



Instructions for authors, subscriptions and further details:

<http://redimat.hipatiapress.com>

## **Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria**

Juan D. Godino<sup>1</sup>, Margherita Gonzato<sup>1</sup>, Ángel Contreras<sup>2</sup>, Antonio Estepa<sup>2</sup> y Carmen Díaz-Batanero<sup>3</sup>

1) Universidad de Granada, España

2) Universidad de Jaén, España

3) Universidad de Huelva, España

Date of publication: October 24<sup>th</sup>, 2016

Edition period: October 2016-February 2017

---

**To cite this article:** Godino, J.D., Gonzato, M., Contreras, A., Estepa, A. & Díaz-Batanero, C. (2016). Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria. *REDIMAT*, 5(3), 235-262. doi: 10.4471/redimat.2016.1984

**To link this article:** <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1984>

---

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to [Creative Commons Attribution License](#) (CC-BY).

# Assessing Didactic-Mathematical Knowledge of Prospective Primary School Teachers on Visualization of Three-Dimensional Objects

Juan D. Godino  
*Universidad de Granada*

Margherita Gonzato  
*Universidad de Granada*

Ángel Contreras  
*Universidad de Jaén*

Antonio Estepa  
*Universidad de Jaén*

Carmen Díaz-Batanero  
*Universidad de Huelva*

*(Received: 26 February 2016; Accepted: 7 September 2016; Published: 24 October 2016)*

## Abstract

---

The purpose of this research is to evaluate the didactic-mathematical knowledge related to three-dimensional objects visualization in a sample of prospective primary school teachers. To achieve this aim, the responses of 464 student teachers from the universities of Granada and Jaen to a questionnaire built for this purpose are analyzed. The quantitative analysis of the responses informs about the psychometric characteristics of the instrument (reliability and factorial structure) and a comparative study of students' knowledge by universities, gender and geometrical content of the items is carried out. The results show a low level of geometrical knowledge, which suggests the need to design specific training activities on these contents in the teacher training curricula.

---

**Keywords:** Visualization, geometry, didactic-mathematical knowledge, assessment, teachers' training

# **Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria**

Juan D. Godino  
*Universidad de Granada*

Margherita Gonzato  
*Universidad de Granada*

Ángel Contreras  
*Universidad de Jaén*

Antonio Estepa  
*Universidad de Jaén*

Carmen Díaz-Batanero  
*Universidad de Huelva*

*(Recibido: 26 Febrero 2016; Aceptado: 7 Septiembre 2016; Publicado: 24 Octubre 2016)*

## **Resumen**

---

La finalidad de esta investigación es evaluar los conocimientos didáctico - matemáticos sobre visualización de objetos tridimensionales en una muestra de futuros profesores de educación primaria. Para ello se analizan las respuestas de 464 estudiantes del grado de Magisterio en las universidades de Granada y Jaén a un cuestionario construido con este propósito. El análisis cuantitativo de las respuestas permite informar sobre las características psicométricas del instrumento (fiabilidad y estructura factorial) y realizar un estudio comparativo de los conocimientos de los estudiantes según universidades, género y contenidos geométricos de los ítems. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimiento geométrico, que sugiere la necesidad de diseñar acciones formativas específicas sobre estos contenidos en los actuales planes de formación de maestros.

---

**Palabras clave:** Visualización, geometría, conocimiento didáctico-matemático, evaluación, formación de profesores.



La formación matemática y didáctica de profesores es un campo de investigación y desarrollo que se viene consolidando en educación matemática por ser un factor clave en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En España tiene lugar en las Facultades de Ciencias de la Educación condicionada por un contexto normativo cambiante y la escasez de recursos tecnológicos, humanos y temporales. La implantación de los nuevos grados en educación primaria y la relativa consolidación de la investigación en los departamentos de didácticas específicas están abriendo, no obstante, nuevas posibilidades para la mejora de los planes y programas formativos de los maestros.

En este artículo presentamos resultados de un proyecto de investigación sobre “Evaluación y desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos en la formación inicial de maestros en el campo de la visualización espacial”. Se trata de aportar nuevos conocimientos, propuestas instruccionales y recursos metodológicos para la mejora de la formación inicial en matemáticas y didáctica de la matemática de los maestros de educación primaria, teniendo en cuenta el contexto educativo español y la perspectiva de los nuevos planes de estudio.

En Gonzato, Godino y Neto (2011) se plantea el problema de evaluación de los conocimientos matemáticos y didácticos que tienen los profesores en formación sobre la visualización de objetos tridimensionales (VOT) y se describe el proceso de selección de tareas para dicho propósito. A partir del análisis de las investigaciones sobre visualización espacial, de los contenidos presentes en los libros de texto y de los objetivos descritos en los currículos, se motiva y describe la selección de cinco categorías de tareas sobre visualización de objetos tridimensionales. Se describe una de tales tareas formada por varios ítems mediante los cuales se trata de evaluar aspectos relevantes de los conocimientos sobre visualización de objetos tridimensionales. También se presentan en dicho artículo las respuestas dadas por una estudiante para clarificar los tipos de conocimientos evaluados y la utilidad del cuestionario para orientar la formación de profesores sobre el tema.

En Gonzato, Godino y Contreras (2011) se presentan resultados de la aplicación de un cuestionario sobre VOT, construido según los criterios descritos en Gonzato, Godino y Neto (2011), a una primera muestra de estudiantes de magisterio. El objetivo de este artículo es describir con detalle el mencionado cuestionario (incluido como anexo), informar de las características psicométricas del mismo, y de los resultados de su aplicación

a una amplia muestra de 464 futuros profesores de educación primaria de las universidades de Granada y Jaén. En primer lugar se describe el problema y marco teórico en el que se apoya la investigación; en el siguiente apartado se describe el método (instrumento, análisis de los contenidos evaluados por los ítems del cuestionario, las variables dependientes relativas al contenido geométrico y didáctico, las variables explicativas, el contexto y la muestra). Seguidamente se presentan los resultados del estudio cuantitativo (propiedades psicométricas del instrumento, fiabilidad y estructura factorial), así como el análisis comparativo de los conocimientos de los estudiantes (según universidades, género y los tipos de conocimientos geométricos). Finalmente se incluyen algunas implicaciones para la formación de maestros, las limitaciones del estudio y vías de continuación de la investigación.

