MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: CONSTRUCCIÓN DEL DETECTOR DE PUNTOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Martín E. Acosta Gempeler, Cindy N. Morgado Hernández,
David Berrio Valbuena
martin@matematicas.uis.edu.co, cinathalia@gmail.com,
jberrio@matematicas.uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander
Superior

Resumen
Este laboratorio se diseña a partir de problemas planteados en el aula de clase por estudiantes del programa Maestría en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, quienes cursaron la materia de Fundamentación Epistemológica de la Geometría guiada por el profesor Martin Acosta, estos problemas surgen del estudio de las propiedades del triángulo simétrico lateral. Mediante la práctica de la matemática experimental, utilizando el software geometría dinámica *Cabri Géométre* enseñaremos a construir el detector automatizado de puntos para obtener datos y emitir conjeturas acerca de la solución de dichos problemas.

Palabras clave: *Lugar geométrico, detector, geometría dinámica.*

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Difundir la práctica de la matemática experimental usando el software de geometría dinámica *Cabri Géométre* para generar datos, emitir y verificar conjeturas, mediante el uso del detector automatizado de puntos en el abordaje de problemas de construcción de lugares geométricos.

Este laboratorio pretende familiarizar a profesores de educación media y superior, y estudiantes universitarios de cursos avanzados de matemáticas y geometría con una herramienta de enseñanza e investigación que permita dejar de lado errores de tipo perceptivo o de exactitud de representación grafica que se presenta en el trabajo de lápiz y papel (Acosta, Mejía & Rodríguez, 2011)

2. MARCO TEÓRICO

En este año se cumple 36 años de la primera demostración por computador del famoso teorema de los cuatro colores (es siempre posible colorear un mapa con cuatro colores de modo que dos países limítrofes tengan asignado distinto color (Appel y Haken, 1977; Appel, Haken y Koch, 1977, citado por Jacovkis, 2001): las demostraciones se derivan en la comprobación total de las posibilidades mediante un software de computador, lo cual causo un revuelo increíble ya que muchos matemáticos dijeron que esto no era una demostración, sin embargo Thomas (1976) señala:

“Se puede argumentar que nuestra ‘demostración’ no es una demostración en el sentido tradicional, porque contiene pasos que los humanos nunca podrán verificar. (...) Concedemos, sin embargo, que verificar un programa de ordenador es mucho más difícil que comprobar una demostración matemática de la misma longitud”.

La aparición de ordenadores con gran capacidad de almacenamiento, cálculos rapidísimos y diseño gráfico de gran resolución ha impulsado cambios tan profundos que ha llegado a ser posible utilizar un ordenador como un instrumento experimental (Banegas 2007). En el siglo XX gracias al computador se ha retornado a la observación y la experimentación que se tenía antes de Euclides en el quehacer matemático. Como es sabido Euclides fue el primero que organizó el conocimiento según axiomas, definiciones, postulados y teoremas, y todavía se expone el conocimiento de esta manera. Si conocemos los axiomas, las definiciones y los postulados podemos deducir los teoremas, y con los teoremas podemos resolver problemas. Al matemático le interesa asegurarse que cada vez que utiliza un teorema se haya deducido de los axiomas, definiciones y postulados, si no lo han deducido de esta manera no los utiliza. Esta forma de organización del conocimiento tiene dos ventajas:

1. Economía: Las bases que necesito son pocas para crear todo.

2. Seguridad: En qué sentido seguridad, “yo no utilizo algo si no lo he podido deducir de axiomas, definiciones y postulados”. “Si demuestro el teorema lo puedo utilizar con seguridad”.

Esta demostración del teorema de los cuatro colores no ha sido reducida a un proceso de formalización que satisfaga a todos los matemáticos, dado que se ha adoptado de la matemática moderna (desde el siglo XVII) la tradición de publicar sólo resultados en una presentación final, formal y abstracta, dejando en el olvido los ejemplos numéricos y gráficos que conducen al matemático a la formulación inicial de un teorema. En lo que a nosotros respecta, este hecho marca el inicio de la experimentación como génesis del conocimiento matemático.

Matemática experimental

Para Bailey & Borwein (2003) la matemática experimental es un acercamiento a las matemáticas en las que se utilizan cálculos numéricos para investigar los objetos matemáticos y la identificación de propiedades y patrones.

