



Instructions for authors, subscriptions and further details:

<http://redimat.hipatiapress.com>

**Desarrollo Profesional de Profesores de Matemáticas en la Modalidad en Línea y a Distancia. El caso de un Curso para el Diseño de Actividades Didácticas**

Avenilde Romo Vázquez<sup>1</sup> y Olda Nadinne Covián Chávez<sup>1</sup>

1) Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, México

Date of publication: February 24<sup>th</sup>, 2017

Edition period: February 2017-June 2017

---

**To cite this article:** Romo, A. and Covián, O.N. (2018). Desarrollo profesional de profesores de matemáticas en la modalidad en línea y a distancia. El caso de un curso para el diseño de actividades didácticas. *REDIMAT*, 7(1), 69-92. doi: [10.17583/redimat.2018.2016](https://doi.org/10.17583/redimat.2018.2016)

**To link this article:** <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2018.2016>

---

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (CC-BY).

# **Professional Development of Mathematics Teachers in the Online Mode. The Case of a Course for the Design of Didactical Activities**

Avenilde Romo  
*CICATA-IPN*

Olda N. Covián  
*CICATA-IPN*

*(Received: 20 March 2016; Accepted: 06 October 2017; Published: 24 February 2018)*

## **Abstract**

---

In this article we present a teaching unit (UT) in a professional development program for mathematics teachers in the Online mode of the CICATA-IPN, Mexico. The objective is to provide theoretical and methodological tools for teachers for them to design learning activities that involve contexts of life and school contexts. Theoretical and methodological elements of the Theory Anthropological of Didactic (TAD) and the principles of effectiveness of Online programs (Scott and Scott, 2010) are considered for design the UT as well as to analyze the didactic designs made by teachers. One of the main results is that the tasks in the designs proposals involve technical and justifications, mathematics and practices, which modify the role of teachers and students.

---

**Keywords:** Professional development, teaching unit, didactics designs



# **Desarrollo Profesional de Profesores de Matemáticas en la Modalidad en Línea y a Distancia. El caso de un Curso para el Diseño de Actividades Didácticas**

Avenilde Romo  
CICATA-IPN

Olda N. Covián  
CICATA-IPN

*(Recibido: 20 Marzo 2016; Aceptado: 06 Octubre 2017; Publicado: 24 Febrero 2018)*

## **Resumen**

---

En este artículo se presenta una Unidad de Enseñanza (UE) de un programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ejercicio en la modalidad en línea y a distancia, del CICATA-IPN, México. El objetivo de la UE es proveer de herramientas teóricas y metodológicas a los profesores para el diseño de actividades didácticas, que involucren contextos de la vida y contextos escolares. Elementos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) así como los principios de eficacia de los programas en línea y a distancia propuestos por Scott y Scott (2010) son considerados tanto para el diseño de la UE como para analizar los diseños didácticos elaborados por los profesores. Uno de los principales resultados es que las tareas propuestas en los diseños involucran técnicas y justificaciones, matemáticas y prácticas, las cuales modifican principalmente el rol de los profesores y estudiantes en la resolución de las actividades.

---

**Palabras clave:** Desarrollo profesional, unidad de enseñanza, diseños didácticos

La evolución tecnológica ha sido vertiginosa en los últimos años, los programas computacionales están en casi todos los ámbitos y la forma de enfrentar las tareas matemáticas ha sido profundamente modificada. Los saberes matemáticos parecen haber sido desplazados por la habilidad para manipular aplicaciones que permiten hacer cálculos complicados, producir múltiples representaciones, tratar millones de datos a través de algoritmos, simular estructuras, optimizar formas, etc. Esto lleva a cuestionar si la enseñanza de las matemáticas puede seguir centrándose en definiciones y conceptos, relegando la interpretación de gráficas, expresiones analíticas, modelos matemáticos y resultados.

En el ámbito educativo internacional se ha evidenciado la necesidad de favorecer aprendizajes útiles para todos y a lo largo de la vida (UNESCO, 2014), lo que implica generar un cambio en el paradigma educativo. Este cambio, no puede hacerse sin los profesores, que como señala Artigue (2011) “constituyen el elemento clave de toda reforma duradera y estable”. En este sentido, Helleve (2010) señala que los programas de desarrollo profesional docente deben fomentar en los profesores y en los formadores la posibilidad de iniciar nuevas actividades y experiencias de aprendizaje, combinadas con un proceso colaborativo de aportaciones que permita la retroalimentación con sus colegas y “expertos” en la investigación. Atendiendo a esta necesidad hemos desarrollado una investigación cuyo objetivo principal es generar dispositivos de desarrollo profesional, como es un curso de maestría, en la modalidad en línea y a distancia para profesores de matemáticas en servicio. En este artículo presentamos uno de ellos, la Unidad de Enseñanza (UE, en adelante) diseñada e implementada en el programa de maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), la cual siguió tres objetivos: sensibilizar a los profesores de la necesidad de analizar contextos “de la vida” (no escolares) para conocer las matemáticas que ahí tienen lugar; presentar a los profesores herramientas teóricas y metodológicas que posibilitan el análisis de estos contextos y la manera de relacionarlos con las matemáticas escolares, y dotar a los profesores de herramientas para el diseño e implementación de actividades didácticas que relacionen las matemáticas “de la vida” con las escolares.

El diseño de la UE se apoya en resultados de investigaciones que han caracterizado las necesidades y especificidades de las matemáticas en contextos de la vida, de niños trabajadores (Padilla, 2015; Solares, 2012), de ingenieros en la industria cervecera (Tolentino, 2015) y de culturas ancestrales

(Covián y Romo-Vázquez, 2014). Estos trabajos muestran cómo la proporcionalidad, el sistema de pesaje, el principio de Pareto y la inclinación del techo (pendiente de la recta) están determinados por las condiciones de uso y las características contextuales. Asimismo, en dichos trabajos se han cuestionado y reflexionado el rol de la enseñanza matemática y las posibles formas de vincular escuela y “vida”. Para analizar cómo esta vinculación puede generarse y difundirse en una UE de desarrollo profesional para profesores de matemáticas, consideramos herramientas teóricas y metodológicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD en adelante), principalmente el modelo praxeológico (Castela y Romo, 2011) y los seis principios de la efectividad de los programas en línea y a distancia de formación del profesorado (Scott y Scott, 2010).

