

## LOS USOS DE LAS GRÁFICAS PARA LA RESIGNIFICACIÓN DE LA DERIVADA. DIFERENTES PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Heidi Chavira Jara, Gabriela Buendía

Universidad Autónoma de Cd. Juárez, CICATA - IPN

[hcchj@yahoo.com](mailto:hcchj@yahoo.com), [buendiag@hotmail.com](mailto:buendiag@hotmail.com)

### Resumen

La presentación tiene el propósito de explicar cómo la socioepistemología nos permite estudiar y analizar la resignificación de la derivada, esto a través de los usos que se pueden dar a las gráficas. Además se presenta un contraste entre esta teoría y la de Representaciones Semióticas, para situar el problema de investigación en el contexto de la matemática educativa.

**Palabras clave:** *Socioepistemología, Representaciones Semióticas, Gráficas, Usos de las gráficas*

### Introducción

El presente trabajo es parte de una investigación doctoral que estamos desarrollando. Proponemos estudiar las funciones y su variación apelando a su naturaleza socioepistemológica a través del lenguaje gráfico. Por ello, entender el papel de las gráficas en la generación de conocimiento matemático resulta fundamental.

El concepto de función derivada no es en la mayoría de las ocasiones estudiado a través del enfoque gráfico en preparatoria, y en nivel superior no es privilegiado tampoco, lo cual ocasiona que los estudiantes no puedan reconocer, usar y analizar a la derivada basándose solo en el lenguaje gráfico. Para ubicar el problema de investigación en el contexto de la matemática educativa, presentaremos cómo diversos marcos teóricos tratan con las gráficas y sus usos, así como un contraste teórico de su interpretación, a la luz del concepto de derivada.

### Discusión

#### *Los usos de las gráficas y la resignificación de la derivada*

Nos interesa identificar en las investigaciones existentes como se ha estudiado o analizado el uso de las gráficas a través del discurso escolar, para así saber si ya se han identificado las posibles prácticas institucionales que propician dichos usos de las gráficas de tal manera que podamos nutrirnos de ellas a través de la forma y tipo de usos, dando pie a una reformulación del tema.

Al tener claramente identificados estos aspectos, momentos académicos o prácticas académicas en los que se estudia a la derivada a través de la gráfica, intentaremos dotarla de una identidad y significado propio por medio del lenguaje gráfico. En las investigaciones antecedentes estamos identificando las evidencias de que se reconozca a  $f'$  a través de su gráfica y así el reconocer la naturaleza de los diferentes tipos de funciones, es decir darle el papel relevante a la gráfica, sin dejar de lado la naturaleza propia de las funciones. Esto con la intención de resignificar el concepto de  $f'$  a través de su gráfica para los diferentes tipos de funciones, con resignificar nos referimos a enriquecer el concepto o definición que los estudiantes ya tienen sobre  $f'$ , por lo que el conocimiento previo se vuelve un referente o punto de partida para la resignificación.

Encontramos varios trabajos que son resultado de investigaciones y otros que tienen la intención de ser propuestas, referentes a tipos específicos de funciones, tales como el de Ferrari (2001) que

trabaja sobre funciones logarítmicas, el de Rosado (2004) que analiza las cualidades de la linealidad del polinomio, entre otras más.

Se pueden tener diferentes imágenes o expectativas de lo que es una gráfica. Cordero y Flores (2007) consideran a mapas de ubicación, pictogramas, gráficas de barras y figuras a escalas, como gráficas en diferentes niveles escolares, e identifican los diferentes usos que cumplen, para delimitar o definir en el problema que nos interesa. Es importante mencionar que nosotros consideraremos gráficas en el plano cartesiano, pero no necesariamente con descripción de coordenadas, puesto que nos interesa analizar la variación de  $f'$  de manera cualitativa.

En el libro de Lacasta y Pascual (1998), se plantea otra caracterización del uso de las gráficas. Es importante reconocer que esta clasificación surge con una intención distinta a la que se podría tener al presentar un artículo o desarrollar una tesis. A diferencia de los trabajos que aquí se mencionan en este libro se consideran solamente gráficas de funciones en el plano cartesiano. Los autores plantean una clasificación y un análisis desde lo que se podría pensar puede ser “evidente” en las prácticas cotidianas en el aula. Los autores identifican cinco usos diferentes y no necesariamente excluyentes, a partir de la función que cumple la gráfica: el uso como ábaco, como mensaje topológico, como ideograma, como elemento interactivo y por último como estructura matemática.

