

## UN ESTUDIO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN CONSTANTE



Silvia Guadalupe López Alonzo, Eddie Aparicio Landa

Universidad Autónoma de Yucatán

slopeza@cinvestav.mx, alanda@uady.mx

### Resumen

En este trabajo de investigación se realizó un estudio respecto a las formas de pensamiento que movilizan estudiantes de primer año de universidad cuando se les sitúa en un ambiente de discusión relativo a un conocimiento matemático particular, en este caso, función constante. En específico, interesó identificar la relación existente entre las dificultades manifiestas en estudiantes para incorporar a la función constante como tal, con las dificultades *sui generis* manifestadas por algunos pensadores matemáticos de antaño.

### Palabras Clave

Función constante, Socioepistemología, Variación

### Introducción

Al indagar sobre la historia del concepto función, es posible identificar que su desarrollo se puede remontar a 4000 años atrás, sin embargo, fue hasta hace unos seis siglos que se empezó a entender con mayor claridad (O'Connor; Robertson, 2005). Esto, gracias a la diversidad de matemáticos que intervinieron en la matematización de este concepto, proceso durante el cual es posible la identificación de hechos que parecieran estarse reproduciendo actualmente en las aulas de clase, uno de los cuales ha llamado particularmente nuestra atención, como es el caso de que los estudiantes no incorporen a la función constante como función, mismo hecho que ha sido posible identificarlo en el pensamiento de algunos matemáticos de la antigüedad y que han influido notablemente en el desarrollo de dicho concepto matemático, tal es el caso de Euler, a quien estaremos haciendo referencia.

A pesar de que la noción de función ha existido desde hace ya muchos años, se considera que fue hasta el año de 1748 cuando éste concepto obtuvo mayor atención en las matemáticas gracias a Euler, quien en su libro *Introductio in analysin infinitorum* dotara a dicho concepto de la siguiente definición:

“Una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes”

Una interpretación de la definición de función presente en este enunciado, permite señalar la presencia de ideas dinámicas, agregándose también, la idea de una expresión analítica – escolarmente se puede pensar en fórmula– la cual, bajo la visión Euleriana de la noción de función, tal expresión debería corresponder a una curva continua o mixta, debido a que en ese tiempo quedaba de manifiesto que una función podría ser representada geoméricamente por una curva, más no toda curva podría ser expresada por alguna función de forma analítica (Aparicio; Cantoral, 2006).

De este modo, si la interpretación realizada sobre la “definición” dada por Euler resulta ser más o menos acertada y la historia ofrece indicios para pensar que en efecto, esto así es, resulta que bajo la definición moderna de función, la *función constante*, parece no estar considerada en la definición dada por éste matemático.

Hechos como estos y el que entre los estudiantes la función constante parece no quedar del todo establecida en su cuerpo de conocimientos adquiridos en sus cursos de Precálculo, motivó tomar como objeto de estudio a la “reproducibilidad” de un hecho de naturaleza cognoscitiva, tal es el caso de que estudiantes no consideren a la función constante como función y como pregunta de investigación:

¿En qué medida se relacionan las producciones estudiantiles respecto a la noción de función constante con las manifestadas por pensadores matemáticos de antaño?



## Método de estudio

Con la intención de dar una respuesta a la pregunta anteriormente planteada, y por la naturaleza del trabajo, se consideró a la socioepistemología en tanto aproximación teórica, como un marco teórico que orientará la elección del método de estudio y las explicaciones de los datos obtenidos. En la socioepistemología se reconoce a las prácticas sociales como favorecedoras de la construcción e institucionalización de saberes matemáticos, asimismo, reconoce que un fenómeno didáctico ha de estudiarse y explicarse en un sentido sistémico del saber (Cantoral; Farfán, 2003).

Bajo esta orientación teórica otorgada al estudio, se decidió emplear a la ingeniería didáctica como método de investigación, misma que se encuentra delimitada en cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

Como parte de la primera fase, se realizó el análisis preliminar, efectuado bajo el reconocimiento de los aspectos epistemológico, cognitivo y didáctico del concepto matemático que forma parte del estudio, cada uno de los cuales se refieren a continuación:

*Análisis epistemológico.* Se recurre a una revisión histórica-epistemológica del concepto función y con ello fue posible establecer cómo la palabra “función” era usada como un término designado a varias cantidades geométricas asociadas a una curva; éstas eran funciones de la curva.