Este artículo tiene seis secciones, la primera está dedicada a las consideraciones teóricas, la segunda a la metodología para el diseño y aplicación de la UE, la tercera al diseño de la UE, la cuarta a la descripción de las actividades que conforman la UE, la quinta al análisis del diseño de actividades didácticas por parte de los profesores y finalmente la sexta a reflexiones y conclusiones que se desprenden de este trabajo.

### Consideraciones Teóricas

La TAD provee de un modelo para el estudio de la actividad humana, incluidas la actividad matemática escolar y de la vida, en su dimensión institucional. La praxeología es la unidad mínima de análisis [ $T, \tau, \theta, \Theta$ ] y consiste en realizar una tarea  $t$  de un cierto tipo  $T$  mediante una técnica  $\tau$  -manera de hacer-, justificada por una tecnología  $\theta$  que al mismo tiempo permite pensarla, incluso producirla y que en su momento es justificable por una teoría  $\Theta$  (Chevallard, 1999). Esta noción ha sido ampliamente utilizada para dar cuenta de la actividad matemática de los estudiantes y de los profesores en la escuela, lo que muestra un paradigma educativo dominante “marcado” por la exposición sucesiva de praxeologías puntuales (una tarea, una técnica, una tecnología) sin construir un bloque tecnológico para un conjunto de técnicas que permita resolver varias tareas. En contraparte, se propone el paradigma del *cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013) basado en el estudio de cuestiones “cruciales” para cierta sociedad. ¿Cómo modelar una epidemia? ¿Cómo generar una previsión de ventas? ¿Cómo separar señales eléctricas cerebrales de las no cerebrales –musculares por

ejemplo- para favorecer el diagnóstico de la epilepsia? Así, un elemento clave es determinar las cuestiones cruciales para cierta institución de enseñanza.

En esta investigación se propone el análisis de contextos de “la vida”, en particular el topográfico, como una vía para identificar dichas cuestiones. El análisis de contextos topográficos permite elucidar cuestiones asociadas al cálculo de área, ¿cómo calcular el área de la ciudad de México? ¿Cómo delimitar el terreno para la construcción de una escuela? Determinar la pertinencia del estudio de estas cuestiones en la enseñanza de las matemáticas, requiere de un análisis didáctico y ecológico más amplio que involucre diferentes actores del proceso de enseñanza y en particular, al profesor de matemáticas en formación. La formación del profesorado, dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo, consiste en atender las cuestiones cruciales que enfrentan los profesores en su práctica docente (Ruiz-Olarría, 2015). Para ello, se propone generar dispositivos de formación que posibiliten la construcción de “respuestas satisfactorias” (en forma de praxeologías) a dichas cuestiones. En este sentido, la pregunta que identificamos como “crucial” en la práctica docente es, ¿cómo generar actividades didácticas que vinculen contextos de la vida con contextos de enseñanza? Más precisamente, ¿cómo generar una praxeología mixta que relacione topografía (“contexto de la vida”)  $P_v$  y matemáticas  $P_m$ ? Y, ¿cómo generar una primera organización didáctica (OD) para que la praxeología mixta figure en la clase de matemáticas? Para abordar estas cuestiones, se consideran primeramente los niveles praxeológicos, que permiten determinar el nivel de praxeologías matemáticas y topográficas necesario para generar una praxeología mixta que relacione estas dos. Enseguida, se presentan las funciones didácticas mesogénesis, topogénesis y cronogénesis, para analizar el potencial didáctico de la OD susceptible de ser implementadas en la clase de matemáticas.

### Niveles y Relaciones Praxeológicos

En Chevallard (2002) se presenta una estructuración de las praxeologías matemáticas (Organizaciones Matemáticas OM) a diferentes niveles, puntual, local, regional y global. Esto permite mirar la disciplina matemática como un anidamiento praxeológico en niveles de complejidad creciente. Aquí presentamos los niveles más elementales, puntual y local:

- *Praxeologías puntuales*, están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas  $T$ . Esta noción es relativa a

la institución considerada y está definida, en principio, a partir del bloque práctico-técnico  $[T/\tau]$ .

- *Praxeologías locales*, son el resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología  $\theta$ , que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.

Una praxeología puntual constituye la mínima actividad matemática que puede desarrollarse, resolver tareas de un sólo tipo. Enseñar o estudiar praxeologías puntuales implica tener una mirada “parcelada” de las matemáticas. En contraparte, una praxeología local ofrece las condiciones para estudiar un tema matemático, disponer de varias técnicas para resolver tareas de cierto tipo y construir saberes que sustentan dichas técnicas. Para diseñar la UE consideramos praxeologías locales tanto matemáticas como “de la vida”. Esto posibilita a los profesores para proponer organizaciones didácticas que permitan la construcción o reconstrucción de la praxeología que relaciona matemáticas y vida.

Las praxeologías contextuales “de la vida” pueden también estructurarse en los niveles puntual y local, aunque bajo otras condiciones y restricciones institucionales. En Vázquez, Romo, Romo-Vázquez y Trigueros (2016) se postula que es posible generar una praxeología mixta local relativamente completa a partir de analizar contextos “de la vida” que involucran el uso de matemáticas. Así, el análisis debe permitir la identificación de una praxeología “de la vida”, los elementos matemáticos que la conforman (tarea, técnica, tecnología, teoría) y que pueden ponerse en relación con una praxeología matemática local relativamente completa (Fonseca, 2004). Esto, puede esquematizarse de la siguiente manera:

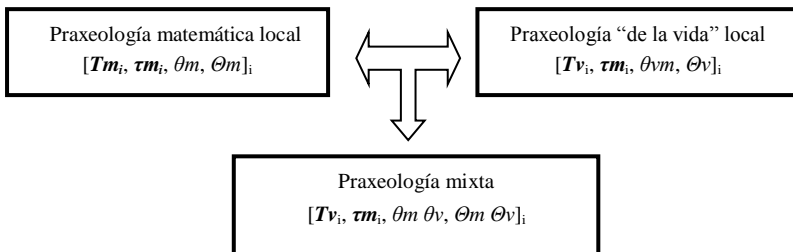


Figura 1. Praxeología mixta local relativamente completa

Para ilustrar lo anterior, consideramos el análisis del contexto topográfico y en particular praxeologías “de la vida” locales asociadas al levantamiento y trazo topográfico (Covián, 2013). Se presenta en la siguiente tabla una de estas praxeologías, la del reparto equitativo de terrenos:

Tabla 1.

