REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

La Enseñanza del Número en la Escuela Infantil: Un Estudio Exploratorio del Logos de la Profesión

Elena M. Lendínez[1], Francisco Javier García[1] y Tomás A. Sierra[2]

1) Universidad de Jaén, Spain
2) Universidad Complutense de Madrid, Spain

Date of publication: February 24th, 2017
Edition period: February 2017-June 2017

To cite this article: Lendínez, E.M., Garcia, F.J., & Sierra, T.A. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: Un estudio exploratorio del logos de la profesión. *REDIMAT*, *6*(1), 33-55. doi: 10.17583/redimat.2017.2059

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2017.2059

REDIMAT, Vol. 6 No. 1 February 2017 pp. 33-55

Teaching Numbers in Early Childhood Education: An Exploratory Study of the *Logos* of the Profession

Elena M. Lendínez
Universidad de Jaén

Francisco Javier García
Universidad de Jaén

Tomás A. Sierra
Universidad Complutense de Madrid

(*Received: 24 April 2016; Accepted: 3 February 2017; Published: 24 February 2017)*

Abstract

In this paper, two problems converge. On the one hand, the problem of a meaningful teaching of mathematical knowledge. On the other hand, the problem of characterising the praxeological equipment of the teaching profession. We present some results of an exploratory study aiming at identifying important aspects of the praxeological equipment of Early Childhood Education teachers, using as a reference a specific epistemological model of numbers and numbering in the context of discrete magnitudes and measurement. Results suggest difficulties in the interpretation of a mathematical activity focused on the construction of the quantities of magnitude, and which could give rise to a process of praxeological enlargement.

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2059

REDIMAT, Vol. 6 No. 1 Febrero 2017 pp. 33-55

Keywords: Numbers and numbering, early childhood education, praxeological equipment of the profession, Anthropological Theory of the Didactics

La Enseñanza del Número en la Escuela Infantil: Un Estudio Exploratorio del Logos de la Profesión

Elena M. Lendínez
Universidad de Jaén

Francisco Javier García
Universidad de Jaén

Tomás A. Sierra
Universidad Complutense de Madrid

(*Received: 24 Abril 2016; Accepted: 3 Febrero 2017; Published: 24 Febrero 2017)*

Resumen

En este trabajo confluyen dos problemáticas de investigación. Por un lado, la enseñanza con sentido de los conocimientos matemáticos. Por otro, la caracterización del equipamiento praxeológico de la profesión docente. Presentamos algunos resultados de un estudio exploratorio que pretende identificar aspectos importantes del equipamiento praxeológico de la profesión de Maestro/a de Educación Infantil sobre la enseñanza del número (cardinal) y la numeración, tomando como referencia un modelo epistemológico sobre el número y la numeración en el contexto de las magnitudes discretas y su medida. Los resultados sugieren dificultades para interpretar una actividad matemática que parta de tareas centradas en la construcción de las cantidades de magnitud, y que dé lugar a un proceso de ampliación praxeológica.

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2059

REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education Vol. 5 No. 1 February 2016 pp. 28-57

Palabras clave: Número y numeración, educación infantil, equipamiento praexológico de la profesión, teoría antropológica de los didáctico

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2059

La Teoría de la Transposición Didáctica ha permitido poner en evidencia la necesaria transformación y adaptación que sufren los saberes matemáticos en su tránsito entre diferentes instituciones, desde la matemática sabia hasta el saber finalmente aprendido por el estudiante (Bosch y Gascón, 2007). En el caso del número y la numeración, diversos autores han puesto de manifiesto la complejidad de estos conceptos y de su transposición en la Educación Infantil (EI) y comienzos de la Educación Primaria. Así, Lacasta y Wilhelmi (2008) estudian diferentes propuestas para la enseñanza del número en EI, su evolución, y las hipótesis subyacentes, analizando leyes de educación y algunos manuales escolares, e identificando fenómenos como la pervivencia de la *huella conjuntista*, la reducción del campo numérico o la dificultad para dar sentido a ciertos conocimientos numéricos. También a través de un análisis de manuales escolares, García y Sierra (2015) ponen en evidencia la atomización de los tipos de tareas en torno al número y a la numeración en los mismos. Por su parte, Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) describen diversos elementos que caracterizan el significado institucional del número, entendidos como pares de prácticas y configuraciones de objetos y procesos, para explicar así conflictos en el aprendizaje del número y la numeración en términos de la complejidad de los objetos y significados involucrados.

En este artículo seguimos ahondando en el análisis de los procesos transpositivos, en concreto en el tránsito del *saber a enseñar* al *saber enseñado*, pero desde la perspectiva de la profesión docente (Cirade, 2006). Pretendemos explorar aspectos comunes sobre cómo ésta entiende, organiza e interpreta la enseñanza del número y de la numeración en la Escuela Infantil, más allá de las características individuales de los profesionales que llevan a cabo esta enseñanza.

Planteamiento del Problema de Investigación

Este trabajo se sitúa en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), aunque también se apoya en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997). Abordamos la intersección de dos problemas de investigación. El primero está relacionado con la gestión del “sentido” (dentro de la TSD), o de la “razón de ser” (dentro de la TAD) de los conocimientos matemáticos en las instituciones docentes, entendiendo que vienen determinados por el conjunto de situaciones o de cuestiones que generan la necesidad de construir y estudiar dicho conocimiento, que va a surgir como la mejor solución, dotándolo así de una funcionalidad (Gascón, 2013; Chevallard, 2007). El segundo problema es el de la caracterización del equipamiento praxeológico de la profesión docente. Según Bosch y Gascón (2009), desde la TAD se reformula el problema del conocimiento del profesor en términos del conjunto de praxeologías, o de elementos praxeológicos que, bajo ciertas condiciones, éste pone en práctica en su actividad docente. Chevallard (en prensa) considera que es un problema *habitual* y *vital* construir, deconstruir y reconstruir por completo el equipamiento praxeológico de una persona o de una institución, es decir, el conjunto de praxeologías movilizables por una persona o por una institución.