### **Problema y Marco Teórico**

La visualización espacial figura en las directrices curriculares como contenido a tratar en los distintos ciclos de educación primaria (NCTM, 2000; MECD, 2014), lo que motiva el interés por parte de la investigación en didáctica de las matemáticas (Battista, 2007; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996), referida tanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje por parte de los estudiantes como a la formación de profesores.

Un aspecto importante de la problemática de la formación de profesores en el tema de la visualización es identificar y evaluar las “habilidades espaciales” de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza. Se considera la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (Battista, 2007, p. 843). Así mismo, la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

El problema que abordamos en este trabajo es el diseño de un cuestionario que permita evaluar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de los maestros en formación sobre visualización de objetos tridimensionales (VOT), y su aplicación a una muestra de estudiantes. Se trata de una fase del diseño de un modelo de formación de maestros sobre VOT que permita, en primer lugar, conocer el estado de los conocimientos en un momento dado (inicial o final de un proceso formativo), para posteriormente implementar acciones formativas fundamentadas.

Para el desarrollo de esta investigación hemos adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007). Dentro de este marco teórico, en Godino (2009) se ha desarrollado un modelo para categorizar los “conocimientos didáctico-matemáticos” (CDM), el cual articula y desarrolla otros modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas como el “Pedagogical Content Knowledge” (PCK) (Shulman, 1986) y el “Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008).

El diseño del cuestionario de evaluación que se describe y aplica en esta investigación tiene en cuenta dos tipos de variables: *contenido geométrico* y *contenido didáctico*. Con el fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, se han analizado las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. De manera específica se han tenido en cuenta tres categorías de tareas que han sido objeto de investigaciones previas:

- 1) Coordinar e integrar vistas de objetos (Gutiérrez, 1996; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Malara, 1998; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009)
- 2) Plegar y desplegar desarrollos (Mesquita, 1992; Potari y Spiliotopoulou, 2001).
- 3) Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (Battista y Clements, 1996; Gorgorió, 1994; Lappan, Phillips y Winter, 1984)

Los contenidos principales emergentes de dicho análisis se compararon con los contenidos presentes en las tareas incluidas en libros de textos de educación primaria y en el currículo español para la educación primaria.

Esta comparación llevó a la inclusión de un tipo de tarea que aparece en los libros de texto, como es la generación de cuerpos de revolución, que apenas ha sido considerada en investigaciones previas.

Para la variable *contenido didáctico* (referido al contenido geométrico, sea propio del nivel de primaria o más avanzado) se han seleccionado tres aspectos: los tipos de justificaciones que son capaces de elaborar los estudiantes para las tareas, la reflexión que son capaces de realizar sobre los conocimientos que se ponen en juego en la resolución (faceta epistémica del CDM), y las variaciones que proponen para las tareas con vistas a su uso en la escuela (conocimiento sobre la faceta instruccional del CDM) (Godino, 2009).

## Método

### Instrumento

El instrumento para la recogida de datos es el cuestionario CDM-VOT (ver anexo) que está constituido por un conjunto de 5 tareas, cada una de las cuales está formada por ítems que evalúan aspectos del contenido geométrico y del contenido didáctico. Las 5 tareas seleccionadas de respuesta abierta (a cumplimentar por escrito), cubren los siguientes aspectos del tema (Gonzato, Godino y Neto, 2011):

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
  - Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (tarea 1)
  - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (tarea 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos (tarea 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (tarea 4)
4. Generar cuerpos de revolución (tarea 5)

Los aspectos del conocimiento especializado tenidos en cuenta se evalúan mediante la inclusión en cada tarea de las siguientes cuestiones:

- i. Justifica la respuesta (a las cuestiones propuestas que evalúan aspectos del conocimiento común)
- ii. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea.

iii. Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea para que resulte más difícil (o fácil, según el ítem) de resolver por un niño de primaria.

Se decidió evaluar aspectos específicos del conocimiento del contenido (común, ampliado y especializado) y del conocimiento del contenido en relación a la enseñanza. Godino (2009) propone que el conocimiento didáctico especializado, propio del profesor, supone e implica el dominio del contenido matemático compartido con los alumnos de la etapa educativa correspondiente (conocimiento común) y el correspondiente al menos a la etapa educativa posterior (conocimiento ampliado).

Cada tarea del cuestionario se compone de cuatro partes (ítems), según el aspecto del conocimiento que se quiere evaluar. Para evaluar el conocimiento común del contenido (ítem *a*) se han seleccionado tareas de libros de texto de primaria. Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido (ítem *c*) se propone resolver una tarea relacionada con la *a* pero de un nivel de complejidad más alto, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico. Estas tareas provienen de investigaciones y fueron en su mayoría propuestas a alumnos de escuela secundaria. Concretamente, el ítem 1c procede de A.P.M.E.P (1983, p. 111), el ítem 2c procede de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988, p. 56), el ítem 3c procede de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1985, p. 3), el ítem 4c procede de Gorgorió (1994, p. 123) y el ítem 5c es de elaboración propia.

Asimismo, se pide que el estudiante enuncie una variante de problema con un fin instruccional específico, de tal manera que el futuro docente debe movilizar conocimiento sobre un “recurso instruccional”.

Este instrumento no pretende evaluar todas las categorías de conocimientos didácticos y matemáticos propuestas por el modelo CDM, ya que está diseñado para recabar información escrita de los estudiantes en un tiempo limitado (2h aproximadamente).

### **Análisis de los Contenidos Evaluados por los Ítems del Cuestionario**

Las cinco tareas, con los distintos apartados de cada una de ellas, están incluidas en el Anexo. Seguidamente analizamos los contenidos matemáticos y didácticos tenidos en cuenta en el diseño de las mismas.



### **Tarea 1 (Vistas)**

En los ítems *a* y *c*, relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido, respectivamente, aparecen los conceptos de vista, punto de vista, direcciones de mirada, lateralidad del sujeto, posiciones de los objetos en relación a un sujeto, que vienen explicitados mediante lenguaje visual: dibujos y términos de lenguaje deícticos.

