

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

Utilización de Applets para favorecer la construcción de ideas fundamentales de la inferencia estadística informal

Liliana Tauber – María Jesús Bianchi y Mariela Cravero¹

Resumen

Desde la comunidad de educadores estadísticos, se ha expresado la preocupación por lograr una Alfabetización Estadística para todos. Existen diversas corrientes que coinciden en la definición de las ideas fundamentales que promueven la Alfabetización y el Razonamiento Estadísticos, lo cual a la larga formará el pensamiento estadístico. Tomando esto de referencia, realizamos una categorización de estas ideas, las cuales consideramos que son imprescindibles para lograr adquirir un Razonamiento Estadístico que permita formar ciudadanos estadísticamente cultos. En este taller presentaremos algunas actividades de simulación que permiten generar las ideas fundamentales relativas a: la variabilidad de las muestras aleatorias, a la de distribución muestral y al Teorema Central del Límite. Además, los asistentes tendrán oportunidad de experimentar utilizando simuladores en línea de distribución gratuita.

Palabras Clave: Ideas Estocásticas Fundamentales, Inferencia informal, Razonamiento Estadístico

Abstract

From the statistical community educators, has expressed concern about achieving Statistical Literacy for all. There are several trends that agree on the definition of the fundamental ideas that promote literacy and statistical reasoning, which eventually form the statistical thinking. Taking this baseline, we performed a categorization of these ideas, which we believe are essential to achieve Statistical Reasoning purchase order to form statistically literate citizens. This workshop will present some simulation activities for generating the fundamental ideas concerning: the random variability, the sampling distribution of and the Central Limit Theorem samples. In addition, attendees will have the opportunity to experience using simulators online free.

Key Words: Stochastics Fundamental Ideas, Informal Inference, Statistical Reasoning

Modalidad: Taller de hora y media

¹ Facultad de Humanidades y Ciencias – Universidad Nacional del Litoral – Santa Fe – Argentina – e-mail: estadisticamatematicafhuc@gmail.com , jesubianchi@hotmail.com , marielacravero@hotmail.com

1. Introducción

Actualmente, el estudio de la alfabetización de los ciudadanos en distintas disciplinas se muestra como un tema central en la investigación didáctica (Gil y Vilches, 2006, Kemp, 2002, Gal, 2004; Ben-Zvi y Garfield, 2004, Schield, 2002, 2006; Batanero, 2009), así como también los estudios centrados en el análisis de la influencia de las actitudes sobre el rendimiento de los estudiantes o sobre el desempeño de los ciudadanos en diversas áreas del mundo del trabajo.

Además, desde la comunidad de los educadores estadísticos, en las últimas décadas, también se ha expresado la preocupación por lograr una *Alfabetización Estadística* básica para todos (Schield, 2006). Consideramos que para que un ciudadano logre estar científicamente alfabetizado, uno de los componentes principales es que haya logrado ser un ciudadano estadísticamente alfabetizado, ya que estamos convencidos que la estadística es la que provee de métodos de análisis a las ciencias, por lo cual si no se es culto estadísticamente, será más difícil poder comprender la metodología científica.

En consecuencia, a través del curso que presentamos en este trabajo, pretendemos realizar una breve delimitación de los conceptos estocásticos que son la base de la Alfabetización Estadística. Con este fin, partimos de la revisión de antecedentes en el tema y en función de ésta elaboramos una categorización inicial que nos permitirá luego tomar decisiones en relación con las actividades que se desarrollan en el curso. Por último, presentamos un análisis de las actividades propuestas en función de la categorización realizada.

2. Revisión de literatura relacionada con la Alfabetización Estadística

2.1. *Alfabetización Estadística y Ciudadanos estadísticamente alfabetizados*

Partimos de la postura de Wallman (1993), quien argumenta que la *Alfabetización Estadística* (que simbolizaremos como AE) es la habilidad para:

- entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que intervienen en la vida diaria y,
- apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en las decisiones personales, profesionales, públicas y privadas.

