaboração; porém, uma resposta com maior qualidade de desempenho, em média, vem acompanhada de maior rigor em termos de procedimento, argumento e/ou linguagem usada.

2.4 Quarta questão de investigação

Que tipos de erros determinam eventuais conflitos na interpretação de problema face aos conceitos base de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes?

O conjunto de ferramentas teóricas do enfoque ontosemiótico permitem analisar a resolução correta dos problemas, identificando os diferentes tipos de objetos que o aluno deve aplicar no seu processo de resolução. Comparando a solução ideal com a apresentada pelo aluno, existe possibilidade de detetar conflitos cognitivos. Estes conflitos identificados nos processos de resolução dos alunos podem ser de natureza diversa: conflitos relacionados com a linguagem, com as propriedades, com os conceitos e com os procedimentos.

Os conflitos gerados com as situações-problema podem classificar-se, em relação aos elementos do enfoque teórico, como: dificuldade em ler e interpretar dados de uma tabela, em particular na 1ª situação-problema, dificuldade na formulação matemática, em particular, na 2ª situação problema, dificuldade em diferenciar entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada; dificuldade em diferenciar acontecimentos independentes de acontecimentos incompatíveis. Ora, tais conflitos revelam necessidade de se ter em atenção às dificuldades sentidas por alunos nos conceitos de probabilidade condicionada e de independência. Note-se que a grande complexidade destes dois objetos matemáticos, aparentemente simples, a par da premência do cumprimento curricular, não permitem aprofundar tais conceitos em contexto escolar.

Todos os erros descritos por Díaz (2009) no cálculo de probabilidades, com os dados apresentados em tabelas de contingência, foram verificados também na situação-problema 1, pelo que, como sugere aquela autora, é necessário atender à capacidade dos alunos para se efetuar a leitura correta de dados fornecidos em tabelas de dupla entrada.

Falk (1986), citado por Sobreiro (2011) e por Guilherme (2011), menciona estudos em que os alunos confundem a probabilidade condicionada com probabilidade conjunta, o que, por vezes, é resultado da utilização de uma linguagem corrente no enunciado dos problemas, não suficientemente precisa. Tal tipo de confusão não foi observado pois nenhum dos enunciados destaca essa situação.

Algumas das dificuldades sentidas pelos alunos, na má interpretação da situação-problema 2, podem estar relacionadas com as dificuldades na compreensão da linguagem usada no enunciado e não com a má interpretação de dados. Na realidade, quando se apresenta a probabilidade condicionada utilizando a linguagem matemática, as dúvidas sobre qual dos acontecimentos é condicionado ou condicionante, deixa de existir. Assim, a linguagem usada pode ser determinante na geração de erros.

É de destacar a identificação de erros em propriedades básicas de probabilidade. Verificou-se nas turmas mais fracas, 1 aluno da turma B e outro da turma C, cálculos conducentes a valores superior à unidade como valor para uma probabilidade.

Relativamente a eventual conflito entre acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis, o estudo revelou uma grande tendência do aluno para se expressar por palavras sobre a incompatibilidade ou sobre a independência dos acontecimentos. Verificam que não há nada em comum entre os acontecimentos envolvidos, garantindo assim a incompatibilidade mas também, erradamente, a independência dos acontecimentos. Cerca de cinquenta por cento dos alunos evidenciaram serem conhecedores dos conceitos teóricos, mas quando procedem à argumentação ou justificação, é notória a grande confusão que existe entre aqueles dois conceitos. Não é claro que a noção de independência está intrinsecamente ligado a noção probabilística. De modo análogo, também se detetou tendência para os alunos calcularem uma probabilidade de uma interseção, e esta tomar o valor zero, para justificar erradamente a incompatibilidade dos acontecimentos.

Em termos globais, poder-se-á concluir que a identificação dos objetos matemáticos postos em jogo na resolução dos dois problemas e as suas relações primárias não foram fáceis para os alunos, sobretudo quando o enunciado não fornecia dados matematizados.

Compete aos professores tomar consciência desta problemática, bem como do tipo de conflitos que cada uma das suas turmas apresenta e tentar resolvê-los durante o processo de ensino-aprendizagem.

3. Principais conclusões e recomendações

Ao refletir-se sobre as conclusões e contribuições do estudo, o balanço sobre a experiência realizada é considerado bastante positivo. Esta investigação é atual, não só pela temática, mas também pelo recurso à metodologia utilizada na probabilidade condicionada e independência, dado que, em Portugal, a investigação sobre este tópico está praticamente no início. Conciliou-se a análise da qualidade das respostas, com recurso à relação entre grau de desempenho e grau de rigor, com a realização de uma breve avaliação do raciocínio matemático, utilizando as ferramentas teóricas do enfoque ontosemiótico, que se revelaram produtivas – "as ferramentas" para o desenvolvimento da presente investigação.