Estos ítems se refieren al procedimiento físico de cambiar de posición con respecto a un objeto, e interpretar las diferentes vistas desde determinadas posiciones. El espacio viene estructurado en relación con las propiedades y la posición del cuerpo del observador.

El hecho de que no se trabaja con objetos reales sino con sus representaciones planas, hace intervenir delicadas relaciones visual-analíticas, que pueden interferir con la interpretación y justificación de la tarea.

En los enunciados de estos ítems, el concepto de “vista” es utilizado en términos de percepción visual, asociándolo a lo que vería un hipotético observador puesto en determinadas posiciones. Sin embargo, para representar dichas “vistas”, se utilizan proyecciones ortogonales sobre determinados planos. Estas representaciones ocultan las hipótesis (físicamente imposibles) de que el hipotético observador tendría que situarse en el infinito (de esta forma los rayos son paralelos). En el ítem *a*, se percibe fácilmente que la proximidad del fotógrafo a la mesa es inadecuada con respecto a las fotografías dadas.

### **Tarea 2 (Sistema diédrico)**

En los ítems presentados en la tarea 2, los términos “vistas”, “alzados” y “planta” presentes en los enunciados se refieren a las proyecciones ortogonales del objeto sobre determinados planos. Para resolver y justificar las respuestas es necesario interpretar correctamente dichos términos, o bien refiriéndose a las hipotéticas vistas que tendría un observador colocado en determinadas posiciones con respecto al objeto, o bien refiriéndose a las proyecciones del objeto en los diferentes planos ortogonales.

La primera interpretación involucra objetos principalmente visuales, mientras que la segunda hace intervenir objetos analíticos (Godino,

Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012), como las definiciones y propiedades de las distintas proyecciones.

El procedimiento de “coordinación e integración de las vistas” utilizado para formar (ítem *a*) o estudiar (ítem *c*) el objeto tridimensional requiere colocar mentalmente las vistas en tres planos ortogonales de manera contigua, e integrarlas para formar el objeto.

### **Tarea 3 (Desarrollos)**

Los ítems sobre los desarrollos presentados en la tarea 3, aunque no se apoyan en material manipulativo, pueden ser fácilmente relacionados con la operación física de plegar y desplegar desarrollos de sólidos. Sin embargo, la operación (mental) y la justificación necesarias para resolver dichas tareas, tienen que estar apoyadas en elementos analíticos relacionados con las propiedades conceptuales de los desarrollos y sólidos involucrados.

### **Tarea 4 (Secciones de un objeto)**

Los ítems presentados en la tarea 4 requieren descomponer un objeto tridimensional en determinadas partes (tridimensionales) o componer un objeto con determinadas piezas (tridimensionales). El procedimiento de construir composiciones de piezas, agregar o quitar partes, es una operación que tiene fundamento en la construcción con materiales (por ejemplo en los juegos de los niños). En esta tarea se presentan objetos tridimensionales por medio de representaciones en perspectiva, y se pide que se ilustren determinadas particiones.

A partir de un problema ilustrado mediante lenguaje cotidiano y apoyado en determinadas representaciones planas de objetos tridimensionales, los estudiantes tienen que simular (mentalmente) determinadas acciones (componer, descomponer, rotar piezas en el espacio), visualizando las posiciones, las formas y el número de los cortes y de las partes resultantes de dichos cortes. Estos objetos no ostensivos de carácter visual, tendrán que ser representados por medio del dibujo y/o descritos con lenguaje verbal, en las respuestas y justificaciones de las tareas.

## **Tarea 5 (Cuerpos de revolución)**

La generación de un sólido mediante rotación de una figura plana, es un proceso de difícil materialización puesto que requiere generar un objeto de tres dimensiones a partir de una figura bidimensional en movimiento.

Los ítems propuestos en la tarea 5, pretenden que los estudiantes visualicen dicho procedimiento de rotación, que tiene un carácter generativo: la rotación de la figura plana no es vista como transformación geométrica que permite cambiar la posición de una figura plana desde una posición fija hasta otra posición fija, sino que es interpretada como un movimiento continuo en el tiempo en el cual el espacio que ocupa la figura a lo largo del tiempo permite la generación de un sólido.

El procedimiento de generación de sólidos de revolución por medio de la rotación de una figura plana se apoya en una sucesión de imágenes en movimiento (aspecto dinámico) y, además, requiere la creación de una imagen global final del sólido (aspecto estático). Para argumentar las respuestas, se necesita reflexionar sobre las relaciones entre elementos de las diferentes representaciones, relacionando los elementos de la figura plana que por rotación genera un sólido (lados, ...) con los elementos de éste (superficie lateral, base,...).

En el ítem 5a, es posible asociar correctamente las representaciones sin conocer el significado de cuerpo de revolución, o sea fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Sin embargo, la justificación requiere explicitar la relación entre sección longitudinal del sólido de revolución y figura plana.

### **Variables Dependientes**

#### **a) Relativas al contenido geométrico**

El primer foco de atención consiste en definir la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas a los 10 ítems del cuestionario que admiten una respuesta cuantitativa” (ítems tipo *a* y *c*). Se ha considerado conveniente valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas, por lo que la puntuación asignada a cada ítem ha sido:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta,
- 1 punto si es parcialmente correcta,

— 2 puntos si es correcta.

Además de la variable “puntuación total”, suma de puntuaciones en el conjunto de los 10 ítems (0 a 20 puntos), se definen otras dos variables cuantitativas relativas al “conocimiento matemático común” y “conocimiento matemático ampliado”.

Los ítems  $a$  y  $c$  también dan lugar a considerar otras variables de índole cualitativa, como son los tipos de errores manifestados y las representaciones y lenguajes usados por los estudiantes. En Gonzato, Godino y Contreras (2011) se describen ejemplos de respuestas de estas variables cualitativas para una parte de la muestra de estudiantes a los cuales se aplicó el cuestionario.