Dado que lo anterior puede resultar muy amplio a la hora de organizar una propuesta didáctica buscamos otros elementos teóricos que nos permitan clarificar la definición de Alfabetización Estadística. Es así que siguiendo las ideas planteadas por diversos investigadores en educación estocástica (Garfield, DelMas y Chance, 2003 y Ben-Zvi y Garfield, 2004) adherimos a la siguiente categorización que, actualmente es la más aceptada en la comunidad de educadores estadísticos, en la cual se diferencian los ejes fundamentales que diferencian a la Alfabetización Estadística, el Razonamiento Estadístico y el Pensamiento Estadístico:

- **Alfabetización estadística (AE):** es el conjunto de habilidades básicas que son usadas en la comprensión de información cotidiana y de resultados de investigaciones. Estas habilidades deberían permitir organizar datos, construir y presentar tablas y trabajar con distintos tipos de resúmenes de datos. También, implica una comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos, y de la idea de probabilidad como medida de la

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

incertidumbre. En otras palabras, la AE se define como *la habilidad básica para pensar críticamente sobre argumentos basados en la evidencia*.

- **Razonamiento estadístico (RE):** se puede considerar como la manera que las personas le dan sentido a las ideas e información estadística. Lo cual involucra hacer interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos. También involucra establecer relaciones adecuadas entre conceptos (p.e., centro y dispersión), o combinar ideas sobre los datos y el azar. *Razonar, en este sentido, significa comprender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar, de manera global, los resultados estadísticos.*
- **Pensamiento estadístico (PE):** involucra la comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones en las que se utiliza la estadística como herramienta metodológica y las “grandes ideas o las ideas fundamentales” implícitas en ellas. Estas ideas incluyen la naturaleza de la variación y, cuándo y cómo usar los métodos más apropiados de análisis de datos, tales como resúmenes numéricos y gráficos. Desarrollar el PE implica resaltar la comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a la población y cómo diseñar experimentos con el objetivo de establecer causas. Esto incluye, la comprensión de los modelos para simular fenómenos aleatorios y su aplicación en la estimación de probabilidades. Además de entender cómo, cuándo y por qué las herramientas inferenciales pueden usarse para fundamentar los procesos de investigación. El pensamiento estadístico también implica ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema de investigación y dar conclusiones, reconocer y comprender los procesos completos (desde proponer preguntas para recolectar los datos hasta elegir el análisis y el test de hipótesis que corresponda). Finalmente, los pensadores estadísticos deben ser capaces de criticar y evaluar los resultados de un problema o de un estudio estadístico.

Por supuesto, los procesos de enseñanza y aprendizaje deberían fomentar diversos conceptos y competencias en cada proceso (AE, RE Y PE), de tal forma que luego de varios años de educación estadística se lograra formar un ciudadano estadísticamente alfabetizado que, aunque no sea un técnico estadístico, pueda ser un consumidor estadístico crítico. En consecuencia, consideramos que es fundamental pensar cuáles serían los conceptos y competencias estocásticos que pretendemos introducir a través de la enseñanza en los distintos niveles educativos. Con este fin adherimos al modelo teórico de Gal (2004), quien propone una interacción entre los conocimientos estocásticos básicos y otros procesos que deberían estar disponibles en las personas, y en consecuencia, en los estudiantes o profesores, para que ellos puedan comprender, interpretar, evaluar críticamente y reaccionar a los mensajes estadísticos encontrados en diferentes contextos. Este modelo asume que la *Alfabetización Estadística* involucra tanto un *componente de conocimiento* (compuesto de cinco elementos cognitivos: habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto y cuestiones críticas) como un *componente disposicional* (compuesto de dos elementos: postura crítica, creencias y actitudes).

Los componentes y elementos en este modelo no deberían considerarse como entidades separadas sino como contextos dependientes, como un conjunto dinámico de conocimiento y aptitudes que juntos forman el *comportamiento estadísticamente alfabetizado*. La comprensión e interpretación de la información estadística requiere no sólo de conocimiento estadístico per-sé sino también la disponibilidad de otros conocimientos básicos tales como: habilidades de alfabetización, conocimiento matemático básico (fundamentalmente distinguir entre los distintos campos numéricos y tener conocimiento sobre proporcionalidad) y conocimiento del contexto. Sin embargo, la evaluación crítica de la información estadística (después de haber sido comprendida e interpretada) depende de elementos adicionales como la habilidad para realizar preguntas críticas y para tener una postura crítica, la cual se basa en ciertas *creencias* y *actitudes* hacia la Estadística y hacia las Ciencias en general.