*Pv Reparto equitativo de terrenos*

---

*Tipo de tarea.* Repartir equitativamente terrenos

*Tarea.* Repartir equitativamente un terreno entre cuatro hermanos

*Técnicas  $\tau$ .* Ubicar sobre el terreno los vértices que conforman la poligonal que lo encierra; medir los lados de cada uno de los lados que conforman la poligonal (distancia entre cada uno de los vértices); medir los ángulos internos desde cada uno de los vértices de la poligonal; determinar la dirección y rumbo del terreno; calcular tolerancias y compensar los errores cometidos en las mediciones; con los datos ordenados en una tabla, establecer una escala y trazar en un plano la representación del terreno a medir; determinar el área estableciendo las coordenadas de cada uno de los vértices del terreno y con determinantes hacer los cálculos, también se puede triangular el polígono obtenido, utilizar las fórmulas de Herón para calcular el área de cada triángulo, sumar cada valor obtenido y determinar el área total del terreno; de acuerdo a la forma que tenga el terreno establecer divisiones “equitativas” o de acuerdo a la cantidad de elementos (carros, casas, áreas de cultivo) que se requiera situar en el terreno hacer trazos para el reparto equitativo.

*Tecnología matemática.* Conocer las propiedades de los polígonos irregulares, escala, unidad de medida, propiedades de los triángulos, fórmulas de Herón y método de Gauss Jordan.

*Tecnología topográfica.* Conocimientos para describir el tipo de terreno (plano, no plano, con accidentes geográficos, atravesado por un río), conocimientos sobre los instrumentos que permiten hacer las mediciones en el terreno, conocer las fórmulas para el cálculo de tolerancias (propias de la Topografía) y métodos para compensación de errores obtenidos.

*Elementos que motivan el reparto equitativo:* necesidades de los usuarios o de la institución que establezca el reparto y determine que es equitativo.

---



Podemos notar que en este caso la praxeología topográfica requiere de dos técnicas para calcular el área, que son matemático-topográficas, la equivalencia del reparto puede estar determinada por las necesidades de los usuarios o por el área de cada porción. La teoría que justifica y valida la tecnología matemática es la geometría, sin embargo, la tecnología práctica (Castela y Romo, 2011) proviene de la institución topográfica particularmente al considerar el tipo de terreno y la forma de hacer el reparto. Ahora bien, esta praxeología topográfica resulta fundamental para la construcción de la praxeología u organización didáctica, que permitirá generar nuevas tareas de reparto equitativo que puedan ser desarrolladas en el aula. El interés de proponer estas tareas es que las técnicas y tecnologías matemáticas que figuren tengan una razón de ser en la enseñanza. Nuestra apuesta es que esta razón de ser está dada por su relación con las técnicas y tecnologías topográficas. Así, el área no es un tema de estudio de la geometría como parte de un programa sino una noción necesaria para comprender cómo puede determinarse el área de un terreno plano, un terreno con sinuosidades, de una ciudad, del barrio e incluso incursionar en la densidad de una población. El reparto equitativo puede llevar a determinar la fragmentación de terrenos para construcción, cultivos, huertos urbanos, etc.

### **Funciones Didácticas: Mesogénesis, Topogénesis y Cronogénesis**

Las funciones didácticas, mesogénesis, topogénesis y cronogénesis propuestas en Chevallard (1985, 2009) se consideran aquí para el analizar el potencial didáctico de las organizaciones didácticas.

La *mesogénesis* es la función que describe el proceso de construcción del medio didáctico. Esta función permitirá identificar los medios puestos a disposición para la construcción de técnicas y de tecnologías asociadas al cálculo de áreas de terrenos irregulares. Particularmente, los medios “novedosos” propuestos por los profesores para generar y validar técnicas típicamente topográficas, asociadas fuertemente a la precisión del cálculo de área a través de aproximaciones sucesivas.

La *topogénesis* es la función que describe el rol del profesor y de los estudiantes. Esta función permitirá identificar la división de responsabilidades entre profesores y estudiantes decretada por los profesores diseñadores. Particularmente, permitirá analizar quiénes deben generar las técnicas y tecnologías “mixtas” (del contexto topográfico, adaptadas al contexto escolar

y con necesidades escolares) asociadas al cálculo de áreas de terrenos irregulares.

La *cronogénesis* es la función que permite describir los tiempos didácticos para los distintos componentes de la OD. Esta función permitirá determinar los tiempos necesarios para la realización de las actividades, a través de los tres primeros momentos didácticos asociados al proceso de estudio.

## Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo y consiste en un estudio de caso (Rodríguez, Gil y García, 1999) del diseño, implementación y análisis de una UE de una maestría en Matemática Educativa “profesionalizante” que estudian profesores de matemáticas en servicio en la modalidad en línea y a distancia, siguiendo tres grandes fases:

### Fase 1. Diseño de la UE

Se consideraron elementos de tres investigaciones Macias (2012), Ruiz-Olarría (2015) y Scott y Scott (2010). En Macias (2012) se propone una metodología para el diseño de actividades didácticas que involucran praxeologías contextuales y matemáticas, entre sus fases se encuentran elegir y analizar un contexto “de la vida”. Inspirados en esta metodología y con el objetivo de acercar a los profesores al contexto topográfico, se les propuso resolver cinco tareas topográficas de cálculo de área de terrenos planos y no planos, que involucran técnicas matemáticas y topográficas (Actividad 1 de la UE). Las tareas propuestas provienen de un análisis praxeológico como el ilustrado en la Tabla 1, presentada más arriba.

La metodología REI-FP propuesta por Ruiz-Olarría (2015) conformada por 5 fases, busca que los profesores vivan, adecuen e implementen en sus clases un dispositivo didáctico conocido como REI. Las fases, vivir el dispositivo didáctico (REI) y análisis didáctico del dispositivo vivido, se han considerado y “adaptado”, para que los profesores incursionen en las lógicas de contextos no escolares y puedan relacionarlas con las escolares. Así en la Actividad 1 del curso propusimos diferentes tareas que solicitaban el cálculo de área, algunas matemáticas y otras topográficas. Esto, con el objetivo de que los profesores en un rol de aprendices “vivan” el enfrentamiento a tareas topográficas y experimenten la necesidad de utilizar más allá de fórmulas, propiedades y relaciones geométricas para calcular el área. Asimismo, se les

proponen algunas preguntas que les permitan generar un primer análisis de la actividad que ellos han realizado, de las técnicas puestas en juego y de las validaciones asociadas. Es decir, de la praxeología realizada. Esta Actividad será clave para generar un análisis didáctico que sirva de base para el diseño de una actividad didáctica que puedan implementar en sus aulas (Actividad 3 de la UE).