### **b) Relativas al conocimiento especializado del contenido**

Los ítems  $a'$ ,  $b$  y  $b'$ , que reflejan algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido, dan lugar a variables de tipo cualitativo cuyos valores son los tipos de justificaciones que dan a las tareas, los tipos de conocimientos (conceptos, proposiciones, procedimientos) que reconocen y los tipos de cambios en los enunciados de las tareas que proponen los estudiantes. En Gonzato se estudian con detalle los resultados obtenidos para estas variables cualitativas para los estudiantes de la Universidad de Granada que respondieron el cuestionario. En este artículo se presenta una síntesis de los resultados obtenidos para dichas variables.

Para asegurar la fiabilidad en el proceso de codificación de las respuestas de los estudiantes se elaboró un protocolo de criterios a seguir con ejemplos ilustrativos de los tipos de respuestas; asimismo se discutieron conjuntamente algunos casos de dudosa interpretación.

### **VARIABLES EXPLICATIVAS**

Se consideran como variables explicativas de las diferencias en las puntuaciones el género y la universidad de procedencia de los estudiantes que responden al cuestionario. Diversos estudios (Linn y Petersen, 1985; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Kaufman, 2007) destacan diferencias con respecto al género en las habilidades de visualización espacial, observando que los chicos tienen mejores capacidades. También Fernández

(2011), trabajando con maestros en formación, destaca que los hombres parecen tener más capacidad de visualización y razonamiento geométrico que las mujeres. Esta es la razón por la cual se ha considerado de interés investigar el efecto de la variable género en este trabajo.

En cuanto a la universidad de procedencia se aplicó el cuestionario en momentos diferentes del proceso formativo. En el caso de la universidad de Granada se aplicó en segundo curso, después que los estudiantes han cursado la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria”, donde se incluye un tema sobre geometría, aunque no centrada de manera específica en visualización espacial. En el caso de la universidad de Jaén el cuestionario se aplicó en tercer curso, antes de comenzar el estudio de la asignatura “Geometría y su didáctica” contemplada en el plan de estudios.

En los cursos previos los estudiantes no habían estudiado ningún tema específico relacionado con la geometría.

## Participantes

La población de interés en esta investigación son los estudiantes españoles del Grado en Maestro en Educación Primaria (GMEP) (MECD, 2007). El cuestionario ha sido aplicado a varios grupos de estudiantes de las universidades de Granada y Jaén que cursan el GMEP bajo los nuevos planes de estudios. El cuestionario se aplicó a grupos de clase completos ya que la finalidad era, no solo recabar información evaluativa sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, sino también usar la actividad de resolución de las tareas como dispositivo para una acción formativa posterior. El informe aquí presentado se refiere solo a los resultados evaluativos correspondientes a las variables cuantitativas descritas anteriormente.

Tabla 1

*Distribución de la muestra según universidades y género*

	Hombre		Mujer		Total	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Granada	56	37,1	185	59,1	241	51,9
Jaén	95	62,9	128	40,9	223	48,1
Total	151	100,0	313	100	464	100

En la tabla 1 mostramos el tamaño de muestra en cada universidad y su distribución según género.

## **Análisis**

Para el análisis de los ítems se han aplicado técnicas estadísticas descriptivas (promedios, dispersiones, gráficos de cajas). Tras la comprobación de la normalidad de las puntuaciones totales y de las subescalas se han aplicado pruebas inferenciales paramétricas para la comparación de grupos, incluyendo pruebas *t* de comparación de muestras independientes. Finalmente se realiza un análisis factorial para explorar la estructura de las respuestas de los participantes a los ítems.

## **Resultados**

En este apartado se estudian, en primer lugar, algunas características psicométricas del cuestionario CDM-VOT. Seguidamente analizamos los resultados obtenidos sobre el nivel de conocimientos sobre visualización espacial analizando las diferencias por grupo por género.

## **Análisis de ítems**

La tabla 2 incluye los índices de dificultad de los ítems del cuestionario calculados para toda la muestra. Este índice no es el porcentaje de respuestas correctas ya que se han asignado puntuaciones de 0, 1 y 2, según el grado de corrección de las respuestas. Se ha calculado la media de puntuaciones de cada ítem y para facilitar la interpretación se ha transformado dicha puntuación media al intervalo [0 – 100]. Como se indica en la Tabla 2 la puntuación media ha sido de 54.05 (error típico, 0.95) (en una escala de 0 a 100).

Encontramos ítems con muy baja dificultad (1a. Posición de las vistas y 5a. Generación de cuerpos revolución) con valores por encima de 90. Por el contrario encontramos ítems con una dificultad muy alta, como es el ítem 5c. Generación del toro con una dificultad de 14.33 y el ítem 2c. Composición de cubos y vistas ( $M=23.71$ ). El resto de ítems muestran una dificultad media con índices entre 40 y 60.

Tabla 2

*Índice de dificultad de los ítems del cuestionario CDM-VOT (n=464)*

ITEM. Descriptor	Índice de dificultad		Discriminación: Diferencia de medias (P <sub>33</sub> -P <sub>66</sub> )		Discriminación correlación ítem - total	
	<i>M</i>	<i>Error típico</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>p</i>
1a. Posición de las vistas	91.92	1.253	4.76	.000	.350	.000
1c. Vista desde atrás	48.92	2.273	15.04	.000	.559	.000
2a. Dibujar objeto dados planta y alzados	70.80	1.889	12.23	.000	.553	.000
2c. Composición de cubos y vistas	23.71	1.606	12.39	.000	.582	.000
3a. Identificar desarrollos del cubo	46.01	1.766	13.71	.000	.551	.000
3c. Dibujar desarrollos de un sólido	47.95	1.996	14.72	.000	.583	.000
4a. Partición de un cilindro	61.75	2.209	16.78	.000	.609	.000
4c. Composición de sólidos con dos piezas	44.61	1.997	17.76	.000	.616	.000
5a. Generación de cuerpos de revolución	90.52	1.344	6.08	.000	.370	.000
5c. Generación del toro	14.33	1.467	7.50	.000	.440	.000
DIFICULTAD MEDIA	54,05	0,95				

En la segunda columna de la tabla 2 se incluye el índice de discriminación de los ítems como la diferencia de medias entre el grupo de bajo rendimiento (percentil 33) y el grupo de rendimiento superior (percentil 66) resultando todos los ítems con una adecuada discriminación ( $p < .001$ ). En la última columna se incluye el índice de discriminación como correlación ítem-total. Los ítems de dificultad media son los que arrojan mejores valores de discriminación, permitiendo discriminar mejor entre alumnos con baja y alta ejecución, así como correlacionando mejor con la puntuación total en la escala.