En tiempos posteriores, se observa un énfasis en ecuaciones y fórmulas relacionadas a las ecuaciones de las curvas, relacionando de esta forma al álgebra con la geometría. En esta etapa de construcción del concepto, la función parecía exigir necesariamente la presencia de la cantidad variable en su expresión analítica, lo cual, parece suponer que la función constante no era incorporada como función.

Esta concepción analítica del concepto función fue la que prevaleció en el Cálculo del siglo XVIII, misma idea que fue discutida por diversos matemáticos que se encontraban conscientes de la

naturaleza de funciones arbitrarias provenientes de la integración de ecuaciones diferenciales parciales.

Con el transcurrir de los años, la definición se fue ampliando. En el año de 1822, estudios relativos a la teoría analítica del calor le permitieron a Fourier presentar una definición que se aleja deliberadamente de expresiones analíticas.

A mediados del siglo XIX se contribuye al establecimiento de una definición mucho más precisa del concepto función, haciendo de la relación entre variables el centro de éste concepto, idea surgida como producto de la elaboración de trabajos relativos a límite, y a la continuidad y discontinuidad de funciones arbitrarias. Es en esta etapa histórica, donde se presenta el surgimiento de la definición de función como correspondencia entre conjuntos, definición que prevalece actualmente en el discurso matemático escolar.

*Análisis cognitivo.* Se indagó sobre resultados de investigaciones asociadas a esta dimensión, en las cuales, se hace alusión a la complejidad de enseñanza y aprendizaje del concepto función:

“La idea básica que se tiene de función consiste en relacionar a este concepto con una fórmula algebraica, tal que a cada valor de las magnitudes literales que aparecen en ella, haga corresponder un valor de la magnitud expresada por la fórmula” (Aleksandrov, 1976).

“Los alumnos suelen considerar a las funciones como dos expresiones separadas por un signo igual, y tienden a asociarla con una fórmula, esto es debido al tratamiento escolar que le es otorgado a éste concepto. Los estudiantes que piensan acerca de las funciones sólo en términos simbólicos de las manipulaciones técnicas y de procedimiento, son incapaces de comprender una cartografía más general de un conjunto de valores de entrada a un conjunto de valores de salida” (Carlson; Oerhtman, 2005).

“El concepto función es un objeto matemático de extrema complejidad, debido a que posee múltiples formas de representación (gráficas, fórmulas, tablas, relaciones verbales y representación icónica), que obligan al individuo a transformar una representación en otra, según la situación y el contexto donde cobra vida. También existen diversos subconceptos

asociados al concepto función, a saber, dominio, rango, cantidad, variable, razón, inversa, composición, entre otros” (Del Castillo; Montiel, 2007).

“La concepción más fundamental de una función es que es una relación entre magnitudes variables. Si esto no es desarrollado, representaciones tales como ecuaciones y gráficas pierden su significado y se hacen aisladas una de la otra. Introducir funciones en jóvenes estudiantes mediante su elaborada definición es un error didáctico” (Sierpinska, 1992).

*Análisis didáctico.* Se recurrió a una revisión bibliográfica de dos libros de texto bajo el fin de observar el papel que juega la función constante dentro del ámbito escolar.

En ambos libros de texto revisados, la definición de función presentada se refiere a la de correspondencia entre dos conjuntos, en donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.

En Stewart (2001) la función constante es presentada por primera vez en el tema de reglas de derivación, haciendo mención de que se iniciará éste tema con la más sencilla de todas las funciones, la función constante, se hace referencia que la gráfica de esta función corresponde a la recta horizontal.

Un señalamiento en este caso, corresponde al hecho de que la función constante no es presentada dentro del tema correspondiente a funciones, ni tampoco se hace explícito que tipo de valores son los que toma la constante. Si no que la atención recae únicamente en la expresión general y en la representación gráfica de este concepto.

En Leithold (1998) la función constante es presentada como ejemplo introductorio a la función lineal. Se menciona que la función definida por  $f(x) = 5$ , es una función constante, y su gráfica corresponde a una recta horizontal situada a 5 unidades sobre el eje  $x$ , y la función definida por  $f(x) = -4$  es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal ubicada a 4 unidades debajo del

eje . Siguiendo de esta presentación, la función constante ya no es retomada en temas posteriores.

