REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education
Hipatia Press www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

**Formación de Profesores de Matemática en Servicio: La Organización de una Enseñanza Basada en Preguntas**

María Rita Otero[1] y Viviana Carolina Llanos[1]

1) UNICEN – CONICET, Argentina

Date of publication: June 24th, 2019
Edition period: June 2019-October 2019

---

**To cite this article:** Otero, M.R., y Llanos, V.C. (2019). Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *8*(2), 193-225. doi: 10.4471/redimat.2019.3618

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2019.3618

---

*REDIMAT, Vol. 8 No. 2 June 2019 pp. 193-225*

# Training In-service Teachers: The Organization of Teaching Based on Questions

María R. Otero
*UNICEN-CONICET*

Carolina Llanos
*UNICEN-CONICET*

(*Received: 07 July 2018; Accepted: 17 May 2019; Published: 24 June 2019)*

**Abstract**

During an on-line course on Mathematics Didactics, carried out by n = 31 professors in service, it is analyzed how they study a question that could generate a Research and Study Path (RSP). The teachers investigated the question individually and in groups, and then they were asked to organize a possible teaching adapted to an institution known to them, based on the question. Written texts produced by teachers are analysed using two types of techniques: one qualitative and one based on lexicometric statistical methods. The results describe the difficulties of in-service teachers to organize a teaching according to the *paradigm of research and the questioning of the world*.

**Keywords:** Anthropological Theory of the Didactic, study and research path, Herbartian scheme, teaching based on questions, teachers

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.3618

*REDIMAT, Vol. 8 No. 2 Junio 2019 pp. 193-225*

# Formación de Profesores de Matemática en Servicio: La Organización de una Enseñanza Basada en Preguntas

María R. Otero
*UNICEN-CONICET*

Carolina Llanos
*UNICEN-CONICET*

(*Recibido: 02 Julio 2017; Aceptado: 17 Mayo 2019; Publicado: 24 Junio 2019)*

**Resumen**

Durante un curso on-line de Didáctica de las Matemáticas, realizado por n=31 profesores en servicio, se analiza cómo ellos estudian una pregunta que podría engendrar un Recorrido de estudio e Investigación (REI). Los profesores investigaron la pregunta de manera individual y grupal, y luego se les propuso organizar una posible enseñanza adaptada a una institución conocida por ellos, basada en la pregunta. Los textos escritos producidos por los profesores se analizan empleando dos tipos de técnicas: una cualitativa y otra basada en métodos estadísticos lexicométricos. Los resultados describen las dificultades de los profesores en servicio para organizar una enseñanza conforme al paradigma de la investigación y el cuestionamiento del mundo.

**Palabras clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico, recorridos de estudio e investigación, esquema Herbartiano, enseñanza basada en preguntas, profesores

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.3618

La formación de profesores de Matemática posee una tradición de investigación de más de treinta años (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2003; English, Bartolini-Busi, Jones, Lesh, & Tirosh, 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis, & Ball, 2007; Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Sowder, 2007). Según el trabajo pionero de Shulman (1987) los conocimientos necesarios para enseñar no son genéricos, sino específicos y se componen de tres dimensiones: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y el conocimiento curricular. Basándose en las ideas de Shulman, Grossman (1990) propuso un "modelo del conocimiento del profesor". Por su parte Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008) formularon la noción de *"conocimiento matemático para la enseñanza"* (*MKT*) entendido como *"el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para realizar la instrucción y el desarrollo en el alumno"* (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). EL MKT se compone de dos grandes categorías el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. El conocimiento común del contenido (CCK) es *"aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas"* (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377). El conocimiento especializado del contenido (SCK) es el conjunto de *"conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza"* (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 400). Este conocimiento incluye

> cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema. (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377- 378)

Otros enfoques teóricos también coinciden en que la formación de profesores requiere saber matemática con amplio domino del campo, y de una formación didáctica acorde a las exigencias institucionales y a la formación de los estudiantes como ciudadanos de hoy (Artaud, Cirade, Jullien, 2011; Cardeñoso, Flores, Azcárate, 2001; Fennema, Loef, 1992; Giménez-Rodriguez, Font, Rubio & Planas, 2009; Rico, 2004; Robert & Pouyanne, 2005; Rojas, & Deulofeu, 2015). Sin embargo, como señalan

Rowland & Ruthven (2011) carecemos de marco teórico dominante para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas y aunque se ha intentado enfocar progresivamente el problema, los modelos aún son demasiado globales y genéricos (Godino, 2009).

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) tiene puntos de contacto con los enfoques mencionados, pero además reformula el problema de la formación del profesor de matemática en términos praxeológicos y con una fuerte base epistémica y didáctica. La TAD describe el fenómeno de la monumentalización de los saberes y la existencia de un paradigma monumental dominante, a la vez que aboga por la emergencia de un nuevo paradigma, basado en la investigación y el cuestionamiento. Este cambio paradigmático afecta radicalmente la manera de concebir la profesión de profesor y plantea una serie de interrogantes acerca del equipamiento praxeológico requerido por los profesores para enseñar conforme al nuevo paradigma. Un señalamiento importante realizado por la TAD, es que dicho equipamiento no existe aún, siendo la comunidad de investigadores en Didáctica de las matemáticas, la responsable de desarrollarlo. Tampoco se sabe demasiado sobre ¿cómo sería posible que los profesores formados en el viejo paradigma puedan adherir al paradigma emergente? ¿Convertirse? ¿Evolucionar? hacia el nuevo, habida cuenta de que los cambios de paradigma (Kuhn, 1983) son revolucionarios.

Las afirmaciones anteriores nos liberan de abundar en las razones por las cuales el encuadre de esta investigación es exploratorio. Este trabajo se realiza en un contexto de formación de Profesores en ejercicio en la Universidad y adopta el marco teórico de la TAD. Durante el desarrollo de un curso universitario de Didáctica de la Matemática, donde se estudian los fundamentos de la TAD, los profesores en ejercicio que participan del curso, son invitados a proponer la organización hipotética de una enseñanza de la matemática, involucrando algunos gestos propios del Paradigma de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Chevallard, 2013). Un aspecto esencial de dicho paradigma es organizar la enseñanza en torno a preguntas, en un sentido fuerte. Específicamente, buscamos analizar ¿cómo los profesores organizan la enseñanza mediante una pregunta que potencialmente podría engendrar un REI? Se proponen tres tareas a los profesores: la primera consiste en estudiar la pregunta de manera individual y elaborar una respuesta escrita, la segunda es consensuar una respuesta escrita en grupos y la tercera tarea, es que tales grupos propongan la organización de una posible enseñanza adaptada a una institución específica a partir de la pregunta estudiada.

Los trabajos desarrollados en el ámbito de la TAD (Romo, Barquero, y Bosch, 2016; Ruiz-Olarría, Bosch y Gascón, 2014) han puesto en evidencia la importancia de utilizar en el marco de la formación de profesores, cuestiones que han generado recorridos relativamente testeados. Aquí, utilizamos una pregunta desarrollada por el IREM de Poitiers (Bellenoué et al. 2014) en un libro destinado a los profesores del nivel secundario francés. El libro se inspira en el análisis realizado por Chevallard (2004) sobre la funcionalidad de la matemática en los sistemas de enseñanza. En síntesis, este trabajo se propone describir, analizar y comprender el potencial y las dificultades de los profesores cuando intentan enseñar a partir de preguntas y en correspondencia con ciertos gestos del PICM. Un aspecto central que considerar se refiere a la construcción del medio de estudio durante las tareas y a las transformaciones que realizan en el *medio* cuando ellos tienen que organizar la enseñanza a partir de la pregunta estudiada antes. A continuación, sintetizamos brevemente los constructos de la TAD involucrados en el trabajo, así como la cuestión generatriz y el Modelo Praxeológico de Referencia que hemos concebido.