### Fiabilidad y estructura factorial

El coeficiente de fiabilidad obtenido para la escala (Alfa de Cronbach), aplicada a la muestra de 464 estudiantes, ha sido de .711 ( $> .60$ ), que es *acceptable* (Hair, Anderson, Tatham y Black, 2010; George y Mallery, 2003). Si se analiza la fiabilidad por subescalas se obtiene un valor de coeficiente alfa de .503 para la parte “conocimiento común” de la escala y

un coeficiente .594 para la parte “conocimiento ampliado”. Teniendo en cuenta el número reducido de ítems en cada una de las partes se consideran buenas medidas de fiabilidad.

Para obtener un indicio de validez de constructo del instrumento, se realiza un análisis factorial de componentes principales y *rotación varimax* (Kaiser, 1958) tras la verificación de la adecuación de los datos a este tipo de análisis (KMO=.820; Bartlett:  $\chi^2= 533.06$ , 45gl,  $p<.001$ ). Se obtiene una solución de 3 factores con autovalor mayor que 1 y que explican un 49.08% de la varianza. En la tabla 3 se presenta la matriz de componentes rotados, en la que se han suprimido aquellas cargas factoriales por debajo de .30 para una mejor interpretación de los resultados.

Tabla 3  
*Matriz de componentes rotados*

	Componente		
	1	2	3
1a. Posición de las vistas			.704
1c. Vista desde atrás		.725	
2a. Dibujar objeto dados planta y alzados	.388		.386
2c. Composición de cubos y vistas		.606	
3a. Identificar desarrollos del cubo		.647	
3c. Dibujar desarrollos de un sólido	.393	.399	
4a. Partición de un cilindro	.526		
4c. Composición de sólidos con dos piezas	.580		
5a. Generación de cuerpos de revolución			.729
5c. Generación del toro	.790		

El factor 1 explica el 28.14% de la varianza y se refiere a *Composición-descomposición de figuras*. Está relacionado con los conocimientos geométricos espaciales en general ya que todos los ítems tienen correlaciones positivas con este factor. Aunque son los ítems que se refieren a la habilidad de componer y descomponer sólidos los que tienen mayores correlaciones, encontrar el desarrollo del tronco de pirámide (3c) se puede ver también como una descomposición, así como la fusión del alzado, planta y perfil de 2a para dibujar el objeto. El factor 2 explica el 10.84 % de la varianza y se refiere a *Proyecciones y desarrollos*. Refleja principalmente habilidad para coordinar diferentes tipos de representaciones planas de un objeto y reconocer la existencia de distintas



soluciones posibles, constituyendo en este caso un conocimiento ampliado del contenido. Se compone de ítems de nivel de dificultad baja-media. El factor 3 retenido explica el 10.08% de la varianza y se refiere a la habilidad de realizar mentalmente *rotaciones de figuras*, o del propio observador.

La distinción entre conocimiento común y ampliado del contenido geométrico, tomada en cuenta en el diseño de los ítems, no ha quedado reflejada en la estructura factorial de las respuestas al cuestionario al estar los ítems tipo *a* y *c* presentes en los tres factores, excepto en el 3, que solo incluyen ítems tipo *a*.

## Análisis Comparativo de los Conocimientos de los Estudiantes

### Análisis por Universidades

En la tabla 4 se incluyen las medias y desviaciones típicas de la variable puntuación total del instrumento, así como la comparación de medias analizadas según el grupo evaluado (universidad). La puntuación máxima alcanzable en el total de la escala es de 20, encontrando que existen diferencias significativas en las puntuaciones medias de las universidades ( $t= 5.61$ ,  $p<.001$ ) destacando la Universidad de Granada (tabla 4). Se comprueba de este modo que el estudio del tema de geometría realizado por los estudiantes de la Universidad de Granada ha podido tener un efecto

Tabla 4

*Puntuaciones medias y desviaciones típicas de la puntuación total según universidades y género*

Puntuación	Universidad	n	M	DT	t	p	d
Total de la escala	Granada	241	11.80	4.02	5.61	<.001	0.52
	Jaén	223	9.73	3.93			
	TOTAL	464	10.81	4.11			
C. común	Granada	241	7.68	1.97	4.95	<.001	0.46
	Jaén	223	6.71	2.23			
	TOTAL	464	7.21	2.15			
C. avanzado	Granada	241	4.12	2.59	4.87	<.001	0.45
	Jaén	223	3.01	2.29			
	TOTAL	464	3.59	2.51			

positivo, aunque al no contemplar de manera explícita la visualización espacial tal efecto ha sido limitado. Como se ha indicado anteriormente, los estudiantes de la Universidad de Jaén respondieron en base a sus conocimientos logrados en secundaria.

En cuanto a las puntuaciones de cada grupo en las dos subescalas del instrumento encontramos también diferencias significativas ( $p<.001$ ) en ambas, con puntuaciones medias superiores en el grupo de Granada (ver tabla 4).

Seguidamente se muestra la comparación por género en la Tabla 5. Encontramos unas mayores puntuaciones en los hombres respecto a las mujeres en todas las puntuaciones analizadas (ver tabla 5), aunque estas diferencias sólo resultan ser significativas en el conocimiento avanzado ( $t=3.92$ ,  $p<.001$ ,  $d=0.38$ ) y en la puntuación total ( $t=3.10$ ,  $p<.001$ ,  $d=0.30$ ).