Como es posible notar, en este segundo texto nuevamente se da prioridad a la representación gráfica de la función constante, presentándola nuevamente como una recta horizontal.

En términos generales, bajo esta revisión se pudo constatar que cuando se presenta por primera vez la función constante, se hace con especial énfasis en su representación gráfica, haciendo mención de que la gráfica de una función constante corresponde a una recta horizontal paralela al eje .

También se presenta poca atención en la explicitación del tipo de valores que puede tomar la constante y los ejemplos propuestos se reducen al conjunto de los números enteros sin considerar al cero. Es quizá por esto, que al parecer algunos estudiantes no reconocen como funciones a expresiones de la forma  $y = c$ ,  $y = k$ , entre otras.

Otro aspecto observado consiste en la importancia con la que se presenta a la función constante, ya que el énfasis que se hace hacia la misma como función, es mínimo, pues más bien esta función es presentada como un vínculo introductorio a otros conceptos o temas como lo fueron la función lineal y las reglas de derivación.

#### *Conclusiones del análisis preliminar*

En Stewart (2001) se presenta a la función constante como la función más sencilla de todas, pero, según la experiencia docente ¿Qué tan cierto es eso? En realidad, el hecho de que los estudiantes se muestren renuentes hacia la función constante no es de extrañarse, ya que éstos están reflejando un pensamiento que se encuentra inerte al concepto mismo de función, pensamiento que consiste en la asociación de la función con una fórmula o con una curva regular, misma idea dentro de la cual no tiene cabida la función constante. Sin embargo, a pesar de que existen numerosas investigaciones referentes a dificultades de los estudiantes al estudiar

el concepto función, parece ser que éstas no están siendo consideradas en la enseñanza de éste concepto matemático.

Al indagar en la forma en que el concepto función es presentado en la matemática escolar, se observa que el tratamiento que se le otorga forja en los estudiantes una idea de variación gráfica y la presencia de una variable que se debe relacionar por medio de la igualdad matemática en una expresión funcional. Con ello, se asevera, se generan dificultades de interpretación de lo que en verdad es una función y sus diversas formas de representación.

Esta misma idea de variación gráfica asociada al concepto función y la presencia de una letra que denote variación en una expresión algebraica funcional, lleva a los estudiantes a mostrarse “renuentes” a aceptar a la función constante como función, es decir, que el tratamiento escolar que le es otorgado a la función no favorece la generación de aprendizajes.

Bajo esta hipótesis se recurrió al diseño de un instrumento que nos permitiera estudiar las formas de pensamiento de los estudiantes cuando discuten sobre la noción de función constante en un ambiente no típicamente escolar, a fin de dar una explicación plausible al respecto, de modo que, se esté en condiciones de proponer un tratamiento didáctico del concepto de función constante.

Este instrumento se encontró dividido en cuatro fases cada una de ellas con las siguientes intenciones:

Fase 1: Identificar a las funciones que están presentes en el pensamiento de los estudiantes.

En esta primera etapa, se esperaba que los estudiantes proporcionaran ejemplos de funciones en los que la presencia de la variable fuera indispensable, de tal forma, que entre sus respuestas no se esperaba que dieran a la función constante.

Fase 2: Partir de una situación cotidiana para ilustrar dinámicamente a los estudiantes mediante una representación no típicamente escolar, una relación entre dos variables, de las cuales, una de ellas carece del sentido de variación gráfica.

En esta fase se tenía la intención de generar discusión sobre esta situación particular, de tal forma que fuera posible identificar los razonamientos ejecutados sobre las relaciones que son representadas mediante funciones constantes.

Fase 3: Analizar el pensamiento de los estudiantes respecto a expresiones analíticas correspondientes a funciones constantes que no son presentadas regularmente en el escenario escolar.

En esta fase, se esperaba que los estudiantes identifiquen de manera inmediata a funciones del tipo exponencial, polinómica y a funciones constantes típicamente escolares, por ejemplo,  $y = 2^x$ . Por otro lado, se esperaba cierta resistencia a aceptar como funciones a expresiones del tipo  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ , entre otras.

Fase 4: Crear un escenario específico donde los estudiantes discutieran sobre la variación mediante la explicitación de expresiones funcionales asociadas a representaciones dinámicas proyectadas en la pantalla de una computadora.

