CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE LOS NÚMEROS RACIONALES COMO OBJETO DE APRENDIZAJE: UN ESTUDIO DE CASO

Teacher's knowledge of rational numbers as learning object: A case study

Diana Zakaryan[a], Miguel Ribeiro[b] y José Carrillo[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Centro de investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve, Portugal;[c]Universidad de Huelva, España

diana.zakaryan@pucv.cl[a], cmribeiro@ualg.pt[b], carrillo@uhu.es[c]

Resumen

En esta conferencia presentamos resultados de una investigación desarrollada dentro del Plan de Mejoramiento Institucional de una universidad en Chile. Buscamos caracterizar y comprender el conocimiento del profesor de los números racionales como objeto de aprendizaje, uno de los subdominios del modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) en el caso de una profesora de matemáticas de la enseñanza media chilena, a través de observaciones de aula, cuestionarios y entrevista. Los resultados permiten identificar las necesidades formativas de los profesores y concluir con algunas reflexiones para mejorar la formación inicial de los profesores de matemáticas.

Palabras clave: *conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, números racionales, formación de profesores.*

Abstract

In this conference, we present results of research developed within the Institutional Improvement Plan in a Chilean university. We seek to characterize and understand the teacher's knowledge of rational numbers as learning object, one of the subdomainsMathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) in the case of a Chilean 8th grade elementary school mathematics teacher through classroom observations, questionnaires and interviews. The results to identify some training needs of teachers and conclude with some reflections for improving the initial training of mathematics teachers.

Keywords: *knowledge of the mathematical content as learning object, mathematics teachers' specialized knowledge, rational numbers, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, teniendo en cuenta las recomendaciones de varios organismos internacionales (e.g., UNESCO, OCDE) y a la luz de los resultados poco satisfactorios de las evaluaciones docentes en Chile (e.g., TEDS-M), algunas universidades chilenas tratan de revisar los planes de estudio en las carreras de Pedagogía (e.g., rediseñar el currículo, fortalecer la vinculación entre la Universidad y el sistema escolar), procurando aumentar el nivel de las competencias profesionales de los futuros profesores, con el fin de poder impactar en la mejora de los resultados de aprendizaje de los alumnos. Uno de los aspectos a considerar para la mejora de la enseñanza de las matemáticas, es la preparación integral de profesores – tanto en ejercicio como futuros (e.g., Llinares, Valls, & Roig, 2008) para que puedan ofrecer oportunidades de aprendizaje significativas a sus alumnos. La necesidad de aumentar el nivel de las competencias profesionales de los futuros profesores y la intención de contribuir de manera activa a esa mejora, nos lleva a plantear la pregunta: ¿qué conocimientos necesita un profesor para que la influencia de su práctica en los aprendizajes de los alumnos sea lo más provechosa posible?

Particularmente, nuestro interés en este estudio se centra en caracterizar el conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje de las matemáticas. Investigar acerca de este conocimiento cobra relevancia ya que permite conocer y analizar aspectos del pensamiento matemático de los alumnos (Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2015), valorar y seleccionar las tareas o los ejemplos (Llinares et al., 2008), su orden de presentación y las representaciones apropiadas y formas de navegar entre ellas (Ribeiro, 2011). En ese sentido, considerando la importancia y especificidad del conocimiento del profesor en y para los aprendizajes de los alumnos, es esencial comprender ese aspecto de su conocimiento paraplantear una mejora en la formación del profesorado. Con el fin de enfocar esa mejora donde es efectivamente necesaria, además de discutir situaciones matemáticamente críticas (Ribeiro & Carrillo, 2011), urge la necesidad de una comprensión más profunda de los motivos que producen esa criticidad.En este documento presentamos algunas evidencias y discutimos aspectos del conocimiento del profesor, en particular, en lo que se refiere al conocimiento de los números racionales como objeto de aprendizaje, a partir del análisis de la práctica de una profesora de educación media chilena. El foco en los números racionales se debe a que es uno de los contenidos en el que tanto alumnos como profesores revelan dificultades (e.g., Streefland, 1991) correspondiendo, de este modo, a una de las situaciones críticas que requiere especial atención en la formación de profesores.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO COMO OBJETO DE APRENDIZAJE

A partir de los trabajos de Shulman (1986, 1987) han surgido distintas conceptualizaciones del conocimiento del profesor (e.g., *Mathematical Knowledge for Teaching* – Ball et al., 2008; *Enfoque Ontosemiótico* – Godino, Batanero, & Font, 2007; Knowledge Quarted – Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005; *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – Carrillo et al., 2013). A pesar de diferencias (en algunos casos sustanciales) en términos de lo que se consideran los aspectos esenciales de cada una de esas conceptualizaciones, la importancia del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos es un aspecto común. Poner el foco en el conocimiento del profesor relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del alumno con el contenido matemático permite comprender mejor el conocimiento del profesor acerca del propio proceso de aprendizaje matemático (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes,& Carrillo, 2014) y como resultado de esa comprensión, atender las necesidades de su formación.