Hemos basado esta parte del trabajo en el análisis de estos marcos teóricos, los cuales nos han permitido delimitar lo que es la Alfabetización Estadística y los elementos constitutivos de ésta. Este análisis nos permite además, identificar diversos conceptos que consideraremos fundamentales a la hora de diseñar actividades para la enseñanza de Estadística.

2.2. *Ideas Fundamentales de la Alfabetización Estadística*

La concepción de *ideas fundamentales* fue creada por Bruner (1960), quien indica que, en educación (de una determinada disciplina) se deberían seguir las líneas principales que ofrece la ciencia relacionada. Siguiendo a Goetz, (2008), una tesis básica de esta concepción radica en que es posible enseñar los principios básicos de un tema independientemente de la edad y el origen social de los destinatarios. Este enfoque se refiere al *contenido* de la educación estocástica (en nuestro caso particular) y también a la *actitud* que es característica para hacer estadística, por ejemplo, o cualquier otro tema. Así, en este sentido, la educación estocástica debe ser una copia no sesgada de la ciencia estadística. Por supuesto, el nivel de la educación debe ser diferente al nivel de la ciencia, pero esto no debería significar un obstáculo, sino un reto para que la didáctica de la estadística procure identificar los contenidos y los métodos típicos de la ciencia. Según Goetz (2008), además de las *ideas fundamentales*, cuando planificamos secuencias didácticas, deberíamos tener en cuenta las creencias básicas, tanto de los alumnos como de los docentes mismos. Goetz (2008), indica que se pueden distinguir dos tipos de creencias básicas: *las normativas* y *las descriptivas*. Las *creencias normativas* cumplirían una función similar a la de las *ideas fundamentales*, mientras que las *creencias descriptivas*, indican las creencias individuales relacionadas con los contenidos cognitivos. Estas últimas podrían considerarse como *actitudes afectivas* hacia la disciplina (en este caso, hacia la estadística). Según Goetz, una de las claves para descubrir las creencias es analizar los errores que los estudiantes cometen. Indicación que deberemos tener en cuenta a la hora de planificar nuestra enseñanza. En relación con las creencias de estudiantes y profesores de matemática, hemos encontrado a través de investigaciones previas (Tauber, 2010; Cravero, et. al., 2010) diversos tipos de creencias, por ejemplo: hemos encontrado que una gran proporción de profesores de matemática de nivel Medio, deciden no desarrollar conceptos estocásticos porque no se sienten seguros a la hora de resolver problemas, otros que plantean que la incertidumbre en los resultados estocásticos les provoca ansiedad por el hecho de no tener un único resultado. Como podemos concluir, estas creencias detectadas así como otras que hemos encontrado, influyen en los profesores a la hora de enseñar

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

estadística. Por ejemplo, una de las consecuencias es que el profesor en muchas situaciones propone, un lote de datos, que generalmente no se sabe cómo se ha obtenido (o se ha tomado directamente de un libro en el que ni siquiera se plantea un contexto) y propone que el alumno calcule ciertas medidas como puede ser una media aritmética o una desviación pero sin relacionar con el tipo de variable, el tipo de distribución de frecuencias, etc. En otras palabras, es muy común que se propongan actividades puramente algorítmicas que de ninguna manera promueven la comprensión de las ideas estocásticas fundamentales. En consecuencia, consideramos que es necesario distinguir cuáles son las *ideas fundamentales* que deberían desarrollarse en la enseñanza formal para lograr que nuestros alumnos lleguen a ser ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

Considerando que estas *ideas fundamentales*, en muchas ocasiones, pueden funcionar como obstáculos epistemológicos pero a la vez son el origen de muchos conceptos estadísticos, haremos una primera categorización basándonos en las recomendaciones realizadas por algunos educadores estadísticos (Schild, 2002; Batanero, 2001), quienes indican que es importante, a un nivel introductorio, incluir la enseñanza de:

