CONJUNTO GENERADOR Y GENERADO: UN ANÁLISIS DESDE LA TEORIA APOE

Darly Alina Kú Euán[1], Asuman Oktaç[1], María Trigueros[2]

ku.darly@gmail.com, oktac@cinvestav.mx, trigue@itam.mx

[1]CINVESTAV-IPN, México; [1]PUCV, Chile; [2]ITAM

Resumen

El estudio acerca de la comprensión de los estudiantes acerca de las nociones conjunto generador y conjunto generado en álgebra lineal ha recibido poca atención desde el punto de vista de su construcción. Presentamos un estudio preliminar que es parte de una investigación destinada a estudiar cómo aprenden estas nociones los estudiantes. En este estudio se utiliza la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) para proponer una descomposición genética de cómo estos conceptos pueden ser construidos e indagar cuáles son las dificultades relacionadas ellos con la pertenencia de los vectores de un conjunto generador al espacio vectorial generado por ellos.

Palabras claves

conjunto generador, conjunto generado, construcciones mentales.

Introducción

Nuestro estudio se centra en el álgebra lineal. Este interés se debe en parte a las dificultades cognitivas que surgen con respecto a su aprendizaje y enseñanza. Haciendo una revisión en la literatura nos percatamos que gran parte de las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal, se han centrado en estudiar las dificultades cognitivas, en el análisis y desarrollo de tareas; y en sugerencias didácticas (Dorier et al.,2000; Rogalsky, 2000). De esta revisión pudimos darnos cuenta que existen pocos trabajos que se centran en la construcción de los conceptos del álgebra lineal, los cuales han puesto su foco de atención en la construcción del concepto de espacios vectoriales, sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales (Vargas, 2007; Manzanero, 2007; Roa, 2008; Parraguez, 2009). De allí surge la idea de enfocarnos en aquellos conceptos que son poco estudiados como: base de un espacio vectorial, conjuntos generadores y conjuntos generados (Nardi, 1997; Ball et al., 1998);

que son de gran importancia en la construcción de otros conceptos propios del álgebra lineal. En un estudio previo acerca de base de un espacio vectorial, observamos que los conceptos germinales (conjunto generador e independencia lineal) si no están construidos cognitivamente pueden llegar a causar conflictos cognitivos en los estudiantes al construir el concepto de base (Kú et al., 2008). Por ejemplo, algunos estudiantes mantienen una imagen conceptual de un conjunto generador como base de un espacio vectorial. Otros cometían errores al resolver problemas referentes a "generar", lo cual se reducía al hecho de checar si un conjunto genera, sin tomar en cuenta que "generar" implica la pertenencia de los vectores generadores al conjunto generado. En consecuencia, para este estudio hemos elegido las nociones de conjunto generador y conjunto generado, por ser un tópico que es parte germinal de la noción de independencia lineal y base de un espacio vectorial. Así que, consideramos importante que el estudiante construya estos conceptos, y que los vea como elementos de un todo coherente para establecer conexiones con otros conceptos del álgebra lineal . Por tanto, ya que nos interesa comprender cómo un estudiante puede llegar a construir estas nociones, hemos elegido como perspectiva teórica a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) (Dubinsky, 1991). Esta teoría fue iniciada por Dubinsky, y desarrollada por el grupo RUMEC[1]. Esta teoría se apoya en la teoría piagetiana constructivista, acerca de la abstracción reflexiva, como la clave de la construcción de los conceptos lógico-matemáticos.

Con respecto a la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un estudiante, Dubinsky menciona:

"*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996)*

En esta afirmación la componente más importante es la que se refiere a las construcciones mentales (acción-proceso-objeto-esquema), que permiten discernir la manera en la que un estudiante comprende una noción matemática y que constituyen la parte fundamental de la teoría APOE. Enseguida describiremos las construcciones mentales para el aprendizaje de un concepto matemático, previstas por la teoría APOE: Una concepción *acción* consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el estudiante como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos por seguir Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un *proceso*. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. Así mismo cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un *objeto*, esta concepción implica que el individuo puede desencapsular el objeto para trabajar con los procesos que lo componen (Asiala et al., 1996). Con respecto a un *esquema* se puede decir que es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto en particular (Asiala, et al., 1996). Una función importante y una característica que define la coherencia está en su uso para decidir lo que es dentro del alcance del esquema y lo que no es (Glosario RUMEC). Un esquema contiene tanto diferentes acciones, procesos y objetos, como conexiones y relaciones entre ellos. El individuo es capaz de ver toda la estructura relacionada.