Así, el problema investigación que nos plateamos es el de la caracterización del equipamiento praxeológico de la profesión de *Maestro/a de EI* para una enseñanza con sentido del número y de la numeración. Tomamos la decisión de fijarnos en el carácter institucional y colectivo de este equipamiento praxeológico matemático-didáctico, de forma similar a como Ruiz-Olarría (2015) y Bosch y Gascón (2009) lo hacen para el problema del conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria.

En el tercer apartado formularemos con detalle nuestros objetivos e hipótesis con respecto a este problema. Pero para ello, necesitamos hacer explícito qué se entiende por realizar una *enseñanza con sentido del número y de la numeración*. El método utilizado dentro de la TAD para responder a dicha cuestión consiste en la elaboración de un modelo epistemológico de referencia en torno a dicha organización matemática, que presentamos en el apartado siguiente.

Propuesta de un Modelo Epistemológico de Referencia del Número Natural en la Escuela Infantil

El número natural como concepto matemático no fue formalizado, desde la matemática sabia, hasta el siglo XIX (Deiser, 2010). La formalización propuesta por Cantor, Frege y Russell se fundamenta en la teoría de conjuntos. Desde esta perspectiva, el número se entiende como ese "algo", esa "propiedad respecto a la cantidad" (también denominada propiedad de la numerosidad) que comparten determinados conjuntos finitos, y que se representa por escrito y oralmente mediante un conjunto cultural de símbolos y palabras.

Esta conceptualización del número, si bien toma en consideración tanto los conjuntos como la propiedad de numerosidad de los mismos, entendemos que pone el acento en la segunda, y dice poco respecto a la actividad matemática que conduce a identificar dicha propiedad y a la necesidad de construir representaciones de la misma.

Consideramos que, desde la perspectiva de la EI (tanto en los procesos de enseñanza como en la formación del profesorado), el trabajo sobre colecciones juega un papel fundamental. Es ahí donde puede tener lugar una actividad matemática más *primitiva*, con un carácter limitado, y que es la que justifica la necesidad de elaborar técnicas más complejas para aprehender y comunicar sobre la cualidad de la "numerosidad". De esta forma, se generará un conjunto de tareas, y una evolución de técnicas matemáticas, que podrían dar lugar a una construcción con sentido del número y de la numeración en la EI.

Esta modelización alternativa, que tomaremos como modelo epistemológico de referencia (MER), descrita en García y Sierra (2015), sitúa al número y la numeración dentro del modelo general de las magnitudes y su medida, y concede una especial importancia a la construcción de las *cantidades de magnitud* como germen de la noción de número, que irá surgiendo de manera progresiva, como un proceso de ampliación praxeológica. Este MER se apoya en el MER para las magnitudes lineales propuesto en Sierra (2006), así como en la modelización propuesta por Brousseau (2002). También es consistente, y en cierta forma desarrolla, las aproximaciones descritas en Margolinas y Wozniak (2012) y en Ruiz-Higueras (2005).

Brevemente, el MER parte de la cuestión generatriz inicial:

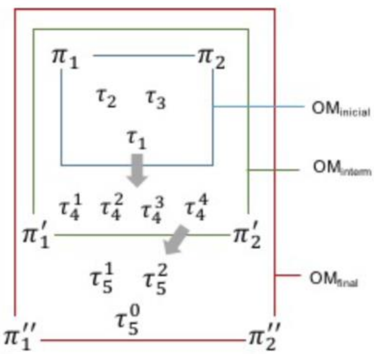
Q: Dada una colección finita, ¿cómo compararla con otra respecto de la *cualidad cantidad*? ¿Cómo construir otra colección que coincida con ella en relación con dicha *cualidad*?

Según las condiciones impuestas sobre las colecciones, surgen distintos tipos de tareas que determinan diferentes organizaciones matemáticas. Así, una primera organización matemática ($OM_{inicial}$) vendrá determinada por los tipos de tareas:

- π_1 : Dadas dos colecciones finitas C_1 y C_2 presentes simultáneamente, manipulables, o al menos accesibles mediante gestos, compararlas atendiendo a la *cualidad cantidad*.
- π_2 : Dada una colección finita C_1, construir otra colección C_2 que sea equipotente a C_1, teniendo a la vista C_1.

Por comodidad, nos referiremos a ellos como problemas de comparar y de construir colecciones, respectivamente. Bajo las condiciones impuestas, dichos tipos de tareas permiten la emergencia de técnicas muy primitivas (marcadas por su carácter manipulativo y/o gestual). Por ejemplo, el establecimiento de una biyección entre ambas colecciones (técnicas τ_1 y τ_2 , ver Tabla 1), bien para comparar, bien para construir la segunda colección a partir de la primera.

Tabla 1.
Modelo epistemológico de referencia: tipos de tareas (π_k) y técnicas (τ_i).



τ_1 : biyección o correspondencia término a término. τ_2 : biyección por pequeñas subcolecciones (dos a dos, tres a tres). τ_3 : estimación visual de la cantidad.
τ_4 : construcción de una colección intermedia, usando la biyección (τ_1). τ_4^1: construcción de una colección intermedia de “objetos” (dedos, fichas, palillos,….). τ_4^2: construcción de una colección intermedia de símbolos (analógicos o icónicos). τ_4^3: construcción de una colección intermedia de palabras, una por elemento (nombrando los elementos, o alguna característica distintiva de ellos, como podría ser el color). τ_4^4: uso de la serie numérica como colección intermedia.
τ_5 : conteo (recitado de la serie de palabras número en orden estable, junto con el *principio cardinal*). τ_5^1: conteo, comunicando oralmente la medida de la colección mediante la última palabra-número recitada. τ_5^2: conteo, comunicando gráficamente la medida de la colección mediante cifras de la última palabra-número recitada.
τ_5^0: medida instantánea de la colección (subitización).

Estas técnicas tienen un alcance muy limitado, lo que se pone de manifiesto cuando es necesario comparar y construir colecciones que están alejadas entre sí, y que no son visibles ni accesibles simultáneamente (tipos de tareas que denotamos como π_1' y π_2' respectivamente). Este cambio en las condiciones materiales de las tareas fuerza la evolución de las técnicas anteriores y genera una organización matemática intermedia (OM_{interm}) que es una ampliación de $OM_{inicial}$.