- técnicas apropiadas que permitan describir proporciones y porcentajes expresados en lenguaje cotidiano que indiquen diversos significados en relación a los conceptos estocásticos que involucran. Por ejemplo: la sentencia “*el porcentaje de hombres que son corredores*”, ¿tiene el mismo significado que: “*el porcentaje de hombres entre todos los corredores*”?
- lectura e interpretación de tablas y gráficos que involucren distintos tipos de proporciones, razones, tasas y porcentajes.
- Comparación entre proporciones y porcentajes. Por ejemplo: mostrar las diferencias, en relación con los significados y también en relación con el cálculo, entre las siguientes sentencias: Entre los fumadores, los hombres tienen el doble de probabilidades que las mujeres de contraer cáncer de pulmón. Los hombres tienen el doble de probabilidades que las mujeres de llegar a ser fumadores.

Como consecuencia de la revisión presentada y a partir de los trabajos que nuestro grupo ha desarrollado y de los de otros autores (Batanero, 2001; Meyer, 2006; Schild, 2002, 2006; Tauber, 2006), hemos realizado una categorización inicial de las ideas que consideramos fundamentales para la elaboración de secuencias didácticas para la enseñanza de Estadística. En los trabajos mencionados hacemos una extensa descripción de las ideas estocásticas que consideramos fundamentales para lograr formar a un ciudadano estadísticamente alfabetizado, en el presente trabajo, pretendemos mostrar actividades que permitan distinguir las siguientes ideas estocásticas fundamentales para iniciar la enseñanza de la inferencia estadística desde un punto de vista informal, a saber:

- Espacio muestral para eventos equiprobables.
- Probabilidad clásica y probabilidad frecuencial.
- Variable estadística y variable aleatoria.
- Frecuencias absolutas y porcentuales, marginales o condicionales.

- Proporciones, probabilidades y porcentajes.
- Lectura e interpretación de gráficos estadísticos.
- Distribución de frecuencias, distribución de probabilidad y distribución muestral de un estadístico.

3. Características del trabajo en el aula de estadística con proyectos

En diversas investigaciones (Batanero, 2001; Batanero y Díaz, 2011) y planificaciones curriculares (N.C.T.M., 2000; Informe GAISE, 2010) se aconseja trabajar los conceptos estocásticos a partir del desarrollo de proyectos que favorezcan, no sólo la introducción de los conceptos sino también que permitan que el alumno aprecie el carácter metodológico de la Estadística. Otra de las recomendaciones que se realizan es, que la enseñanza basada en proyectos permita trabajar con datos reales y también con datos simulados.

En estos estudios, se plantean diversas razones que muestran las virtudes del trabajo con proyectos. Entre algunas de estas virtudes, una de las más importantes, como señalan Anderson y Loynes (1987), es que la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística. La historia de la estadística muestra también como ésta recibe ideas y aportes desde áreas muy diversas, donde, al tratar de resolver problemas diversos (por ejemplo: transmisión de caracteres hereditarios, medida de la inteligencia, etc.) se han creado conceptos y métodos estadísticos de uso general (correlación, análisis factorial).

Por otro lado, el trabajo con proyectos permite abordar un proceso de enseñanza y aprendizaje en la que se deben plantear preguntas, ideas, conjeturas que luego deberán comprobarse a través de la evidencia. Esta interacción no suele presentarse en las ejercitaciones planteadas en los libros de texto de uso habitual especialmente en el Nivel de educación Media. Por el contrario, en estas ejercitaciones generalmente se plantean actividades totalmente estructuradas en las que se dan directivas sobre las acciones a realizar, por ejemplo: “calcula la media aritmética”. En estos casos, el alumno sólo acata la orden y utiliza un procedimiento puramente algorítmico, en el que se deja totalmente de lado todo el procedimiento estadístico que conlleva al cálculo de una media aritmética, por ejemplo, el análisis del tipo de variable, el tipo de distribución (si es muy asimétrica o si tiene valores alejados, etc.) entre otras cosas, lo cual lleva a un proceso que implica establecer relaciones entre los conceptos de variable estadística, distribución de frecuencias, medidas estadísticas que sean adecuadas al tipo de variable y de distribución, etc.