El modelo de investigación y currículum asociado a la teoría APOE está constituida por tres componentes: El análisis teórico, el diseño del tratamiento instruccional, y la implementación, recolección y análisis de datos (Asiala et al., 1996).

Como parte de la investigación, primero se realiza un análisis teórico inicial de los conceptos conjunto generador y conjunto generado, en donde se pretende explicar qué significa entender el concepto, basándose en la experiencia propia del investigador. La intención del análisis teórico del concepto es proponer un posible camino que describa las construcciones (acciones, procesos, objetos, esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) mentales que un estudiante podría seguir para construir cognitivamente algun concepto matemático. Este modelo cognitivo se llama *descomposición genética* (Asiala et al., 1996).

Este trabajo que presentamos es la primera etapa de un proyecto de investigación referente al aprendizaje de las nociones de conjunto generador y conjunto generado en álgebra lineal. Tomando a la teoría APOE como sustento teórico, en esta primera etapa de la investigación hemos diseñado un estudio piloto para indagar cuáles son las dificultades relacionadas ellos con la pertenencia de los vectores de un conjunto generador al espacio vectorial generado por. Para ello, elaboramos una descomposición genética preliminar que modela un posible camino que un estudiante podría seguir para construir cognitivamente dichas nociones.

Metodología

A continuación describiremos la metodología empleada para este estudio piloto.

a) Diseño de una descomposición genética preliminar

En esta primera etapa de la investigación se diseño una descomposición genética preliminar de los conceptos conjunto generador y espacio generado, que modela las posibles estructuras cognitivas que un estudiante podría seguir para construir las nociones de conjunto generador y conjunto generado. Este modelo pretende que el estudiante pueda diferenciar el significado entre estas nociones.

A continuación a partir de la descomposición genética preliminar, mostraremos algunas situaciones que pueden mostrar los estudiantes al resolver los problemas relacionados con los conceptos de conjunto generador y conjunto generado.

Concepción Acción. Consideramos que los estudiantes que tienen una concepción acción de conjunto generado y conjunto generador pueden aplicar su concepción "proceso de combinaciones lineales" para verificar si existen escalares en K que puedan expresar a un vector específico de V como combinación lineal de los vectores de un conjunto S. Esta acción de verificar llevará al estudiante a expresar a las combinaciones lineales como un sistema de ecuaciones que le permita encontrar el valor de los escalares de la combinación lineal formada. Entonces el estudiante reflejará una concepción acción cuando al verificar si el conjunto genera o no al espacio vectorial dado, plantea a un vector específico como combinación lineal en términos del conjunto dado, y de acuerdo a ello se toma la decisión de generar.

Concepción Proceso. Si el estudiante puede generalizar las acciones anteriores y considera que todo vector del espacio vectorial se puede expresar como combinaciones lineales de un conjunto S, entonces diremos que muestra una concepción proceso de conjunto generador. Por lo tanto el estudiante ya no necesita trabajar con vectores específicos para decidir si un conjunto dado genera o no genera al espacio vectorial dado.

Concepción Objeto. Un estudiante mostrará una concepción "objeto" si el estudiante puede percibir que un espacio vectorial no está generado de manera única, y que los conjuntos generadores no tienen por qué no tener elementos en común o por qué tener el mismo número de elementos. Así mismo se podrá dar cuenta que el número de elementos de los conjuntos no establece el hecho de ser o no un conjunto generador. También es importante que el estudiante considere el hecho de que el espacio generado es el resultado de todas las posibles combinaciones lineales del conjunto generador, y que estos dos conceptos son diferentes.

b) Diseño de una entrevista piloto

Después de realizar la descomposición genética preliminar, elaboramos una entrevista que constó de siete reactivos. Cada reactivo constó de un análisis a priori en términos de nuestro marco teórico explicitando el propósito de cada una de ellas, y justificando su elección. A continuación presentaré dos de los siete reactivos de la entrevista con su análisis a priori correspondiente:

2. Sea el conjunto $S = \{(1,2,3), (1,-1,2), (2,1,1)\}$. S genera al espacio vectorial R^3. ¿Es S el único conjunto que genera a R^3? Justifica tu respuesta.