En el uso como ideograma y elemento interactivo, logramos reconocer mayor afinidad con la idea de resignificación de la derivada, al establecerse que en estos usos los contenidos matemáticos no aparecen de manera implícita, sino que el alumno se ve enfrentado con la necesidad de interpretar o construir sobre la gráfica argumentos que le permitan realizar la tarea propuesta, es decir, busca propiedades o cualidades globales en la gráfica que le permitan argumentar o inferir acerca de conceptos no presentes implícitamente en la misma. Estas argumentaciones son las que nos permitirían identificar las prácticas de los alumnos, y con esto la oportunidad de una resignificación de la derivada.

Precisamente los diferentes usos que se le pueden dar a la gráfica son los que nos permitirán establecer una evolución, pues dependen de la intencionalidad que se tenga. Por ejemplo una gráfica que describa un movimiento en nivel secundaria podría tener la intención de establecer la relación entre el tiempo y la distancia, pero la misma gráfica en nivel preparatoria podría tener la intención de hacer interpretaciones acerca de la velocidad en general, hacer conjeturas acerca de la aceleración o determinar velocidades instantáneas; en este ejemplo se estaría dando dos usos diferentes a una misma gráfica y los atributos que se quieren evidenciar en cada caso, promueven diferentes niveles de argumentación. Al identificar y reconocer que existen diferentes usos para la gráfica podemos tener un panorama de la evolución que sufre a lo largo del discurso escolar, pero esto es evidente solo si seguimos a la gráfica y no a otra representación del objeto matemático que en su momento podría estar modelando y esto resulta más transparente bajo la postura socioepistemológica que permite analizar la profundidad de este aspecto.

Existen varios trabajos que relacionan la idea de la gráfica y la derivada, presentaremos algunas ideas que hasta el momento se han identificado como posibles puntos de referencia para nuestro problema de investigación. En el trabajo de tesis de Parra (2008) titulado: *El uso de las gráficas en la ingeniería. Una resignificación de la derivada*, vemos como se presta atención a las interpretaciones y argumentaciones que alumnos de ingeniería lograban al responder cierta situaciones en las que se evidenciaban los diferentes usos de las gráficas. Es interesante en esta

investigación como en las situaciones se pone de manifiesto la necesidad de analizar los problemas a luz de las prácticas sociales que emergieron al trabajar y cuestionar a los alumnos, aunque las situaciones estaban en el contexto de la mecánica de fluidos en un problema aplicado a el flujo de agua bajo diferentes variantes, es notorio como cada situación pone de manifiesto un uso o usos en particular de la gráfica. Esto lleva a un momento de interpretación y argumentación muy importante. En la cuarta situación que se presenta en este trabajo de tesis, donde a partir de una gráfica deben predecir comportamientos de variación en base a sus observaciones en los comportamientos de las gráficas de las situaciones anteriores, lo cual es completamente viable por la manera en que se analizaron (siempre dentro del contexto de la investigación, es decir, un problema de flujo de agua) las características de las gráficas en las situaciones anteriores.

Otro trabajo de tesis que tomamos como referente es el de Cen (2006), titulado: *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*, solo discutiremos un aspecto muy específico de esta tesis, en el cuarto semestre de bachillerato, donde el tema central es el Cálculo Diferencial, en seis de las ocho unidades se menciona aspectos específicos a desarrollar con las gráficas, pero en todas ellas el uso que se propone es cuantitativo, es decir, se proponen actividades tales como: graficar diferentes tipos de funciones, identificar puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, variaciones provocadas por coeficientes y otros. Este tipo de análisis propuesto en los programas de estudio no contempla la riqueza de un análisis cualitativo, que es precisamente el requerido para poder analizar la gráfica en contextos específicos, al dejar de lado las características cualitativas de la gráfica se pierde la oportunidad de acceder a las argumentaciones que los alumnos podrían generar, además de que las prácticas sociales de los alumnos no serían evidentes al trabajar la gráfica como resultado de una serie de operaciones algebraicas o numéricas.