Como podemos apreciar, los dos procedimientos descriptos provocan dos tipos de aprendizajes muy diferentes: el primero, un aprendizaje acotado y totalmente descontextualizado y el segundo, que permite apreciar las relaciones que deben establecerse cuando una persona se enfrenta a un proceso de toma de decisiones.

En consecuencia, al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes (Graham, 1987): ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuáles? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica?

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

Como sugiere Holmes (1997), si los estudiantes trabajan la estadística por medio de proyectos, se pueden lograr aprendizajes más significativos, que pueden tener implícitas algunas de las siguientes características:

- ✓ Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- ✓ Se introducen ideas que no aparecen con los “datos inventados por el profesor o en el libro de texto”, como por ejemplo: precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- ✓ Se muestra que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

4. Metodología

Ahora bien, dentro de este marco referencial, es que nos planteamos una necesidad inmediata, que es la transposición de estas ideas a la currícula de la enseñanza teniendo en cuenta distintos factores como los avances teóricos metodológicos de la Estadística en los últimos 50 años, especialmente dada por la irrupción del procesamiento automático de datos, la informatización de la sociedad misma y los avances metodológicos en otras disciplinas que “redescubren” en la estadística las implicaciones de su aplicación para la obtención de información del mundo real con distintos propósitos. Todas estas consideraciones confluyen para crear un escenario favorable, desde el punto de vista estadístico, para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, y a su vez, dentro de este marco referencial de intervención en la toma de decisiones y de la relación entre la alfabetización estadística y la alfabetización científica.

Es así que el taller se centrará en la discusión de algunos conceptos fundamentales de la Alfabetización Estadística, las diversas formas de introducir dichos conceptos utilizando herramientas informáticas como simuladores y software de distribución libre. Toda esta discusión estará atravesada metodológicamente por el trabajo a través del planteo y resolución de proyectos en los que se utilice la Estadística como metodología de trabajo para obtener conclusiones.

Aunque en el taller prevemos desarrollar otras actividades, en este trabajo nos centraremos en el análisis de dos actividades basadas en la utilización de simuladores que nos ayudarán a obtener respuestas a las preguntas planteadas. Las actividades mencionadas pueden servir de apoyo en cursos introductorios de Estadística a Nivel Universitario y también pueden utilizarse en cursos de Nivel Medio, para este caso, especialmente la actividad 1.

4.1. Actividades que permiten introducir ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística

4.1.1. Actividad 1: “Distribuciones asociadas al lanzamiento de un dado”²

A partir del experimento aleatorio asociado con el lanzamiento de un dado equilibrado de 6 caras, realiza las siguientes actividades:

- a. Escribe todos los resultados que podrían aparecer en un lanzamiento de un dado equilibrado.
- b. Si consideramos que el dado está equilibrado, ¿qué posibilidades hay de que aparezca cada uno de los resultados enumerados antes? ¿Qué razonamiento has seguido para obtener esas posibilidades?
- c. Elabora una tabla en la que presentes los resultados posibles y sus probabilidades asociadas.
- d. Si tuvieras que representar gráficamente la información presentada en la tabla, ¿qué gráfico elegirías? ¿A través de qué elementos podés fundamentar tu elección?
- e. Confecciona el gráfico seleccionado y describe verbalmente las características de la distribución representada.
- f. A continuación analizaremos si las características encontradas en la distribución de probabilidades del lanzamiento de un dado que has construido antes, se pueden observar cuando efectivamente lanzamos un dado. Para ello utilizaremos como herramienta de apoyo el simulador denominado “Modelo de Cajas” que se puede abrir desde la página web: <http://nlvm.usu.edu/>, el cual presenta la apariencia mostrada en la pantalla que presentamos en la Figura 1. Selecciona los números 1 al 6 para colocar en la “caja” de la derecha, de tal forma que te aparezcan como en la Figura 1 y también selecciona la opción que aparece al pie: “Mostrar Probabilidad Teórica”. Una vez cumplidos estos pasos, pincha en el botón que dice “Iniciar” y espera hasta que en el indicador de la Cantidad de Selecciones aparezcan 10 selecciones y pulsa el botón “Pausar”. Con este procedimiento el programa habrá simulado 10 lanzamientos de un dado y en el gráfico que aparece debajo te mostrará la distribución de los valores que han aparecido.
- g. Teniendo en cuenta el gráfico obtenido y los valores que aparecen en la caja intermedia (entre los valores seleccionados y el gráfico), construye una tabla de