Estas ferramentas, a nível da Didática da Matemática, são uma mais-valia, já que permitem conceber, planificar e desenvolver unidades de ensino ou tópicos matemáticos, adaptando-as ao contexto, às competências e conhecimentos iniciais dos alunos, e aos objetivos de aprendizagem, permitindo assim identificar e resolver os conflitos patentes em todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática, em especial no ensino da probabilidade condicionada e independência.

Este tópico, pela sua pertinência e utilidade, deverá deter mais tempo no processo de ensino-aprendizagem, quer a nível do ensino secundário, quer a nível da formação de futuros professores, já que a complexidade do conceito de probabilidade condicionada e independência são importantes, na vida quotidiana. Assim, evidenciadas as dificuldades sentidas pelos alunos, valeria a pena conceder mais tempo à sua análise e ao seu ensino.

Cada professor, ao ensinar os seus alunos, deve estar atento e consciente desta problemática, pois só desta forma poderá melhor compreender algumas dificuldades e obstáculos sentidos durante a aprendizagem de um conceito tão importante como a probabilidade condicionada e a independência de acontecimentos.

Obviamente, qualquer estudo está condicionado por vários fatores, quer internos, quer externos à investigação. Pesem embora os aspetos positivos, também existiram alguns fatores limitadores, nomeadamente certas decisões tomadas que nem sempre foram as mais acertadas. Neste momento, considera-se que a presente autora deveria ter estado presente na aplicação da prova e ter assistido a algumas aulas de lecionação da temática, para melhor poder comparar os resultados alcançados. Seria também importante ter-se passado pela realização de entrevistas aos alunos, para que estes questionassem ou descrevessem os processos de resolução adotados.

Outro fator que talvez enriquecesse este estudo, seria ter-se implementado uma outra pergunta, esta direcionada para o ensino universitário, com o propósito de comparar resoluções — pós secundário e pré universitário — já que aqui houve uma abordagem da temática, sob uma perspetiva diferente.

Sem dúvida que outras investigações sobre esta temática permitirão um crescimento de conhecimento. Nessa medida seria importante estudar os conhecimentos e didáticas sobre esta temática, desde o início do estudo de Probabilidade e Estatística no 9.º ano, e continuando a nível da formação inicial de docentes.

Em termos de recomendações emergentes do estudo, aponta-se a necessidade de uma maior atenção à lecionação do conceito de independência e uma maior prática na formulação matemática de enunciados envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada e independência de acontecimentos.

Bibliografia

BIBLIOGRAFIA

Agnoli, F. (1987). Teaching implications of misconceptions in probability and statistics. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 1-5). Ithaca, New York: Cornell University.

Ahlgren, A. & Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-131).Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Alarcão, I. (2001). *Professor-investigador: Que sentido? Que formação?*. Acedido a 22 de janeiro de 2013 em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/alarcao01.pdf

Albert, J. (2006). Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint. In G. Burrill, & P. Elliott (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 417-433). Reston, VA: NCTM.

Almeida, J. F., Pinto, J. M. (1995). *A Investigação nas ciências sociais*, 5.ª ed., Lisboa: Ed. Presença.

Almeida, L. S. (1993). *Rentabilizar o ensino-aprendizagem escolar para o sucesso e o treino cognitivo dos alunos*. In L. Almeida (Coord.), Capacitar a Escola para o Sucesso (pp.59-110). V. N. Gaia: Edipsico.

Almeida, L., Freire, T. (2004). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação* (3ª edição). Braga: Psiquilíbrios.

Amir, R., Frankl, P. R. & Tamir, P. (1987). Justifications of answers to multiple choice items as a means for identifying misconceptions. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 15-25). Ithaca, New York: Cornell University.

Andrade, C., Viegas, C., Pereira, P.P. & Pimenta P.(2012). *Ípsilon – Matemática A*, 12.º ano. Volume I. Texto Editora

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.

Batanero, C. & de la Fuente, I. (2005). *Conflites semióticos en la cálcul de probrabilitats a partir de taules de doble entrada.* Acedido a 2 de fevereiro de 2013 em: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales: ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística, Atas I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho (CIEd).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 247-263. Acedido a 12 de janeiro de 2013: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico em la vida cotidiana: um desafio educativo In: P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas, Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales*. Cd-rom, Universidad de Granada: España. Acedido a 2 de fevereiro de 2013 em: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Batanero, C. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno*, 44, 7-16.

Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada, Julio, 2007. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 12(2). Acedido a 12 de janeiro de 2013 em: http://www.ugr.es/~batanero/estudios%20sobre%20didactica%20de%20la%20probabilidad.htm

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 151 – 169.