Tabla 5

*Estadísticos descriptivos y comparación de medias por género*

Puntuación	Género	n	M	DT	t	P	d
Total de la escala	mujer	312	10.40	4.06	3.10	<.001	0.30
	hombre	152	11.65	4.09			
	Total	464	10.81	4.11			
C. Común	mujer	312	7.12	2.14	1.35	.175	0.13
	hombre	152	7.41	2.16			
	Total	464	7.21	2.15			
C. Avanzado	mujer	312	3.27	2.43	3.92	<.001	0.38
	hombre	152	4.23	2.54			
	Total	464	3.59	2.51			

En la figura I comparamos las distribuciones de frecuencias de la puntuación total en las dos universidades mediante gráficos de cajas. Podemos observar que el rango es mayor en las mujeres que en los hombres, lo que significa que aunque las mujeres alcancen inferiores puntuaciones en promedio, también obtienen las puntuaciones extremas; en Granada algunas mujeres alcanzan la máxima y mínima puntuación, mientras que en Jaén, la puntuación máxima es de algunas mujeres.

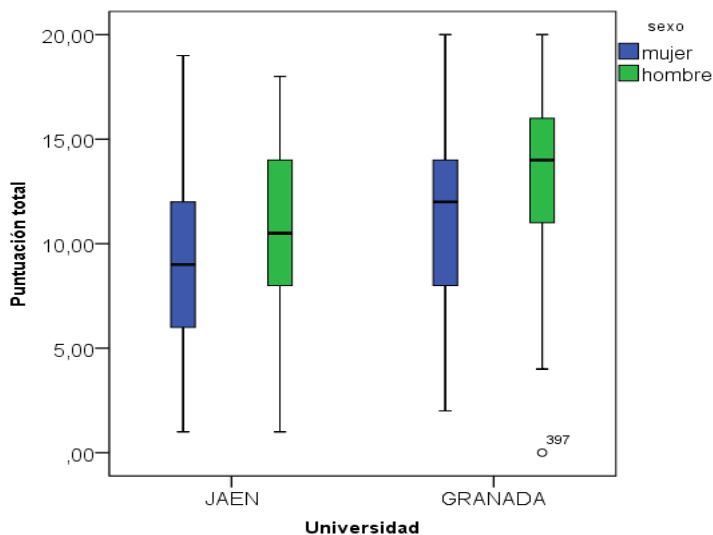


Figura 1. Gráficos de cajas de la puntuación total según universidades y género

### Análisis de los conocimientos geométricos (común y ampliado)

En la tabla 5 se muestra que las puntuaciones totales relativas al grado de “corrección de la respuesta” indican una gran diferencia entre el conocimiento común del contenido (puntuación media = 7,21) y conocimiento ampliado del contenido (puntuación media = 3,59). En la tabla 6 se muestran las frecuencias absolutas (y porcentaje) de dicha variable para los ítems tipo *a* (conocimiento común del contenido).

Observamos que el ítem que resultó más difícil fue el 3a, relativo al contenido “plegar y desplegar desarrollos”, en el cual se pedía identificar los desarrollos correspondientes a un cubo: sólo el 25,2% de los estudiantes contestó de forma correcta a dicha pregunta. Errores frecuentes en este ítem se refieren a no identificar los desarrollos B), D), F) entre los posibles, o bien identificar como posible desarrollo el E (ver Anexo).

Mesquita (1992) observa que los desarrollos en cruz o en T, son asociados con más facilidad al cubo que los demás, por su regularidad y su simetría, mientras que en los otros desarrollos las identificaciones de los segmentos equivalentes son menos evidentes.

Tabla 6

*Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas a los ítems tipo a (n=464)*

Grado de corrección	Ítem				
	1a	2a	3a	4a	5a
Correcto	425 (99,6)	290 (62,5)	117 (25,2)	277 (59,7)	418 (90,1)
Parcialmente correcto	3 (0,6)	77 (16,6)	193 (41,6)	19 (4,1)	4 (0,9)
Incorrecto	35 (7,5)	79 (17,0)	150 (32,3)	139 (30,0)	29 (6,3)
En blanco	1 (0,2)	18 (3,9)	4 (0,9)	29 (6,3)	13 (2,8)

En cuanto al ítem 2a relacionado al contenido “coordinar e integrar vistas de objetos (dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales)” hemos identificados los siguientes tipos de errores:

- Errores relativos a la técnica de dibujo utilizada para representar el objeto: no se respetan las propiedades de la proyección utilizada.
- Errores en las proporciones: la forma global del objeto es correcta pero hay grandes errores en las proporciones relativas de las partes que componen el objeto.
- Errores de coordinación e integración de las vistas: no consiguen dibujar la forma global del objeto, dibujan un objeto por cada vista.

Se observa que la mayoría de los estudiantes dibujaron el objeto en perspectiva caballera, que es muy frecuentemente utilizada en el dibujo de los sólidos en los libros de textos de primaria. En el contexto de formación de profesores señalamos el trabajo de Malara (1998), que también destaca dificultades de coordinación de las vistas de un objeto tridimensional de un grupo de profesores de escuela secundaria.

En el ítem 4a, relativo a la “composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional” la mayoría de errores fueron sobre la interpretación de la representación plana del objeto: el estudiante interpreta la representación como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el

objeto que representa (el alumno “corta la representación” y no el objeto que representa).

En la tabla 7 se presentan las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta para los ítems tipo *c* de conocimiento ampliado del contenido.

Tabla 7

*Frecuencias absolutas (porcentajes) de las respuestas a los ítems tipo c (n=464)*

Grado de corrección	Ítem				
	1c	2c	3c	4c	5c
Correcto	217 (46,8)	53 (11,4)	162 (34,9)	149 (32,1)	45 (9,7)
Parcialmente correcto	20 (4,3)	114 (24,6)	121 (26,1)	116 (25,0)	43 (9,3)
Incorrecto	215 (46,3)	264 (57,1)	136 (29,3)	154 (33,2)	298 (64,2)
En blanco	12 (2,6)	32 (6,9)	45 (9,7)	45 (9,7)	78 (16,8)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento avanzado relacionado con la pregunta 2c (de coordinación e integración de las vistas para formar un objeto) y 5c (generar un cuerpo de revolución con eje exterior a la figura). Resumimos los principales errores y dificultades identificadas en dichos ítems. Por lo que se refiere al ítem 2c, observamos que la mayoría de los errores identificados están relacionados con la dificultad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto. Esta dificultad podría estar relacionada con la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma unívoca un objeto tridimensional. Muchos estudiantes afirman que cambiando parte de la estructura del objeto por lo menos una vista tiene que cambiar (incorrecto en general y de manera particular en el caso de la tarea propuesta).