En la Tabla 1 describimos un conjunto de posibles nuevas técnicas, que utilizan colecciones intermedias construidas por biyección y que suponen la puesta en juego de la propiedad transitiva. Estas colecciones intermedias podrían ser colecciones de *objetos* (τ_4^1), como los dedos de la mano, o de objetos pequeños que actúen a modo de cuentas (fichas, canicas, garbanzos, palillos,…) y que sean transportables. También podrían ser colecciones de símbolos (τ_4^2) como representaciones pictóricas de los elementos que componen la colección, o bien simbólicas, como “palitos”, cruces, círculos, etc. E incluso colecciones de palabras (τ_4^3), por ejemplo, nombrando los objetos de la colección, o alguna cualidad distintiva de los mismos (su color, en caso de que todos tengan color diferente, o el nombre de cada persona, en el caso de que sea una colección de personas) o la serie de palabras-número (τ_4^4). Respecto a esta última, destacamos que incluso un recitado no estable, o desordenado, de palabras-número permite resolver con éxito esta tarea (por ejemplo, un niño que recita “*uno, tres, cuatro, dos*”, señalando los elementos de la primera colección, y que luego vuelve a repetir las mismas cuatro palabras número, en el mismo orden o no, mientras que va cogiendo objetos para construir la segunda colección). Si bien estas técnicas permiten resolver con éxito una versión ampliada de los tipos de problemas iniciales, siguen teniendo aún un alcance bastante limitado, lo que se hace evidente, por ejemplo, cuando se consideran colecciones de mayor tamaño o es necesario realizar una comunicación escrita u oral.

La última ampliación praxeológica, que da lugar a la organización matemática final (OM_{final}), surge cuando imponemos la necesidad de comunicar respecto a la cantidad, que estaba implícita en los tipos π_1' y π_2'. Llamaremos a este tipo de tareas:

- π_1'' : Dadas C_1 y C_2 alejadas y no visibles simultáneamente, es necesario compararlas atendiendo a la *cualidad cantidad* mediante un mensaje escrito u oral.

- π_2'' : Dada C_1, pedir por escrito u oralmente los objetos necesarios para construir otra C_2 que coincida con ella en cantidad, estando C_1 no visible ni accesible cuando se construye C_2.

Las técnicas basadas en el uso de colecciones intermedias de *objetos*, o en el recitado de palabras, permiten resolver con éxito tareas del tipo anterior siempre que hayan sido convenidas entre el emisor y el receptor del mensaje y las colecciones no sean muy grandes. Además, las basadas en símbolos intermedios permiten la comunicación por escrito respecto de la cantidad, siendo el germen de las primeras *numeraciones* que ponen en funcionamiento los niños (Ruiz-Higueras, 2005). Destaca la técnica que usa como colección intermedia la serie de palabras-número, recitadas en orden estable. El carácter cultural de esta serie, y la posibilidad de extenderla tanto como se quiera, hace que la técnica correspondiente sea más fiable, eficaz y económica. Si a dicha técnica se le añade el principio cardinal (τ_5), permite la evolución hacia la técnica del conteo, que emerge como la mejor estrategia en la EI, al permitir dar solución óptima a todos los problemas planteados, mediante el uso de una palabra-número o numeral, y que consideramos como la construcción de una aplicación medida.

Puesto que nuestro análisis se limita a la EI, no desarrollaremos más este MER. No obstante, señalar que Sierra (2006) partiendo de los tipos de tareas anteriores con colecciones cada vez más grandes, elabora un MER sobre los sistemas de numeración que es una continuación del aquí propuesto.

Objetivos, Hipótesis y Metodología

Basado en el MER anterior, el análisis de libros de texto de EI realizado en García y Sierra (2015) revelaba algunos fenómenos transpositivos, como la ausencia de un trabajo centrado en las colecciones (germen de las cantidades de magnitud), la división y atomización de los problemas π_2 , π_2' y π_2'' en tareas aisladas de *medir* (dada una colección expresar su número de elementos) y de *producir* colecciones (dado un número dibujar la colección correspondiente), la ausencia de tareas integradas π_2'', o la ausencia de numeraciones diferentes a la indo-arábiga. Así, las praxeologías didácticas propuestas por los libros de texto suelen dar a la técnica del conteo un papel principal, evitando que ésta surja a partir de la exploración de un campo de problemas. Se adopta una visión aplicacionista (Barquero, Bosch y Gascón, 2014), que dificulta el aprendizaje con sentido del número y de la numeración.

Teniendo en cuenta lo anterior, y en relación con el problema de la caracterización del equipamiento praxeológico de la profesión para una enseñanza con sentido del número y de la numeración, en nuestra investigación nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- O_1: indagar qué papel tiene el trabajo directo sobre cantidades de magnitud, y la construcción de magnitudes discretas, en la actividad matemática en la EI (a través del grado de utilización e importancia que la profesión concede a las tareas π_1 y π_2 , así como de la interpretación que hace de las mismas), llegando a distinguir que el número es la medida de una cantidad;
- O_2: explorar cómo interpreta la profesión las tareas que emergen cuando las π_2 ,π_2' y π_2''se dividen en tareas de *medir* y de *producir colecciones,* y se presentan de forma aislada y sin relación entre ellas (observando el efecto que esta atomización provoca en la gestión del sentido del número y de la numeración en la EI); y,
- O_3: determinar cómo la profesión considera los tipos de tareas que implican la necesidad de medir una colección para producir otra (π_2''), así como de codificar el resultado de dicha medida (analizando cómo interpreta una actividad matemática integrada que permita la puesta en funcionamiento de técnicas más primitivas y su evolución, mostrando cómo la ineficacia de algunas de dichas técnicas hace aparecer otras más eficaces para resolver dichas tareas).