Esta es una rama de las matemáticas que utiliza la tecnología informática como una herramienta diligente en la investigación en matemáticas en ámbitos relativos a la exploración de conjeturas y creencias o indicios y a un meticuloso análisis de los datos obtenidos en la experimentación Bailey & Borwein (2005).

Bailey & Borwein (2003) proponen la tecnología computacional como herramienta para realizar procesos experimentales relativos a:

1. La percepción y la intuición.
2. El descubrimiento de nuevos patrones y relaciones.
3. La utilización de representaciones gráficas que sugieren los principios matemáticos subyacentes.
4. Prueba y falsación de conjeturas.
5. Exploración de posibles resultados.
6. Construcción de enfoques para llegar a una demostración formal.
7. Sustitución de largas experimentaciones a lápiz y papel por resultados derivadas de algoritmos computacionales.
8. Confirmando los resultados obtenidos analíticamente.

Técnicas y herramientas

Dentro de las técnicas y herramientas de la matemática experimental tenemos: los métodos numéricos, algoritmos computacionales, técnicas computacionales de agotamiento, sistemas de algebra computacional y para el caso de este laboratorio los software de geometría dinámica.

Cabri Géométre es un software que se puede convertir en un "laboratorio" en el que podemos realizar exploraciones numéricas y simbólicas a gran escala, sin “dolores de mano” por los extensos cálculos. De esta manera podemos probar conjeturas y suponer otras completamente nuevas. Este enfoque está dando lugar a descubrimiento de nuevos resultados e incluso resultados parciales (Borwein, 2004).

La matemática experimental, sus métodos y técnicas brindan la posibilidad de:

1. Buscar un contraejemplo a una conjetura.
2. Encontrar nuevos ejemplos de números u objetos que poseen unas propiedades particulares.
3. Hallazgos accidentales de patrones numéricos o geométricos.
4. Comprobar mediante programas computacionales grandes cantidades de casos (métodos por agotamiento).
5. Verificación de conjeturas que dan luces en la búsqueda de la prueba analítica.
6. Verificación visual de propiedades.

Para el caso de los problemas de geometría que consisten en caracterizar un lugar geométrico desconocido, el software de geometría dinámica permite encontrar puntos que con un grado determinado de aproximación hacen parte de ese lugar, para poder emitir una conjetura sobre la forma de dicho lugar y sus características. En este taller utilizaremos el ‘detector de puntos’, un algoritmo geométrico-numérico que permite generar una gran cantidad de puntos que pertenecen con una aproximación dada al lugar, para emitir conjeturas sobre la forma y las características del lugar. Luego construiremos el lugar según nuestras conjeturas y verificaremos exhaustivamente que todos los puntos construidos pertenecen al lugar.

3. MÉTODO

Enseñaremos a construir el detector automatizado de puntos. Seguido, se formularán problemas donde el uso del detector de puntos genere datos para conjeturar sobre la forma del lugar geométrico solución, esta aproximación gráfica que nos brinda la herramienta utilizada proporciona características que permiten construir dicho lugar. Posteriormente, se verificará que este conjunto de puntos sobre el plano satisfacen las condiciones del problema.

Mediante el proceso experimental se verifican las conjeturas, pero es necesario un proceso de demostración formal, la experimentación controlada teóricamente y la justificación de propiedades requiere de extensos espacios de tiempo, razón por la cual probablemente no se trabajará en este taller, aun cuando sabemos que hace parte de la actividad matemática.

Cabe resaltar que estas actividades que se proponen no son actividades para llevar al aula, sino actividades para realizar con profesores y estudiantes universitarios, con el fin de que se familiaricen con la práctica de la matemática experimental.

4. DISEÑO DIDACTICO

Para iniciar el taller necesitamos definir los siguientes conceptos:

Triángulo Simétrico Lateral (TSL): Dado un triángulo, Δ ABC, cualquiera y un punto P cualquiera en el plano, llamamos triángulo simétrico latera de P con respecto al ΔABC, al $\Delta P_aP_cP_b$, donde P_a es el punto simétrico de P con respecto al lado $\overline{BC}$, P_b es el simétrico con respecto a $\overline{AC}$ y P_c es el simétrico con respecto a $\overline{AB}$ (ver Figura1).

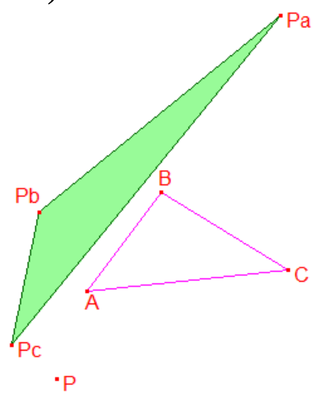

Figura 1. Triángulo simétrico lateral.