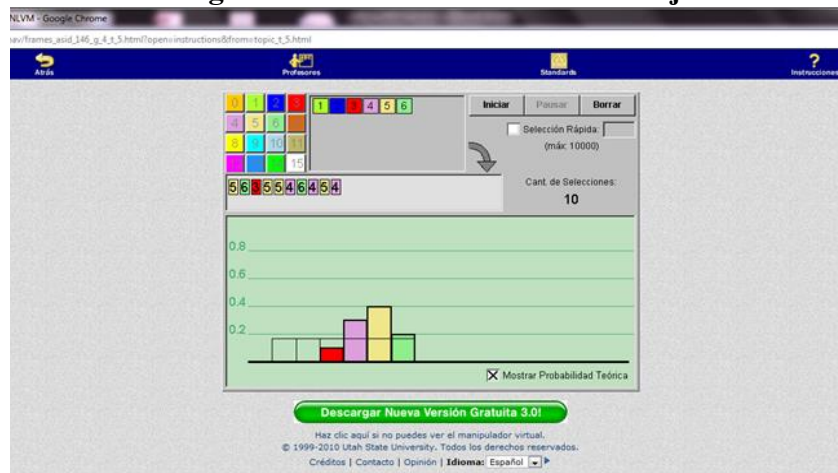
² Para realizar esta actividad utilizaremos como herramienta de apoyo el simulador denominado “Modelo de Cajas” que se puede abrir desde la página web: <http://nlvm.usu.edu/>, una vez ubicados en la página, podemos elegir el idioma deseado (se encuentra al pie de la página) y luego seleccionaremos el módulo de Análisis de Datos y Probabilidad del **nivel 9-12** (corresponde al periodo de 2º a 5º año de la Educación Secundaria).

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

frecuencias. Elabora un breve informe con las características de la distribución de frecuencias.

- h. Compara las conclusiones extraídas en el punto e y en el punto g, a partir de la distribución de probabilidad y de la distribución de frecuencias respectivamente. ¿Puedes encontrar alguna similitud entre ambas distribuciones? ¿Encontraste diferencias? ¿Cuáles?
- i. Ahora utiliza el botón de selección rápida y repite el proceso de los puntos f, g y h, para 50, 100 y 1000 lanzamientos de un dado. Describe verbalmente qué tendencias puedes observar a medida que se aumenta la cantidad de lanzamientos.

Figura 1. Simulador “Modelo de Cajas”



4.1.2. Objetivos de la Actividad 1

Algunos de los objetivos que se pretenden lograr a partir del desarrollo de la actividad 1 son:

- ✓ Definir espacios muestrales para experimentos aleatorios con eventos equiprobables
- ✓ Obtener probabilidades clásicas y empíricas a partir de la realización virtual del experimento.
- ✓ Construir la distribución de probabilidad teórica del experimento
- ✓ Construir la distribución de frecuencias empíricas a partir de la simulación del experimento aleatorio
- ✓ Distinguir entre valores teóricos y empíricos
- ✓ Introducir intuitivamente la Ley de los Grandes Números

4.1.3. Contenidos de la Actividad 1

A partir de esta actividad se pueden desarrollar los siguientes contenidos o conceptos estocásticos:

- ✓ Distribución de probabilidad para eventos equiprobables.
- ✓ Distribución de Frecuencias empíricas
- ✓ Aproximación del modelo teórico a la distribución de frecuencias empírica

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

- ✓ Ley de los Grandes Números y estabilidad de las frecuencias

Los cuales estarán íntimamente relacionados con conceptos previos como por ejemplo:

- ✓ Cálculo de probabilidades para espacios muestrales finitos
- ✓ Definición de espacio muestral y de eventos simples
- ✓ Concepto de frecuencias absolutas y relativas

4.1.4. Extensión de la Actividad 1

Esta actividad puede extenderse, considerando el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos dados y definiendo la variable aleatoria: “Puntos obtenidos al lanzar dos veces un dado”. En este caso, el simulador puede utilizarse de una manera similar a la planteada antes, sólo que se deberán seleccionar los valores correspondientes a la suma de puntos y considerar la distribución de probabilidad asociada ya que los eventos posibles no son equiprobables.