Batanero, C., Fernandes, J. A. & Contreras, J.M. (2009). Un análisis semiótica del problema de Monty Hall y implicaciones didácticas, *Suma*, 62, 11-18.

Batanero, C., Godino, J. & Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1) [Online]. Consultado em 9 de Setembro de 2009, em http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Batanero, C., Godino, J. & Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. Journal of Statistics Education, 12(1) [Online]. Consultado em 9 de janeiro de 2013, em http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*.* Porto: Porto Editora.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (eds*.), International handbook of mathematics education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M., Bentz, H. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Chance encounters*: Probability in education* (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cañizares, M. J., & Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Uno*, 14, 99-114.

Carvalho, C., Fernandes, J.A. (2005). Revisitando o conceito de Probabilidade com um olhar da Psicologia*. Revista Quadrante*, 14 (2) 71- 88

Castro, C. S. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 233-54.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apporteés par une approche anthropologique. *Rechérches en Didactique dês Mathématiques,* 12 (1), 73 - 112.

Contreras, J. M. (2009). *Recursos en Internet para la Enseñanza de la Probabilidad Condicionada*. Tese de mestrado, Universidade de Granada. Acedido a 23 de janeiro de 2013 em : http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Cordani, Wechsler (2006). Teaching independence and exchangeability. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. International Association for Statistics Education, Salvador (Brazil). [CDROM]

Corrêa, L.H. (2005). A gestão do conhecimento no ensino da matemática. *UFJ F*. Acedido a 22 de outubro de 2012 em: http://www.ecsbdefesa.com.br/fts/MATEM%C1TICA.pdf

Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço – Matemática A*, 12.º ano. Volume I. Porto Editora.

Crato, N. (2004). Pedagogia da Matemática em Causa. *Nova Cidadania*, Lisboa, Portugal, ano V, n.19, p.47 – 48, Janeiro/Março 2004.

Cunha, M. C. (2010). *A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12.º ano de escolaridade em probabilidade condicionada*. Dissertação de mestrado. Universidade Minho, Braga

DGEBS (1991). *Programa Matemática – Plano de organização do ensino-aprendizagem*, Ensino Básico 3.º Ciclo (vol. II). Lisboa: Ministério da Educação.

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores & J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de de matemáticas*. Estadística y Azar. Granada: *Sociedad de Educación Matemática Thales*.

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Education*. 2(3), 128-148. Acedido a 12 de janeiro de 2013 em:

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*, 18(2), 75-94. Acedido a 12 de janeiro de 2013 em: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*, 18(2), 75-94. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ (Consultado em 15 de Outubro de 2010)

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional.* Un estúdio preliminar. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el análisis de datos en Psicología.* Tese de Doutoramento, Universidade de Granada.

Díaz, C. (2009). Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Ferreira (Orgs.), *Actas do II encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 100-116. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Consultado em 13 de setembro de 2012, em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, 59, 245-260. Acedido a 12 de janeiro de 2013 em: http://www.ugr.es/~batanero/estudios%20sobre%20didactica%20de%20la%20probabilidad.htm

Estrada, A., Díaz, C., & de la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitários. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Huesca.

Eves, Howard (2011). *Introdução à História da Matemática*. 5ª edição. Brasil. Editora da Unicamp

Falk, R. & Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. In F. Gordon & S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 291-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris. (Ed.), *Studies of Mathematics Education*, 7, 175-184. Paris: UNESCO.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition*, *43*, 197-223.

Falk, R., Falk, R. & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204.

Fast, G. R. (1997). Using analogies to overcome student teachers' probability misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 325-344.

Ferguson, G. A. & Takane, Y. (1989). *Statistical analysis in psychology and education*. New York: McGraw-Hill.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga. Acedido a 12 de janeiro de 2013 em: *http://repositorium.sdum.uminho.pt/about.jsp*

Fernandes, J. A. (1999*). Intuições e aprendizagem de probabilidade – uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Braga. Acedido a 12 de janeiro de 2013 em: *http://repositorium.sdum.uminho.pt/about.jsp*

Fernandes, J. A., & Fernandes, M. C. (2010). A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12º Ano em probabilidade condicionada. In Gomes, H., Menezes, L., Cabrita, I. (Orgs.), *XXI SIEM: Atas do Seminário de Investigação em Educação em Matemática,* 315 - 329. Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Fernandes, J. A., Sousa, M. V., & Ribeiro, S. A. (2004). *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística*: Atas I Encontro Probabilidades e Estatística na Escola de Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho (CIEd).

Figueiredo, A. C. (2000). *Probabilidade condicional: Um enfoque de seu ensino-aprendizagem*. Dissertação de mestrado, Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probabilitty improve probabilistic intuititions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Gall, M. D., Borg, W. R. & gall, J. P. (2003). *Educational research: An Introduction*. New York: Longman Publishers USA.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. Journal for Research in Mathematics Education, 19,44-63.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 44-63.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, 63, 25-34.

Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review,* 63(1), 23-54.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995), How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*,102(4), 684-704.

Gimenez, J. (2007). Probabilidades. *Uno*, 44, 5-6.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontologico y semiotico de la cognicion matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2-3), 237-284. Consultado em 9 outubro 2012, em http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. D. e Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3) : 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Consultado em 30 de novembro 2012, em http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36. Consultado em 9 de novembro 2012, em http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_ontosemiotico_combinatoria.pdf

Godino, J. D., Batanero, M. C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-49.

Graça Martins. M. E. G., & Cerveira, A. G. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística.* Lisboa: Universidade Aberta.

Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données: Implication – similarité – corrélation. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 337-363.

Gras, R., & Totohasina, A. (1995b). Chronologie et conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionneles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 49-95.

Guilherme, I.M. (2011). *Applets no estudo da probabilidade condicionada*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro.

Hawkins, A. S. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability- A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.

Hill, M., Hill, A. (2005). *Investigação por Questionário*.(2ª edição). Lisboa: Edições Sílabo.

Holmes, P. & Turner, D. (1981). Teaching statistics to eleven-to-sixteen-year olds. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 18-24). Reston, VA: NCTM.

http://www.ugr.es/~batanero/estudios%20sobre%20didactica%20de%20la%20probabilidad.htm

Jones, G., Langral, C. W. & Mooney E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kataoka, Trevethan & Borim da Silva (2010). Independence of events: an analysis of knowledge level in different groups of students. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics,* Intern. Ass. for Stat. Education, Ljubljana (Slovenia).

Lecoutre, M.-P. & Durant, J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Ludke, M. e Andre, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Machado, N. J.(1998). *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. 4. ed. São Paulo: Cortez.

Martins, M. E. et al. (*1999*). *Probabilidades e Combinatória*. *12º ano de escolaridade*. Lisboa*:* Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction* (5th Ed.). New York, NY: Longman.

Ministério da Educação (1999). *Probabilidades e Combinatória-12º ano de escolaridade*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A* (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Murteira, B. & Antunes, M. (2012). *Probabilidade e Estatística*. Volume I. Escolar Editora.

Murteira, B. J. F. (1999). *Probabilidades e Estatística.* Volume I, 2ª edição. Editora McGraw-Hill de Portugal.

Murteira, B. J. F., Ribeiro, C. S., Silva, J. A., & Pimenta, C., (2002). *Introdução à Estatística.* McGraw-Hill de Portugal. Lisboa.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *Princípios e Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar - tradução portuguesa de Principles and Standards Council of School Mathematics do NCTM*. Lisboa: APM e NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Tradução Portuguesa do original de 2000).

Neto, M. T. B. (2009). *O Desenvolvimento do raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro.

Neves, M. A., Pereira, A. & Silva, J. N. (2012). *Probabilidade - Matemática A, 12.º ano*. Volume I. Porto Editora.

NPMEB (2001). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Oliveira, J. C. (2012). *Preparo o exame nacional – Matemática A, 12º ano*. Areal Editores.

Oliveira, J. T. (1990). *Probabilidades e Estatística*. Volume I. Editora McGraw-Hill de Portugal.

Pereira-Mendoza, L. & Swift, J. (1981). Why teach statistics and probability – a rationale. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 1-7). Reston, VA: NCTM.

Pestana, D. D. & Velosa, S. Filipe (2010). *Introdução à probabilidade e à estatística*. Volume I, 4ª Edição. Fundação Calouste GulbenKian.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269).

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM. Acedido a 2 de janeiro de 2013, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/08-Ponte%20_Badajoz%2006%20Set_.pdf

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Canavarro, A. P., Guimarães, F., Oliveira, H., Guimarães, H. M., Brocardo, J., Santos, L., Serrazina, L., & Saraiva, M. (2006). *Programas de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*. Lisboa: Centro de Investigação em Educação.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., L. Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74. Acedido a 2 de janeiro de 2013, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/07%20Ponte-Guerreiro%20etc%20Minho%20_Out%202007_.pdf

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Acedido em Maio12, 2013, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento_matematica.aspx.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. & Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, 36, 23-32.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. & Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, 36, 23-32.

Sobreiro, Delmira (2011). *Probabilidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro, Aveiro

Tari, A. D'A., & Diblasi, A. (2006). Analysis of didactic suggested distinguishing disjunctive events and independent events. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh*

International Conference on Teaching Statistics. Intern. Ass. for Stat. Education, Salvador (Brazil).