Por último, los principios de efectividad propuestos por Scott y Scott (2010) guían la forma de proponer las actividades y las relaciones entre profesores y formadores en la modalidad en línea y a distancia. Estos principios son:

1. Tener una orientación de resolución de problemas;
2. Incorporar oportunidades para que los profesores trabajen juntos y con expertos;
3. Facilitar la exposición de innovaciones en conocimientos, prácticas de enseñanza y tecnologías de apoyo;
4. Permitir a los profesores probar nuevas estrategias y habilidades de enseñanza;
5. Promover la creación y el intercambio de recursos;
6. Permitir y posibilitar reflexiones y discusiones profundas.

## **Fase 2. Análisis de las Actividades Didácticas**

Considera un análisis de tareas y de las funciones didácticas.

## **Fase 3. Análisis de Cuestionarios**

Se analiza un cuestionario (enviado dos meses después de finalizado el curso para que la calificación no interfiriera en las respuestas) para conocer un primer impacto de la UE en su práctica docente.

La unidad de enseñanza para el diseño de actividades didácticas que involucren matemáticas en uso.

La UE se estructuró en cuatro actividades principales: realización y análisis de praxeologías topográficas, lectura y análisis de un artículo de investigación, adaptación o elaboración de un diseño didáctico para la clase de matemática y su implementación en el aula. El objetivo de estas cuatro actividades en su conjunto es que los profesores generen una organización didáctica OD en la

que se opere una trasposición sobre tareas topográficas para adaptarlas a una clase de matemáticas.

### Actividad 1. Realización y Análisis de Praxeologías Topográficas

En esta actividad se les propuso realizar, de forma individual, cinco tareas de origen topográfico: las primeras dos tomadas de la enseñanza topográfica antigua (Pérez de Moya, 1573) y la tercera de la enseñanza innovadora de la geometría (Zamora, Vázquez y Sánchez, 2007). Estas tareas fueron consideradas ya que se corresponden con tareas topográficas de un escenario profesional (Covián, 2013), pero se encuentran más cercanas a un contexto escolar, lo que posibilita el acercamiento al contexto topográfico. Notemos que estas tres tareas solicitan el cálculo de área de terrenos a partir de una figura dada, sin escala, ni valor de los lados, elementos identificados en el análisis praxeológico del contexto topográfico (ver Tabla 1). Asimismo, se propusieron dos tareas de cálculo de área de terrenos reales (a partir de las fotografías encontradas en Internet, tareas 4 y 5), que involucraban perspectiva (tercera dimensión), motivando la aparición de técnicas topográficas como la nivelación (que busca proyectar en un plano paralelo al terreno, despreciando las protuberancias, (ver Figuras 2 y 3) para calcular el área y tecnologías de precisión (mejor aproximación al área del terreno).

Tabla 2.

#### *Tareas topográficas de la Actividad 1*




<p>Tarea 1. La siguiente figura representa una porción de terreno, calcula su área.</p>	<p>Tarea 2. La siguiente figura representa la porción de un terreno y el área no sombreada representa un lago. Calcula el área de tierra firme (el área sombreada), el área del lago y el área total del terreno.</p>	<p>Tarea 3. En la siguiente figura se presenta un dibujo del mapa de la Ciudad de México, calcula su área. Una vez hecho el cálculo, indica, ¿qué tanto se aproxima el valor calculado al valor real?</p>
		

Tabla 2. (.../...)

Tareas topográficas de la Actividad 1

Tarea 4. Considerando la siguiente imagen, calcula el área que se encuentra delimitada por las carreteras que se observan.



Figura 2. Técnica topográfica de nivelación

Tarea 5. Considerando la siguiente imagen, determina el área que se encuentra limitada por la montaña y que abarca todas las construcciones que ahí se observan.



Figura 3. Técnica de proyección para determinar el área.

Para un primer análisis de tareas se propuso un cuestionario de nueve preguntas<sup>1</sup>:

1. ¿Cuál es la **tarea** que debe realizarse?, ¿podrías proponer una variante de esta tarea?
2. ¿Qué **pasos seguiste para realizar la tarea**? Detalla lo más posible.
3. ¿Qué **valida** el conjunto de pasos seguidos?
4. ¿Qué **conocimientos** son necesarios para realizar esta tarea?
5. ¿Identificas algún área de la matemática que sustente de manera más general los conocimientos utilizados para realizar esta tarea?
6. ¿En qué período histórico surgen los conocimientos identificados en la pregunta 4?
7. ¿Crees que estas **tareas** pueden ser propuestas en un aula?

8. Si tu respuesta es afirmativa, ¿por qué crees que deberían ser implementadas y en qué nivel educativo?
9. Si tu respuesta es negativa, ¿por qué crees que no podrían ser implementadas en una clase?

Esta actividad sigue el principio 1 propuesto por Scott y Scott (2010). Notemos que las primeras cinco preguntas orientan el análisis de la praxeologías topográficas que los profesores han desarrollado. Aunque no se use el término praxeología, se solicita que identifiquen sus componentes: tarea, técnica (pasos que seguiste), tecnologías (validación de los pasos seguidos) y teoría (área de la matemática que sustente de manera general los conocimientos utilizados). Por su parte, las preguntas 6, 7, 8 y 9 pretenden provocar una primera reflexión didáctica. Un análisis detallado de las diferentes técnicas y validaciones que pueden ponerse en juego al desarrollar las tareas 1, 2 y 3 por profesores puede verse en Covián y Romo (2017).