Lugar geométrico: Se define intuitivamente como el conjunto de puntos del plano o del espacio que cumplen ciertas condiciones dadas de antemano.

Problema 1. Dado un triángulo cualquiera, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que el triángulo simétrico lateral de cada uno de estos puntos sea rectángulo.

Proceso experimental

Como primer ejercicio replicaremos los puntos P en los cuales el triángulo simétrico lateral es rectángulo, arrastrándolo y poniendo las respectivas marcas en donde se cumpla que uno de los ángulos del TSL mide aproximadamente noventa grados.

Encontrando lugares geométricos

Con la herramienta "medida de ángulo" medimos el ángulo $P_aP_cP_b$ y posteriormente manipulamos el punto P, de tal manera que en los lugares donde la etiqueta de la medida muestre aproximadamente 90°, construiremos un punto (Ver Figura 2).

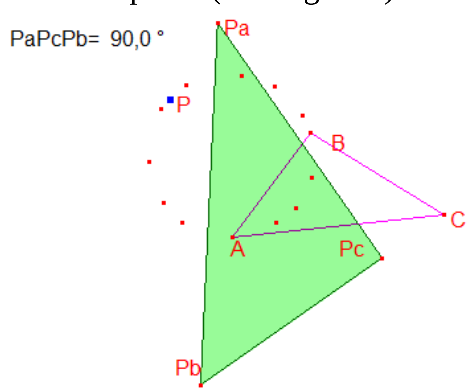

Figura 2. Construcción de algunos puntos P donde el TSL es rectángulo.

Elaboración de una macro

Como debemos verificar que cada punto construido genera un TSL rectángulo, diseñaremos una macro que nos permita obtener un TSL para cada punto.

Damos clic en "Objeto(s) inicial(es)" y posteriormente seleccionamos el triángulo **ABC** y el punto **P**, luego damos clic en "Objetos final(es)" y seleccionamos el triángulo $\mathbf{P_aP_cP_b}$. Finalmente seleccionamos la opción "Validar macro", aquí podemos darle un nombre e incluso asignarle un icono. En la parte baja de la ventana marcamos con un "tick" en guardar y seleccionamos la carpeta en la cual queremos guardar nuestra macro.

Ahora la macro construida aparecerá dentro de las opciones (Ver Figura 3).

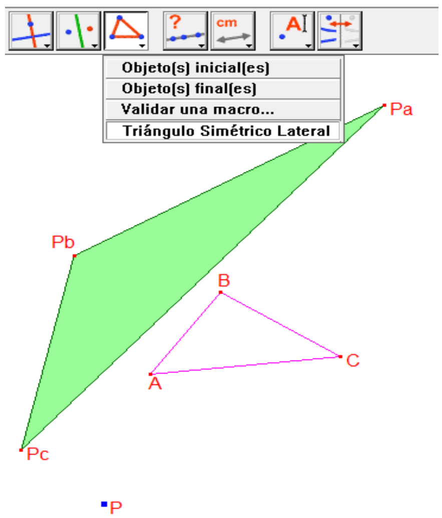

Figura 3. Macro del triángulo simétrico lateral.

En vista de que el trabajo se vuelve más tedioso y complejo, automatizaremos la manera de construir los puntos que cumplen las condiciones que demos en cada problema.

Construcción del Detector de Puntos

La condición del problema es hallar todos los puntos P para los cuales el TSL es rectángulo. Usaremos la herramienta traza y la aplicaremos sobre el punto P con la condición que deje una huella marcada cuando el ángulo $\mathrm{P_aP_cP_b} \approx 90°$.

Debido a que no podemos establecer la relación de que a cada pixel le corresponda un punto del plano, es posible que no encontremos todos los puntos donde el ángulo del TSL sea recto, por ello tendremos en cuenta un margen de error al cual llamaremos épsilon, y diremos que:

$$0 < abs(P_a\mathrm{P_cP_b} - 90) \leq \varepsilon, \text{ para este caso usamos } \varepsilon = 1.$$

1. Con la herramienta "medida de ángulo" medimos el ángulo $\mathrm{P_aP_cP_b}$.
2. Con la opción "Número" colocamos sobre el área de trabajo el valor elegido para épsilon. (la ventaja de la geometría dinámica es que este número lo podemos hacer variar).
3. Debemos obtener la distancia entre el valor del ángulo $\mathrm{P_aP_cP_b}$ y un ángulo recto, para esto trazamos dos líneas perpendiculares y medimos el ángulo comprendido entre ellas de la

misma manera que se hizo para el ángulo del TSL y posteriormente, usamos la “calculadora” para obtener dicha diferencia. Esta no arrojara un valor que podemos arrastrar hasta el área de trabajo del software.