En el ítem 5c los errores identificados van asociados a una concepción incorrecta de cuerpo de revolución, como sólido generado por la rotación de

una figura alrededor de un eje únicamente interior o tangente a ella. Una posible causa de éste error puede ser las representaciones de los cuerpos de revolución en los libros de textos de primaria: se suelen representar las figuras planas pegadas a barras que giran.

De forma general el conocimiento ampliado del contenido de estos estudiantes puede ser calificado como insuficiente. Diferentes dificultades van asociadas a la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales. Estas dificultades pueden obstaculizar y a veces impedir un procedimiento de tipo visual sobre el objeto. Pensamos que para un futuro profesor de escuela primaria es importante no solo visualizar el objeto sino también poder comunicar su forma con diferentes tipos de representaciones planas, para desarrollar dicha habilidad en sus alumnos.

### Reflexiones Finales

Con este trabajo se aporta información significativa sobre el estado de los conocimientos de una muestra de futuros maestros en Educación Primaria acerca de la visualización de objetos tridimensionales (VOT). De esta manera, se completa la información aportada en Gonzato, Godino y Neto (2011) y Gonzato, Godino y Contreras (2011) y otros estudios previos sobre la visualización y razonamiento geométrico en futuros maestros (Fernández, 2011).

En términos generales hemos desvelado importantes carencias en los conocimientos de los futuros maestros que se están formando actualmente en España en el marco del Plan de Estudios establecido en 2010 (MECD, 2007), de acuerdo con las directrices emanadas del Espacio Europeo de Educación Superior (Plan Bolonia). A pesar de que el Grado en Maestro en Educación Primaria ha incluido un cuarto año (lo que ha supuesto pasar de 180 créditos ECTS a 240), esto no ha modificado sustancialmente el perfil generalista y psico-pedagógico de la formación de maestros.

Rico, Gómez y Cañadas (2014, p. 58) informan que los resultados del estudio TEDS-M muestran la necesidad de poner un mayor énfasis en los temas de didáctica de la matemática y proporcionar una mejor cobertura para los temas de las matemáticas escolares: esto debería tenerse en cuenta para el futuro en los niveles institucional y formador. En este trabajo se aportan datos experimentales que sustentan estos análisis. Así, la situación continúa siendo claramente deficiente tras la implantación de los nuevos

programas basados en las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior, al menos en lo que respecta al bloque de contenido de visualización espacial.

Las tareas incluidas en el cuestionario (ver anexo) pueden ser usadas, no solo para evaluar el estado de los conocimientos de los estudiantes en los momentos iniciales o finales de la formación, sino también como reactivos de intervenciones formativas orientadas al desarrollo de tales conocimientos. Tras la resolución individual del cuestionario, se pueden organizar sesiones de presentación y discusión colectiva de las soluciones aportadas, así como de otras tareas relacionadas, lo cual creará las condiciones para la reflexión y el estudio de los conocimientos implicados en la visualización de objetos tridimensionales.

Desde el punto de vista metodológico, hay que observar que las muestras han sido tomadas de manera intencional. Esto no resta representatividad de los grupos en las universidades participantes, ya que los estudiantes se distribuyen en los mismos de manera aleatoria, de tal modo que es posible asumir su representatividad con relación a las universidades. Sin embargo, una mejora del estudio, en su faceta evaluativa del estado de los conocimientos sobre VOT de los futuros maestros de primaria, sería incluir una muestra más amplia de universidades, controlando explícitamente la distribución aleatoria y representativa de las muestras seleccionadas.

Como líneas de futuro trabajo dentro del problema de evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre visualización espacial y su didáctica, y en el marco del modelo CDM (Godino, 2009), podemos mencionar el diseño de ítems relativos a las facetas,

- Afectiva, esto es, conocimientos de los futuros maestros sobre actitudes, motivación, emociones y creencias y su influencia en el aprendizaje de la geometría espacial.
- Ecológica, aspectos curriculares y conexiones con otros contenidos.
- Mediacional, uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de la visualización de objetos tridimensionales.

## **Reconocimiento**

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

## Referencias

- Association des Professeur de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P) (1983). 1. Géométrie, Elem-Math VII. *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, n. 49.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in Mathematics*, 16(4), 389-409. doi: [10.1007/BF00417194](https://doi.org/10.1007/BF00417194)
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25(1), 51-71. Doi: [10.3102/00028312025001051](https://doi.org/10.3102/00028312025001051)
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Fernández, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.
- George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0 Update*, 4.<sup>a</sup> ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135. doi:[10.1007/s11858-006-0004-1](https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1)



- Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 109-130.
- Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En, M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383 – 392). SEIEM, Ciudad Real.
- Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico- matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5-37.
- Gorgorió, N. (1994). *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35(3), 207-231. doi:[10.1023/A:1003132603649](https://doi.org/10.1023/A:1003132603649)
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Hair, J.F., Anderson, W.C., Tatham, R.L., y Black, W.C. (2010). *Multivariate data analysis: a global perspective*, 7th ed. Upper Saddle River (NJ): Pearson Prentice Hall.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Vol 1* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23(3), 187-200. doi:[10.1007/BF02289233](https://doi.org/10.1007/BF02289233)
- Kaufman, S. B. (2007). Sex differences in mental rotation and spatial visualization ability: Can they be accounted for by differences in working memory capacity? *Intelligence*, 35(3), 211–223. doi:[10.1016/j.intell.2006.07.009](https://doi.org/10.1016/j.intell.2006.07.009)

- Lappan, G., Phillips, E. D. y Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, 77, 618-623.
- Linn, M. C., y Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterisation of gender differences in spatial abilities: A meta-analysis. *Child Development*, 56(6), 1479-1498.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- MECD (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 312, de 29 de diciembre, 53747- 53750.
- MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 52, de 1 de marzo, 19349 a 19420.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural Topology*, 18, 19-30.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principios y estándares 2000. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.
- Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference*, 4, 385-392.
- Potari, D. y Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children's drawings and actions while constructing the nets of solids: the case of the conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23(4), 41-62.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14

