ELEMENTOS COGNITIVOS DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA

María Dolores García Martínez, José Armando Albert Huerta

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY, CAMPUS MONTERREY

CICATA DEL IPN

mdgarcia@itesm.mx, albert@itesm.mx

Resumen. *La proporción es un elemento matemático fundamental en la formación y en la actividad de los Arquitectos. Sin embargo, diversas investigaciones muestran las deficiencias de aprendizaje de este concepto desde el nivel básico hasta el superior. Esta investigación aporta elementos cognitivos sobre cómo abordan estudiantes universitarios de arquitectura problemas de proporciones. Entre otros resultados, pudo observarse que las dificultades reportadas por otros investigadores en los niveles educativos previos al universitario, no han sido superadas. Sin embargo, también se pudo observar en ellos el uso de heurísticas parcialmente exitosas como la de reducir sus proporciones a razones de tipo unitario y la heurística del reparto, entre otras. Los resultados de esta investigación también señalan que el sistema educativo ha de poner mayor atención a la proporción desde su representación algebraica.*

Palabras Clave: Arquitectura, proporción, razonamiento

Introducción

El concepto de proporción es central tanto en la formación del arquitecto como en su ejercicio profesional. El arquitecto necesita de examinar diversas obras desde la perspectiva de sus proporciones por razones estéticas, históricas, de ergonomía o presupuestales, entre otras. Las proporciones también las ocupan para hacer análisis de los espacios en el diseño y para las traslaciones de maquetas y prototipos a la realidad donde un sinnúmero de relaciones proporcionales se presentan no sólo referidas a longitudes, áreas y volúmenes sino a masa, resistencia o costos entre otros. Además, las proporciones son un concepto básico para que el estudiante de arquitectura pueda comprender el enorme bagaje cultural e histórico de la Arquitectura pues desde tiempos inmemoriales ésta las ha utilizado para dar belleza a sus obras, para dar armonía a sus trabajos y para ubicar los espacios de tal manera que den confort a quien los habitará. Como el caso de Le Corbusier (1964) quien, con el uso de la proporción áurea genera un sistema de medidas que se ajustan a las proporciones del ser humano basado en una unidad de medida que le llamó *modulor.* De aquí la necesidad de que el estudiante de arquitectura sea competente con la comprensión y uso de las proporciones en los distintos campos de problemas en que están involucradas. García M. D. y Albert J. A. (2005), por su parte, muestran que la proporción es una de las cuatro ideas fundamentales que surgen en la relación Matemática-Arquitectura, junto con la de medida, espacio geométrico y optimización de espacios y recursos que son requeridas para la formación de Arquitectos por sus expertos en el área.

Desde hace muchos años, las proporciones han sido importantes para los investigadores educativos y psicólogos, al punto que le dan nombre propio al tipo de razonamiento matemático involucrado: le llaman *razonamiento proporcional*. Tal es el caso de Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988) quienes además reconocen al razonamiento proporcional como un parte aguas entre la matemática escolar elemental y media superior. Karplus, Pulos y Stage (1983) sostienen que el razonamiento proporcional es el camino propio para la construcción del concepto de función pues implica razonamiento en un sistema de dos variables y, debido a la relación constante que existe entre las dos cantidades que están cambiando, en particular, permite la construcción del concepto de función lineal. El tema de proporción también participa en la construcción de conceptos avanzados pues, a través del uso de los diferenciales y uso de razones de cambio constantes por intervalos, es posible la construcción de la ecuación de continuidad, entre otros, en los cursos de cálculo diferencial e integral (Pulido, 2005).