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997), A Framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 39-59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school*: Challenges for teaching and learning (pp. 215 -238). New York: Springer.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgments under uncertainty. In D. kahneman, P. Slovic e A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 117 – 128). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D.(1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. Psycological Review, 90(4), 293-315.

Ventsel, H. (1973). *Théorie des probabilities*. Éditions MIR: Moscou.

Watson, J. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, 88, 12-17.

Way, J. (2003). The development of young children's notions of probability. Comunicação apresentada no subgrupo 5 – *Statistical Thinking da 54ª Conferência do CIEAEM*, realizada em Bellaria (Itália) em Fevereiro de 2003.

Wonnacott, T. H. & Wonnacott, R. J. (1990*): Introductory Statistics*. 5ª Edição USA. Editora John, Wiley & sons.

Yin, Robert (1994). *Case Study Research*: *Design and Methods* (2nd Edition). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

ANEXOS

ANEXO I: CARTA ÀS ESCOLAS

Exmo. Senhor Diretor da

Escola …

30 de outubro de 2012

No âmbito do Curso de Mestrado em Matemática para professores, na Universidade de Aveiro, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, sob o tema de O ensino e a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes no Ensino Secundário. Neste sentido, venho por este meio, solicitar a sua autorização para desenvolver, com a turma do 12º __, um projeto de ensino e aprendizagem do tema Probabilidades e Combinatória. O desenvolvimento da dissertação implica a recolha de dados, que serão obtidos através de observação, de entrevista e de análise documental.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas e os dados recolhidos não servirão para avaliar os alunos.

Mais especificamente e de um modo muito sucinto, com este projeto pretende-se estudar as conceções e atitudes que os alunos, deste nível de escolaridade, têm na compreensão do conceito de probabilidade de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis no estudo da probabilidade condicionada, analisando dificuldades na resolução de problemas propostos.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos e da escola e ainda a solicitar autorização aos Encarregados de Educação.

O projeto insere-se no âmbito de uma investigação individual que culminará na minha Dissertação de Mestrado.

Agradecendo a sua atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A mestranda,

____

(Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho)

Eu, ____ Diretor da Escola _______________________________________, autorizo Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho a usar as instalações desta Escola para realizar o seu estudo de investigação, no âmbito Curso de Mestrado em Matemática para professores, na Universidade de Aveiro. Consciente de que está garantido o anonimato sobre os alunos intervenientes no estudo de investigação, igualmente a autorizo a recolher trabalhos realizados pelos alunos e ainda a realizar entrevistas com alguns discentes, uma vez colhida a sua anuência e a autorização escrita dos respetivos Encarregados de Educação.

_________________________________ _____________

Assinatura do Diretor da Escola Data

ANEXO II: CARTA AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

do(a) aluno(a) do 12º ano, da turma ___ da Escola ______________________________

No âmbito do Curso de Mestrado em Matemática para Professores, da Universidade de Aveiro, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, sob o tema "o ensino e a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes no Ensino Secundário". Vai ser desenvolvido nesta turma, nas aulas de Matemática, uma investigação para estudar as conceções que os alunos, deste nível de escolaridade, têm na compreensão do conceito de probabilidade condicionada e acontecimentos independente e sobre acontecimentos incompatíveis, analisando dificuldades na resolução de problemas propostos.

Assim, solicito a sua autorização para recolher e analisar as resoluções realizadas pelo seu educando de alguns problemas a realizar na sala de aula durante o ano letivo, bem como autor como autorize a publicação dos resultados da investigação, comprometo-me a **garantir o anonimato em relação à identidade do aluno acima referido.** Solicito autorização para a publicação das respostas elaboradas pelo seu educando, sempre que estas sejam consideradas pertinentes e importantes para o estudo implementado.

Agradecendo, desde já, a colaboração prestada de V. Ex.ª solicito que assine a declaração abaixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos.

A professora de matemática (mestranda), ___________________________________

(Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho)

Docente Titular de Turma ___________________________________

- -

Declaro que autorizo o meu educando a participar no projeto de investigação da professora Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho no âmbito da sua dissertação de Mestrado permitindo a recolha de resoluções realizadas pelo meu educando nas aulas de Matemática, bem como a publicação dos resultados resultantes da investigação, mantendo o anonimato em relação à identidade do meu educando.

Vila Nova de Gaia, _____ / 11 / 2012 __________________________

O Encarregado de Educação

ANEXO III: PROVA

Propostas de problemas

1. Um certo estudo numa maternidade revelou, acerca do sexo de 300 bebés nascidos naquela maternidade e das correspondentes previsões de sexo a partir da ecografia na 13ª semana de gestação, os seguintes resultados:

		Sexo verdadeiro (ao nascer)	
		Feminino	Masculino
Sexo previsto na ecografia	Feminino	127	96
	Masculino	9	68

Com base nestes resultados, responda às seguintes questões.