A través de este estudio exploratorio pretendemos avanzar en el contraste de las siguientes hipótesis en relación con el modelo epistemológico y didáctico dominante en la Escuela Infantil:

- H_1: la actividad matemática en esta etapa evita la construcción de las magnitudes discretas, identificando cantidad y número, a través de una introducción directa y prematura del conteo, que se convierte en técnica dominante sin una justificación funcional;
- H_2: para la profesión, la atomización de las tareas escolares en tareas de *medir* y de *producir* pone en riesgo una enseñanza con sentido del número y de la numeración;

- H_3: la pérdida del sentido del número y la numeración que dicha falta de integración causa (según el MER) es transparente para la profesión.

Puesto que el énfasis de nuestro estudio está, sobre todo, en el *logos* didáctico de la profesión, es decir, en la descripción, justificación, explicación que la profesión hace de su práctica didáctica, se ha diseñado un cuestionario estructurado en un conjunto de tipos de tareas propias de la construcción de lo numérico en la EI, junto con una serie de cuestiones referidas a ellas. Inicialmente, preguntamos cómo interpreta la actividad matemática propuesta en dichas tareas. A continuación, les pedimos a los docentes que valoren la importancia de hacer o no este tipo de tareas en la EI (respuesta dicotómica). Y luego, para profundizar más en su *logos* didáctico, formulamos una serie de ítems que tienen por objetivo explorar las razones que explican la importancia dada a dicho tipo de tareas. Todos los ítems se contestan con una escala tipo Likert de cuatro niveles (totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, de acuerdo y completamente de acuerdo).

Dada la riqueza de actividades matemáticas propias de la EI, optamos por elegir dos tipos particulares: las propuestas en libros de texto, por su uso extendido, y las actividades construidas en el marco de la TSD, en concreto, a partir de la situación fundamental del número cardinal (Margolinas y Wozniak, 2012; Ruiz-Higueras, 2005), por su coherencia con nuestro MER.

El primer grupo de actividades se centra en la comparación directa de colecciones (Grupo A, Figura 1). Tienen como finalidad que el alumnado compare, o bien construya, colecciones discretas atendiendo a la cualidad "cantidad", mediante cuantificadores del tipo "más que", "menos que" y "tantos como". Corresponde a tareas del tipo π_1 y π_2 , y se relaciona con el objetivo O_1 y con la hipótesis H_1

Figura 1. Ejemplos de actividades de comparación y medida de colecciones (Grupo A)

El segundo grupo de actividades se basa en la medida de colecciones cercanas y accesibles a la vez (Grupo B, Figura 2). Son situaciones donde se pide aplicar la técnica del conteo para medir colecciones, y se indica que hay que utilizarla al mismo tiempo que se plantea la tarea a resolver. El conteo no surge como la buena técnica para resolver un problema, sino que se presenta como la técnica que hay que aplicar sin más, para resolver un ejercicio.

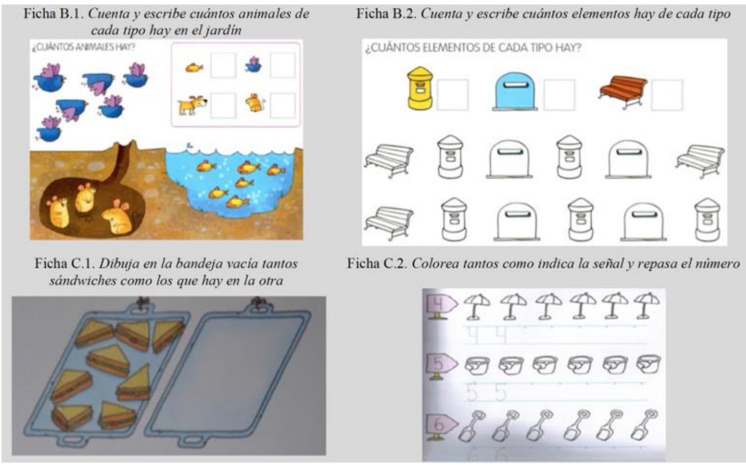


Figura 2. Ejemplos de actividades de medida y producción de colecciones (Grupos B y C)

Finalmente, en el último grupo de actividades, se presenta una *situación didáctica* en la que el problema de construir una colección equipotente a otra dada genera la necesidad de medir y producir colecciones (Grupo D, Figura 3). Se trata de integrar, en una misma situación problemática, las actividades de los Grupos B y C, permitiendo construir con sentido el número cardinal y su designación escrita. Se incluye una secuencia de actividades en la que, en principio, el conteo y la designación escrita del número no son necesarios, pero se hacen imprescindibles conforme las condiciones de la situación van cambiando. Corresponde a las tareas π_2 , π_2' y π_2'' y se vincula con el objetivo O_3 y la hipótesis H_3 de nuestra investigación.

El docente prepara un conjunto de muñecos en una mesa (Imagen 1) y un conjunto de sombreros en una cada (Imagen 2). Hay siempre más sombreros que muñecos. Los estudiantes tendrán que construir un conjunto de sombreros, a partir de los que ha preparado el docente, de manera que hay un sombrero, y sólo uno, para cada muñeco (esto es, que los conjuntos de muñecos y de sombreros sean iguales en cantidad).

Imagen 1. Conjunto de muñecos

Imagen 2. Conjunto de sombreros

Imagen 3. Cada muñeco con su sombrero

Cuando hayan construido el conjunto de sombreros, los estudiantes serán responsables de comprobar si su respuesta es correcta, poniendo un sombrero sobre la cabeza de cada muñeco (Imagen 3). Eventualmente, si faltan o sobran sombreros (respuesta incorrecta), el docente dará a los niños una nueva oportunidad.

Figura 3. Ejemplo de actividad que integra la medida y la producción de colecciones (Grupo D)

Los cuestionarios han sido administrados a una muestra de 103 maestras (96%) y maestros (4%) de 2º ciclo de Educación Infantil, principalmente en Jaén y Madrid, por la cercanía con el equipo investigador. Se seleccionaron centros en ambas zonas (el 56% eran públicos, el 41% eran concertados y el 3% eran privados), sin vinculación con el equipo investigador. Las edades de los encuestados estaban comprendidas entre los 25 y 65 años. El 75% manifestó que su formación inicial fue en la especialidad de EI, aunque todos impartían docencia en dicha etapa en el momento de la encuesta. Su experiencia docente oscilaba entre los 1 y los 5 años (18%), los 6 y los 10 (19 %), los 11 y los 15 (25%) y más de 15 años (38%). Asimismo, en cuanto al uso de los libros de texto para la enseñanza de las matemáticas, el profesorado manifestó que los utilizaba “nada” (8%), “poco” (59%) y “mucho” (33%).