Este reactivo tiene el propósito de determinar las construcciones de los estudiantes a través de las acciones o procesos que utilizan para determinar si un conjunto S genera al espacio vectorial. Para poder resolver estos problemas los estudiantes necesitan tener las siguientes construcciones: los procesos de escribir la combinación lineal apropiada y el correspondiente sistema de ecuaciones, de encontrar el conjunto solución, y de comparar con el espacio vectorial para decidir si S genera V o no. Cabe mencionar que en este caso el estudiante puede utilizar los conceptos de dimensión e independencia lineal para dar su respuesta.

4. ¿Qué conjuntos de vectores no pueden generar a R^2? Justifica tu respuesta.

a) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

Este reactivo también tiene el propósito de indagar, acerca de las acciones o procesos que utilizan los estudiantes para resolver el reactivo, pero además tiene el propósito de averiguar la concepción objeto de conjunto generador. La concepción objeto implica que el estudiante sea capaz de mostrar que el número de elementos de un conjunto no es un factor para determinar si un conjunto es o no un conjunto generador.

c) Aplicación de la entrevista

Posteriormente aplicamos este instrumento a tres estudiantes (E1, E2, E3) de un curso de álgebra lineal del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Por último realizamos un análisis a posteriori para conocer lo que realmente hicieron los estudiantes en la entrevista, de acuerdo a lo que respondieron.

Resultados y Discusión

En este apartado se presentaran los resultados que dan evidencia de una concepción proceso para las nociones conjunto generador y conjunto generado. Esto con el fin de distinguir este tipo de concepción y su relación con la descomposición genética preliminar, así como las dificultades que surgen a partir de su construcción. Para ello, se mostraran fragmentos de la entrevista que muestran de manera efectiva el tipo de respuesta que el alumno dio a todas las preguntas del cuestionario, así como el análisis efectuado a la luz de la perspectiva teórica.

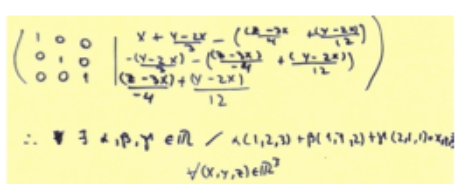
Concepción Proceso

Esta concepción la hemos considerando por aquellos estudiantes que dan muestra que pueden pensar en un vector general en el espacio vectorial dado y pueda verificar si cualquier vector puede ser escrito como combinación lineal de los vectores del conjunto dado. Por ejemplo, para el reactivo 2 (reportada anteriormente), el estudiante E2 considera a un vector general para verificar si un conjunto dado genera al espacio vectorial.

$$\alpha(1,2,3)+\beta(1,-1,2)+\gamma(2,1,1)=(x,y,z)$$
$$(\alpha+\beta+2\gamma, 2\alpha-\beta+\gamma, 3\alpha+2\beta+\gamma)=(x,y,z)$$

Luego resuelve y describe lo que hizo al resolver el reactivo.

E2: Ah bueno lo que yo hice fue una combinación lineal con estos vectores e igualarlos a cualquier vector en R^3 para ver si generaba todo R^3 entonces después desarrolle esto



y medio que como para que estos vectores sean iguales tienen que ser iguales elementos...las coordenadas tienen que ser iguales y me genere un sistema de ecuaciones entonces un alfa más un gama y así hice con todos, escalone esta matriz encontré si tenía resultados em si encontraba el alfa el beta y el gama, que me cumplieran con este sistema y ya, y si existe y no hay restricción para los valores de x y z, pero no sé si está bien escrito