Las investigaciones acerca del razonamiento proporcional de los estudiantes son muy diversas pues van desde los niveles básicos y medio superior hasta el nivel universitario. Tal es el caso de Czarnocha (1999) quien identifica errores y dificultades en torno a razones y proporciones en el nivel medio. Entre otros resultados, Czarnocha muestra que estudiantes tienen habilidades hacia el trabajo geométrico con escalas 2:1 ó 3:1, pero con escalas 3:2 tienen dificultades. Comenta: "Esto se debe a que la escala 2:1 significa no sólo el objeto inicial de comparación sino también la medida común. En la escala 3:2 la medida común está oculta en los números que definen la razón". Esta medida común 2:1 ó 3:1 es lo que Vergnaud (1991) llama la *razón unitaria.* Vergnaud menciona que en los problemas de tipo unitario basta con resolver una multiplicación, pero en aquellos donde no hay una razón de tipo unitario los estudiantes se enfrentan a una mayor complejidad que él llama *la regla de tres no trivial*. Por su parte, García (1998) muestra con un problema de comparación de razones vinculadas a triángulos semejantes, que estudiantes de preparatoria y de incluso de los primeros semestres de ingeniería tienden a comparar las componentes y no ver la razón como un todo. Por su lado, González (2005) presenta un trabajo realizado con estudiantes de preparatoria quienes son enfrentados a problemas que involucran razonamiento proporcional. Su investigación muestra que aunque pueden resolver problemas de tipo valor faltante, tienen dificultades para trabajar con las ecuaciones que se involucran, con el uso de variables y el signo de igual.

Por lo anterior, puede verse la importancia de continuar las investigaciones en torno al razonamiento proporcional de los estudiantes. En particular, esta investigación está interesada en estudiantes de arquitectura. La complejidad de esta problemática es de naturaleza sistémica, en el sentido de Brousseau (1997), y puede ser abordada desde las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural (Cantoral, 1999). Esta investigación aporta esencialmente elementos dentro la dimensión cognitiva.

Metodología

Este estudio se basa en el uso de la técnica de la entrevista exploratoria aplicada a dos estudiantes del primer semestre de Arquitectura de una universidad del norte de México. El diseño de su protocolo se fundamenta en los niveles de dificultad que Vergnaud (1991) y Czarnocha (1999) muestran en sus investigaciones sobre la complejidad de las proporciones desde los contextos aritmético y geométrico: razón unitaria con números naturales, razón no unitaria con naturales, razones no unitaria con números decimales. Esta investigación añade para su estudio debido a la gran importancia que tiene para los arquitectos, dos elementos más: las proporciones vinculadas con los cambios de escala y las proporciones referidas a las unidades de medida y sus diferentes dimensiones. Se pretende verificar si tales niveles se presentan en estudiantes de arquitectura, pues los estudios antes mencionados están centrados principalmente en el nivel básico. Por otra parte, se busca observar si se presentan las dificultades reportadas por González (2005) sobre el manejo de las ecuaciones que involucran en proporciones, el uso de variables y el signo de igual.

Diseño de protocolo

En primer término se plantea una actividad donde el alumno debe usar una proporción con razón unitaria. Se les entrega una imagen impresa de un edificio con una viga lateral cuya medida total en el papel es de 5.5 cm y su parte superior tiene una marca que la divide en dos partes, la parte superior mide 1 cm en el papel.

Actividad 1: *En el extremo izquierdo de la fotografía siguiente se encuentra una viga. Se desea calcular la altura de esta viga. Si se sabe que la longitud de la parte superior de la viga-en rojo- mide 70 centímetros, calculen cuánto debe medir la viga desde el suelo hasta el techo.*

En la segunda actividad se espera que el alumno utilice proporciones para hallar una razón de unidades de medida cuadrática a partir de una razón de unidades de medida lineal. Se le da una hoja donde se muestra un segmento de recta de 1 cm (papel) y frente a este segmento otro de 10 cm (papel) que representa 10 metros reales. La actividad es la siguiente:

Actividad 2: *Se sabe que el segmento de la izquierda que mide 1 cm. de longitud en papel es equivalente a 10 metros de un objeto real, como se muestra a la derecha.*

Con el segmento de la figura de la izquierda se produce un cuadrado de lado 1 cm y que ocupa un área de 1cm^2.

a) ¿qué figura semejante a la anterior corresponderá a la figura de la derecha?

b) ¿Qué área ocupa la figura del inciso anterior?