Análisis y Discusión de las Respuestas a los Cuestionarios

El cuestionario tiene un carácter exploratorio, no determinista, ni estadísticamente significativo (por la construcción del cuestionario y por la determinación de la muestra). No obstante, consideramos que las respuestas son valiosas porque nos permiten inferir algunos rasgos esenciales del modelo epistemológico y didáctico dominante en relación con la construcción del número cardinal, avanzar en la caracterización del mismo, y arrojar luz sobre cómo continuar nuestra investigación.

Ítems Relacionados con las Actividades de Comparación de Colecciones (Grupo A)

Desde la perspectiva de nuestro MER, estas actividades juegan un papel importante en la construcción de la magnitud y de las “cantidades de magnitud”. Se trata de una actividad matemática que se realiza directamente sobre los “objetos soporte” que definen la magnitud, asociada con técnicas muy primitivas y de alcance muy limitado. Esto dará lugar, más adelante, a la necesidad de avanzar hacia la construcción de la aplicación medida (conteo). A través de los ítems incluidos en el cuestionario nos interesaba indagar hasta qué punto actividades de este tipo se interpretan de esta forma dentro de la profesión (relación con la hipótesis H_1).

En primer lugar, preguntamos al profesorado si los niños tenían que contar, y si tenían que asignar un número a cada colección (aquí no se especificaba si por conteo o a través de otra técnica). El 57% de los encuestados está de acuerdo o completamente de acuerdo con la necesidad de usar el conteo. Un 41% está de acuerdo o completamente de acuerdo en la necesidad de asignar una medida (número) a cada colección. Ambos resultados indican que, en gran parte, se interpreta que es necesario medir para comparar, lo que apunta en la dirección de H_1.

Para profundizar en su *logos*, les pedimos que valorasen la importancia de este tipo de actividades en la EI. En concreto, para los que formulaban que "sí era importante", nos interesaba indagar si consideraban que lo era como parte del proceso de construcción de las cantidades de magnitud discreta. Por su parte, para los que las valoraban como "no importantes", queríamos averiguar si era porque consideraban que previamente los niños debían conocer el conteo y la asignación de un número a una colección, y por tanto este tipo de actividades se percibían como de mera aplicación de algo ya enseñado.

El 58% del profesorado considera que "son importantes", situándose mayoritariamente de acuerdo o completamente de acuerdo en que: son actividades eficaces para aprender a comparar (92%), y son actividades de tipo pre-numérico, que preparan a los niños para el aprendizaje posterior del número (92%). Sin embargo, preguntados sobre si estas actividades permiten a los niños acercarse a la idea de cantidad en su proceso de aprendizaje del número, los resultados no son tan contundentes (65%).

Entre el 42% que considera que estas actividades "no son importantes", de nuevo aparece la división observada en los primeros ítems. Así, la mitad de los encuestados está de acuerdo o completamente de acuerdo en que primero se debe explicar a los niños cómo comparar colecciones, para que luego lo apliquen, mientras que la otra mitad está en desacuerdo o totalmente en desacuerdo con esta interpretación. De igual forma, el 45% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que son actividades en las que los niños tienen que usar el conteo, mientras que el 55% está en desacuerdo o totalmente en desacuerdo al respecto.

En conjunto, las respuestas muestran una interpretación dispar, incluso contradictoria, de este tipo de actividades por parte de la profesión, y nos indican que es necesario profundizar más en su *logos* acerca de la importancia que se le da al trabajo directo sobre las colecciones como parte de la construcción de la magnitud, y como germen del sentido del número natural (cardinal) y de la aplicación medida (conteo). Aunque estas actividades se pueden resolver eficazmente a través del conteo, y por tanto no es de extrañar que algunas respuestas se orienten en esta dirección, la verdadera necesidad de construir la magnitud discreta y sus cantidades debería dirigir la actividad matemática de los alumnos más hacia un trabajo directo sobre las colecciones como objetos "soporte" de la magnitud discreta para, a partir de ello, poder llegar hasta el conteo. El hecho de que una parte importante del profesorado (57%) considere que es necesario usar el conteo y asignar un número a cada colección, implicaría que la técnica del conteo, y la asignación de una medida a una colección, ya deben formar parte del repertorio matemático de los niños, y que, por tanto, han tenido que ser enseñados con antelación. Ello convierte este tipo de actividades en meros ejercicios de aplicación de una técnica ya conocida por los niños y no en situaciones generadoras de sentido que permitan la construcción de dicha técnica por los propios alumnos (H_1). Esto explicaría, en parte, que un porcentaje significativo del profesorado (42%) interprete que no es importante realizar este tipo de tareas en la EI, ya que en realidad no considera que sea necesaria la construcción de las magnitudes discretas.

Ítems Relacionados con las Actividades de Medida (Grupo B) y Producción (Grupo C) de Colecciones

Los libros de texto de EI tienden a fragmentar la actividad matemática a la que dan lugar problemas del tipo π_2 , π'_2 y π''_2 en dos clases de tareas aisladas: por un lado, tareas sólo de *medir* colecciones y, por otro lado, tareas sólo de *producir* colecciones a partir una medida dada. Además, las colecciones siempre están cercanas al niño y son accesibles a la vez (García y Sierra, 2015). Según nuestro MER, el sentido del número como medida (cardinal) emerge de tareas del tipo π_2 y π'_2, en las que se integra la medida y la producción de colecciones. Además, la necesidad de designar la cantidad para poder comunicar a otros la medida de una colección dada (π''_2) y así poder producir otra, es la que da sentido a la numeración (Ruiz-Higueras, 2005). A través de los ítems incluidos en estos dos bloques del cuestionario, pretendemos explorar cómo el profesorado interpreta la construcción del sentido del número y la numeración cuando se presentan actividades de *medir* y de *producir* de forma atomizada (relación con H_2).