4. Seleccionamos la opción “Mostrar ejes”, y luego con la opción “Transferencia de medidas” pasamos al eje de las equis la medida de épsilon y la medida que obtuvimos con la calculadora, esto automáticamente construirá dos puntos sobre el eje. Con el punto resultante de la transferencia de épsilon construimos un segmento entre el origen y dicho punto, mientras que con el punto de la otra medida construiremos una recta perpendicular al eje de las abscisas que pase por mencionado punto, y con la opción “Punto de intersección” selecciona el segmento y la recta perpendicular. (este punto que llamamos k, aparecerá solo cuando la diferencia entre el ángulo $P_aP_cP_b$ y 90 sea menor o igual que épsilon).
5. Hacemos “Simetría central” de P con respecto a k, y al punto resultante le llamaremos P’ usamos nuevamente esta herramienta, pero ahora hacemos la simetría de P’ con respecto a k, obtendremos el punto P’’ que tendría la misma posición de P pero que al depender de k aparecerá exclusivamente cuando se cumpla la condición $\mathrm{abs}(P_aP_cP_b - 90) \leq 1$ (Ver Figura 4).
6. Finalmente le damos “Traza al punto P’’ y de esta manera obtendremos la marca de los puntos donde se cumple la condición que establecimos (Ver Figura 5).

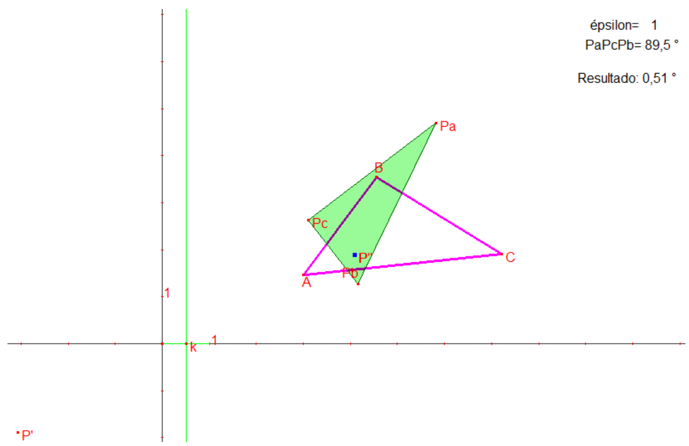

Figura 4. Construcción de la condición para encontrar el lugar geométrico de los puntos P donde el TSL es rectángulo

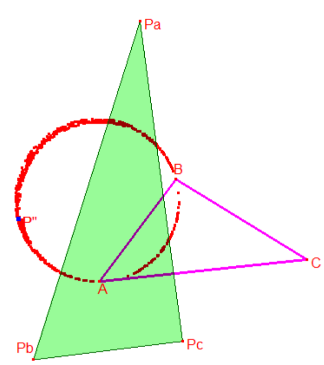

Figura 5. Traza del lugar geométrico de los puntos P donde el TSL es rectángulo

Construcción Detector automatizado de puntos

Para hacer aún más fácil el trabajo de hallar estos lugares geométricos aprenderemos a hacer el detector automatizado de puntos.

Primero debemos crear un cuadrado a partir de un segmento dado, y dividir cada lado del cuadrado en 20 partes iguales, usando para ello la herramienta "Punto medio" y algunas simetrías. Luego con la herramienta "Polígono" unimos los puntos como se ve en la Figura 6.

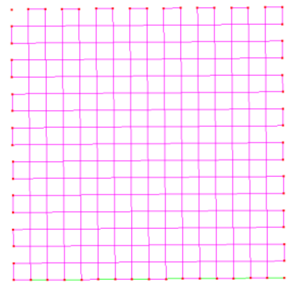

Figura 6. Polígono (rejilla)

Crearemos una macro, según los pasos vistos anteriormente, la cual a partir del segmento con el cual construimos el cuadrado nos proporcione la rejilla.