La actividad 3 consta de cuatro etapas.

En la primera etapa, se espera que el estudiante otra vez utilice proporciones para hallar una razón de unidades de medida cuadrática a partir de una razón de unidades de medida lineal, pero esta vez ya no se hace referencia a figuras geométricas, sino que se espera recurra a planteamientos algebraicos relativos a proporciones.

Actividad 3.1. *Se sabe que un centímetro de esta hoja:* $1cm_p$*, es equivalente a 10 metros reales:* $10m_R$. *Calculen cuántos metros reales al cuadrado:* m_R^2*, equivalen a un centímetro cuadrado de papel:* $1cm_p^2$.

En esta segunda etapa, se espera lo mismo que la anterior, pero esta vez se trabajará números naturales y razones no unitarias.

Actividad 3.2. *Se sabe que 4 centímetros de esta hoja:* $4cm_p$*, es equivalente a 6 metros reales:* $6m_R$. *Calculen cuántos* m_R^2 *equivalen a* $1cm_p^2$.

En la tercera etapa, se espera lo mismo que la anterior, pero ahora con números decimales.

Actividad 3.3. *Se sabe que 3.6 centímetros de esta hoja:* $3.6cm_p$ *es equivalente a 9.2 metros reales:* $9.2m_R$. *Calculen cuántos* m_R^2 *equivalen a* $1cm_p^2$.

En la última etapa, se espera que el estudiante utilice proporciones para hallar una razón de unidades de medida lineal a partir de una razón de unidades de medida cuadrática. Es el proceso inverso a las anteriores etapas.

Actividad 3.4. *Se sabe que un centímetro de esta hoja: $1cm_p$, es equivalente a 10 metros reales: $10m_R$. Si se tiene un área de 20 m^2 reales ¿A cuánto corresponde en medida de papel?*

En la actividad final, se le da a los estudiantes la imagen de un estadio para que ellos calculen el área de la pista a partir de conocer una escala lineal y la medida del área que ocupa la imagen.

Actividad 4

En la siguiente figura se muestra el Estadio del Tecnológico de Monterrey.

Se necesita calcular el espacio que ocupa la pista roja cuyos extremos tienen forma elíptica, como se observa en la figura

Si se sabe que:

- La escala es 1cm a 28mts.

- El área que ocupa en papel es de 5.45 cm^2

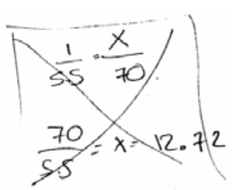
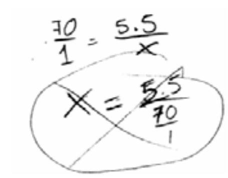
¿Qué área ocupa esta región en medidas reales?

Tiempo de realización: 1 hora 30 minutos.

La participación del profesor fue sólo para plantear las preguntas y resolver dudas del planteamiento de los problemas, así como hacer preguntas para aclarar las ideas y justificaciones que los estudiantes tenían para responder como lo hacían, pero sin dar pista de solución. El análisis se basó en la videograbación y transcripción de la entrevista y de los escritos de los estudiantes.

Resultados y Discusión

Actividad 1. Los estudiantes identifican que el problema está vinculado con proporciones y plantean lo sigue:

María  Andrés: 

En la figura de María puede verse que ella compara objeto menor con objeto mayor: En la primera razón está comparando 1cm (segmento menor) con 5.5cm (segmento mayor) ambos de la medida en papel. En la segunda razón, María compara ***x*** cm (segmento mayor) con 70 cm (segmento menor), ambos de la medida real. Por separado cada una de estas razones es válida, pero al igualarlas ya no se cumple la proporción (habría que invertir una de las dos para que se cumpliera).