## La TAD, el Monumentalismo y la Formación de Profesores en Servicio

Toda situación de enseñanza produce la emergencia de un sistema didáctico S($X$, $Y$, ♥) donde $X$ representa a la instancia que aprende, $Y$ se refiere a las ayudas al estudio, y ♥ denota al objeto de estudio. En el paradigma monumental, el sistema adopta la forma S($X$, $Y$, $O$) siendo $O$ una obra o praxeología que un conjunto de estudiantes $X$ deberá aprender con la ayuda de un único profesor. En el paradigma de la investigación y el cuestionamiento del mundo, el sistema adopta la forma S($X$, $Y$, $Q$). Los alumnos $X$ investigan y estudian una pregunta $Q$ bajo la dirección de un profesor (y) o de un conjunto de profesores $Y$, con el objetivo de elaborar y aportar una respuesta $R^♥$ a $Q$. El exponente en $R^♥$, indica que la respuesta a $Q$ se produce bajo determinadas restricciones a las cuales está sujeta. Entonces, no existe una respuesta universal ni universalmente efectiva (Chevallard, 2009) a $Q$. Para producir $R^♥$, el sistema didáctico S necesita de instrumentos, recursos, obras, es decir, requiere generar un medio didáctico M:

$$[S(X;\,Y;\,Q) \hookrightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad \text{(Esquema herbartiano)}$$

El sistema didáctico S fabrica y organiza ($\curvearrowright$) el medio M, con el cuál producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$. El medio M contiene las preguntas generadas a partir de Q y las respuestas ya existentes aceptadas por la cultura escolar, llamadas respuestas *"hechas"* que se denotan $R_i^{\Diamond}$ para $i = 1, \ldots, n$. En esta categoría se incluyen las respuestas incluidas en un libro, la Web, el curso de un profesor, etc. También son parte de M, entidades $O_j$, con $j = n + 1, \ldots, m$, potencialmente útiles para elaborar la respuesta $R^{\heartsuit}$, por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, etc. De esta manera, el esquema herbartiano se amplía y deviene en el Esquema herbartiano desarrollado (Chevallard, 2007)

$$[S(X, Y, Q) \curvearrowright \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Este esquema describe el tipo de actividad epistemológica que se desarrolla en S en el paradigma de la investigación y del cuestionamiento y además propone una definición de REI. Los profesores en servicio han sido formados y desarrollan su profesión en el paradigma monumental, es normal que sus actividades estén naturalizadas y que ellos no sean conscientes de la variedad de gestos monumentalistas que realizan.

El Monumentalismo es una metáfora que la TAD construye para describir un fenómeno didáctico caracterizado por tratar al saber matemático como un monumento. Al pensar en monumentos famosos como el Museo del Louvre, el Panteón de París, la Pirámide de Chichén Itzá, la Catedral de Milán, la ciudad Inca de Machu Pichu, la metáfora resulta iluminadora. En general se convoca a admirar, visitar, preservar, conservar, inmortalizar e incluso amar esos monumentos, como si siempre hubiesen estado allí. En el paradigma monumentalista se concibe y se trata al saber de ese modo. Los profesores a lo sumo invitan a los estudiantes a visitar el saber, sin alterarlo, transformarlo o deconstruirlo. Cuando alguien se encuentra con un monumento, lo descubre, a lo sumo vive una experiencia estética con él. Los monumentos son poco flexibles y adaptables y permanecen en el mismo lugar, por su propia condición monumental. En la epistemología monumentalista, ocurre algo similar con el saber matemático, se lo considera inmutable en el tiempo, es suficiente mostrarlo, de allí el tratamiento ostensivo del que es objeto. Los REI son dispositivos concebidos por la TAD para enfrentar el fenómeno de la monumentalización, porque poseen entre otras, las siguientes características:

- Se desarrollan a partir de una pregunta *Q*, llamada generatriz, porque no admite una respuesta inmediata. Es decir que será necesario formular preguntas derivadas, y des-etiquetar las respuestas hechas disponibles.
- El medio didáctico *M* no se construye a priori, sino juntamente con la elaboración de respuestas. Los recursos se incorporan conforme se los necesita y en cualquier momento, bajo la condición de que sean validados por la comunidad de estudio.
- El profesor dirige el proceso de estudio, pero no tiene un papel preponderante en la construcción de *M*, y sus aportes pueden o no incorporarse al medio. En un REI no rige el principio de autoridad, no hay sistemas de información privilegiados o más autorizados que otros, a diferencia de lo que ocurre en el paradigma monumental.
- El grupo de estudio formula y responde las preguntas, excepto la cuestión generatriz, que es una prorrogativa del profesor (Chevallard, 2012). La difusión de la respuesta tiene un componente fuertemente epistémico, a diferencia del carácter narrativo que caracteriza la difusión en el paradigma monumental, en el cual el papel del profesor se asemeja más al de un guía en la visita a un museo, que al director de un estudio cuyo recorrido no se conoce de antemano.

En las secciones siguientes presentamos un esquema del MPR relativo a $Q_0$. Luego, realizamos dos tipos de análisis de las respuestas elaboradas por los seis grupos de profesores a las tareas T2 y T3. En primer término, utilizamos la definición de REI para analizar las respuestas y las modificaciones entre una y otra. En segundo término, utilizamos herramientas de estadística lexicométrica para triangular los resultados obtenidos.

## El REI

La pregunta $Q_0$: *¿Cómo funciona una antena parabólica?* Fue tomada del texto de Bellenoué et al. (2014) concebido para enseñar a estudiantes de primer año del nivel secundario francés (15-16 años). Un posible MPR remite al problema de la existencia y la construcción de tangentes a una curva en el ámbito de la geometría analítica. También se pueden estudiar propiedades de la geometría sintética y el fenómeno de la reflexión de la luz adoptando el modelo de la óptica física en particular y/o de la óptica ondulatoria en general. La reflexión de la luz (ondas electromagnéticas) en diferentes superficies, permite explicar el funcionamiento de diversos equipos de transmisión y de recepción, esenciales para las comunicaciones actuales; y para otros usos, en el dominio de la arquitectura, de los automóviles, de la energía solar, etc. La propuesta de Bellenoué et al. (2014, p. 47) propone tareas como determinar la ecuación de una circunferencia a partir de sus elementos característicos; determinar la ecuación de una recta; la posición relativa de dos rectas; la forma canónica de un trinomio de segundo grado; resolver una ecuación de segundo grado; determinar algebraicamente las coordenadas de los puntos de intersección de dos curvas; demostrar que una recta dada es tangente a una circunferencia, a una parábola, a una hipérbola.

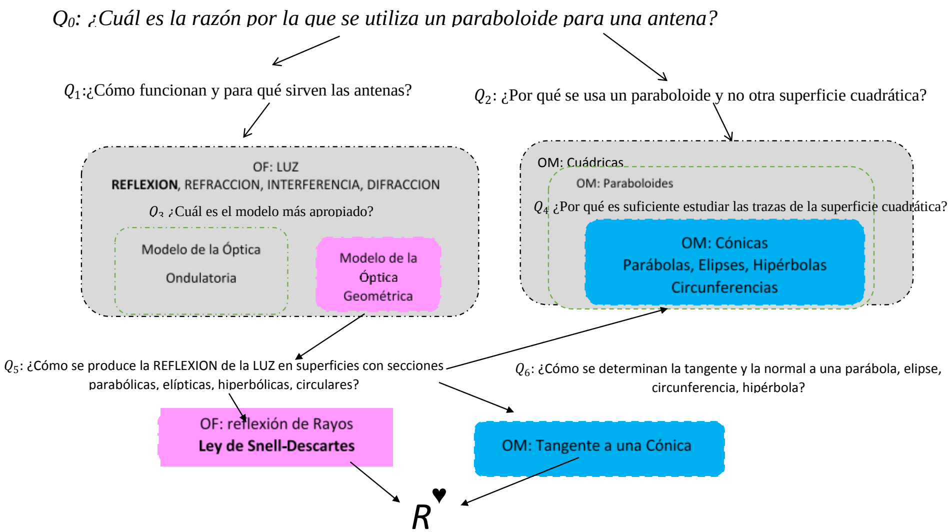


*Figura 1.* Síntesis del MPR desarrollado en torno a $Q_0$.

Con respecto al análisis histórico del problema de la reflexión de la luz en diferentes superficies cuadráticas, *$Q_0$* conduce al estudio de las cuádricas, de las cónicas como trazas de dichas superficies y de las tangentes a esas curvas. Es posible realizar y/o analizar experimentos sobre la reflexión en diferentes superficies cuadráticas tales como espejos cilíndricos, parabólicos o hiperbólicos. El desarrollo de posibles respuestas puede incluir o no el cálculo diferencial, o permanecer en el marco geométrico sintético o analítico en $R^2$ o $R^3$. Por otro lado, si las curvas no fueran conocidas, la insuficiencia del marco geométrico-analítico en la determinación de la tangente requeriría la ampliación al cálculo diferencial.

La cuestión generatriz seleccionada $Q_0$ conduce al estudio de OM que constituyen una parte importante de la matemática estudiada en el proceso formativo de los profesores, a la vez, que cubren praxeologías relevantes del diseño curricular de la escuela secundaria argentina. En la Figura 2 se presenta sintéticamente un esquema del MPR, tomando en cuenta que los profesores intervinientes se desempeñan mayoritariamente en el nivel secundario.