## **Actividad 2. Lectura y Análisis de un Artículo de Investigación**

En esta actividad se les pidió leer el artículo de Covián y Romo-Vázquez (2014), en el que se presenta un análisis praxeológico de la construcción de la vivienda maya y del levantamiento y trazo topográfico en la cultura egipcia. En ambos contextos se utilizan conocimientos matemáticos, como son medida de la inclinación del techo, proporcionalidad de la vivienda, teorema de Pitágoras y construcción de figuras geométricas. Para profundizar en las características de las  $P_c$  y su posible relación con las  $P_m$  que involucren la noción de área, se pidió de forma individual responder una serie de preguntas y compartir en un foro sus reflexiones, las interacciones fueron entre profesores y formadores (lo que está de acuerdo con el principio 2 de Scott y Scott, 2010). A manera de ejemplo, presentamos las preguntas correspondientes a la construcción de la vivienda maya: ¿qué conocimientos matemáticos aparecen en el análisis de construcción de la vivienda maya?, ¿estos conocimientos son objeto de enseñanza?, ¿en qué nivel?, ¿consideras que podría proponerse una actividad didáctica basada en el análisis de la construcción de la vivienda maya?, ¿tendría sentido?, ¿qué aportaría?, ¿por qué resulta importante analizar la construcción de la vivienda maya?, ¿qué puede aportar a la actividad de un profesor de matemáticas?

### **Actividad 3. Adaptación y/o Elaboración de un Diseño Didáctico (OD) para la Clase de Matemáticas**

En esta actividad se les pidió producir una actividad u organización didáctica (en equipos), que podía ser una adaptación de las tareas de la Actividad 1 (Tabla 2). Asimismo, analizar la génesis histórica de la noción de área, su lugar en el plan de estudios, la forma en que se enseña en su institución y nivel educativo. Esta actividad sigue el principio 5 propuesto por Scott y Scott (2010).

### **Actividad 4. Implementación de la OD**

En esta actividad se les pidió implementar en su clase o con un pequeño grupo voluntario de estudiantes (al menos de 3) la OD producida en la actividad tres del curso y evaluar su pertinencia (lo que está de acuerdo con el principio 4 de Scott y Scott, 2010). Asimismo, hacer un reporte tomando en cuenta los siguientes aspectos: descripción de las condiciones de la implementación, análisis de las producciones de los estudiantes (fue lo que se esperaba, dificultades encontradas, resoluciones inesperadas, etc.) así como cambios sugeridos para una nueva implementación de la actividad.

Una forma de estudiar la efectividad de esta UE es analizar los diseños elaborados por los profesores, lo que se hace en la siguiente sección.

En esta sección analizamos tres OD's producidas por los equipos de profesores 1, 2 y 3, La Herencia, FigureTICas y Los Corrales, que se caracterizan por involucrar la noción de reparto equitativo, el diseño de un software para calcular áreas y la comparación de áreas, respectivamente. Los diseños didácticos (OD's) se plantean operando transposiciones sobre praxeologías *P<sub>v</sub>*, reparto equitativo, terrenos planos irregulares y terrenos no planos, logrando adaptaciones innovadoras para la enseñanza de la noción de área. Para caracterizar la potencialidad y límites de cada OD, las analizamos en términos de tareas y las funciones didácticas *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* (Chevallard, 1985). Con base en Ruiz-Olarría (2015, p. 160) se analiza la construcción y uso de los medios propuestos para la elaboración de técnicas (*mesogénesis*), el reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos (*topogénesis*) y los momentos didácticos involucrados en el proceso de estudio (*cronogénesis*).

## Discusión

### La Herencia

La OD propuesta por el equipo 1, La Herencia, se propuso para los niveles educativos primaria y bachillerato. Las tareas propuestas son del tipo de tarea repartir equitativamente terrenos, propia de la topografía e involucra el cálculo de área. En la tabla 3 se presentan las tareas de acuerdo al nivel para el que fueron diseñadas, seguido del análisis de las funciones didácticas.

Notemos que las tareas propuestas son transposiciones de tareas topográficas, puesto que implican la descripción, medición, dibujo a escala y reparto equitativo de un terreno plano.

*Mesogénesis.* Los medios para primaria son: el terreno de la escuela, la cantidad de integrantes del equipo, el material para trazar en el terreno (rafia, cuerda, cinta, su cuerpo, etc.) y dibujarlo a escala (idóneo: papel bond cuadrículado); unidad de medida; técnica para calcular el área; patrón del carro obtenido para validar equidad entre las partes y fuentes de consulta (medios electrónicos y libros). Para bachillerato: imagen proyectada del terreno, dibujo del terreno y regla graduada, comparación de áreas, división del dibujo del terreno en figuras geométricas y el método de determinantes de Gauss Jordan.

*Tepogénesis.* Profesor de primaria: dirige el proceso de estudio. Profesor de bachillerato: dirige el proceso de estudio e institucionaliza. Estudiantes de primaria y bachillerato: estudio del reparto equitativo a su cargo. Se observa que hay una relación estrecha entre la tarea, el medio y el profesor como director del estudio.

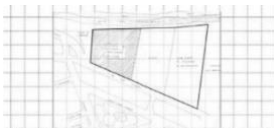

*Cronogénesis.* Los profesores proponen, para primaria, tres módulos de 120 minutos y para bachillerato un módulo de 60 minutos.

Notemos que los medios constituyen una transposición de los utilizados desde los orígenes de la topografía y en ese sentido la aproximación a diferencia del uso de la fórmula, juega un rol fundamental para el cálculo de área. Lo que hace que la topogénesis del profesor y los estudiantes sea distinta a la del paradigma tradicional. La cronogénesis acorde con la mesogénesis y la topogénesis propuesta por el equipo 1 se basa en cuatro momentos didácticos. El momento del primer encuentro permitirá reconocer el terreno y el dibujo del terreno (cuántos lados tiene, si es plano y cómo hacer una primera



Tabla 3.

*Tareas propuestas para la actividad La Herencia equipo 1*

Primero de primaria	Quinto de primaria	Bachillerato
Tarea 1. La Herencia. Dividir equitativamente un terreno, representado en el patio de la escuela, entre una cantidad $x$ de herederos ( $x$ es el número de integrantes del equipo) y verificar la equidad.		Tarea 1. Repartir equitativamente entre 4 un terreno representado en una hoja (Figura 4) y proyectado a la clase a través de un cañón.
		