1.1 Calcule a probabilidade de um bebé, ao nascer, ser do sexo masculino.

1.2 Determine a probabilidade de ser menino se a ecografia faz prever ser uma menina.

1.3 A Sra. Ana e a Sra. Berta estão a ser seguidas naquela maternidade. Ambas realizaram uma ecografia na 13ª gestação. À Sra. Ana a ecografia previu uma menina e à Sra. Berta um menino. Em que caso é mais provável ser confirmado, no nascimento, a previsão do sexo indicada pela ecografia? Numa pequena composição fundamente a sua resposta.

Tópicos a referenciar:

- Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra Ana é do sexo feminino.
- Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra Berta é do sexo masculino.

1.4 Um casal com três filhos, todos nascidos naquela maternidade, é selecionado ao acaso. Considere que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos e que a probabilidade de qualquer filho do casal ser do sexo masculino é igual à probabilidade calculada na alínea 1.1. (**Sugestão para os docentes:** caso entendam simplificar a resolução das alíneas a e b, substituir o enunciado desta questão referindo que "a probabilidade do filho do casal ser do sexo masculino é igual à probabilidade de ser do sexo feminino". Nesse caso, os 8 elementos de Ω serão equiprováveis.)

Considere os acontecimentos:

A: "O casal ter no máximo uma rapariga"

B: "O casal ter filhos de ambos os sexos"

C: " O casal só ter rapazes"

Sugestão: Caso não tenha resolvido a alínea 1.1, tome o valor 0,45 para aquela probabilidade.

a) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos.

b) Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.

c) Mostre que os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompatíveis.

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique que os acontecimentos $A \cap B$ e C não podem ser independentes e apresente uma situação (com outras condições de enunciado) em que o poderiam ser.

2. A leptospirose é também conhecida como doença de Weil. Esta doença é causada por duas espécies de bactérias. Numa população de ratos, a probabilidade de encontrar um rato portador destas bactérias é 6%. Um novo teste de diagnóstico da doença foi proposto. Para avaliar a qualidade deste novo teste, foram efetuados vários testes àquela população de ratos, no sentido de detetar a existência destas bactérias. Do estudo efetuado resultaram as seguintes conclusões:

- A probabilidade de um rato ter teste positivo (P), sabendo que é portador das bactérias, é 99,8%;
- A probabilidade de um rato ter um teste negativo, sabendo que não é portador destas bactérias, é de 99,6%

Seja A o acontecimento "Rato ser portador das bactérias".

2.1 Qual o valor das seguintes probabilidades: $P(A \cap P)$ e $P(A|P)$?

2.2 Os acontecimentos A e P são incompatíveis? Justifique convenientemente a sua resposta.

2.3 Os acontecimentos A e P são independentes? Justifique convenientemente a sua resposta.

2.4 Escolhendo ao acaso um rato dessa população, qual é a probabilidade de ele ser portador das bactérias, sabendo que o teste efetuado deu negativo?

ANEXO IV: RESOLUÇÃO DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA

1.RESPOSTA ESPERADA DA QUESTÃO DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Resposta esperada era “”A” e “B” são dependentes e P (A ∪ B) = 0,96”.

Esperava-se que os alunos procedessem do seguinte modo:

	B	B falha	Total
A	0,90	0,05	0,95
A falha	0,01	0,04	0,05
Total	0,91	0,09	1

Para que A e B sejam independentes, P(A∩B) = P(A) × P(B).

Como por tabela P(A∩B) = 0,90, P(A) = 0,95 e P(B) = 0,91, tem-se que

P(A∩B) ≠ P(A) × P(B). Logo não são independentes. Desta feita a primeira opção é excluída.

Tem que se determinar o valor de P (A ∪ B).

P (A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A∩B) = 0,95 + 0,91 – 0,90 = 0,96.

2. RESPOSTA ESPERADA DA SITUAÇÃO PROBLEMA 1

1.1 Considere os seguintes acontecimentos:

M: “Ser menino” R: “ previsto ser menino”

M^C: “Ser menina” R^C: “ previsto ser menina”

Com estas designações, a tabela dada e completa ficaria:

		(Ser)		Total
		M^C	**M**	
(Previsto ser)	**R^C**	**127**	**96**	223
	R	**9**	**68**	77
Total		136	164	300

Resposta: $P(M) = \frac{164}{300} = 0{,}54(6)$

1.2 Probabilidade pedida: $P(M|R^C) = \frac{P(M \cap R^C)}{P(R^C)} = \frac{96}{223} = 0{,}43$

1.3 A Sra. Ana e a Sra. Berta estão a ser seguidas naquela maternidade. Ambas realizaram uma ecografia na 13ª gestação. À Sra. Ana a ecografia previu uma menina e à Sra. Berta um menino. Ora,

Sra. Ana : $P(M^C|R^C)$ = 1- $P(M|R^C)$ = 1- 0,43 =0,57

Sra. Berta: $P(M|R) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{68}{77} = 0{,}88$

O caso da Sra. Berta é mais provável de ser confirmado, no nascimento, o sexo masculino do bebé previsto na ecografia da 13ª semana de gestação.