## Metodología

El trabajo involucra a (n=31) profesores de matemáticas en servicio, que cursan el segundo año de la Licenciatura en Educación Matemática (LEM) en una Universidad Nacional Argentina. Se trata de una carrera de grado en la modalidad on-line, orientada a los profesores de matemática egresados de Institutos de Formación Docente (instituciones no universitarias de formación de profesores) para complementar su formación matemática y didáctica. El plan de estudios de la LEM tiene 8 cursos cuatrimestrales repartidos en dos años: 3 son de Matemática y los restantes corresponden a Didáctica de la Matemática, a las TICE, a la Epistemología, la Metodología y la Psicología Cognitiva. Los profesores involucrados en esta investigación se encuentran realizando el curso de Didáctica de las Matemáticas, donde hay un docente por cada diez estudiantes. La plataforma Moodle permite registrar todas las interacciones y almacenar los trabajos escritos de los estudiantes. En el curso se estudian las nociones fundamentales de la TAD y se analizan REI ampliamente difundidos que se encuentran disponibles en la literatura. Reiteradamente, los profesores-estudiantes expresan sus reparos a la posibilidad concreta de realizar un REI: *"no parece posible que los REI funcionen en aulas reales"*; *"para nosotros sería imposible desarrollar algo como un REI"*; *"no sería posible cumplir el programa"; "esto es mucho más* *que resolver problemas"; "¿qué papel juegan las praxeologías?", "¿cómo intervienen los contenidos matemáticos del programa?"* etc. Debido a esto, el último mes del curso se dedica a estudiar una pregunta $Q_0$ que potencialmente podría originar un REI. Los estudiantes conformaron seis grupos para desarrollar las siguientes tareas:

T1: Estudiar $Q_0$ y elaborar una posible respuesta individual por escrito.

T2: A partir de las respuestas personales, producir por escrito una posible respuesta grupal a $Q_0$.

T3: Proponer en cada grupo una posible organización de la enseñanza adaptando T1 y T2 a una Institución determinada y presentar la tarea por escrito.

Para analizar las respuestas escritas de los grupos de profesores para las tareas T2 y T3, utilizamos en primer término el esquema herbartiano ampliado. Se busca identificar, describir y comprender las dificultades y los obstáculos más relevantes que enfrentan los profesores cuando estudian $Q_0$ con la intención hipotética de organizar una enseñanza acorde con el paradigma de la investigación.

En un segundo momento de análisis, se emplean métodos estadísticos lexicométricos (Lebart Morineau y Fenelon, 1985; Moscoloni, 2011) para triangular los resultados obtenidos. La estadística léxica consiste en analizar cuáles son los términos más utilizados, las asociaciones entre ellos y en qué medida las palabras elegidas dependen del tipo de documento analizado o de quien se expresa. Las técnicas de análisis de datos se aplican a tablas de frecuencias léxicas y utilizan el análisis factorial de correspondencias. Este análisis conduce a la definición de sub-conjuntos o tipos, en los cuales la característica es asociar ciertas palabras de manera privilegiada. El Análisis de Datos Textuales aplica los métodos de Análisis Multidimensional de Datos exploratorios, además de glosarios de palabras, concordancias y la selección del vocabulario más específico de cada texto, para así proveer una herramienta comparativa de los mismos (Moscoloni, 2011).

## Preguntas de Investigación

1. ¿Cómo se construye y transforma el medio didáctico M entre el estudio de $Q_0$ y la propuesta de organización de la enseñanza a partir de dicha pregunta?

2. ¿Cuáles son las principales dificultades que enfrentan los profesores para organizar una enseñanza que se aparte del paradigma monumental?

## Análisis de las Respuestas Grupales para T2 y T3 Utilizando el Equema Herbartiano

A continuación, analizamos la respuesta que cada grupo dio a la tarea de elaborar una respuesta a $Q_0$ en dos posiciones distintas en S. En T2 el grupo que enseña y el que aprende coinciden, en T3 el grupo se coloca en la posición de ayuda al estudio o enseñante. La tabla distingue los componentes del esquema herbartiano.

Tabla 1
*Análisis del GRUPO A (GA) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_A(A, A, Q_0)$ X=Y=A | $S_A(X,A,Q_0)$ |
| $Q_{n+1}\ldots$, $Q_m$ | $Q_2$: ¿Cómo es y para qué sirve una antena?<br>$Q_3$: ¿Qué tipos de antenas existen?<br>$Q_4$: ¿Para qué se usan las antenas parabólicas?<br>$Q_5$: ¿qué características tienen, según la física, las ondas electromagnéticas?<br>$Q_6$: ¿Cómo se propagan las ondas?<br>$Q_7$: ¿Cómo se reflejan las ondas?<br>$Q_8$: ¿por qué los ángulos de incidencia y de reflexión resultan iguales? | $Q_7$: ¿Cómo se reflejan las ondas?<br>¿Por qué si las antenas son objetos tridimensionales, la información hallada hace referencia a las parábolas que son bidimensionales? |

Tabla 1
*Análisis del GRUPO A (GA) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3 (…/…)*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_A$(A, A, $Q_0$) X=Y=A | $S_A$(X,A,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | $Q_9$: ¿Por qué es el paraboloide la forma más adecuada para obtener máxima?<br>$Q_{10}$: ¿Cómo son los paraboloides?<br>$Q_{11}$: ¿Cómo se define una parábola y qué características tiene?<br>$Q_{12}$: ¿Cómo determinar los puntos que pertenecen a la parábola, dadas la directriz y el foco? | $Q_{11}$: ¿Cómo se define una parábola y qué características tiene?<br>$Q_{12}$: ¿Cómo determinar los puntos que pertenecen a la parábola, dadas la directriz y el foco? |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Antenas y Tipos de Antenas.<br>$R_2^{\diamond}$: Las Antenas Parabólicas maximizan la Directividad cuando reciben ondas desde un punto lejano específico.<br>$R_3^{\diamond}$: Propiedades de las Ondas electromatemáticas.<br>$R_4^{\diamond}$: Frente de ondas plano. Óptica de Rayos.<br>$R_5^{\diamond}$: La ley de la Reflexión de rayos puede explicarse por el Principio de Fermat del camino mínimo (ángulo incidente y reflejado son iguales).<br>$R_6^{\diamond}$: Paraboloides y trazas.<br>$R_7^{\diamond}$: Las Parábolas en la geometría sintética.<br>$R_8^{\diamond}$: Siempre existe la recta tangente a una parábola.<br>$R_9^{\diamond}$: Dando un punto P perteneciente a una parábola de directriz *l* y foco F, la bisectriz | $R_7^{\diamond}$: Las Parábolas en la geometría sintética<br>1) Dadas una recta d y un punto F no perteneciente a ella, ¿Cómo determinar los puntos que están a la misma distancia de la recta y el punto? ¿Cómo quedarían ubicados dichos puntos en el plano?<br>2) Demostrar que una parábola de recta directriz d y foco F es simétrica respecto de la recta perpendicular a d que pasa por F (eje focal).<br>3) Dada una parábola y su foco, hallar la directriz.<br>4) Determinar la recta tangente a una parábola en un punto de la misma. $R_9^{\diamond}$:<br>5) Demostrar que un rayo que incide sobre una superficie de sección parabólica de manera |

Tabla 1
*Análisis del GRUPO A (GA) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*
(…/…)

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_A(A, A, Q_0)$ X=Y=A | $S_A(X,A,Q_0)$ |
| $R_1^{\diamond}$,… , $R_n^{\diamond}$ | ángulo formado por FP y la perpendicularidad a d que pasa por P es la recta tangente a la parábola en P. | paralela al eje focal, será reflejado pasando por el foco de la parábola. |
| $O_{m+1}$, … $O_p$ | Óptica geométrica, reflexión. Parábola y tangente en el marco sintético. | Reflexión de rayos. Parábola y tangente en el marco sintético. |
| $R^{\heartsuit}$ | Los rayos indicentes, paralelos al eje de una superficie parabólica, serán reflejados con una trayectoria que pasa por el foco. https://www.geogebra.org/m/xxeRSH7H | https://www.geogebra.org/m/xxeRSH7H |

La Tabla 1 presenta una comparación entre T2 y T3 para el Grupo A. En T2, las preguntas formuladas se refieren primero a la física relacionada con el problema y luego a la matemática. El GA privilegia la obra parábola en el marco sintético, a la vez que analiza y justifica la existencia de la tangente a la parábola. La respuesta elaborada es coherente con el medio construido. Podría decirse que GA realiza una difusión epistémica de la misma, es decir fundamentada en las obras. Al cambiar de posición en T3, este grupo reduce fuertemente las preguntas como se aprecia en la Tabla 1. El GA provoca un encuentro arreglado con las antenas parabólicas y con la reflexión de rayos. La herramienta GeoGebra es el principal recurso utilizado para estudiar las parábolas en el marco sintético. En T3 la respuesta se valida solamente con un video que insinúa la realización de una difusión narrativa, o bien podría decirse que la difusión epistémica no es explícita.