Por otro lado, nos percatamos que la noción de variable juega un papel importante en la verificación de un conjunto generador, así como la conexión con otros conceptos del álgebra lineal. Por ejemplo el estudiante E2 utiliza la dimensión para completar sus resultados durante toda la entrevista. Sin embargo E2 se confunde en el reactivo 4 (c) (reportada anteriormente); después de realizar algunas manipulaciones algebraicas dice:

E2: …, pero no estoy seguro si con estos tres elementos puedo generar de todas formas R^2, porque como éste es combinación lineal del de acá (se refiere a los vectores (2,3) y (-2,-3)), podría escribir estos dos como asociarlo por un lado y dejar….pero la cosa es que estos dos son combinación lineal. Habría que ver si en realidad estos dos generan o no (se refiere a los vectores (1,2) y (2,3)). Pero cuando no me piden que el conjunto sea LI no me acuerdo cómo verificarlo.

Luego durante la entrevista surge la siguiente conversación entre E2 y la entrevistadora (I):

I: Ok, ahora para generar R^2 ¿cuántos vectores necesitas?

E2: por lo menos necesito 2.

I: ¿cómo que por lo menos? ¿Pueden ser más?

E2: Es que obviamente más pueden ser combinaciones lineales, pero si tengo dos l.i y uno l.d y uno que se puede escribir como combinación lineal ya sea de uno o dos igual y me genera R^2, ahora lo veo así pero en su momento no se me ocurrió.

De acuerdo a las respuestas que dio en la entrevista podemos decir que el estudiante E2 tiene una concepción proceso de los conceptos estudiados. Este estudiante puede determinar la solución para un vector general del espacio vectorial, es decir, puede decir si un cierto conjunto genera a un espacio vectorial, sin la utilización de vectores específicos. Puede trabajar en otros espacios vectoriales diferentes a las n-tuplas; sin embargo durante la entrevista presenta algunas dificultades para interpretar la coordinación entre un conjunto solución y la noción de variable (específicamente en el reactivo 4).

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este estudio piloto nos indicaron que existen dificultades en la integración de otros conceptos como la dimensión de un espacio vectorial en el uso de los conceptos en cuestión. Por otra parte podemos decir que la noción de variable juega un papel fundamental en la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado. La comprensión de los procesos (noción de variable) que intervienen en la solución de un sistema de ecuaciones es importante para determinar si un vector puede ser escrito como una combinación lineal de un conjunto de vectores. Consideramos que no sólo es importante que los estudiantes puedan diferenciar estos conceptos, sino que también tomen decisiones apropiadas frente a situaciones matemáticas que requieren el uso de estos conceptos. Los resultados encontrados nos permiten también hacer hincapié en que el hecho de memorizar las definiciones y teoremas no garantiza la comprensión de los mismos. Podemos describir que los resultados en esta primera etapa de la investigación nos mostró que nuestro instrumento de investigación aplicado a tres estudiantes como entrevista, podría rediseñarse para poder recolectar información más profunda sobre las construcciones y mecanismos mentales de los entrevistados respecto a los conceptos de estudio. Por tanto con base en los resultados obtenidos en la primera aplicación del instrumento; en la segunda etapa de la investigación reestructuraremos la descomposición genética preliminar y presentaremos una más refinada y cercana a la manera como los estudiantes construyen estos conceptos.

Bibliografía

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996) A frameworkfor research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H.Shoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) *Research in collegiate mathematics education.*Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.

Ball, G., Stephenson, B., Smith, G., Wood, L., Coupland, M. and Crawford, K. (1998). Creating a diversity of mathematical experiences for tertiary students. ,*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **29**(6), 827-841

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, R. and Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. A Variety of Studies From 1987 Until 1995. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht : Kluwer, pp. 85-124.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95 -123). Dordrecht : Kluwer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* Vol.

Manzanero, L. (2007). Sistemas de ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Kú, D., Trigueros, M. and Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática.* **20**(2), 65-90.

Nardi, E. (1997), El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática.* **9**(1), 47-60.

Parraguez, M. (2009) *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.* Tesis de Doctorado, CICATA-IPN

Roa, D. (2008) *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto Transformación Lineal.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Rogalski, M. (2000). The Teaching Experimented in Lille. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht : Kluwer, pp. 133-149.

Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.