En la figura de Andrés, él compara la medida en papel con medida de real para cada uno de los segmentos: En la primera razón compara 70 cms_R (medida real del segmento menor) con $1cm_p$ (medida en papel). En la segunda compara 5.5 cm_p (medida en papel) con ***x*** (la medida que se busca en unidades reales). Al comparar estas razones tampoco se produce la igualdad. Por tanto, no llegan a un resultado coherente.

Sin embargo, Andrés se percata de que el resultado no es posible de acuerdo a los datos. Andrés utiliza, entonces, una heurística que llamaremos de reparto que consiste distribuir la cantidad básica (1 cm_p) en el segmento total de papel (5.5 cm_p) para luego multiplicar el resultado anterior por lo que vale una unidad de papel en medidas reales (70 cm_R). Ellos encuentran un resultado correcto y buscan justificarlo con el uso de una ecuación que represente a la proporción en cuestión y les produzca el valor que ya habían encontrado, como puede verse en sus siguientes escritos:

$$\frac{x}{55} = \frac{70}{1}$$
$$X = 70(5.5) = \boxed{385 \text{ cm}}$$

Aunque los estudiantes distinguen que se trata de un problema de proporciones se pudo observar que tienen dificultades para lograr plantear la proporción de forma algebraica.

Actividad 2. En esta actividad los alumnos no tienen dificultades para resolverla pues la razón dada es unitaria 10:1. Además, la actividad está relacionada con un cuadrado cuyo lado es conocido y cuya área pueden calcular de inmediato.

Actividad 3.1. En esta actividad, los estudiantes la resuelven sin dificultad numéricamente, pero no le dan importancia a las unidades. Ellos identifican que basta con elevar al cuadrado ambas cantidades relacionadas. Sin embargo, cuando se les pide justificar su respuesta, ellos escriben:

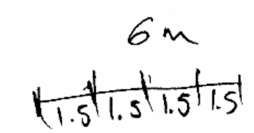
$$10^2. \quad = 100 \text{ m r}$$
$$1 \text{cm}^2 = 1 \times 1$$
$$10 \text{m}^2 = 10 \times 10 = 100$$

Actividad 3.2. En esta actividad, la primera dificultad que se les presentó a los estudiantes fue plantear la ecuación. Ellos escriben una expresión tratando de identificar una regla de tres, pero al aplicar su heurística de reparto, para verificar si están bien, se dan cuenta que el número resultante no es congruente con los demás datos. Aumentaron sus dificultades para verificar si estaban en lo correcto al no usar adecuadamente las unidades. Ellos empiezan a desarrollar una estrategia de reducir el problema a uno de razón unitaria. Ellos escriben:

$$4\text{cm} = 6\text{m}$$
$$\frac{6}{4} = 1.5\text{m} = 1\text{cm}$$
$$1.5 \times 1.5 = 2.25$$

Llegan a la cantidad correcta, pero no usan unidades aún.

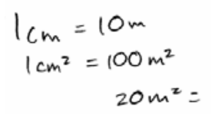
María pide a Andrés que justifique por qué divide 6 entre 4 y no al revés. Andrés argumenta con el uso de su heurística de reparto:

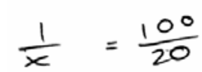


Andrés explica que 6 metros se reparten en 4 cm. Dibuja una línea divida en 4 partes de un centímetro cada uno que representa 1.5 metros reales. Por eso es 6 entre 4. Pareció convencer a María.

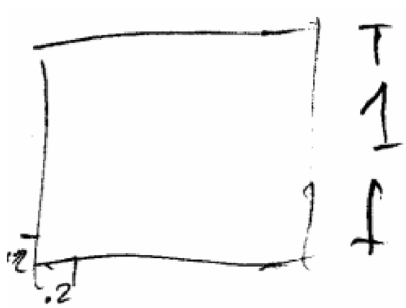
Actividad 3.3. Los estudiantes proceden de igual manera que en la actividad 3.2. Ellos notan que lo único diferente en esta actividad es que el problema se plantea ahora con números decimales. María y Andrés aplican su estrategia de construcción de razón unitaria para luego elevar al cuadrado su relación resultante. Los decimales no representan, aparentemente, una mayor dificultad. Olvidan, sin embargo, las unidades correspondientes. Confían en el procedimiento que han generado para este tipo de problemas y ya no se detienen a comprobar su resultado.