En la Tabla 2 se comparan las respuestas a T2 y T3 del Grupo B. Este grupo comienza por decidir la matemática que habría que conocer para tratar el problema y formula preguntas referidas a las Cuádricas. Es decir, el grupo propone un encuentro monumental desde la realización de la Tarea 2. Luego, se interesan por la física de las señales como una aplicación. La respuesta elaborada es coherente con el medio construido y se realiza una difusión epistémica de la misma, es decir fundamentada en las obras. En la T3, el GB conserva las preguntas, pero abandona el estudio de las parábolas e incorpora el de la elipse y la hipérbola, y organiza tareas típicas de un encuentro monumental. La organización utilizada en la posición estudiante es la misma que la que se propone en la posición enseñante. La difusión es epistémica, pero parecería quedar a cargo del profesor. Existen pocas diferencias entre T2 y T3. Esto indicaría que la posición del profesor es dominante y que el GB no logra proponer transformaciones que contemplen al alumno.

Tabla 2
*Análisis del GRUPO B (GB) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_B$ (B,B,$Q_0$) X=Y=B | $S_B$(X,B,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}\ldots$, $Q_m$ | $Q_1$: Matemáticamente, ¿qué es un paraboloide?<br>$Q_2$: ¿Cómo se define una cuadrática?<br>$Q_3$: ¿Cómo se clasifican las cuadráticas?<br>$Q_4$: ¿Cómo son las ecuaciones canónicas de las cuadráticas?<br>$Q_5$: ¿Cuáles de esas ecuaciones corresponden con su gráfica a las de un paraboloide? | $Q_2$: ¿Cómo se define matemáticamente un paraboloide?<br>$Q_3$: ¿Cómo se clasifican las cuadráticas?<br>$Q_4$: ¿Cuáles de esas ecuaciones corresponden con su gráfica a las de un paraboloide? |
| | $Q_6$: ¿Para qué sirve una antena?<br>$Q_7$: ¿Qué entiende la física por onda?<br>$Q_8$: ¿Cuáles son las ondas electromagnéticas?<br>$Q_9$: ¿Cómo funciona una antena parabólica?<br>$Q_{10}$: ¿Cómo influye la forma parabólica de la antena para que reciban la señal emitida por los satélites y la reboten concentrándola en el LNB universal? | $Q_6$: ¿Para qué sirve una antena?<br>$Q_7$: ¿Qué se entiende en física por onda?<br>$Q_8$: ¿Cuáles son las ondas eletromagnéticas?<br>$Q_9$: ¿Cómo funciona una antena parabólica?<br>$Q_{10}$: ¿Cómo influye la forma parabólica de la antena para que reciban la señal emitida por los satélites y la reboten concentrándola en el LNB universal? |

Tabla 2
*Análisis del GRUPO B (GB) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3 (…/…)*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_B$ (B,B,$Q_0$) X=Y=B | $S_B$(X,B,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | $Q_{11}$: ¿Cómo se define una parábola?<br>$Q_{12}$: ¿Cómo es la ecuación cartesiana de una parábola?<br>$Q_{13}$: ¿Cuándo se dice que una superficie es reflectante?<br>$Q_{14}$: ¿Cómo se demuestra la propiedad reflexiva en la parábola?<br>$Q_{15}$: ¿Cuál es la razón por la cual se utiliza un paraboloide para una antena? | $Q_{13}$: ¿Cuándo se dice que una superficie es reflectante?<br>$Q_{14}$: ¿Cómo se demuestra la propiedad reflexiva en la parábola?<br>$Q_{15}$: ¿Cuál es la razón por la cual se utiliza un paraboloide para una antena? |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Cuádricas, paraboloides. Trazas de un paraboloide elíptico.<br>$R_2^{\diamond}$: Las antenas parabólicas maximizan la directividad cuando reciben ondas desde un punto lejano específico.<br>$R_3^{\diamond}$: Ecuación cartesiana de la parábola. Propiedad reflexiva de las parábolas.<br>$R_4^{\diamond}$: Demostración de la “propiedad reflexiva de las parábolas.” | $R_1^{\diamond}$: Cuádricas, paraboloides. Trzas de una paraboloide Elíptico e Hiperbólico.<br>$R_2^{\diamond}$: Ecuación de la elipse y la hipérbola y sus parámetros.<br>$R_3^{\diamond}$: Superficie reflectora. Propiedad reflexiva de las parábolas.<br>$R_4^{\diamond}$: La elipse y la hipérbola como superficies reflectoras “Propiedad reflexiva de las elipses e hipérbolas.” |
| $O_{m+1}$,… $O_p$ | Paraboloides. Secciones de un paraboloide. Parábola analíticamente. | Paraboloides. Secciones de un paraboloide. Estudio analítico de la hipérbola y la elipse. |
| R♥ | Por la propiedad reflexiva de las parábolas, construir un paraboloide cuyo receptor de señal está en el foco, logra que todas las señales que rebotan en el paraboloide, sean enviadas al | Por la propiedad reflexiva de las parábolas, construir un paraboloide cuyo receptor de señal está en el foco, logra que todas las señales que rebotan en el paraboloide, sean enviadas al |

Tabla 2
*Análisis del GRUPO B (GB) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*
(…/…)

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_B$ (B,B,$Q_0$) X=Y=B | $S_B$(X,B,$Q_0$) |
| R♥ | receptor, sin tener que apuntar directamente al mismo. Un pequeño receptor produce una gran recepción de señal utilizando toda la superficie del paraboloide. | receptor, sin tener que apuntar directamente al mismo. Un pequeño receptor produce una gran recepción de señal utilizando toda la superficie del paraboloide. |

En la Tabla 3, se comparan sintéticamente la T2 y T3 realizadas por el grupo C. En T2, el GC propone preguntas sobre la física relacionada con el problema y luego sobre la matemática. La obra involucrada es aquí es parábola, deteniéndose sobre todo en la ecuación canónica. Considerando el funcionamiento de las antenas parabólicas, se analizan las propiedades de la reflexión y la refracción de rayos; aunque esta última noción física no esté vinculada a $Q_0$. La respuesta elaborada es relativamente coherente con el medio construido y se realiza una difusión epistémica de la misma. Al cambiar de posición en T3, el GC cambia las preguntas. Abandona las preguntas de física e introduce una pregunta por las antenas compuestas por superficies cónicas. La pregunta podría propiciar el estudio de las cónicas, pero solo se trata la obra parábolas, pero ahora en el marco funcional. El GC impone un encuentro con las funciones cuadráticas, que es monumental y no está estrictamente vinculado al problema. Mientras las preguntas serían formuladas por los estudiantes, la difusión quedaría a cargo del profesor. El GC adopta una posición ambivalente, que reduce su propuesta a gestos propios del paradigma monumental en T3.

Tabla 3

*Análisis del GRUPO C (GC) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3.*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_C$ (C,C,$Q_0$) X=Y=C | $S_C$(X,C,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | $Q_1$: ¿Qué características tiene las ondas electromagnéticas?<br>$Q_2$: ¿Qué tipos de antenas existen?<br>$Q_3$: ¿Qué características de las parábolas suponen mayor funcionalidad para las antenas parabólicas?<br>$Q_4$: ¿cómo puede fundamentarse el funcionamiento de las antenas desde la matemática?<br>$Q_5$: ¿Qué sucede si se desconocen elementos de la parábola, tales como el foco, el vértice o la directriz?<br>$Q_6$: A efectos de que el alimentador situado en el foco obstruye los rayos reflejados, ¿es viable, en términos de ganacias, que el foco se la antena parabólica se desplace de lugar? | $Q_1$: ¿Existen antenas que estén compuestas por otra superficie cónica, por ejemplo, una elipse?<br>$Q_2$: ¿cómo puede probarse la reflexión de los rayos en el caso de las superficies parabólicas?<br>$Q_3$: ¿Cómo puede determinarse la posición del foco?<br>$Q_4$: ¿Cómo pueden calcularse las coordenadas del foco y el vértice, la ecuación de la recta directriz y del eje de simetría de una parábola?<br>Dadas las parábolas $x^2+6y=0$, $x^2-5x+y+4=0$, indicar las coordinadas del foco y del vértice, y la forma de la recta directriz.<br>$Q_5$: ¿Cómo lograr una gráfica aproximada de las parábolas?<br>$Q_6$: ¿Qué determina el parámetro del término lineal de la ecuación cuadrática? |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Ondas electromagnéticas.<br>$R_2^{\diamond}$: Diferenciación de los distintos tipos de antenas: lineales, de apertura, reflectores parabólicos, lentes.<br>$R_3^{\diamond}$: Ecuación canónica de la parábola de directriz paralela a los ejes coordenados.<br>$R_4^{\diamond}$: Propiedad de convergencia focal de la parábola.<br>$R_5^{\diamond}$: Ley de Snell Descartes. | $R_1^{\diamond}$: Definición de Cónicas.<br>$R_2^{\diamond}$: Definir al cono como cuerpo de revolución, permite relacionar al paraboloide con la parábola.<br>$R_3^{\diamond}$: Las parábolas en la geometría sintética.<br>$R_4^{\diamond}$: Fenómenos de refracción y reflexión<br>$R_5^{\diamond}$: En una superficie parabólica, el ángulo de incidencia de la onda es el |