**Juan D. Godino** es catedrático de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada, España.

**Margherita Gonzato** es doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España.

**Ángel Contreras** es profesor de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Jaén, España.

**Antonio Estepa** es profesor de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Jaén, España.

**Carmen Díaz-Batanero** es profesora de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Huelva, España.

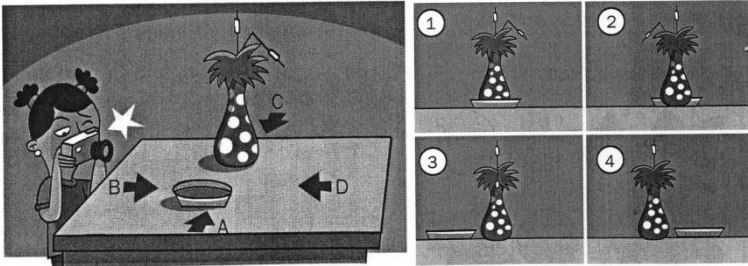
**Contact Address:** La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada (España). **Email:** [jgodino@ugr.es](mailto:jgodino@ugr.es)

Anexo

Cuestionario sobre visualización de objetos tridimensionales  
(Cuestionario CDM-VOT)

TAREA 1

1a) ¿Desde qué posición se ha tomado cada una de las fotografías que ves a la derecha?

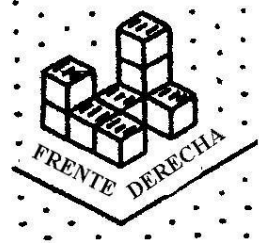


1a') Justifica la respuesta

1b) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea 1a).

1b') Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea 1a) para que resulte más difícil de resolver por un niño de primaria.

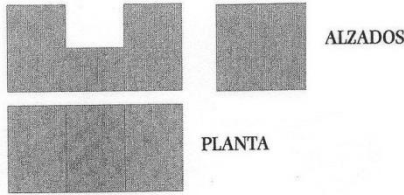
1c) La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.



Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica tu respuesta.

**TAREA 2**

2a) Dibuja el objeto que tiene estas vistas.



2a') Justifica la respuesta.

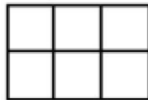
2b) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea 2a).

2b') Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea 2a) para que resulte más fácil de resolver por un niño de primaria.

2c) En la siguiente figura se representa una composición de cubos y sus vistas.



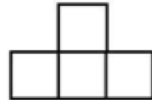
Alzado



Perfil



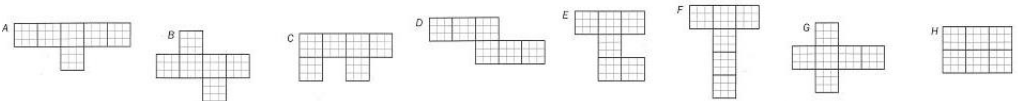
Planta



¿Puedes quitar o añadir un cubo a la anterior composición de manera que al hacerlo se sigan manteniendo las mismas vistas? Justifica tu respuesta.

**TAREA 3**

3a) Escribe cuáles de estos desarrollos corresponden a un cubo.

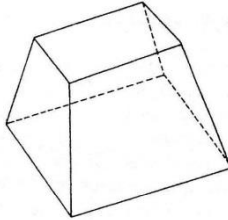


**3a')** Justifica la respuesta.

**3b)** Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **3a)**.

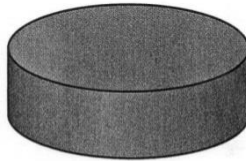
**3b')** Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **3a)** para que resulte más fácil de resolver por un niño de primaria.

**3c)** Dibuja dos posibles desarrollos del sólido representado en perspectiva en la siguiente figura.



#### TAREA 4

**4a)** ¿Cómo podemos partir este cilindro en 8 partes dando solo 3 cortes?

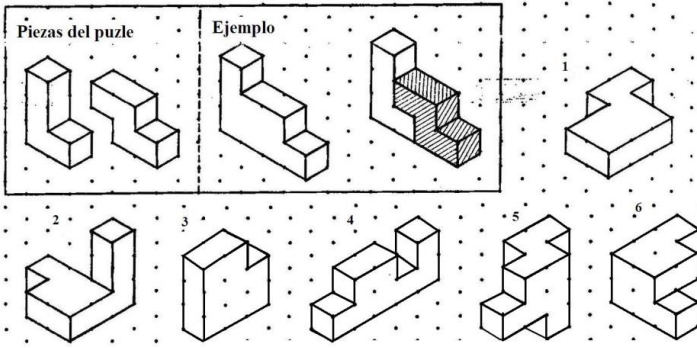


**4a')** Justifica la respuesta.

**4b)** Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **4a)**.

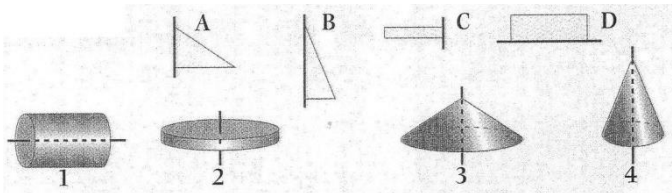
**4b')** Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **4a)** para que resulte más difícil de resolver por un niño de primaria.

**4c)** Juntando dos piezas de un puzle se pueden construir nuevos sólidos, como se muestra en el ejemplo. Cada uno de los siguientes sólidos se forma al juntar estas dos piezas. Para cada uno, muestra cómo se construye, rayando una de las piezas que lo compone.



### TAREA 5

**5a)** Haz corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado.



**5a')** Justifica la respuesta.

**5b)** Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **5a)**.

**5b')** Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **5a)** para que resulte más difícil de resolver por un niño de primaria.

**5c)** Dibuja la figura plana y el relativo eje de rotación alrededor del cual, haciendo girar la figura (de  $360^\circ$  o más) se engendra el siguiente cuerpo de revolución.