1.4 a) P(“Um filho do casal ser do sexo masculino”)=P(M)= 0,55

Dado um casal com 3 filhos, o espaço de resultados possíveis é:

Ω={MMM, MMM^C, MM^CM, MM^CM^C, M^CMM, M^CMM^C, M^CM^CM, $M^CM^CM^C$}

Uma vez que P(M)=0,55 e, consequentemente, $P(M^C)$=0,45, os acontecimentos M e M^C não são equiproráveis. Logo, os 8 acontecimentos elementares em Ω não são equiprováveis.

Assim, as probabilidades pedidas, porque existe independência do sexo entre irmão, são calculadas do seguinte modo:

- $P(A) = P(MMM \cup MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) =$
$= P(MMM) + P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) =$
$= P(M)\,P(M)\,P(M) + P(M)\,P(M)\,P(M^C) + P(M)\,P(M^C)\,P(M) + P(M^C)P(M)P(M) =$
$= 0,55^3 + 3x\ 0,55^2x0,45 = 0,57475$
- $P(B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM \cup M^CMM \cup M^CMM^C \cup M^CM^CM) =$
$= 1 - (P(MMM) + P(M^CM^CM^C)) = 1 - (P(M)\,P(M)\,P(M) + P(M^C)\,P(M^C)\,P(M^C) =$
$= 1 - (0,55^3 + 0,45^3) = 0,7425$
- $P(C) = P(MMM) = 0,5^3 = 0,166375$

b) $P(A \cap B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) =$

$= P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) = 3x\ 0,55^2x0,45 = 0,408375$

$P(A)\times P(B)=0,55 \text{ x } 0,75 = 0,41$

Como, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$, A e B não são independentes.

c) Uma vez que $(A\cap B) \cap C = \{MMM^{C,}\ MM^CM\ ,\ M^CMM\} \cap (MMM\} = \{\ \}$, então os acontecimentos $A\cap B$ e C são incompatíveis.

OU:

$(A\cap B)$ e C são incompatíveis, uma vez que é impossível um casal de 3 filhos ter filhos de ambos os sexos, com apenas uma menina, e simultaneamente serem todos rapazes.

d) Como $A\cap B$ e C são incompatíveis então, $P(A\cap B \cap C) = 0$. Mas,

$P(A\cap B)\times P(C) = 0,408 \times 0,16 \neq 0$. Logo, $A\cap B$ e C não são independentes.

Uma situação hipotética em que poderiam ser independentes era admitir que um dos acontecimentos $A\cap B$ ou C tivesse probabilidade nula de ocorrência. Por exemplo, admitir que só se consideram casais com 3 filhos tendo pelo menos 1 menina. Assim, P(C)=0.

3.RESPOSTA ESPERADA DA SITUAÇÃO PROBLEMA 2

2.1 Qual o valor das seguintes probabilidades: $P(A \cap P)$ e $P(A|P)$?

Com base no enunciado dado,

- $P(A) = 0,06$
- $P(P|A) = 0,998$
- $P(P^C|A^C)=0,996$

onde P^C e A^C representam o acontecimento complementar de P e A, respetivamente.

Probabilidades pedidas:

$P(A \cap P) = P(A)\ P(P|A) = 0,06 \times 0,998 = 0,05988$

$P(A|P) = P(A \cap P)/P(P) = 0,05988/0,06364 = 0,940918$

uma vez que

$P(P) = P(A \cap P^C \cup A^C \cap P) = P(A \cap P) + P(A^C \cap P) = 0,05988 + P(A^C) \times P(P|A^C) =$

$= 0,05988 + (1-0,06) \times (1-0,996) = 0,06364$

2.2 Os acontecimentos A e P são incompatíveis? Justifique convenientemente a sua resposta.

Não, porque $P(A \cap P) \neq 0$. Consequentemente, $A \cap P$ nunca pode ser o acontecimento impossível (i.e., o acontecimento { })

2.3 Os acontecimentos A e P são independentes? Justifique convenientemente a sua resposta.

Não, porque a probabilidade de ocorrência do acontecimento A toma valores diferentes consoante se conheça a ocorrência de P ou não:

$P(A) = 0,06$

$P(A \mid P) = 0,940918$

Ou:

Não, porque

$P(A) \times P(P) = 0,06 \times 0,06364 = 0,003818$ é diferente de $P(A \cap P) = 0,05988$

2.4 Escolhendo ao acaso um rato dessa população, qual é a probabilidade de ele ser portador das bactérias, sabendo que o teste efetuado deu negativo?