4.2.1. Actividad 2. “Generación de distribuciones muestrales”³

- Ingresas en la página: http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html, una vez ubicado en ella, pincha en el botón que indica: “Begin”, te aparecerá una ventana como la que mostramos en la Figura 2. Por defecto aparecerá la distribución de una población sobre la cual trabajaremos a continuación. Analiza y describe las características estadísticas de la distribución presentada por defecto.
- En el gráfico inmediatamente inferior, pincha en el botón que dice: “Animated”, de esta manera se simulará una muestra de cinco elementos extraídos aleatoriamente de la población inicial. Construye la tabla correspondiente a los valores obtenidos en el gráfico (puedes hacerla en una hoja, o directamente cargarla en una hoja de cálculo de GeoGebra). La distribución presentada en este gráfico, ¿tiene alguna característica similar a la de la distribución poblacional?
- Para cada muestra seleccionada, en el tercer gráfico, se presentará el valor de la media aritmética de la muestra correspondiente. Registra en otra tabla (o en otra columna de la hoja de cálculo) el valor obtenido.
- Repite 10 veces el proceso indicado en los ítems b y c. Ahora considera la distribución del tercer gráfico, describe si encuentras alguna característica similar a la distribución poblacional o a las distribuciones de algunas de las muestras seleccionadas.
- Sin borrar los valores que ya han sido seleccionados, ahora pincha en el botón que indica: “1000” ubicado en el segundo gráfico. En este caso, obtendrás los valores correspondientes a 1000 muestras de 5 elementos seleccionados aleatoriamente de la población (en otras palabras, estás repitiendo 1000 veces el proceso del punto b pero de una sola vez), y en el segundo gráfico no se representará nada porque allí sólo se representa cada una de las muestras por separado. Observa el tercer gráfico y describe

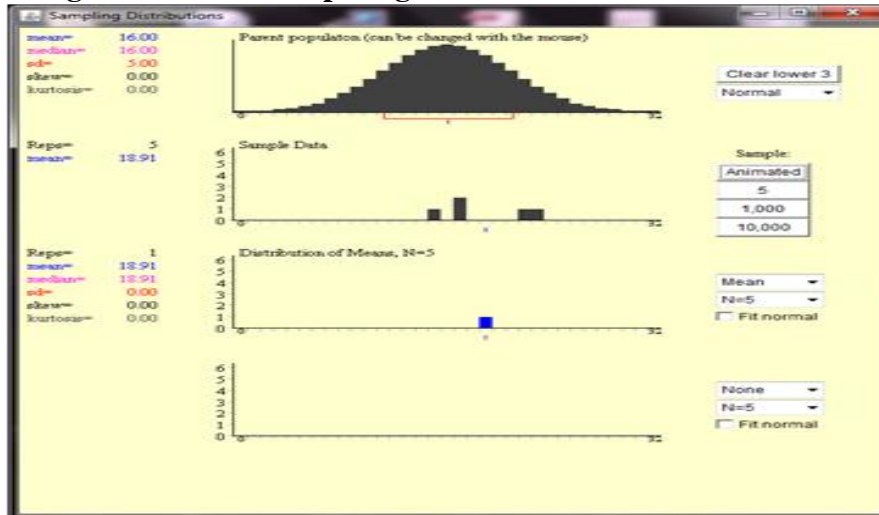
³ Esta actividad utilizará como apoyo el applet “Sampling Distributions” que se puede abrir desde la página: http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

nuevamente las características que presenta esta distribución. ¿Se puede determinar alguna característica similar a la población? ¿Cuál o cuáles? ¿qué diferencias observas entre ambas distribuciones?

- f. ¿Cuál o cuáles piensas que son los motivos para encontrar esas similitudes y esas diferencias?
- g. ¿Qué conclusiones podríamos sacar después de repetir el proceso de muestreo varias veces?