En el caso de actividades de *medir* colecciones (Grupo B), la realización con éxito de las mismas requiere que el niño ya tenga construida una técnica de medida (el conteo, principalmente), así como una forma de codificar el resultado de esta medida (los numerales). El 76% indica estar de acuerdo o completamente de acuerdo en que antes de proponer este tipo de actividades es necesario que el niño haya aprendido a reconocer y escribir los numerales, y el 82% está de acuerdo o completamente de acuerdo en la necesidad de saber contar, para aplicarlo luego en estas fichas. Asimismo, el 75% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que el objetivo de estas fichas es que los niños aprendan a contar y a medir colecciones. En consecuencia, mayoritariamente la profesión interpreta estas actividades como de aplicación de técnicas (conteo) y de objetos matemáticos (numerales escritos) ya aprendidos.

Asimismo, conforme a nuestro MER, tratamos de examinar si el profesorado considera que este carácter aplicacionista puede poner en riesgo la construcción del sentido del número y la numeración. Como en el caso del Grupo A, evaluamos el grado de importancia que el profesorado otorga a la realización de este tipo de actividades, así como las razones que justifican su decisión.

Para el 58% que formulaba que "sí es importante", deseábamos explorar si lo era porque las consideraban como generadoras del sentido del número y la numeración, según lo descrito previamente. Los resultados indican que, en efecto, la mayoría considera que este tipo de situaciones son útiles para construir con sentido estos objetos matemáticos. Así, el profesorado está de acuerdo o completamente de acuerdo en que permiten a los niños aprender y experimentar que el número es una herramienta para cuantificar colecciones (92%), aprender que el conteo es la mejor estrategia para medir una colección (77%), aprender que el uso de los numerales es la mejor solución para comunicar a otros sobre la cantidad (87%), e incluso que son situaciones problemáticas en las que el conteo y el uso de numerales aparecen como la mejor solución posible (83%), y que permiten poner en práctica y afianzar el dominio del conteo (95%). Estos datos apuntan en la dirección de H_2, y nos confirman que, para una buena parte de la profesión docente, la pérdida del sentido de los conocimientos numéricos que se produce es transparente (H_3).

Por otro lado, para el 42% que considera que "no es importante", deseábamos indagar si no lo era porque no las consideraban útiles para construir con sentido el número y la numeración. En este caso, la gran mayoría del profesorado se muestra de acuerdo o completamente de acuerdo en que: estas actividades son de aplicación del conteo, que ha tenido que ser enseñado antes (89%); la necesidad de cuantificar (91%) y de codificar (94%) la medida viene impuesta por la ficha, y no por la resolución de un verdadero problema; los niños no tendrán éxito si antes no se les ha enseñado cómo escribir las cifras (87%); y no permiten la construcción de técnicas diferentes del conteo, ni del uso de numeraciones icónicas (Ruiz-Higueras, 2005) y su evolución (87%).

Así, se observa una división en la valoración e interpretación de este tipo de actividades. Postulamos la existencia de un conflicto en torno a cómo la profesión interpreta la construcción con sentido del número y la numeración, pues algo más de la mitad considera que, al ser de aplicación del conteo, y al mostrar una función del número y de la numeración (función cardinal) como medida de una colección, son eficaces para que los niños construyan estos objetos matemáticos con sentido (en línea con H_2), mientras que algo menos de la mitad considera todo lo contrario: son de aplicación del conteo y de la escritura de los numerales, técnicas y objetos que han tenido que ser ya enseñados, que no plantean un verdadero problema, ni posibilitan la evolución de la actividad matemática en la EI.

Con relación a las actividades de *producir* colecciones (Grupo C), proponemos dos variantes: tareas en las que hay que producir una colección de igual medida que otra dada (Figura 2, ficha C.1) y tareas en las que hay que producir una colección dada una medida (Figura 2, ficha C.2). La razón es que las primeras, como las del Grupo A, permiten una actividad matemática directa sobre las colecciones, asociada con técnicas primitivas de carácter manipulativo y/o gestual, cuyas limitaciones podrían dar lugar a la necesidad de construir técnicas más avanzadas, mientras que la actividad matemática de las segundas casi se limita a la aplicación del conteo.

El 70% del profesorado está de acuerdo o completamente de acuerdo en que son tareas en las que los niños aprenden a construir una colección con una determinada medida. En un porcentaje muy similar, están de acuerdo o completamente de acuerdo en que estas actividades de *producir*, son portadoras de *sentido*, de acuerdo con H_2. Además, aún en los casos del tipo C.1, un 35% manifiesta estar de acuerdo o completamente de acuerdo en que para tener éxito en fichas de este tipo es necesario contar, indicador claro de la ausencia de un trabajo directo sobre las cantidades de magnitud sin necesidad del conteo, recogido en la hipótesis H_1.

En el caso de las fichas del tipo C.2, dicho porcentaje, como es de esperar, sube hasta el 77%. El 60% considera que “sí es importante” hacer tareas de este tipo, frente al 40% que considera que no. Profundizando en su *logos*, los que contestan que sí es importante, se muestran de acuerdo o completamente de acuerdo en que: son útiles para aprender que a través del número se puede expresar tanto la medida de la colección dada (C_1) como la de la colección (C_2) que hay que producir (90%), así como que el conteo permite producir esta segunda colección (80%). Sin embargo, de nuevo aparece cierta contradicción entre estos resultados y los obtenidos al preguntarles por las tareas del tipo C.1, pues, en tal caso, el 99% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que los niños pueden resolverlas sin necesidad del conteo. Incluso un 90% se muestra de acuerdo o completamente de acuerdo con que estas fichas permiten poner en funcionamiento otras técnicas diferentes a la del conteo y su evolución.

Respecto al 40% que considera que “no es importante” hacer este tipo de actividades, el 75% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que son de mera aplicación del conteo (sin distinguir entre las C.1 y las C.2), mientras que el 80% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que no plantean verdaderos problemas, al no generar la necesidad de tener que construir una colección de igual medida que otro. Así, el 70% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que el hecho de tener ambas colecciones cercanas y accesibles hace que la realización de emparejamientos (biyecciones) sea trivial, e incluso que el conteo se impone como técnica dominante sin que se dé lugar a que surja como la óptima entre otras posibles, y que tareas de este tipo no permiten cuestionar el alcance y la validez de otras técnicas.