Desarrollamos nuestro trabajo bajo el modelo del MTSK, principalmente por la razón de que ese ataña solo la parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas que está condicionada por la propia matemática, es decir, no incluye otros dominios del modelo de Shulman (1986), también pertenecientes al conocimiento profesional (como el conocimiento psicopedagógico general).

El MTSK (Figura 1) considera seis subdominios de naturaleza diferenciable. Tres de ellos conforman el conocimiento del contenido matemático del profesor: conocimiento de los temas y sus fundamentos (KoT); conocimiento de estructuras y conexiones entre los temas (KSM); y conocimiento de las formas de producir y proceder en matemáticas (KPM). El dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido contiene otros tres subdominios: conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje (KFLM), como objeto de enseñanza (KMT) y desde el punto de vista de los estándares que se pueden/deben alcanzar en un determinado momento escolar (KMLS). El MTSK asume un dominio de creencias/concepciones del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, el cual está íntimamente ligado a los subdominios anteriores.

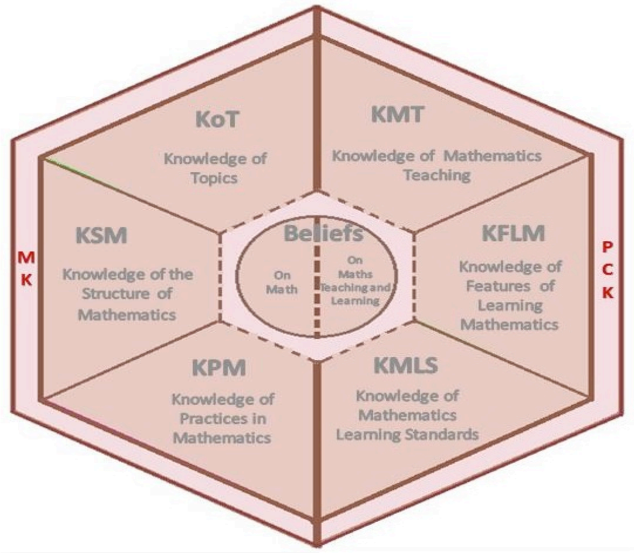

Figura 1. Dominios de Mathematics Teachers Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2013, p.2989)

Tal como mencionamos, el enfoque de nuestro trabajo se centra en el subdominio KFLM. Al igual que los demás subdominios de esta conceptualización del conocimiento del profesor, el KFLM pone el foco principal en las matemáticas, en este caso en el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Esto no implica que se quite importancia al papel del alumno en el proceso, sino que interesa el conocimiento del profesor relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del alumno en sí mismo.

Flores-Medrano et al. (2014),a partir de una revisión de la literatura sobre el conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje, resumen las siguientes categorías para el KFLM: (i) *formas de aprendizaje*; (ii) *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*; (iii) *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*; (iv) *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*. A continuación describimos y ejemplificamos cada una de estas categorías.

(i) *Formas de aprendizaje*, se refiere al conocimiento que posee el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento sobre el desarrollo cognitivo del alumno tanto para la matemática en general, como para los contenidos particulares. Por ejemplo, un profesor puede conocer, de manera formal o informal, la secuencia de acciones, procesos, objetos y estructuras (Arnon et al., 2014) como explicación del desarrollo cognitivo del alumno cuando éste se enfrenta a la tarea de aprender contenidos de fracciones. Esta categoría considera, además, el conocimiento del profesor en relación con el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos. Se hace necesario que el profesor conozca un conjunto de premisas para que sus alumnos puedan llegar a desarrollar esas competencias. Por ejemplo, a través de la resolución de problemas, proponiendo tareas de demanda cognitiva diferente que permiten movilizar los conocimientos y destrezas de los alumnos en una variedad de situaciones y contextos (Rico & Lupiañez, 2008; Zakaryan, 2013). En este sentido, el profesor puede conocer qué tipo de tareas son oportunos para el desarrollo del sentido numérico de los alumnos y las fenomenologías que involucran a los números racionales.