Tabla 3
*Análisis del GRUPO C (GC) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3* (…/…)

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_C$ (C,C,$Q_0$) X=Y=C | $S_C$(X,C,$Q_0$) |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_6^{\diamond}$: Ecuación canónica de la parábola. | mismo que el ángulo de reflexión.<br>$R_6^{\diamond}$: Ecuación de la parábola y sus parámetros.<br>$R_7^{\diamond}$: Función cuadrática y parámetros de la función. |
| $O_{m+1}$,… $O_p$ | Parábolas. | Reflexión de rayos.<br>Parábolas. |
| $R^{\heartsuit}$ | Todos los rayos que incidan sobre una superficie parabólica de forma paralela al eje, serán reflejados con una trayectoria que pasa por el foco. | El estudio del funcionamiento de la antena permitiría estudiar cónicas, y en particular parábolas. |

En la Tabla 4, se comparan sintéticamente la T2 y T3 realizadas por el grupo D. En T2 el GD propone preguntas sobre los paraboloides, las parábolas y sus características, para la emisión y recepción de la señal. Luego, usando una aplicación de GeoGebra obtenida en internet, formulan la *"propiedad reflectora de la parábola"*. Si bien la respuesta elaborada es coherente con el medio construido, solo se realiza una difusión narrativa repitiendo respuestas obtenidas en internet. Al cambiar de posición en T3, el GD cambia $Q_0$ por la construcción de una cocina solar. La decisión se justifica en el sector social al que pertenecerían los estudiantes hipotéticos. Podría decirse que el GD adopta una postura empirista, ya que su propuesta consiste en construir primero la cocina solar con cartón, y luego construir parábolas con cuatro técnicas manuales, mencionadas en la Tabla 4. EL GD no logra escapar del paradigma monumental. La empiria "per se" no evita el encuentro monumental con las parábolas y los paraboloides, cuando no está orientada por algún tipo de cuestionamiento. La difusión de la respuesta es narrativa y se basa en los videos obtenidos en YouTube.

Tabla 4
*Análisis del GRUPO D (GD) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_D$ (D,D,$Q_0$) X=Y=D | $S_D$(X,D,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | Q1: ¿Qué es un paraboloide?<br>Q2: ¿Qué tipos de paraboloide existen?<br>Q3: ¿Qué característica tiene este paraboloide que lo hace tan útil para la emisión y recepción de ondas electromagnéticas?<br>Q4: ¿Cuál de los dos paraboloides se parece a las antenas que vemos usualmente?<br>Q5: ¿Cuál sería la utilidad de la propiedad focal de la parábola para el estudio de la antena?<br>Q6: ¿Por qué los rayos rebotan hacia el foco?<br>Q7: ¿Cómo fue en la historia el desarrollo de las antenas parabólicas? | $Q_0$: ¿Cómo construir una cocina solar?<br>1) Estudiar sobre cocinas solares.<br>2) Con el "Manual de construcción de cocina solar parabólica de Cartón" construir la cocina solar https://youtu.be/F_fZEBw8r-c<br>3) Según el video la cocina es una curva parabólica, y se pone la pregunta:<br>$Q_1$: ¿Qué es una curva parabólica?<br>$Q_2$: ¿Cuál es la razón por la que se utiliza un paraboloide para una cocina solar?<br>$Q_3$: ¿Qué propiedades tienen los paraboloides que los hacen tan útiles para reflejar los rayos solares y permitir la cocción de los alimentos? ¿Por qué esta forma es útil?<br>$Q_4$: ¿Cuál sería la utilidad de la propiedad reflexiva de la parábola? |
| $R_1^{\diamond}$,…, $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Paraboloides. Trazas de un paraboloide elíptico e hiperbólico.<br>$R_2^{\diamond}$: Una parábola es una cónica definida como el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto concreto, llamado foco, y una cierta recta, llamada directriz. | $R_1^{\diamond}$: Definición de cónicas.<br>$R_2^{\diamond}$: Una parábola es la sección cónica de excentricidad igual a 1.<br>$R_3^{\diamond}$: Parábolas. Métodos de construcción de parábolas: del paralelograo, del sastre, con hilo. |

Tabla 4
*Análisis del GRUPO D (GD) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3 (…/…)*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_D$ (D,D,$Q_0$) X=Y=D | $S_D$(X,D,$Q_0$) |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_3^{\diamond}$: Todos los rayos paralelos al eje, incidentes sobre una superficie de forma parabólica, serán reflejados con una trayectoria que pasa por el foco. | $R_4^{\diamond}$: Definición de la parábola como lugar geométrico.<br>$R_5^{\diamond}$: Propiedad reflexiva de la parábola.<br>$R_6^{\diamond}$: Paraboloides hiperbólicos y elípticos. |
| $O_{m+1}$,… $O_p$ | Paraboloides. Parábola. | Secciones de un paraboloide. Parábolas. |
| $R^{\heartsuit}$ | Si un paraboloide tiene un receptor de señal colocado en el foco, todas las señales que reboten en el paraboloide acaban siendo enviadas a dicho receptor. | Con un paraboloide y colocando en el foco el objeto a cocinar, se obtiene la cocina solar. |

En la Tabla 5, se comparan sintéticamente la T2 y T3 realizadas por el grupo E. En T2 el GE se pregunta por la historia de las antenas parabólicas y por las ondas electromagnéticas, y luego pasa directamente a considerar las parábolas. Tanto la noción de parábola como la de paraboloide se presentan a partir de las definiciones respectivas. La denominada propiedad focal de las parábolas se estudia mediante una demostración analítica realizada con el GeoGebra. Finalmente, se consideran preguntas sobre la física relacionada con el problema. La respuesta elaborada es coherente con el medio construido, aunque no puede decirse que se realiza una difusión epistémica de la misma, al menos explícitamente, sino más bien narrativa, basada en fragmentos de la información seleccionada. Al cambiar de posición, el GE reduce las preguntas, y las que permanecen son transformadas en tareas concretas a realizar. El estudio se reduce a las parábolas en el marco analítico y la difusión de la respuesta quedaría a cargo del profesor.

Tabla 5

*Análisis del GRUPO E (GE) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_E$ (E,E,$Q_0$) X=Y=D | $S_E$(X,E,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | Q1: ¿Cómo surgieron las antenas parabólicas?<br>Q2: ¿Qué es un frente de ondas?<br>Q3: ¿Cómo se define en matemáticas una parábola?<br>Q4: ¿Qué propiedades matemáticas cumple?<br>Q5: ¿Cómo se genera un paraboloide de revolución y cuáles son sus características?<br>Q6: ¿Cuáles son las características físicas y matemáticas de una antena parabólica? | Q1: ¿Cómo se genera un paraboloide de revolución?<br>1) Analizar cómo se genera una superficie de revolución.<br>2) Analizar qué sucede cuándo un cono es seccionado con un plano.<br>Q3: ¿Cómo se define en matemática una parábola?<br>3) Dados una recta y un punto que no pertenece a la recta, ¿es posible encontrar otros puntos que se encuentren a la misma distancia de la recta y el punto?<br>Q4: ¿Qué propiedades matemáticas cumple la parábola que se podrán considerar en al construcción de antenas?<br>4) Considerando la parábola de vértice V(0,0) y foco F(0,2), es posible hallar la ecuación de la recta tangente y la de la normal en el punto P(4,2). |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Reseña histórica de las ondas electromagnéticas.<br>$R_2^{\diamond}$: Características y elementos de una antena parabólica.<br>$R_3^{\diamond}$: Definición de parábola como lugar geométrico.<br>$R_4^{\diamond}$: Propiedad focal de la parábola.<br>$R_5^{\diamond}$: Paraboloides y trazas.<br>$R_6^{\diamond}$: Todo rayo que sale del foco se refleja en la parábola con dirección paralela al eje; todo | $R_1^{\diamond}$: Definición de superficie de revolución.<br>$R_2^{\diamond}$: Parábola: lugar geométrico, elementos, ecuación de la parábola.<br>$R_3^{\diamond}$: Propiedad focal de la parábola.<br>$R_4^{\diamond}$: Ecuación de una recta, recta tangente, pendiente y ecuación de rectas paralelas y perpendiculares. |