En resumen, las respuestas a los ítems del Grupo C (producción de colecciones) vuelven a señalar el papel central del conteo en la actividad matemática infantil (H_1). Incluso para tareas del tipo C.1, donde no es imprescindible, un porcentaje nada despreciable lo considera necesario. También muestra, como en los grupos anteriores, una división bastante equitativa en el *logos* del profesorado y en su interpretación de la construcción con sentido de los conocimientos matemáticos. Así, algo más de la mitad considera que sí se deben usar porque son útiles para mostrar una función del número y del conteo (H_2), aunque también permiten, en el caso de C.1, trabajar directamente sobre las colecciones y la aparición de otras técnicas y su evolución (cierto reconocimiento del trabajo matemático previo al conteo, en contra de H_1). En contraste, algo menos de la mitad considera que no son importantes precisamente por ser de aplicación del conteo y no plantear verdaderos problemas ante los que los niños puedan probar el alcance de sus técnicas, y hacerlas evolucionar. En este punto, si bien no obtenemos un resultado rotundo en relación con nuestras hipótesis, es relevante señalar que algo más de la mitad considere que se puede gestionar el sentido del número cardinal en la EI trabajando sobre tareas aisladas de *medir* y *producir*.

Interpretando de forma integrada las respuestas a los ítems de los grupos B y C, postulamos que esta división y amalgama de respuestas se debe, en gran medida, a la separación y el aislamiento de las tareas de *medir* y de *producir* (H_2), incrementada por las características materiales de las tareas propuestas (fichas impresas, colecciones fijas, próximas entre sí y accesibles a la vez). Según nuestro MER, este tipo de actividades no genera un campo de problemas lo suficientemente rico que permita a los niños elaborar técnicas primitivas, valorar su idoneidad, experimentar sus limitaciones, y generar así la necesidad de construir otras más eficaces. De este modo, podemos considerarlas actividades de aplicación de técnicas ya conocidas por los alumnos, pero no de una construcción con sentido de conocimientos.

Ítems Relacionados con las Actividades en las que el Problema de Construir una Colección Equipotente a Otra Genera la Necesidad de Medir y Producir Colecciones (Grupo D)

Según nuestro MER, las actividades del Grupo D permiten la construcción con sentido del número y la numeración, al integrar tareas de *medir* y *producir*, propiciando el aprendizaje significativo del número cardinal y la numeración escrita u oral. Partiendo de la situación descrita en la Figura 3, proponemos una secuencia de tres actividades tipo en las que, si bien el conteo no es imprescindible al comienzo de las mismas, tras la modificación de las variables didácticas llega a convertirse en la estrategia óptima para la resolución del problema. Brevemente, en la actividad 1, ambas colecciones están cercanas y accesibles simultáneamente, mientras que en las actividades 2 y 3 estas colecciones están alejadas, de forma que cuando el niño produce la segunda colección, no puede ver la primera. Esto provoca la necesidad de medir la primera colección, para así poder producir la segunda. Además, en el caso de la actividad 3, los niños deben pedir por escrito u oralmente la segunda colección, lo que genera la necesidad de usar códigos o palabras que representen la medida de la primera colección, dando así sentido a la construcción y uso de numeraciones (Ruiz-Higueras, 2005).

Por limitaciones de espacio, llevaremos a cabo un análisis transversal de las repuestas dadas al conjunto de ítems del Grupo D de actividades. En primer lugar, deseábamos indagar si los docentes interpretan este tipo de situaciones como generadoras de sentido, así como el papel que asignan al conteo y a otras técnicas para la realización con éxito de las mismas. Con porcentajes superiores al 90%, el profesorado está de acuerdo o completamente de acuerdo en que situaciones de este tipo permiten a los niños aprender que el número es una herramienta útil para conocer y expresar la medida de una colección, así como para producir otro. Respecto al papel del conteo, el 80% está en desacuerdo o totalmente en desacuerdo en que sea necesario para resolver las actividades del tipo 1, porcentajes que bajan al 67% y al 51% en el caso de actividades del tipo 2 y 3. Además, en el caso de la actividad 3, casi la mitad está en desacuerdo o totalmente en desacuerdo en que los niños hayan tenido que aprender previamente los numerales indo-arábigos. Estos resultados indican que la profesión interpreta este tipo de situaciones como portadoras de sentido del número y de la numeración que permiten la emergencia de otro tipo de técnicas para medir y producir colecciones, y de otras numeraciones diferentes a la indo-arábiga para el caso de la actividad 3. No obstante, para las actividades 2 y 3, el porcentaje de profesores que no considera necesario el conteo es alto, sabiendo que, cuando no se puede *conseguir* por biyección la primera colección, no hay otra alternativa que no sea medirla para poder producir la segunda.

Respecto a la importancia de este tipo de actividades, en contraste con las basadas en fichas, casi el 100% del profesorado considera que son muy importantes. Sin embargo, continúa la tensión entre el uso de técnicas de trabajo directas sobre las colecciones (como la biyección) o el uso del conteo. Así, en el caso de la actividad 1, en la que el conteo no es necesario, el profesorado está de acuerdo o completamente de acuerdo en que este tipo de situación permite trabajar sobre las colecciones por comparación directa, sin necesidad de usar el número y el conteo (100%), y que en estas actividades los niños encuentran oportunidades para poner en funcionamiento técnicas no basadas en el conteo (99%). Sin embargo, el 78% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que a través de las mismas los niños aprenden que contando se puede construir una colección equipotente a otra. Así, aunque destacan el potencial de las tareas para usar técnicas “previas” al conteo (según nuestro MER), no obstante, siguen dando un papel fundamental a éste, resultado que de nuevo vinculamos con rasgos importantes del modelo dominante recogidos en H_1. Respecto a la actividad 2, los porcentajes son muy similares, si bien ahora sí es cierto que fracasan las técnicas de trabajo directo sobre las colecciones, y que el conteo aparece como la estrategia óptima (i.e, ahora el conteo sí llegaría a ser necesario). En cuanto a la actividad 3, un elevado porcentaje está de acuerdo o completamente de acuerdo en que, en este tipo de situaciones, los niños encuentran sentido y utilidad a las designaciones escritas (94%) y orales (97%) del número. El 70% lo está en que los niños descubren que si no existiesen estas designaciones no se podría resolver con éxito la tarea. Asimismo, prácticamente el 100% está de acuerdo o completamente de acuerdo en que permiten la emergencia de numeraciones icónicas, y no sólo el uso de los numerales indo-arábigos, permitiendo así a los niños experimentar que hay diferentes formas de comunicar respecto a la cantidad.