Tarea 2. Determinar cuántos carros caben en el patio cívico de la escuela.	Tarea 2. Investigar el cálculo de área de polígonos.	Tarea 2. Calcular la superficie de la figura (Figura 5) con los siguientes métodos: dividir en rectángulos y aproximar la superficie que ocupa; aproximar la cantidad de cuadros que conforman la superficie; descomposición en triángulos y calcular el área por el método de determinantes de Gauss.
Tarea 3. Determinar cuántos carritos caben en un estacionamiento representado en porciones de cartulina.	Tarea 3. Determinar cuántos carros caben en cada fracción de terreno repartido, representado en el croquis elaborado por cada equipo.	
	Tarea 4. Reproducir el terreno fraccionado en una cartulina con otra escala y calcular el área con métodos “formales”, uso de fórmulas.	
	Tarea 5. Determinar el área de un terreno irregular proyectado en la pizarra del salón con la técnica que asigne el profesor a cada equipo.	

*Figura 4.* Terreno representado en papel*Figura 5.* Fotografía de terreno

división). En el momento exploratorio se debe dividir, medir, determinar una unidad de medida, establecer la escala, trazar el terreno, medir en los dibujos e identificar una técnica para calcular el área, resultando conveniente implementarlo en una sola sesión. En el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico se debería poder comparar y validar las técnicas usadas y en el momento de institucionalización, en primaria, se debe considerar el tiempo dado a los estudiantes para que investiguen lo relacionado con el cálculo de áreas de polígonos. Éste, puede ser extra o aparte del desarrollo de la tarea 1 e introducir a la siguiente tarea. En el Bachillerato este momento no se toma en cuenta en la actividad, sin embargo, puede ser aplicada para el cierre de la misma. Los cuatros momentos permiten describir la cronogénesis propuesta en la actividad, pero suponemos que superarían las tres sesiones de 120 minutos consideradas.




### **FigureTICas**

El segundo equipo diseñó una OD denominada Figureticas. Ésta consta de un software diseñado por ellos mismos, el cual es gratuito (se puede descargar en la dirección <http://187.141.245.22/figureticas2.zip>). Las actividades se centran en la geometría “plana” y se clasifican por niveles educativos (preescolar a superior). En particular, analizamos las actividades de secundaria, bachillerato y superior porque suponen una innovación importante a las trabajadas clásicamente con este programa en preescolar y primaria. Los profesores aclaran que estas actividades son un bosquejo de cómo se presentarían en el software porque aún está en construcción para estos niveles. Para el análisis primero presentamos las tareas divididas por niveles educativos (Tabla 4) y seguido las funciones didácticas (mesogénesis, topogénesis y cronogénesis).

Notemos que las tareas propuestas para secundaria y profesional son transposiciones del contexto topográfico y de la Goedesia, puesto que, implican la medición de terrenos grandes e inclinados. La tarea para el bachillerato tiene la particularidad de ser el dibujo de una figura irregular y en la que se deben establecer los límites del área a calcular.

Tabla 4.

*Tareas propuestas para el diseño didáctico Figureticas del equipo 2*

Secundaria	Bachillerato	Profesional
<p>Tarea 1. Cada verano, cuando la época de sequía es más fuerte, el cerro San Juan sufre de incendios. A partir de la siguiente imagen (Figura 6) determinar el área que se quemó este año.</p>  <p><i>Figura 6.</i> Imagen de la zona de incendios en el cerro San Juan</p>	<p>Tarea 1. De la imagen de la obra de Picasso, “Mujer llorando” (Figura 7), determinar el área del rostro de la mujer.</p>  <p><i>Figura 7.</i> Mujer llorando, cuadro de Picasso</p>	<p>Tarea 1. En la figura 8, ¿cuál es el área de la región que se encuentra cultivada?</p>  <p><i>Figura 8.</i> Fotografía del terreno</p>
<p>Tarea 2. Analizar y reflexionar sobre la técnica. Para esto se plantean preguntas y la comparación de técnicas para validar resultados.</p>		

*Mesogénesis.* Los medios son el software, las figuras geométricas (triángulos, cuadriláteros, polígonos) disponibles en el software, la herramienta del software para trazar polígonos irregulares, el dibujo de los terrenos y pintura (que se pueden imprimir del software), instrumentos para medir como regla, las fórmulas para el cálculo de áreas y preguntas planteadas para la reflexión y la comparación de técnicas.

*Topogénesis.* El profesor dirige el proceso de estudio y el estudiante es responsable del proceso de estudio.

*Cronogénesis.* No se especifica

Notemos que los medios, como el software y el dibujo de las figuras determinan las técnicas. El software permite el trazo de polígonos, en contraste con el dibujo en el que se pueden usar varias técnicas como:

cuadrículas, cálculo de coordenadas de los vértices o tomar en cuenta la curvatura de la superficie para determinar el área.

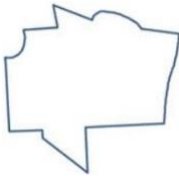
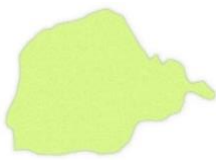
La irregularidad, escala e inclinación de los dibujos, modifican la topogénesis del estudiante con respecto al paradigma tradicional, puesto que, los induce a investigar diversas técnicas, sobre todo topográficas. La cronogénesis está dividida en tres momentos del proceso del estudio, como se detalla a continuación: en el momento del primer encuentro se debe explorar el software (identificar las figuras geométricas y las herramientas para el cálculo de áreas) y describir las características de las figuras (6, 7 y 8), irregularidad, inclinación, límites entre figuras contenidas, buscando establecer una escala y unidad de medida. En el momento exploratorio se elige la técnica más eficaz (dibujar figuras geométricas y solicitar el área de cada una al software, dibujar un polígono irregular lo más parecido al terreno y pedir el área al software o si es solamente el dibujo determinar la escala y el grado de inclinación que tiene la tierra cultivada, por ejemplo). Finalmente, en el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico se deberá indagar sobre diversas técnicas, además de las sugeridas en el software, como la medición de espacios de tierra a través de tecnología GPS, que permita validar la técnica usada. En este caso la cronogénesis no es explicitada por los profesores, sin embargo, consideramos que de dos a tres sesiones serían suficientes para desarrollarla.

## **Los Corrales**

El tercer quipo diseñó una OD denominada Los Corrales, dirigida a estudiantes de Bachillerato. Para analizar los elementos de la OD planteamos en la Tabla 5 las tareas y seguido las funciones didácticas que la conforman. Notemos que el tipo de tarea es el cálculo de áreas de polígonos irregulares. La tarea 3 propuesta es la de la UE del curso, sin embargo, la contextualización es diferente. Lo cual nos lleva a suponer que los profesores reconocen la potencialidad de las tareas, siendo una de éstas la diversidad de técnicas para su resolución. Aunque, se podría potencializar el contexto propuesto tomando en cuenta las características y necesidades de las gallinas. Centrar la tarea en determinar el tipo de corral adecuado para que éstas crezcan.