Se pretendía crear discusión entre los estudiantes al analizar las diferentes formas de variación de diferentes tipos de funciones, de tal forma que proporcionaran aspectos esenciales para la identificación de su pensamiento cuando discuten sobre la ausencia de variación que pudiera pensarse ocurre en el caso de la función constante.

## Resultados y discusión

Con la puesta en escena del diseño didáctico experimental, pudimos observar que tal y como se esperaba en la primera fase, entre las funciones representadas de manera algebraica y gráfica por los estudiantes no figura la función constante. Si no que sus ejemplos de funciones corresponden aquellas de tipo polinomial de grado mayor que cero. También se detectó la presencia de la función logaritmo, la función valor absoluto y la función coseno.

En la segunda fase, se detectaron dificultades por parte de los estudiantes entrevistados para identificar la función correspondiente a la representación dinámica proporcionada, se discute sobre el particular comportamiento que se observa en el eje  $t$  del plano cartesiano, y se busca explicar su falta de movimiento y la posibilidad de que un único valor de  $t$  tome muchos valores de  $v$ . Ver figura 1.

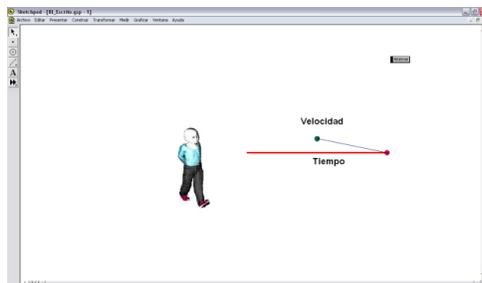


Figura 1

Mediante un análisis de la discusión generada por los estudiantes se determinó que la dificultad de reconocimiento de la función constante en esta representación, no es generada solamente por la ausencia de variación en  $t$ , sino también por el orden con el cual es argumentada la relación funcional, es decir, generalmente la función constante es presentada en los libros de texto como una correspondencia en donde a cada valor de  $t$  le corresponde un “único” valor en  $v$ , empero, durante la lectura de esta proyección lo que los estudiantes observan y argumentan es que en este caso un único valor de  $t$  está tomando muchos valores de  $v$ .

En la tercera fase, fue posible observar que los estudiantes no identifican de manera espontánea a expresiones correspondientes a funciones constantes no típicamente escolares, sino que de manera inmediata reconocen como función a aquellas expresiones en las cuales se encuentra de manera explícita la variable  $t$ , tal pareciera que un requisito visual indispensable para discriminar si una expresión algebraica (relación de igualdad) es o no función, es la presencia de la variable en ambos términos de una igualdad.

En este caso, fue la discusión producto de la interacción de los estudiantes la que les permitió identificar a las funciones constantes no típicamente escolares como funciones. Esto gracias a su conocimiento de la definición de función como regla de correspondencia entre conjuntos,

recurriendo posteriormente a la representación o visualización gráfica de las expresiones analíticas, y analizando que dicha representación corresponde a una línea recta horizontal paralela al eje  $x$ , con lo cual, pudieron argumentar que las expresiones a discusión sí representaban funciones y en particular, correspondían a funciones constantes.

En la cuarta fase se discutió sobre los diferentes tipos de variación de diferentes funciones en las representaciones dinámicas que observaban en la pantalla de una computadora. En esta sección, las primeras cuatro proyecciones que se presentaron, les permitieron a los estudiantes familiarizarse con el escenario en el que se encontraban trabajando, de tal forma que al presentarse en una quinta proyección una función constante les fue inmediato “identificarla” como tal. Sin embargo, en sus argumentos es posible identificar dos aspectos importantes:

- La asociación de un dinamismo a la función constante, es decir, que a pesar de que existe una carencia de variación en el eje  $x$ , gestualmente señalan un movimiento continuo sobre el trazo de la gráfica de la función.
- Se identifica a la función constante como una función representada por  $x$ , pero que en este caso,  $x$  es representada por una constante.
- 

Esto significa que, a pesar de la carencia explícita de la variable  $x$  en la parte derecha de la igualdad de la expresión funcional de funciones constantes, se comenta sobre la presencia de ésta, pero con el caso particular de que en las funciones constantes la variable  $x$  se encuentra representada por un valor constante. Con esto podemos percatarnos de la indispensabilidad con la que los estudiantes asocian a las expresiones funcionales con la variable  $x$ , y por tanto, también se asocia un dinamismo a la gráfica de las funciones constantes, aún cuando éste no sea generado por una variación en el eje  $x$ .