Actividad 3.4. Esta actividad es la que más tiempo les llevó. Aplican su anterior procedimiento de tener la razón unitaria para luego elevar al cuadrado la relación. Finalmente, aplican una proporción con una incógnita para llegar al resultado. Sin embargo, llegan a un número que no les resulta intuitivamente aceptable: 0.2.

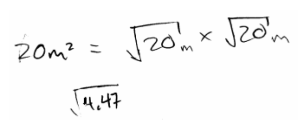


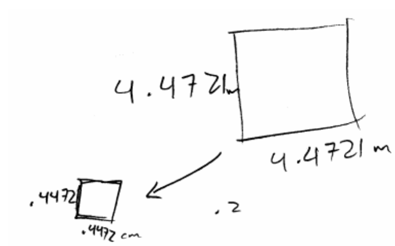


El planteamiento inicial es correcto, aunque, como puede verse en la figura de la derecha de las inmediatas anteriores, se desprenden de las unidades. Buscan validar su resultado con el uso de su heurística de reparto pero no ven cómo usarla en este caso. Su segundo intento es ubicar el 0.2 como el lado de un cuadrado en la esquina inferior de otro de lado 1.

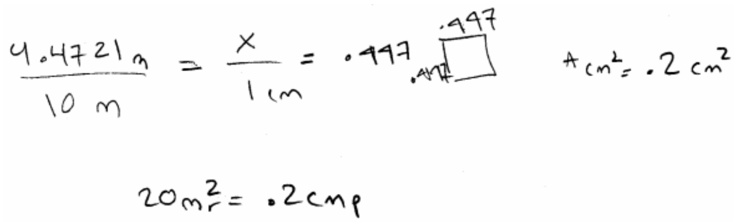


Desechan este proceso pues no les convence. Ellos siguen buscando cómo verificar el número o encontrar otro camino a la respuesta. Después de varias operaciones y cambios de unidades infructuosos, retoman la ruta del uso del contexto geométrico de la actividad 2 pero en sentido contrario: parten del dato proporcionado 20m^2; construyen un cuadrado cuya área sea ese número, es decir, calculan la longitud del lado del cuadrado y, finalmente, pueden fácilmente construir un cuadrado pequeño cuyo lado cumple con la proporción dada: 1cm$_p$ = 10m$_R$. Como se muestra en las figuras siguientes:



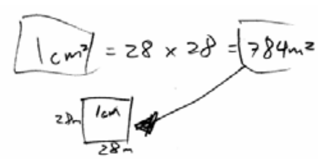


Al elevar al cuadrado el lado del cuadrado chico obtienen el valor .2, en ese momento se dan cuenta que tenían este valor desde su primer planteamiento.

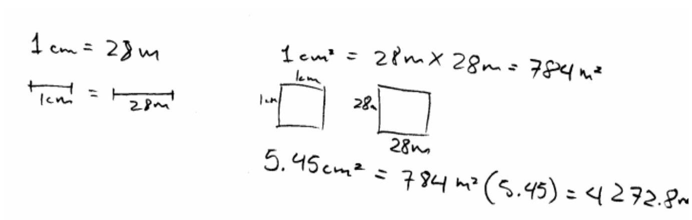


Siguen dudando de su resultado 0.2 cm_p pero lo aceptan por que la gráfica les da confianza del resultado. Se observa que no retoman la proporción que plantearon al principio. Lo que es más, para ellos tener la ecuación no parece ser garantía de que lo que proponen es correcto. También se observa que, al final de la actividad, los estudiantes usan adecuadamente las unidades correspondientes.