Redefiniremos nuestro punto P sobre la rejilla y la ocultamos para mayor comodidad, luego vamos a la herramienta "Lugar" la seleccionamos y hallamos el lugar de P'' con respecto a P. y al lugar de damos traza. (Ver Figura 7).

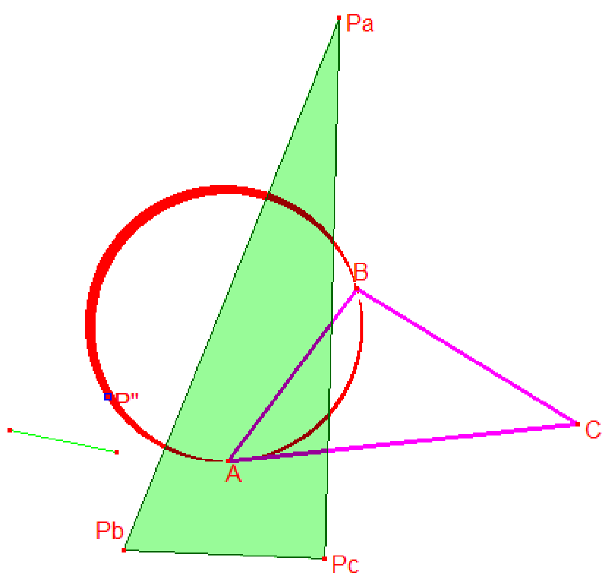

Figura 7. Detector de puntos automatizado.

Como ya previamente hemos creado las condiciones para todos los problemas planteados y tenemos la macro para la construcción de la rejilla, basta solo con redefinir P sobre el polígono y obtendremos de manera muy práctica los lugares geométricos de los puntos para los cuales el triángulo simétrico lateral correspondiente cumple las propiedades descritas en cada uno de los cuestionamientos hechos inicialmente.

Ya conociendo como se realiza la construcción del detector automatizado de puntos se plateará un nuevo problema.

Problema 2. Dado un triángulo cualquiera, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que el triángulo simétrico lateral tiene área igual al triangulo de referencia.

Para abordar este problema partiremos del siguiente interrogante:

¿Qué condiciones debemos darle a nuestro detector de puntos de tal manera que podamos encontrar los lugares geométricos de los puntos P donde el triángulo simétrico lateral tiene área igual al triángulo de referencia?

5. CONSIDERACIONES FINALES

Esta experiencia resulta enriquecedora en primera medida porque se aprende a utilizar el software de geometría dinámica *Cabri Géométre* mediante una práctica experimental de las matemáticas. Este tipo de prácticas permite: formular conjeturas inteligibles sobre las forma de los lugares geométricos solución e identificar propiedades que puedan traducirse en argumentos deductivos para la demostración formal.

Esta práctica experimental no está diseñada para estudiantes de secundaria. No obstante, estudiantes de educación media podrían realizar la experimentación para formular las conjeturas, dado que el proceso de demostración formal puede tornarse extenso y complicado dependiendo de los conocimientos teóricos de los estudiantes. Por otro lado, los profesores de matemáticas están capacitados para realizar el proceso experimental y llegar a la justificación teórica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos especiales al PhD. Martin Eduardo Acosta Gempeler y a nuestros compañeros y colegas de la Maestría en Educación Matemáticas por compartir con nosotros sus conocimientos e ideas en el curso de Fundamentación Epistemológica de la Geometría, donde nos involucramos por primera vez en prácticas de matemática experimental.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, E., Mejía, C. & Rodríguez, W. (2011). "Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido", *Revista Integración, 29* (2), 163-174.

Bailey, H. & Borwein, J. (2005). "Experimental mathematics: Examples, Methods and Implications", *Notices of the AMS, 52* (5), 502-514.

Bailey, H. & Borwein, J. (2003). "Sample Problems of Experimental Mathematics". Recuperado de http://www.experimentalmath.info/books/expmath-probs.pdf

Banegas, J. (2006). "Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador", *Revista contraste, 12* (1), 27-50. Recuperado de http://www.uma.es/contrastes/pdfs/012/02jesusalcolea.pdf

Borwein, J. *et al*. (2004). *Experimentation in mathematics, computational paths to discovery*. A.K. Peters. USA

Jacovkis, P. M. (2005). "Computadoras, modelización matemática y ciencia experimental", *Revista CTS,* 2 (5), 51-63.