Los resultados de este diseño didáctico experimental, nos proporcionaron información sobre el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto función constante, y nos fue posible identificar una falta de entendimiento por parte de los alumnos hacia éste concepto, ya que les fue posible identificarlo e incluso definirlo, sin embargo presentan poca clarificación sobre la

relación que ocurre en estos casos particulares de expresiones analíticas que carecen de manera explícita de la variable  $x$ .

### Conclusiones

A partir de la perspectiva teórica socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa, empleada en este estudio para determinar las características del diseño didáctico experimental y el método a emplear, así como para dar cuentas de los resultados generados, se puede afirmar que el tratamiento otorgado a la función constante en el escenario escolar, no favorece en los estudiantes un claro entendimiento de éste concepto, de manera que, a pesar de que los estudiantes tienen conocimiento de dicho concepto y son capaces de caracterizarlo, definirlo e incluso, ejemplificarlo en los términos que la escuela ha dispuesto, estos mismos estudiantes presentan limitaciones de conceptualización y resignificación en escenarios no típicamente escolares.

Por ejemplo, del análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en la implementación de nuestro diseño didáctico, se obtuvieron indicios para decir que, nociones como dependencia de variables y variación de variables en relación a la noción de “regla” de correspondencia entre cantidades o valores cambiantes, no se logran estabilizar de manera adecuada en la mente de dichos estudiantes, siendo esto un factor que obstaculiza un amplio entendimiento del concepto función, y por ende, de la función constante.

Así mismo, pudimos detectar que, aun cuando la definición de función que se presenta por lo general en la matemática escolar, es la de correspondencia entre conjuntos, el tratamiento que se le otorga se basa en la idea de relación entre variables, idea que hemos mostrado con anterioridad, ha estado presente en la mente de las personas que se han ocupado del estudio de las funciones. Particularmente, notamos que al solicitar a los estudiantes que grafiquen cualquier función que deseen, la función constante no figura entre las respuestas dadas.

Para finalizar, mencionaremos algunos aspectos relacionados a las posibles causas del porqué algunos estudiantes manifiestan dificultades de orden cognoscitivo para estabilizar en sus

pensamientos a la función constante y sus representaciones algebraicas. Naturalmente, tales aspectos devienen de la implementación del diseño didáctico:

- La noción que de manera natural se haya presente en la mente de las personas respecto a las funciones, es aquella que se ancla en una relación de tipo variacional.
- El escenario gráfico es la base sobre la cual se articulan y generan consensos respecto a la noción de relación variacional en matemáticas. Es decir, es a partir de las características visuales (explícitas o implícitas), manifiestas en comportamientos gráficos de funciones, que es posible generar discusión y consenso respecto a aquello que ha de definirse o caracterizarse como un conocimiento matemático, en este caso, función constante.
- La definición de función dada en términos de correspondencia entre conjuntos, se constituye como una herramienta que legitima las acciones y nociones de los estudiantes, empero, no constituye una base sobre la cual pueda desarrollarse un proceso de construcción del saber institucional o en vías de constituirse.
- 

Así, se vislumbra la necesidad de establecer formas de articulación entre nociones variacionales y nociones estáticas entre los estudiantes respecto al concepto función, a fin de favorecer una resignificación del concepto y sus principales características y propiedades.

## Bibliografía

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M., et al. (1976). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. (pp. 100). Madrid: Alianza editorial, S. A.

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1 (2), 7-30.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6 (1), 27-40.

Carlson, M. y Oerhtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. The Mathematical Association of America. Recuperado de: [http://www.maa.org/t\\_and\\_l/sampler/rs\\_9.html](http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html).

Del Castillo, A., Montiel, G. (2007). El concepto función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. Memoria electrónica de la XI escuela de invierno, 568-579.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Séptima edición). México, DF: Oxford University Press.

O'Connor, J. y Robertson, E. (2005). *History of Mathematics*. Recuperado de: [http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo\\_4379\\_historia\\_del\\_concepto\\_funcion.htm](http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_4379_historia_del_concepto_funcion.htm).

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. México: Editorial Thomson.