Tabla 5.

*Tareas propuestas para el diseño Los Corrales del equipo 3*

Bachillerato
<p>Tarea 1. Responder a las preguntas de una autoevaluación para identificar los conocimientos de cálculo de área. No se explicita el contenido de la autoevaluación, sin embargo, creemos que versará sobre ejercicios de cálculo de área de polígonos.</p> <p>Tarea 2. Responder cuestionamientos acerca del área, las unidades de medida de ésta y su uso.</p> <p>Tarea 3. Determinar el área de cada figura irregular</p> <p>Tarea 3.1. Comparar las áreas y determinar cuál es mayor. Para abordar la tarea 3 se contextualiza de siguiente manera:</p> <p>Durante la clase de biología los alumnos de bachillerato van a realizar un experimento, cuyo objetivo es verificar dos marcas de alimentos para rápido crecimiento en gallinas. Los estudiantes criarán a las gallinas y medirán su peso de forma semanal, comparando con qué marca de alimento las gallinas crecen más rápido. Para el diseño de corrales, un alumno presentó dos propuestas que se muestran a continuación. En equipo, deben decidir en cuál de los dos corrales hay mayor espacio para que las gallinas crezcan de forma saludable (Figura 9 y Figura 10).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><i>Figura 9. Dibujo del corral 1</i></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><i>Figura 10. Dibujo del corral 2</i></p> </div> </div> <p>Tarea 4. Calcular el área de cada figura con el programa GeoGebra y comparar el resultado con el obtenido en la tarea 3.</p> <p>Tarea 5. Comparar resultados y validar la técnica desarrollada en la tarea 3. Para esto se plantean cuestionamientos acerca de cuál técnica permitió un resultado más cercano al ofrecido en GeoGebra y se pide analizar las ventajas y limitaciones de cada técnica.</p>

*Mesogénesis.* Los medios son: la evaluación diagnóstica, los dibujos de las figuras, reglas, papel cuadriculado, la irregularidad de las figuras, técnicas para determinar el área de cada figura y el software GeoGebra.

*Topogénesis.* El profesor es el responsable del proceso de estudio y el estudiante es participe en el proceso de estudio.

*Cronogénesis.* Se sugiere 180 minutos en total, pero no se especifica en cuántos módulos.

Notemos que los dibujos de las figuras garantizan la diversidad de técnicas, como cuadricular las imágenes, medirlas directamente con regla, entre otras. La precisión de las mediciones y por tanto la validez de la técnica usada queda determinada por la respuesta obtenida a través del software (GeoGebra). Para potencializar la actividad y aproximarla a una de modelación se puede recurrir a medios que permitan investigar las características del contexto, como la cantidad de gallinas que deberían habitar en un corral por metro cuadrado. En este caso, los medios, podrían permitir que el profesor y el alumno adquieran el papel de director y responsable de estudio, respectivamente si la centración estuviera en la tarea 3, que se permitiera el uso de otro software y que una primera validación sea a través de la comparación de técnicas.

La cronogénesis está dividida en cuatro momentos: un primer momento de evaluación diagnóstica donde el profesor podrá identificar los conocimientos de área presentes en los estudiantes, el momento del primer encuentro donde los estudiantes podrán conocer las características de los dibujos de los corrales, el momento exploratorio donde podrán medir, establecer unidades de medida y determinar el área, seguido del momento de exploración del software y determinación del área de la figura a través de éste. Para, finalmente en una introducción al momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico en el que deberán comparar, justificar y validar las técnicas realizadas en papel con la técnica usada en el software y su resultado.

### **Potencialidades y Limitaciones de las OD's**

En las OD's se proponen tareas del tipo (reparto equitativo de terrenos, cálculo de áreas de terrenos irregulares y comparación de áreas) de origen topográfico y transpuestas a la escuela. Estas tareas motivan el uso de diversas técnicas (no sólo matemáticas) que están determinadas por tecnologías matemáticas y contextuales. Esto último se ilustra particularmente en la tarea del cálculo de área del rostro de la pintura "Mujer llorando" de Picasso, ya que ésta no constituye una transposición del contexto topográfico y sin embargo motiva

el uso de técnicas topográficas, uso de figuras conocidas y uso de polígonos irregulares. Asimismo, debido a que se busca obtener “una buena aproximación” al área, puede motivar el uso de cuadrículas sobrepuestas y favorecer el trabajo con la unidad de área y la escala. Estas técnicas también suponemos aparecerán en la tarea de los corrales (Tabla 5) que sí es una transposición del contexto topográfico, aunque alejado de éste, muy “cercano” a los estudiantes. En este esfuerzo de proponer un contexto “tan cercano” a los estudiantes, notamos que los profesores reconocen la naturaleza de la tarea, ya que no la modifican y solicitan calcular el área de figuras irregulares. En los tres diseños los medios propuestos y particularmente el uso de software favorecen una gran variedad de técnicas y de tecnologías asociadas a la precisión del cálculo de área, teniendo en efecto una ampliación de la noción de área y de razones actuales para comprenderla y movilizarla. Se observa que en los diseños del equipo 1 y 2 los profesores adquieren un papel de director del proceso de estudio, permitiendo que los responsables sean los estudiantes, característica demandada en el modelo de aprendizaje para la vida. Finalmente, se observa que los diseños pueden dar lugar a la identificación de la tarea, la exploración de la técnica y la construcción de un entorno teórico-tecnológico, pero se sigue imponiendo una cronogénesis asociada al modelo “tradicional” que limita los tiempos a un aprendizaje por “horas”.