En resumen, el profesorado valora estas actividades como generadoras de sentido del número y de la numeración, pues considera que plantean verdaderos problemas para los que estos objetos aparecen como las estrategias óptimas. Sin embargo, señalamos que: (a) se sigue observando ambigüedad en el papel del conteo en el proceso de construcción de significados numéricos (H_1) y (b) que los datos no presentan un fuerte contraste, en cuanto a la gestión del sentido, cuando se les pregunta por actividades aisladas (tipo B y C) o integradas (tipo D), lo que sin duda apunta en la dirección de la H_3 (la construcción con sentido de lo numérico aparece como transparente para la profesión).

Conclusiones

Mediante este estudio exploratorio, que habrá que seguir analizando, hemos podido identificar algunos rasgos importantes del equipamiento praxeológico de la profesión de *Maestro/a de Educación Infantil*. Pero, sobre todo, ha arrojado importantes vías en las que profundizar.

En relación con el trabajo directo sobre las colecciones (objetivo O_1), es necesario ahondar más sobre si estas actividades sirven como germen de las magnitudes discretas. El papel destacado que se le da al conteo indica que estas tareas se entienden más como tareas en las que usar la aplicación medida (conteo) que como de construcción de magnitudes discretas, en línea con H_1. Incluso entre los que consideran que en estas tareas no es necesario usar el conteo, no es evidente que esto sea porque haya una intencionalidad en construir y trabajar sobre las cantidades de magnitud discretas.

Respecto a la interpretación de las tareas aisladas de *medir* y *producir* colecciones (objetivo O_2), detectamos que una parte importante de la profesión las considera como generadoras del sentido del número y de la numeración. Esto es, que considera que la realización de tareas aisladas, restringidas a una única técnica, que ya ha sido puesta a disposición de los niños para su aplicación, es suficiente para gestionar el sentido de los conocimientos matemáticos en la Escuela Infantil. Aun siendo conscientes de la ausencia de significatividad estadística de estos datos, sin duda los mismos apuntan en la dirección de H_2.

Estos resultados adquieren más significado cuando se comparan con la interpretación que el profesorado hace de las tareas integradas de *medir* y *producir* colecciones (objetivo 3). En este caso, la mayoría las interpreta como portadoras de sentido, de forma muy similar a las anteriores, lo que consideramos como manifestación de un fenómeno de transparencia en la construcción del sentido, descrita en H_3.

En conjunto, estos resultados son consistentes con nuestras hipótesis, con la complejidad del número y de la numeración expresada en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011), pero también con algunos de los fenómenos traspositivos descritos en Lacasta y Wilhelmi (2008). Los resultados señalan en la dirección de una potencial dificultad de la profesión para distinguir entre tareas de *construcción del sentido* de los conocimientos matemáticos frente a tareas de *aplicación* de conocimientos ya adquiridos. La posible identificación de esta dificultad a la que este estudio exploratorio ya apunta (que puede también existir en otras etapas y en relación con otros conocimientos matemáticos) consideramos que es relevante para el diseño de propuestas de formación inicial y continua del profesorado. Por ello, en las siguientes etapas de nuestra investigación pretendemos:

a) indagar más en logos de la profesión en relación con la construcción de lo numérico, desde una perspectiva más cualitativa y de estudio de casos (entrevistas individuales semiestructuradas y/o grupos de discusión), que nos permita entender la complejidad del equipamiento praxeológico de la profesión;
b) elaborar, experimentar y evaluar dispositivos de formación inicial y continua, que posibiliten el desarrollo del equipamiento praxeológico de la profesión en un sentido diferente (en particular, el dispositivo conocido como el "estudio japonés de clases" (Shimizu, 2014), por su potencial para vincular el *logos* con la *praxis* de la profesión).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto EDU2012-39312-C03-02 del Plan Nacional de I+D+I (Ministerio de Economía y Competitividad) y del contrato predoctoral para la formación de profesorado universitario FPU014/06496 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte).

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 83-100.

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.),

Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.
Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970 - 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarite obligatoire. En J. L. Dorier y otros (Eds.), *Actes de la XIème École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 331-348). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.
Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP, 471,* 439-461.
Chevallard, Y. (en prensa). *L'avenir de la recherche en TAD.* Conferencia impartida en el IV Congreso internacional de la TAD en Toulouse.
Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Tesis doctoral. Université de Aix-Marseille I.
Deiser, O. (2010). On the development of the notion of a cardinal number. *History and Philosophy of Logic*, *31*, 123-143. doi: 10.1080/01445340903545904
García, F.J. y Sierra, T.Á. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 299-307). Alicante: SEIEM.
Gascón J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3*, 69-87
Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 247-265. doi: 10.1007/s10649-010-9278-x

Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.

Margolinas, C. y Wozniak F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruselas: De Boeck.

Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 181-219). Madrid: Pearson.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid.

Shimizu, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). Dordrecht: Springer Netherlands.

Sierra, T. Á. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Elena M. Lendínez es investigadora predoctoral de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Jaén, España.

Francisco Javier García es profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Jaén, España.

Tomás A. Sierra es profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, España.

Dirección de Contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: Campus Las Lagunillas, s/n, Edificio de Humanidades y Ciencias de la Educación I (D2), D2-343, Jaén (España). **Email**: fjgarcia@ujaen.es , elmunoz@ujaen.es y tomass@edu.ucm.es