(ii) *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje,* tienen que ver con los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados tanto a la matemática en general como a los temas concretos. Por ejemplo, concretando en el contenido de los números, podemos referir el conocimiento del profesor sobre los errores que genera la coma en las operatorias (Castro, 2008; Ribeiro, 2009); el conocimiento acerca de las dificultades que presentan los alumnos para ordenar los números racionales o el conocimiento del profesor sobre los obstáculos didácticos, epistemológicos u ontogenéticos (Brousseau, 1983). Ejemplo de un obstáculo (epistemológico) que consideramos se incluye en el contenido de este subdominio se refiere a que el profesor conozca que, al ser introducidos los números naturales antes de los racionales, los alumnos tienden a transferir, de forma directa, propiedades de las operaciones con naturales a las operaciones con fracciones.

(iii) *Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*, se sustenta en un conocimiento acerca de los procesos y estrategias de los alumnos, tanto los típicos como los no habituales, y los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido (Sosa, Aguayo,& Huitrado, 2013). Por ejemplo, la clarificación del significado de la expresión "correr la coma" para explicar el procedimiento de la multiplicación de un número decimal por una potencia de diez, o los porqués de las diferencias entre sumar o restar dos números decimales no enteros y de su producto (e.g., Ribeiro, 2009).

(iv) *Concepciones de los alumnos sobre matemáticas* considera el conocimiento sobre las expectativas e intereses que tienen los alumnos con respecto a las matemáticas. Esto permitirá al profesor a sustentar su práctica y promover la ampliación del espectro de esas concepciones en sus alumnos, así como a desarrollar el conocimiento que permita a estos, dicha ampliación. Un ejemplo se refiere al conocimiento del profesor sobre las concepciones de facilidad o dificultad que los alumnos asocian a las operaciones con las fracciones.

MÉTODO

Desarrollamos la investigación desde un enfoque interpretativo, a través de un estudio de caso instrumental (Stake, 2007) – considerando el conocimiento del profesor como un objeto de estudio complejo y multidimensional. Nuestra informante es una profesora (Ana) del 8°grado de la enseñanza media chilena (alumnos de 13-14 años), que ha obtenido el título de Profesora en Matemáticas y Licenciada en Educación y tiene una experiencia docente de siete años. Realizamos la recolección de información a través de observaciones no participante de aula de las sesiones dedicadas a los números racionales de la profesora. La identificación del contenido del KFLM, ha sido complementada y contrastada con el análisis de cinco cuestionarios y de una entrevista semi-estructurada, a través de la triangulación de fuentes de datos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado, debido a la limitación del espacio,ejemplificamos con un indicador por cada una de las cuatro categorías del KFLMevidenciados en la práctica de Ana y concluimos con una síntesis de los indicadores observados por cada categoría.

(i) Formas de aprendizaje

En la práctica de Ana no se han evidenciado indicadores relativos a esta categoría, lo que indica, también, en sí, la importancia atribuida a la naturaleza del contenido matemático como un producto final. Por otra parte, durante la entrevista, cuando preguntamos sobre aspectos de las características del aprendizaje de las matemáticas, Ana contesta de manera general e imprecisa– por ejemplo, en lo que se refiere a los estilos de aprendizaje y teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, contesta:

"Conocía muchos, pero se me olvidaron todos, pero como para aplicarlos, no", lo que nos lleva también a problematizar la formación, el foco y resultados de la misma.

Esta declaración explícita da cuerpo al hecho de que en su práctica no se haya observado ningún aspecto asociado a las *formas de aprendizaje*. Esa misma idea subyace de manera aún más directa al contestar la pregunta: *¿cómo logra que sus alumnos aprendan matemáticas?*, reconociendo que no tiene constancia de si aprenden o no, al menos inmediatamente.

> Primero, no sé si aprenden o no. Eso, si aprenden o no aprenden, uno se da cuenta al otro año. Por ejemplo, cuando uno ya está en octavo y quieres hacer recuerdo de algo, dicen: "¡ah, sí, el año pasado vimos no sé qué cosa!"

Ana destaca que le resulta difícil detectar las características que le permitan saber si un alumno aprendió o no el contenido matemático, en particular, de números racionales:

> Yo creo que es difícil detectar eso. Si uno le encontrara fuera diría: "¡ah, aprendió!", por lo mismo que te decía antes. Porque tú en la prueba mides lo que estás enseñando en clase, pero si estudian para la misma prueba, cómo se da cuenta de que aprendió o no.