Probabilidade pedida:

$P(A|P^C) = P(A \cap P^C) / P(P^C) = 0,00012/0,93636 = 0,000128$

Já que:

$P(A \cap P^C) = P(A) \times P(P^C|A) = P(A) x (1-P(P|A)) = 0,06 \times (1-0,998) = 0,00012$

$P(P^C) = P(A \cap P^C \cup A^C \cap P^C) =$

$= P(A \cap P^C) + P(A^C \cap P^C) =$

$= 0,00012 + P(A^C) \times P(P^C|A^C)$

$= 0,00012 + (1-0,06) \times 0,996 = 0,93636$

OU:

$P(P^C) = 1 - P(P) = 1 - 0,06364$

ANEXO V: PROVA ALTERADA

1.Um certo estudo numa maternidade revelou, acerca do sexo de 300 bebés nascidos naquela maternidade e das correspondentes previsões de sexo a partir da ecografia na 13ª semana de gestação, os seguintes resultados:

		Sexo verdadeiro (ao nascer)	
		Feminino	Masculino
Sexo previsto na ecografia	Feminino	127	96
	Masculino	9	68

Com base nestes resultados, responda às seguintes questões.

1.1 Calcule a probabilidade de um bebé, ao nascer, ser do sexo masculino.

1.2 Determine a probabilidade de ser menino se a ecografia faz prever ser uma menina.

1.3 A Sra. Ana e a Sra. Berta estão a ser seguidas naquela maternidade. Ambas realizaram uma ecografia na 13ª semana de gestação. À Sra. Ana a ecografia previu uma menina e à Sra. Berta um menino.

Em que caso é mais provável ser confirmado, no nascimento, a previsão do sexo indicada pela ecografia? Numa pequena composição fundamente a sua resposta.

Tópicos a referenciar na composição:

- a probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Ana é do sexo feminino;
- a probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Berta é do sexo masculino.

1.4 Um casal com três filhos, todos nascidos naquela maternidade, é selecionado ao acaso. Considere que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos e que a probabilidade de qualquer filho do casal ser do sexo masculino é igual à probabilidade calculada na alínea 1.1., com aproximação às centésimas.

Considere os acontecimentos:

A: "O casal ter no máximo uma rapariga"

B: "O casal ter filhos de ambos os sexos"

C: " O casal só ter rapazes"

Sugestão: Caso não tenha resolvido a alínea 1.1,*tome* o *valor 0,45 para aquela probabilidade.*

Página 1 de 2

a) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos.
b) Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.
c) Mostre que os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompatíveis.
d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique que os acontecimentos $A \cap B$ e C não podem ser independentes e, alterando as condições do enunciado, apresente uma situação em que o poderiam ser.

2. A leptospirose é também conhecida como doença de Weil. Esta doença é causada por duas espécies de bactérias. Numa população de ratos, a probabilidade de encontrar um rato portador destas bactérias é 6%. Foi proposto um novo teste de diagnóstico da doença e, para avaliar a sua qualidade, foram efetuados vários testes àquela população de ratos, no sentido de detetar a existência destas bactérias. Do estudo efetuado resultaram as seguintes conclusões:

- a probabilidade de um rato ter teste positivo, sabendo que é portador das bactérias, é 99,8%;
- a probabilidade de um rato ter um teste negativo, sabendo que não é portador destas bactérias, é de 99,6%.

Sejam A o acontecimento "O rato ser portador das bactérias" e B o acontecimento "O rato ter teste positivo".

2.1 Qual o valor das seguintes probabilidades: $P(A \cap B)$ e $P(A \mid B)$?

2.2 Os acontecimentos A e B são incompatíveis? Justifique convenientemente a sua resposta.

2.3 Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique convenientemente a sua resposta.

2.4 Escolhendo ao acaso um rato dessa população, qual é a probabilidade de ele ser portador das bactérias, sabendo que o teste efetuado deu negativo?

ANEXO VI: QUESTÃO DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Enunciado:

Uma "pen drive" é feita com base em dois processos principais para o seu fabrico, "A" e "B", ambos com probabilidade de falharem. Na seguinte tabela estão indicadas as taxas de sucesso e falha:

	B	B falha
A	0,90	0,05
A falha	0,01	0,04

Indica a afirmação correta:

[] "A" e "B" são independentes e P $(A \cup B) = 0{,}86$;
[] "A" e "B" são dependentes e P $(A \cup B) = 0{,}96$;
[] "A" e "B" são dependentes e P $(A \cup B) = 0{,}86$;
[] Nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.