Tabla 5
*Análisis del GRUPO E (GE) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3 (…/…)*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_E$ (E,E,$Q_0$) X=Y=D | $S_E$(X,E,$Q_0$) |
| $R_1^\diamond$,..., $R_n^\diamond$ | rayo que llega paralelo al eje de la parábola se refleja sobre el foco. | |
| $O_{m+1}$,… $O_p$ | Parábolas. | Parábolas. |
| $R^\heartsuit$ | Para pasar del modelo matemático de la parábola a la antena se hace rotar a la misma sobre su eje obteniendo un paraboloide. Este será el “model” de la antena. | Estudiar la parábola es suficiente para entender el funcionamiento de una antena. |

En la Tabla 6, se comparan sintéticamente la T2 y T3 realizadas por el grupo F. En T2 el GF formula primero preguntas sobre física y luego sobre matemática. La obra matemática tratada es la Parábola en el marco analítico. Se adopta el modelo de rayos y se usa un único libro de Física, también se formula la justificación matemática. La respuesta es coherente con el medio construido. Se realiza una difusión epistémica de la misma. En T3 el GF reduce las preguntas y además las cambia. Proponen tareas para que los estudiantes estudien la física relacionada con el problema y luego la matemática. Las tareas se refieren al funcionamiento de las antenas y a la reflexión de rayos. Las parábolas se usan para justificar la concentración en el foco. La difusión de la respuesta es epistémica y estaría a cargo del profesor.

Tabla 6

*Análisis del GRUPO F (GF) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_F$ (F,F,$Q_0$) X=Y=D | $S_F$(X,F,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | $Q_0$=$Q_1$<br>$Q_2$: ¿Cómo se define en física una onda electromagnética?<br>$Q_3$: ¿Qué es un frente de ondas?<br>$Q_4$: ¿Qué ocurre cuando una onda electromagnética encuentra un obstáculo?<br>$Q_5$: ¿Cómo se produce la reflexión? ¿Qué leyes la gobiernan?<br>$Q_6$: ¿Qué características geométricas tiene una parábola?<br>$Q_7$: ¿De qué manera transmiten y recepcionan las antenas?<br>$Q_8$: ¿Qué relación existe entre "parábola" y "antena parabólica"?<br>$Q_9$: ¿Qué ocurre cuando una onda electromagnética incide sobre una superficie parabólica?<br>$Q_{10}$: ¿Qué es la reflexión? ¿Qué leyes físicas se cumplen?<br>$Q_{11}$: ¿Qué ecuación representa una recta sobre un plano? ¿Cuál es su pendiente? ¿Cómo puedo determinarla?<br>$Q_{12}$: ¿Cómo puedo hallar la ecuación de una recta a partir de las coordenadas de dos puntos que pertenecen a ella?<br>$Q_{13}$: ¿Cuál es la ecuación de un paraboloide elíptico?<br>$Q_{14}$: ¿Cómo se obtiene la ecuación de un paraboloide elíptico?<br>$Q_{15}$: ¿Qué es un eje de simetría? | $Q_1$<br>1) Dividir al curso en grupos y proponerles que investiguen, utilizando los libros de la biblioteca o internet disponibles en la institución: ¿Qué función cumple una antena? Se espera que los estudiantes propongan preguntas como: *¿De qué manera transmiten y recepcionan señal las antenas? ¿Cómo se define en física una onda electromagnética? ¿Qué es un frente de ondas? ¿Qué ocurre cuando una onda electromagnética encuentra un obstáculo? ¿Cómo se produce la reflexión? ¿Qué leyes la gobiernan?*<br>2) Demostrar matemáticamente las dos leyes asociadas a la reflexión especular.<br>$Q_2$=$Q_8$<br>$Q_3$: ¿Cómo se produce la reflexión sobre una superficie que se ajusta a una curva parabólica? Justificar su respuesta.<br>$Q_4$: ¿Podemos asegurar que un paraboloide elíptico tiene la misma propiedad que una parábola?<br>$Q_5$: ¿Explica esta característica que als antenas tengan esa forma? |

Tabla 6
*Análisis del GRUPO F (GF) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3*
(…/…)

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_F$ (F,F,$Q_0$) X=Y=D | $S_F$(X,F,$Q_0$) |
| $Q_{n+1}$…, $Q_m$ | $Q_{16}$: ¿Cómo puedo determinar analíticamente el punto medio de un segmento?<br>$Q_{17}$: ¿qué es el foco de una parábola? | |
| $R_1^{\diamond}$,..., $R_n^{\diamond}$ | $R_1^{\diamond}$: Definiciones de frente de onda.<br>$R_2^{\diamond}$: Descripción de la reflexión difusa y especular<br>$R_3^{\diamond}$: El ángulo de reflexión $\theta$r es igual al ángulo de incidencia $\theta$i para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales.<br>$R_4^{\diamond}$: Definición de parábola como lugar geométrico.<br>$R_5^{\diamond}$: Antena parabólica: “Una antena parabólica es una superficie de revolución que se obtiene haciendo rotar sobre su eje de simetría una parábola.”<br>$R_6^{\diamond}$: Definición de parábola como lugar geométrico. | $R_1^{\diamond}$: “Los rayos incidentes, reflejados y la normal a la superficie, yacen todos en un mismo plano.”<br>$R_2^{\diamond}$: “El ángulo de reflexión $\theta$r es igual al ángulo de incidencia $\theta$i para todas las longitudes de onda y para cualquier material.”<br>$R_3^{\diamond}$: Definición de parábola como lugar geométrico.<br>$R_4^{\diamond}$: Los rayos incidentes paralelos al eje de la parábola son reflejados hacia su foco.<br>$R_5^{\diamond}$: Una antena parabólica tiene forma de superficie de revolución, obtenida por rotación sobre el eje de simetría de una parábola. |
| $O_{m+1}$,… $O_p$ | Óptica geométrica. Parábolas. | Reflexión de rayos. Parábolas. |
| $R^{♥}$ | Un rayo incidente a una parábola paralelo al eje de simetría reflejado hacia su foco. Entonces una onda electromagnética será concentrada en ese punto, y las antenas con forma de paraboloide se utilizan como antenas direccionales. | El “corte” de un paraboloide elíptico que surja de inersecar esa superficie con un plano que contenga su eje será una parábola. Éstas comparten el eje de simetría y el foco, y desde el punto de vista de la reflexión de rayos esta superficie tridimensional cumple lo |

Tabla 6
*Análisis del GRUPO F (GF) utilizando el esquema Herbartiano para T2 y T3 (…/…)*

| | T2 | T3 |
|---|---|---|
| | $S_F$ (F,F,$Q_0$) X=Y=D | $S_F$(X,F,$Q_0$) |
| R♥ | | analizado antes para la parábola. Esto explica por qué las antenas con forma de paraboloide se utilizan como antenas direccionales. |

## Análisis Léxicométrico

Consideramos en primer lugar la Tarea 2. Se generó la variable **Grupos** cuyas modalidades son GA, GB, GC, GD, GE, GF. Entre las 12065 formas léxicas originales fueron retenidas para el análisis 4328. Los dos primeros autovalores del ACS acumulan el 51% de la varianza explicada.

### Descripción del Primer Factor

La modalidad GB (Figura 2) ubicada en la parte positiva del eje, caracteriza al primer factor, mientras que las modalidades GD y GC también presentan una buena contribución al eje, donde GC se opone a GB y GD. Las palabras: *señal*, *cuádrica*, *receptor*, *satélite*, *traza*, *reflexiva*, *espacio*, *paraboloide*, *LNB*, están asociadas significativamente a la modalidad GB. Esto se corresponde con la respuesta elaborada por ese grupo, que primero estudia las Cuádricas y su clasificación analíticamente y considera algunas trazas posibles. Luego, ellos asocian a los paraboloides con la forma de la antena y analizan el funcionamiento de varios tipos de ellas, concentrándose en la reflexión. Entre las cónicas, solo estudian la Parábola relacionada a la antena parabólica a la recepción y emisión de señales. En síntesis, se corrobora que GB estudia primero las nociones supuestamente involucradas en $Q_0$ y luego aborda la cuestión.

La modalidad GD, se ubica en el mismo sector del eje 1 que GB. La respuesta tiene significativamente asociadas a las palabras: *paraboloide*, *solar*, *cocina*, *foco*, *utiliza*. El GD se interesa primero por las características de los paraboloides y rápidamente se enfoca en la utilidad que estos tienen para recibir/emitir ondas electromagnéticas. La importancia que GD otorga a las cocinas solares, se evidencia la proximidad entre las palabras: *cocina*, *solar* y *utilidad*. La concentración de radiación reflejada en el foco se describe mediante una aplicación dinámica de GeoGebra. La respuesta elaborada por GD es matemática y físicamente débil, la razón de ser de la propuesta es construir en cartón el artefacto cocina solar.