Así, hace alusión a que los alumnos demuestran haber aprendido matemáticas cuando son capaces de aplicar su conocimiento en las situaciones cotidianas. Sin embargo, en sus clases no observamos que se aproveche ese conocimiento para crear situaciones donde los alumnos podrían poner en acción y comprobar sus aprendizajes "en situaciones cotidianas".

(ii) Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje

En cuanto al conocimiento de *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, Ana destaca la importancia de usar un lenguaje con significado asociado a la cantidad que se desea expresar (el número), mostrando conocer que el hecho de que los alumnos no sepan leer correctamente la notación decimal (y, luego, asociado al desarrollo del sentido numérico) les va a dificultar el transformar un número decimal finito a fracción.

Profesora: …sigue (0,2). , escuché por ahí. ¿Cómo asociar la fracción inmediata de esos números?

¿Cómo se lee? Se supone que el 2ocupa la décima, por lo tanto, ¿cómo se llama ese número?¿No se llama 0,2 [cero coma dos]? Dos décimos. Así como lo nombro. Si usted tuviera, por ejemplo, este otro 0,03. ¿Cómo se lee eso?

Alumnos: Tres centésimos. 3/100

Profesora: Suelen complicarse con saber cuál esla fracción asociada porque no sabemos leer el número.

El (re)conocer esta dificultad de los alumnos en la lectura de números en notación decimal y su correspondiente representación en fracción se relaciona con el conocimiento de Ana sobre el papel de la coma y los errores que genera la coma en las operaciones (Castro, 2008; Ribeiro, 2009).

(iii) Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático

En relación a esta categoría, Ana manifiesta tener el conocimiento de que los alumnos suelen confundir el cómo se forma un número en el sistema decimal con su pertenencia a un sistema numérico concreto y trata de precisar el lenguaje matemático de sus respuestas:

Profesora: ¿Qué números conocen ustedes desde que empezaron a venir al colegio?Ya, deme ejemplos de números.Pero no me los nombre todos de aquí al infinito.

Alumno: Pero, en realidad, solamente sería necesario nombrar nueve, del 1 al 9, y con el 0 serían diez.

Profesora: Tú quieres nombrar lo que forman todos los números.

Ana revela darse cuenta (conocer) de los razonamientos erróneos de sus alumnos y presenta formas que considera poder subsanarlos – dando ella misma la explicación que asume apropiada y corrigiendo los errores. Aunque el periodo de las practicas observadas es relativamente corto, no obstante hay aspectos de la práctica y del conocimiento que son transversales a una secuencia de clases de introducción de un contenido: en las clases observadas son escasas las oportunidades donde los alumnos expresan sus razonamientos.

(iv) Concepciones de los alumnos sobre matemáticas

En el siguiente episodio, donde Ana trata de explorar las operaciones con números racionales mediante un juego de dominó, evidenciamos su conocimiento relacionado con las *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*. En concreto, menciona explícitamente durante la clase, que con ese juego los alumnos van a aprender de una manera entretenida, lo que se asocia a una forma de encarar las expectativas e intereses de los alumnos al/para aprender matemáticas.

Profesora: Para que uno ya empiece a grabárselos en su memoria,mientras estamos jugando. De eso se trata,aprendérselos de una forma más entretenida.

Esta atención atribuida al juego, y a la forma cómo justifica su inclusión (*grabárselos en su memoria* [969]… *aprendérselos de una forma más entretenida* [970]) refuerza también unaconcepción de que la matemática debe ser divertida para los alumnos – en este caso Ana considera que el juego le va a servir para poner en evidencia conocimientos que han sido previamente presentados (Climent, 2005), y, así supuestamente, aprendidos.

Las categorías e indicadores del KFLM

A partir del análisis de las siete sesiones, enfocando esencialmente en las categorías del KFLM, presentamos una síntesis de la los indicadores evidenciados en la práctica de Ana mientras enseña el contenido de los números racionales (Tabla 1).