En la tesis de Suárez (2008), se muestra un uso de las gráficas para lo que en su trabajo llama el binomio Modelación - Graficación. Identifica por medio de un análisis del tratado de Oresme los elementos de pertinencia, de construcción y de integración así como las relaciones entre ellos una como los constituyentes de la epistemología para la modelación a través del uso de las gráficas, y es precisamente en estos elementos en los busca las evidencias de resignificación de los estudiantes al decir “Estos tres elementos y sus relaciones conforman una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará una socioepistemología de la modelación – graficación, y que proporciona un marco de referencia para entender cómo los estudiantes logran una resignificación de sus conocimientos matemáticos.” (pp. 67), en el contexto de nuestro problema de investigación los conocimientos matemáticos en los que buscamos la resignificación son los conceptos relacionados la derivada.

### **Las gráficas vistas desde diferentes aproximaciones teóricas**

Para este contraste mostraremos algunos resultados que se han reportado en matemática educativa en torno a las gráficas como una representación desde el punto de vista de la Teoría de las Representaciones Semióticas, para poder explicar o evidenciar por qué el ver a las gráficas como un lenguaje ( en el sentido de ser portadora de ideas o información) y no una representación de algo (en este caso de una función) permite identificar en ellas elementos importantes para formular argumentos que lleven a una construcción de conocimientos. Daremos a continuación algunas argumentaciones iniciales sobre la necesidad de analizar la gráfica bajo el

enfoque socioepistemológico para nuestro problema de investigación, el cual busca enriquecer lo que desde el punto de vista epistemológico y didáctico se conoce de este tema.

### **a) Las Representaciones Semióticas**

Para esta aproximación teórica comenzamos tomando como referente algunas definiciones o afirmaciones que se han hecho sobre el “signo”. Radford (2006) reconoce que bajo la Teoría Semiótica son importantes las “relaciones” entre los signos, por lo que nos parece que no les da un estatus de constituyentes o constructores de conocimientos como ente aislado. Por la necesidad, de estas relaciones, la capacidad de realizar conexiones entre diferentes signos, y es precisamente en los elementos que permiten la conexión en los que se centra la atención, por lo que un signo se vuelve dependiente de otro(s) para lograr algún grado de entendimiento o conocimiento. Además al establecer que los signos son “a través de los cuales piensan los individuos” no reconoce en ellos la posibilidad de ser portadores de conocimiento por sí mismos. Vygotski por su parte le atribuye al signo solo el papel de mediador (Radford, 2006), lo cual en el contexto del problema de investigación, reduce el posible valor cognitivo de los elementos que la gráfica puede aportar a la construcción de conocimiento matemático, en el momento en que no considera a la gráfica como una herramienta suficiente para el proceso de internalización de una acción.

Nos es evidente que bajo la TRS, al considerara a la *gráfica* como un solo registro, no sea suficiente ni para resignificar ni para la aprehensión de un concepto u objeto matemático, ya que enfatiza la necesidad de un tránsito entre registros, tal como lo menciona Duval: “no puede haber aprendizaje verdadero en tanto las situaciones y las tareas propuestas no tomen en cuenta la necesidad de varios registros de representación para el funcionamiento cognitivo del pensamiento” (Duval, 1993, pp. 199).

En las investigaciones en las que se reconoce a la gráfica como una representación de una función (independientemente del tipo de función) se da mucha importancia a las transformaciones entre representaciones, es decir, a los tratamientos y conversiones que se pueden hacer en las diferentes representaciones, sin que ninguna de ellas tome un papel relevante en la construcción del conocimiento; esto nos llevaría a que la gráfica se convirtiera en un sistema semiótico monofuncional. Incluso este punto de vista da un sentido utilitario a las representaciones cuando habla de la economía de tratamientos (Duval 1993, 2006) como una sugerencia para trabajar un concepto de manera más sencilla o concreta en comparación al trabajo que el mismo concepto podría requerir bajo otra representación. En esta economía de tratamiento se deja de lado la posibilidad de identificar las prácticas sociales que podrían emerger al permanecer en una misma representación y tratar de analizar las argumentaciones que de estas prácticas podrían emerger, lo cual fortalece la riqueza epistemológica y por ende la didáctica que de esta se infiera. Sin embargo bajo la socioepistemología podría ser multifuncional al permitirle a la gráfica aportar información para diferentes propósitos.