Actividad 4. En esta última actividad, se observa como los estudiantes se remiten al uso de figuras de los cuadrados que les han sido útiles para describir el cambio de unidades lineales a cuadráticas. En la siguiente figura se muestra su primer paso para encontrar las unidades al cuadrado:



Finalmente, como en casos anteriores, ellos hacen una multiplicación obtener lo que se pide pues ya tienen la razón unitaria.



En síntesis, se puede mencionar que los estudiantes pueden distinguir una relación proporcional en estos problemas. Ellos saben que hay que igualar dos razones pero no dominan la proporción completa en su representación algebraica. También el escaso manejo de las unidades correspondientes a los datos les causa a los estudiantes confusión sobre el valor que calculan. Sin embargo, ellos tienen arraigada una heurística de reparto o división proporcional que les resultó exitosa en la mayoría de los casos y que fue muy utilizada en el momento que requirieron verificar sus resultados. Pero, cuando el planteamiento del problema es inverso, ellos no pueden resolverlo con sus heurísticas anteriores, sino que tienen que recurrir a otra que se les propone en la actividad 2 sobre el uso del lado y el área de dos cuadrados proporcionales.

Finalmente se observa que los estudiantes siguen una estrategia de trabajo: No importa las cantidades dadas, ellos buscan reducir la proporción a razones de tipo unitario y reducir el problema a uno de tipo multiplicativo. Se observa que cuando pudieron seguir este camino trabajaron con mayor seguridad.

Conclusiones

La proporción es un concepto matemático central en la formación y práctica profesional de todo Arquitecto. Sin embargo, diversas investigaciones muestran la complejidad de este concepto y dificultades para su aprendizaje desde los primeros niveles y que se refleja cuando llegan a la universidad.

Esta investigación pudo mostrar las dificultades que los estudiantes de Arquitectura entrevistados tuvieron para resolver problemas vinculados con proporciones. Particularmente, se pudo comprobar dificultades graves para plantear y manejar proporciones desde un punto de vista algebraico. También se pudo verificar el descuido que ellos tienen con las unidades correspondientes. Sin embargo, a su favor, se puede decir que mostraron gran habilidad en el uso de la heurística del reparto para resolver problemas de proporciones y comprobar resultados. Y para casos en que la anterior heurística no aplicó, ellos supieron recurrir a la heurística del uso del lado y el área de dos cuadrados proporcionales. Dado lo aparentemente exitosas, estas heurísticas podrían ser mejor desarrolladas en el aula, sin embargo, es notable su deficiencia en el planteamiento algebraico de la proporción la cual amerita investigaciones posteriores al respecto.

Reconocimientos

Se agradece el apoyo de la Cátedra en Matemática Educativa del ITESM, Campus Monterrey.

Bibliografía

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. *Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente. *La matematica e la sua didattica.* Pitagora Editrice Bologne, Italie. N. 3, pp. 258 – 270.

Czarnocha, B. (1999). El maestro constructivista como investigador. Cómo enseñar razones y proporciones a adolescentes. *Educación Matemática*. 11(2). pp. 52-63.

Corbusier, Le. (1964). Hacia una Arquitectura. Buenos Aires: Editorial Poseidón, S.R.L.

García, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo*. Tesis de maestría. México: cinvestav-IPN

García M.D., Albert J.A. (2005). Desarrollos matemáticos en Arquitectura. En *Acta Latinoamericana de matemática educativa*. Vol. 18. México: CLAME. pp. 341-347.

González, J. (2005). *Manifestaciones de comprensión que reflejan profesores y estudiantes de bachillerato en actividades que involucran razonamiento proporcional*. Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, Va: Laurence Erlbaum & National council of teachers of mathematics. pp. 93-118

Karplus, R. Pulos, S. & Stage, E. (1983). Early adolescents´ proportional reasoning on “rate” problems. Educational Studies in Mathematics, V-14, No. 3. pp. 219-234.

Pulido, R. (2006). De la regla de tres a la ecuación de continuidad (o la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo). En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J.

Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*. México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C. pp. 113-132

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.