### **Conclusiones**

En este estudio de caso de desarrollo profesional de profesores de matemáticas en la modalidad en línea y a distancia, se atiende a la demanda que el sistema educativo hace a los profesores, de fomentar aprendizajes útiles para todos y a lo largo de la vida, a través de una UE centrada en el diseño de actividades didácticas (OD) que involucran contextos no escolares (“de la vida”). La metodología de diseño de la UE se basa en componentes de los trabajos de Macías (2012), de Ruiz-Olarría (2015) y de Scott y Scott (2010) y tiene 4 fases: sensibilización al contexto no escolar, reconocimientos de relaciones entre  $P_c$  y  $P_m$ , diseño de una OD y su implementación. En la fase de sensibilización y reconocimiento de relaciones entre  $P_c$  y  $P_m$  (actividades 1 y 2), de la UE, los profesores enfrentaron tareas para el cálculo de área de terrenos irregulares que fueron transpuestas a tareas (actividad 3 de la UE) de reparto equitativo de terrenos, de determinación del área de terrenos irregulares y de comparación de terrenos, adaptándolas a los diferentes niveles educativos. Las tareas transpuestas en las OD’s son abiertas y admiten

variedad de técnicas (proyección de planos, determinantes, entre otras) asociadas a la noción de área donde la precisión es más determinante, que la aplicación directa de fórmulas para el cálculo de áreas de terrenos irregulares. Estas tareas involucran tecnologías “mixtas”, reconocimiento de cualidades geométricas de los terrenos (perímetro y superficie) y cualidades numéricas asociadas a validaciones experimentales, como la equidad de porciones de terreno a partir de la cantidad de autos que contienen (considerando para ello dimensiones y formas geométricas de los autos). El análisis de las funciones didácticas y las respuestas a los cuestionarios permitió identificar las necesidades y aportes del diseño de las OD's a la práctica docente de los profesores diseñadores. En la mesogénesis se observó la propuesta de diversos medios (cintas, papel, carritos, software) a disposición de los estudiantes, que favorecen la intervención y movilización de conocimientos matemáticos, considerado por los profesores como innovador y atractivo para su implementación en las aulas. En la topogénesis se observa que toda la responsabilidad del estudio está a cargo de los estudiantes, incluso la validación de las técnicas y “respuestas”, favoreciendo la autonomía de éstos, generalmente demandada por los profesores en la enseñanza de las matemáticas para la resolución de problemas. En la topogénesis del profesor, éste es propuesto como director del estudio, un rol que difícilmente el profesor diseñador permite, pero se observa que es la misma naturaleza de las tareas propuestas lo que hace que los profesores asignen dicho rol. Es interesante notar que la cronogénesis es “intermedia” entre los requerimientos institucionales (explicitados por los profesores en los cuestionarios) y los requerimientos de las OD's. Por ejemplo, la cronogénesis de la OD del equipo 3 se basa en un diseño de gestión de clase “tradicional” (objetivos, evaluación diagnóstica, desarrollo, cierre y evaluación de las actividades), pero proponen tareas de investigación que se contraponen a objetivos de aprendizaje específicos, a una evaluación diagnóstica y a un determinado desarrollo de clase. Aunque no fue objeto de análisis en este estudio, las interacciones profesor-profesor y profesores-experto, particularmente en los foros de la UE, fue un elemento clave en el diseño de las OD's. Consideramos que la dialéctica individuo-colectivo debería analizarse utilizando herramientas de la TAD (Bosch, *en prensa*) y los principios de Scott y Scott (2010).

## Notas

<sup>1</sup> Las negritas las hemos colocado en este documento para enfatizar la forma en que se hizo alusión a los componentes de la praxeología.



## Referencias

- Artigue, M. (2011). *Les défis de l'enseignement de mathématiques dans l'éducation de base*. UNESCO: Paris
- Bosch, M. (en prensa). La prise en compte du collectif dans l'analyse des processus d'étude selon la TAD. En Gueudet, G., Matheron, Y. (Eds). *Actes de 18 école d'été didactique des mathématiques*, Brest, 2015. Grenoble, France: Pensée Sauvage.
- Castela, C. y Romo-Vázquez, A. (2011). Des Mathématiques A L'Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Paris, Francia: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation [Organize the study 1. Ecology and regulation]*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia. Retrieved from: <http://yves.chevallard.free.fr/>.
- Chevallard, Y. (2013). *Journal du séminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement*. Retrieved from: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-1.pdf>
- Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción*. Tesis de doctorado no publicada. México: CINVESTAV-IPN
- Covián, O. y Romo, A. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación Educativa*, 73, 17-48.
- Covián, O. y Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y el levantamiento y trazo topográfico.

*Bolema*, 28(48), 128-148. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a07>

- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.
- Helleve, I. (2010). Theoretical Foundations of Teacher's Professional Development. In J. O. Lindberg & A.D. Olofsson (Eds.), *Online Learning Communities and Teacher Professional Development: Methods for Improved Education Delivery* (pp. 1-19). Hershey, New York: Information Science Reference.
- Macias, M. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de maestría no publicada. México: CICATA-IPN.
- Padilla, E. (2015). *Conocimientos matemáticos de menores trabajadores. El caso de la proporcionalidad*. Tesis de maestría no publicada. Ciudad de México: UPN.
- Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Geometría Prácticas y Especulativa*. Observatorio de Marina de San Fernando y con licencia y privilegio Real de los Reinos de Castilla y Aragón.
- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad Autónoma de Madrid.
- Scott, D. & Scott, S. (2010). Innovations in the Use of Technology and Teacher Professional Development. En J. O. Lindberg & A.D. Olofsson (Eds.), *Online Learning Communities and Teacher Professional Development: Methods for Improved Education Delivery* (pp. 169-189). Hershey, New York: Information Science Reference.
- Solares, D. (2012). *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes*. Tesis de doctorado no publicada. Ciudad de México: DIE-CINVESTAV-IPN.
- Tolentino, S. (2015). *Principio de Pareto su uso en la industria cervecera y su posible vinculación con la enseñanza de las matemáticas*. Tesis de maestría no publicada. Ciudad de México: CICATA-IPN.

- UNESCO. (2014). Programas y Presupuesto Aprobados (37 C/5). Retrieved from: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002266/226695s.pdf>
- Vázquez, R., Romo, A., Trigueros, M. y Romo, R. (en prensa). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*.
- Zamora, S., Vázquez, G. y Sánchez, L. (2007). *Matemáticas 2: Geometría y Trigonometría*. D.F., México: ST Editorial.

**Avenilde Romo Vázquez** es profesora investigadora en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Centro de Investigación en Ciencia y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), México.

**Olda Nadinne Covián Chávez** es Jefe de Proyecto en la Dirección General de Evaluación de la Oferta Educativa del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), México.

**Dirección de contacto:** La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: CICAA-IPN, Legaria 694, Col. Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, Ciudad de México, C.P. 11500.  
**Email:** [aromov@ipn.mx](mailto:aromov@ipn.mx)