### **b) La Socioepistemología**

Analizando nuestro problema de investigación bajo la socioepistemología nos interesa formar argumentaciones sobre varias ideas relacionadas entre sí ( variación,  $f'$  relación  $f-f'$ , interpretaciones graficas de  $f'$ ) y con esto resignificar el concepto de  $f'$  a través del lenguaje grafico. Es precisamente el lenguaje grafico el que nos permitirá caracterizar la naturaleza de los distintos tipos de funciones a través de sus elementos característicos, algunos de los cuales podrían ser: variaciones, comportamientos tendenciales, el efecto de pequeñas modificaciones,

predicciones y posiblemente otros, y esta caracterización no dependerá de la relación que la gráfica pueda tener con otra presentación de  $f$  o  $f'$  (cualquiera que esta pudiera ser).

Para la socioepistemología la gráfica no se considera como otra “cosa” sino es  $f'$  precisamente, es decir, la función  $f'$  no está siendo reemplazada por la gráfica. El lenguaje gráfico (sus características, formas, funcionamientos, etc...) me está mostrando cualidades específicas de  $f'$ , lo cual me permite construir argumentaciones acerca de  $f$  y sus derivadas sucesivas, las cuales a su vez aportan a la construcción de conocimiento.

Consideramos que en los consensos, ya sea sociales, institucionales o matemáticos, proporcionan a través de su análisis, la emergencia de las prácticas sociales, las cuales a su vez pueden nutrir las argumentaciones que a partir de la gráfica se pueden generar, también estos consensos son los que nos permitirán pasar de los objetos a las prácticas. Consideraremos a las prácticas sociales como las que nos hacen hacer lo que hacemos (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006). Buscamos de alguna manera enriquecer el entorno epistémico que envuelve al concepto y es a través de esta aproximación socioepistemológica que vemos la posibilidad teórica de hacerlo.

Desde el punto de vista de la socioepistemología consideramos que a diferencia de la Teoría de las Representaciones Semióticas podemos identificar en la gráfica elementos importantes y suficientes que le permitirían construir conocimiento por sí misma, ya que no depende de ninguna relación con otro tipo de representación para lograrlo, puesto que posee suficientes rasgos o piezas de información de un concepto, de esta manera no se convierte en una herramienta entrelazada con otras para lograr producir conocimiento. Consideramos que al analizar o interpretar a la función por medio de la gráfica (en nuestro caso nos interesa con la función  $f'$ ) a través de un lenguaje gráfico, lograremos la resignificación y aprehensión de el concepto de  $f'$ , por medio de sus características, usos, formas, presentaciones, manipulaciones, etc. El diseño didáctico que de estas consideraciones se formule, habrá de tomar en cuenta la posición de no ceñirse a la función como un sistema de representaciones, sino considerar a la gráfica en sí misma.

### Conclusiones

Las diferentes caracterizaciones o clasificaciones, que se pueden considerar de los usos de las gráficas, independientemente de la posición teórica que se utilice para interpretarlas, aportan diferentes rasgos cualitativos de la misma; esto le da la habilidad a la gráfica de informar de aspectos no explícitos de la función que presenta, en particular a nosotros nos interesa la función derivada. Por la naturaleza de nuestro problema de investigación consideramos que es relevante no sólo considerar a la gráfica, sino también las cualidades o características que cada tipo de función tiene de manera natural, aspecto que se encuentra en desarrollo actualmente por nuestro proyecto.

### Referencias

- Cantoral R., Farfán R., Martínez-Sierra G, Lezama J. (2006). Socioepistemología y Representación: Algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, Número especial, pp. 83- 102
- Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática educativa, Cinvestav-IPN.

- Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. México.
- Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1)
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica. México
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 103-131.
- Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.
- Lacasta, E., Pascual, J. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Editorial Síntesis. España
- Lara, A. (2007). *Categorías de uso de Gráficas en los libros de texto de mecánica de Fluidos*. Tesis de Maestría no publica del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Parra, T. (2008). *El uso de las gráficas en la Ingeniería. Una re significación de la derivada*. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-21
- Rosado, P. (2004). *Una re significación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática educativa, Cinvestav-IPN.
- Suárez, L. (2008). *Modelacion-Graficacion, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.