La modalidad GC, se ubica en el sentido opuesto del eje y de las modalidades anteriores. Las palabras: *onda, principal, reflexión, valor, refracción, foco* están significativamente asociadas a GC. Este grupo estudia inicialmente ciertas nociones físicas tales como: ondas electromagnéticas y los fenómenos reflexión y refracción. Luego, analiza el funcionamiento de las antenas parabólicas y finalmente las parábolas, en el marco analítico.

En resumen, según se comience por la Matemática o la Física, el Eje1 podría vincularse con lo que en la TAD se llama *"primer encuentro con el saber"*. Por otro lado, los grupos que comienzan por la matemática asumen tácitamente que hay que *saber previamente* la matemática involucrada en la pregunta. Este hecho evidencia una postura aplicacionista, propia del paradigma monumental y contraria de a la idea de matemática *mixta* (Chevallard, 2004). Los grupos GB y GD también estudian matemática primero, específicamente las cuádricas y los paraboloides, y recién entonces, buscan una aplicación, considerando parcialmente ciertas nociones físicas. Contrariamente, el GC comienza por la óptica ondulatoria y luego estudia las parábolas en el marco analítico, intentando relacionar las disciplinas mediante la noción de reflexión.

El Factor 2 se representa en el eje vertical y está definido por las modalidades GC y GF ubicadas en oposición. Este eje podría denominarse "nociones físicas". El grupo C estudia las ondas electromagnéticas aunque finalmente adopta el modelo de rayos y luego se enfoca en las parábolas, el grupo F opta desde el comienzo por el modelo de rayos. Estos grupos tienen en común exploración inicial en la física y el direccionamiento del estudio matemático exclusivamente a la parábola en el marco analítico. Así, las palabras más significativamente asociadas a GF: *determinar*, *rayos*, *Freedman*, *recta*, *incidente*, indican que la respuesta busca a partir de la física, más específicamente en el texto de Física Básica de Freedman. Posteriormente, el grupo demuestra analíticamente la propiedad de convergencia focal, para lo cual desarrolla las características de las parábolas.

Las palabras con una correlación negativa son: reflexión, *señal*, *receptor*, se deben a que el grupo se ocupa de los “rayos reflejados” más que del dispositivo.

En síntesis, la Figura 2 muestra el plano factorial del primer y el segundo factor. En el primer cuadrante, con buena representación, se ubica GB y en el tercer cuadrante GF. Estos grupos se diferencian por el “primer encuentro” con la matemática o la física, respectivamente. GF opta por el modelo de rayos y el tratamiento matemático converge a las parábolas en el marco analítico; mientras que GB centra el estudio en las cuádricas, los paraboloides y las nociones físicas como señal, satélite, forman parte de una narrativa tendiente a justificar el funcionamiento de las antenas. En el segundo cuadrante, se ubica GC con buena representación, caracterizado por el estudio de nociones físicas.

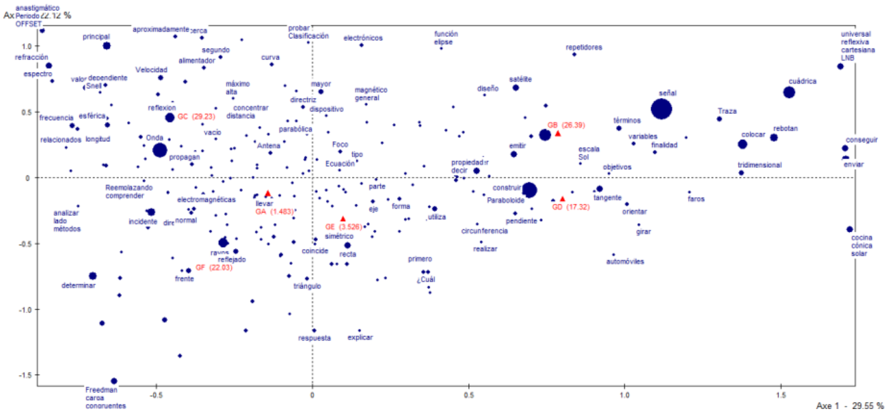


*Figura 2.* Plano factorial del ACS correspondiente a T2

Del mismo modo considerado antes, se analizaron las respuestas a la T3. El total de formas léxicas utilizadas en las repuestas es de 12324, de las cuales se retuvieron para el análisis 3926. Los dos primeros autovalores del ACS acumulan el 56% de la varianza explicada. En este caso, el primer factor también representa el Primer encuentro con el saber. Pero ahora las modalidades más asociadas a dicho eje son GA y GB en oposición. La modalidad GB ubicada en el sector negativo del eje, es característica del primer factor y presenta más contribución a la inercia. Las palabras significativamente asociadas a GB son ahora: *Hipérbola*, *valor*, *Elipse*, *señal*, *semidiámetro*, *satélite*, *Ecuación*, *receptor*, *cuádrica*, *Graficar*, *LNB*, *reflector*, *espacio*, *Paraboloide*. Estas palabras se corresponden con una organización de la enseñanza que provoca un primer encuentro con las Cuádricas y mediante el análisis de las trazas, se derivan las cónicas. Luego se consideran nociones físicas vinculadas a las señales. Se asume que la parábola es conocida de antes, y no se propone tratarla. El estudio se realiza exclusivamente en el marco analítico. En oposición sobre el sector positivo del eje se ubica la modalidad GA, significativamente asociada a las palabras: *Recta*, *punto*, *intersección*, *perpendicular*, *circunferencia*, *mediatriz, pertenece*, *pasa*, *cumple*, *etapa*, *directriz*, *condiciones*, *segmento*, *parábola*, *¿Cómo?* Mientras que en T2 el GA trató exhaustivamente cuestiones físicas, en T3 descartaron seis preguntas y se centraron en construir geométricamente la parábola en el marco sintético, demostrar su simetría y justificar la existencia de la tangente a dicha curva. En la respuesta de este grupo, los paraboloides se mencionan, pero no se estudian y las ecuaciones no son relevantes en el marco sintético.

En síntesis, el Primer Factor continúa representando el Primer Encuentro, ya sea con la con la matemática GB o en oposición, con la física GA. En el primer caso, se comienza por la geometría analítica a partir de las cuádricas y las cónicas y luego se considera la reflexión de señales, en relación con la pregunta. Por su parte, el GA comienza por la óptica física y coherentemente, el tratamiento matemático se circunscribe a la geometría sintética y a las parábolas. Se destaca el papel otorgado a estudiar la existencia de la tangente a la parábola y a la demostración de una propiedad que la defina. Esta propiedad, a su vez se utiliza para analizar la reflexión de los rayos paralelos al eje y para concluir que lo hacen pasando siempre por el foco.

El factor 2 se asocia con la forma en que los grupos GA y GF estudian la parábola. En oposición se ubica GA, que representa al grupo que optó por la Geometría sintética, mientras que el GF opta por la geometría analítica. Las palabras más significativamente asociadas con el GF y con una correlación positiva son: *Actividad*, *respuesta*, *Onda*, *Freedman*, *incidente*, *electromagnéticas*, *rayos*, *¿Qué?* Estas palabras también muestran el papel asignado por este grupo a nociones físicas, el libro de Freedman es un texto de física universitaria elemental.

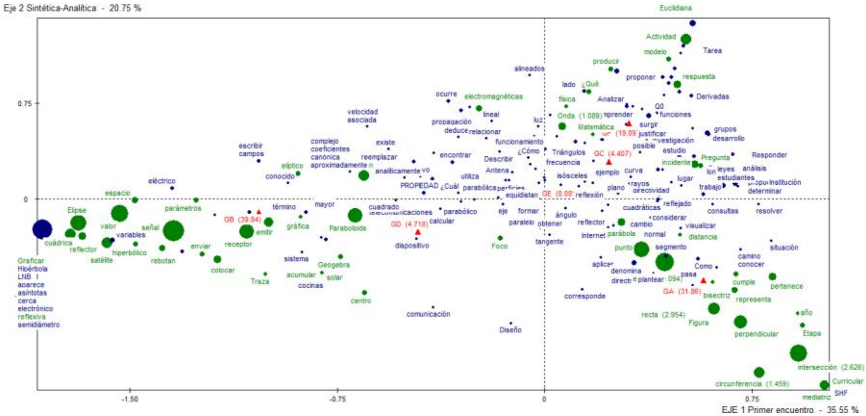


*Figura 3.* Plano factorial del ACS correspondiente a la Tarea 3

El plano factorial correspondiente a T3 muestra que la organización de la enseñanza propuesta por GD, GE y GC es más “monumental” que en T2. GB realiza pocos cambios con respecto a T2, y se diferencia ahora de GA por el papel que juega la física y por su opción por la geometría sintética. Por su parte GF se caracteriza por la importancia que da a la física, y resulta opuesto a GA en el segundo eje por la forma en que trata a la parábola, exclusivamente en el marco analítico.