Tabla1. Indicadores de las categorías del KFLM

Categorías del KFLM	Indicadores
(i) formas de aprendizaje	-
(ii) fortalezas y dificultades en el aprendizaje asociadas al contenido matemático de los números racionales	Conocer que a los alumnos puede presentar dificultad la formalización del concepto de densidad y la justificación del algoritmo para trasformaciones de decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.
	Conocer las concepciones erróneas de los alumnos respecto a la idea que tienen de los números racionales (su asociación con la fracción).
	Conocer que los alumnos pueden quedarse con una idea errónea del concepto, particularmente, de decimal semiperiódico, cuando se les ofrece (solo) un ejemplo concreto respecto a la posición y el número de cifras que podría tener el período.
	Conocer acerca de la importancia del lenguaje asociado al número y el hecho de que los alumnos no sepan leer correctamente la notación decimal les dificulta la transformación de un número decimal finito a fracción.
(iii) formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático de los números racionales	Conocer que los alumnos suelen confundir el cómo se forma un número en el sistema decimal con su pertenencia a un sistema numérico concreto.
	Conocer los razonamientos incorrectos de los alumnos acerca de la confusión que tienen respecto al producto cruzado como procedimiento para sumar dos fracciones con distinto denominador.

	Conocer los razonamientos erróneos de los alumnos al respecto a que asocian la densidad de los números racionales con la infinidad del conjunto.
(iv) concepciones de los alumnos sobre el contenido matemático de los números racionales	Conocer las expectativas e intereses de los alumnos al/para aprender matemáticas: a través del juego de dominó de números racionales el aprendizaje de los números racionales puede resultar más entretenido.

De este modo, se evidencian con más frecuencia los indicadores del KFLM relativos a las categorías (ii) *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* y (iii) *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*. Se ha identificado un solo indicador relacionado con (iv) *concepciones de los alumnos sobre matemáticas*, mientras no apreciamos ninguna evidencia del conocimiento de la profesora relativa a (i) *formas de aprendizaje* de los alumnos, lo que, por si, se configura como un resultado importante a tener en cuenta en el contexto de la formación.

CONCLUSIONES

El estudio del caso instrumental nos permite reflexionar sobre cómo refinar cada una de las categorías en el subdominio del KFLM (e.g., análisis de la práctica de la misma profesora en otros contenidos y análisis del mismo contenido impartido por otros profesores – incluyendo distintos contextos tanto locales, como regionales o nacionales). Por otro lado, los resultados nos llevan a cuestionar y reflexionar, en particular, sobre formas de acceder y desarrollar ese conocimiento en los profesores, y en formas de estructurar la formación para que ese desarrollo sea potenciado. Así se hace esencial que, por una parte, las tareas que se exploran en la formación de profesores consideren la especificidad de la actuación docente (e.g., Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014, 2014)y que permitan, al mismo tiempo, que los futuros profesores puedan vivir experiencias y dificultades similares a las que sería deseable que pudieran presentar a sus alumnos (e.g., Pinto & Ribeiro, 2013), pero obviamente a un nivel distinto.

La reflexión sobre situaciones de la práctica, a través de discusión de episodios de videos, de episodios transcriptos, de respuestas de alumnos, de las fuentes históricas originales potenciaría un desarrollo y profundización del conocimiento asociado a los indicadores del KFLM. Esto permitiría al profesor sustentar su conocimiento a partir de los comentarios y dudas de los alumnos bien como para anticipar sus posibles errores (explorando el conocimiento de los posibles porqués matemáticos que los pueden fundamentar), siendo conscientes de que éstos aprenden (entienden los porqués) o no, capacitados y conocedores de formas de promover dicho aprendizaje y comprensión.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).*APOS Theory.A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Castro, E. (2008) (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Unpublished PhD Dissertation, (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk).

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., & Carrillo, J. (2015). Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas.In I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & Ph. Richard (Eds.), *Proceedings Fourth ETM Symposium* (pp. 473-485). Madrid, España.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007).The ontosemiotic approach to research in mathematics education.*ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. & Mellone, M. (2014).Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task.*Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Llinares, S., Valls, J., & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema, 22*(34), 1-26.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M. & Carrillo, J. (2011). The role of beliefs and knowledge in practice.In B. Roesken & M. Casper (Eds.) *Current state of research on mathematical beliefs XVII – MAVI 17* (pp. 192-201). Bochum: Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum.

Rico, L. & Lupáñez, J. (2008).*Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Rowland, T., Huckstep, P.,& Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Sosa, L., Aguayo, L.M., & Huitrado, J. L. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Diaz de Santos.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.A Paradigm of Developmental Research*.Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zakaryan, D.(2013).El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. En A. Ramirez & Y. Morales (Eds.). *ProceedingsI Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe (I CEMACYC)* (pp. 677-688). Santo Domingo, República Dominicana.