## Discusión

Los dos análisis, realizados con técnicas muy diferentes, resultan mutuamente coherentes, es decir, indican hechos similares.

Si consideramos las preguntas formuladas por los profesores, se advierte que muchas de ellas son de tipo esencial ¿qué es? Las preguntas por el que no sólo promueven respuestas cerradas y definiciones, sino que además revelan la epistemología propia del paradigma monumental. Por su parte, las respuestas etiquetadas provienen mayoritariamente de internet, y son copiadas con escaso cuestionamiento. Más de la mitad de los grupos y de los profesores, parecen estar relativamente preparados para tratar la pregunta, al menos en términos del conocimiento matemático del que disponen para abordarla, pero no se cuestionan sobre lo que obtienen, en correspondencia con una visión cristalizada del conocimiento matemático. Es decir, no podría decirse que lo que obstaculiza la organización de una enseñanza por investigación, con al menos gestos no monumentales es el desconocimiento matemático, sino, la manera en que este saber es considerado.

Existe una diferencia importante entre los grupos que se formulan en T2 primero preguntas relacionadas con física o con Matemática. En el primer caso, los grupos exploran diferentes áreas y obras de física, y después se formulan preguntas de matemática y las obras vinculadas. En el caso de comenzar por matemática, los grupos parecen asumir que es necesario saber la matemática que etiquetan como vinculada al problema para recién entonces proponer preguntas y posibles respuestas. Esta posición es en general conservada en T3 y deriva en una organización de la enseñanza encuadrada en el paradigma monumental desde el inicio. Esta característica es muy clara en el grupo B, D y E. Sin embargo, el monumentalismo reviste diversas formas, por ejemplo, en el caso de D, el grupo decidió cambiar la pregunta por *¿Cómo construir una cocina solar?* Si bien esto podría en principio considerarse auspicioso, finalmente, está dirigido a producir un encuentro meramente empirista y a su entender más sencillo y amigable con el saber, puesto que la "cocina" se construye con cartón. Las parábolas también se construyen con cuatro métodos manuales diferentes.

En estos grupos, el monumentalismo se evidencia también porque los profesores asumen plenamente la construcción y el control del medio didáctico. Las cuestiones que eliminan en el pasaje de T2 a T3, son reemplazadas por tareas que producirán un encuentro monumental. Por ejemplo, el Grupo E propone en T3: *"Observa todos estos paraboloides: Podrías decir ¿cuáles tienen parábolas como trazas?"* Con respecto a la difusión de la respuesta elaborada, esta puede ser epistémica, como la que realiza el grupo B, o narrativa, como la que realizan los grupos D y E. La difusión es un tipo de actividad matemática ajena al paradigma monumental de enseñanza y está relativamente prevista en T2, pero resulta desdibujada en T3. Esto también es un indicador de que cuando tienen que organizar la enseñanza, los profesores no pueden evitar el monumentalismo, la respuesta no requiere más validación ni discusión.

Con relación a los grupos que comienzan con preguntas de Física, se destaca el grupo A, que además opta justificadamente por la óptica geométrica y decide estudiar la obra parábola en el marco sintético. Es el único grupo que advierte la importancia de la existencia de la tangente a la curva para tratar matemáticamente el problema de la reflexión de los rayos incidentes. Sin embargo, al pasar a T3, también se reducen las preguntas y se opta por una versión mucho más conducida de la enseñanza. El grupo F se diferencia del A porque si bien otorga mucha importancia a la física, estudia sólo la parábola en el marco analítico. El tratamiento de la difusión es epistémico, pero parece reservado al profesor, o minimizado en T3. El grupo C comienza por la física y el tratamiento es relativamente coherente en T2, pero al pasar a T3 fuerza el medio para estudiar “función cuadrática”.

Con excepción del Grupo B, todos terminan reduciendo la organización de la enseñanza a las parábolas, lo cual evidencia otra característica del monumentalismo: la necesidad de dar cuenta de un currículo abarrotado de contenidos, de temas, no de obras, aun cuando se esté planteando una enseñanza hipotética como ha sido el caso. Solo el Grupo A analiza el problema de la tangente a la parábola, como tal, y se pregunta y desarrolla una forma coherente con el marco sintético por ellos elegido, para tratar este asunto. Esto evidencia la importancia que reviste el análisis-síntesis praxeológico como una actividad didáctico-matemática esencial, a la vez que señala las dificultades de los profesores para desarrollarla, porque si el saber es transparente y monumental, este análisis no se considera necesario, ni los profesores lo asumen como una actividad inherente a su práctica profesional, aunque durante el curso se llevó a cabo esta tarea varias veces.

## Conclusiones

Frente a la tarea de proponer una organización de la enseñanza hipotética, basada en el paradigma del cuestionamiento, los profesores evitan perder el control del medio didáctico. Esto conduce de lleno a una organización monumentalista de la enseñanza, porque produce la pérdida del componente de investigación, que requiere de un medio abierto y de encuentros no monumentales con el saber. La postura epistemológica de los profesores parece tener un peso considerable en este hecho, habida cuenta de que la mitad de los grupos deciden encontrar primero a la matemática y luego, a posteriori, proponer preguntas, exactamente a contramano del paradigma de la investigación, y de que un solo grupo realiza un análisis-síntesis praxeológico y didáctico. Esta restricción parece originarse en el nivel de la Sociedad, respondiendo a creencias -doxa- en el sentido de Bordieu. Estas opiniones se refieren a que los profesores deben controlar el medio didáctico y son los únicos responsables de él. Un cambio de paradigma en el sentido de Kuhn (1983) supone una "conversión radical" una modificación de creencias del orden de la *doxa*, además de una nueva *episteme*. El paradigma del cuestionamiento del mundo propuesto por la TAD propone una *episteme* que sustituya a la anterior, pero carecemos de una *doxa* que cuestione fuertemente al paradigma dominante y que habilite la revolución que lo sustituya.

## Referencias


Artaud, M., Cirade, G., & Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En M. Bosch, et. al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 769 – 794). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247. doi: 10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-22.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Bellenoué, F. , Chevalarias, N. , Chauvin, P. , Dhérissard, S. , Ducos, C., Gaud, D., Grillet, M., Jussiaume, L., Kirch, C., Mesnier, W. & Minet, N. (2014). *Enseigner les mathématiques en 1ère S: Trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique*. Poitiers: IREM de Poitiers.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*, pp. 233-244. Granada: Universidad de Granada.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.* Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2012). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, 2* (2), 161-182. doi: 10.447/redimat.2013.26.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R., & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.

Fennema, E. & Loef, M. (1992). Teacher' Knowledge and its impact. En D.A. Grows (ed.). *Handbook of Research on Mathematicis Teaching and Learning* (pp.147-163). Reston, VA: NCTM and IAP.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Giménez-Rodríguez J., Font V., Rubio N., y Planas N. (2009). Competencias profesionales en el máster de profesorado de secundaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *51*, 9-18.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. Disponible en: https://www.jstor.org/stable/40539304

Hill, H. C., Schilling, S., & Ball, D. L. (2004). Developing measueres of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105* (1), 11-30.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. En F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Kuhn, T. (1983). *La Structure des révolutions scientifiques*. Champs Flammarion: France.

Lebart, L., Morineau A., & Fenelon, J. P. (1985). *Tratamiento Estadístico de Datos*. Barcelona: Marcombo.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Moscoloni, N (2011). *Las nubes de datos: métodos para analizar la complejidad*. Rosario: UNR Editora.

Romo A., Barquero, B.; Bosch, M. (2016). Study and research paths in online teacher professional development. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, France. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337881.

Ruiz-Olarría, A., Bosch, M. & Gascón, J. (2014). El conocimiento pedagógico del contenido y las praxeologías matemáticas para la enseñanza. In G. Cirade et al. (Éds). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. Toulouse: IUFM Midi-Pyrénées.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículo y formación de profesorado*, *8*(1), 1-15.

Robert, A. & Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media: ¿Por qué y cómo? *Educación Matemática*, *17*(2), 35-58.

Rojas, F., Deulofeu, J. (2015). El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la «tensión» estudiante-formador. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (1), 47-61. doi: 10.5565/rev/ensciencias.1322.

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. London: Springer.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sowder, J. T. (2007). "The mathematical education and development of teachers". En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

**María Rita Otero** es directora del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), de UNICEN – Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

**Viviana Carolina Llanos** es investigadora asistente, de UNICEN – Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

**Dirección de contacto:** La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal**: UNICEN – Paraje Arroyo Seco, Campus Universitario, Tandil, Argentina. **Email:** rotero@exa.unicen.edu.ar