Figura 2. Simulador para generar distribuciones muestrales



4.2.2 Objetivos de la Actividad 2

Algunos de los objetivos que se pretenden lograr a partir del desarrollo de la actividad 2 son:

- ✓ Construir distribuciones de frecuencias asociadas a muestras de distintos tamaños.
- ✓ Construir distribuciones muestrales de determinados estadísticos
- ✓ Distinguir entre parámetros, estadísticos y estimadores
- ✓ Introducir el concepto de error estándar de una distribución muestral
- ✓ Valorar los fundamentos de la utilización de estadísticos para estimar parámetros

4.2.3 Contenidos de la Actividad 2

A partir de esta actividad se pueden desarrollar los siguientes contenidos o conceptos estocásticos:

- ✓ Modelos de distribuciones de probabilidad.
- ✓ Parámetros, estadísticos y estimadores.
- ✓ Distribución de Frecuencias empíricas
- ✓ Distribución Muestral de un estadístico
- ✓ Aproximación del modelo teórico a la distribución de frecuencias empírica
- ✓ Análisis de la bondad de ajuste del modelo teórico a partir de la aproximación de los gráficos

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

- ✓ Propiedades de la distribución muestral de un estadístico
- ✓ Propiedades de los estimadores
- ✓ Teorema Central del Límite

Los cuales estarán íntimamente relacionados con conceptos previos como por ejemplo:

- ✓ Variable aleatoria
- ✓ Variable estadística
- ✓ Concepto de frecuencias absolutas y relativas
- ✓ Medidas de tendencia central
- ✓ Medidas de dispersión
- ✓ Distribución de probabilidad Normal

4.2.4 Extensión de la Actividad 2

Aunque existen diversas maneras en las que podríamos extender esta actividad a partir del uso del simulador, en este caso proponemos una de entre todas las posibles.

Como extensión de esta actividad puede resultar muy enriquecedor al realizar cada muestreo, utilizar el cuarto gráfico para generar la distribución muestral de otro estadístico, por ejemplo, de la Mediana. De esta forma se puede comparar la distribución muestral de la media y de la mediana, sus centros y dispersiones y de allí, obtener conclusiones sobre la bondad de cada estimador.

5. Implicaciones para la enseñanza

En esta oportunidad hemos presentado dos actividades que pueden trabajarse con el mismo carácter que un proyecto, en el sentido que los alumnos pueden interactuar entre sí y con el docente, estableciendo debates sobre el análisis que van realizando sobre las situaciones planteadas. Hemos desarrollado otros tipos de actividades (presentadas en otros trabajos, por ejemplo, Tauber, 2007) en los que se plantean proyectos basados en datos reales obtenidos a partir de bases de datos de organismos oficiales como la ONU, IPEC, etc., pero en esta ocasión pretendemos analizar las bondades del uso de applets educativos para introducir en la clase de estadística.

Como podemos observar, se intenta relacionar dos maneras de resolver las cuestiones planteadas: utilizando elementos clásicos como puede ser el papel y el lápiz y también utilizando herramientas informáticas que favorecerán el análisis solicitado en cada oportunidad.

A partir de estas actividades, podemos contribuir a la adquisición de competencias básicas, las cuales enumeramos a continuación:

Competencia en comunicación lingüística. Durante el desarrollo de cada actividad, los alumnos tienen oportunidad de ejercitarse en la construcción y comunicación del conocimiento y en la organización y autorregulación del pensamiento. Además, adquieren destrezas y actitudes (en el sentido usado por Gal, 2004) como puede ser formar un juicio crítico, generar ideas y disfrutar expresándose tanto de forma oral (exponiendo las conclusiones obtenidas a sus compañeros) como de forma escrita (redactando el informe solicitado).

“IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos”

Competencia matemática. Puesto que en ambas actividades deben utilizar y relacionar números enteros, fraccionarios y decimales, los alumnos deberán aplicar operaciones básicas, símbolos, formas de expresión y razonamiento matemático. Utilizan proporciones y también ponen en práctica procesos de reflexión que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información, por medio del reconocimiento de las técnicas apropiadas. En las situaciones planteadas, los alumnos tendrán la oportunidad de integrar el conocimiento matemático con el conocimiento estadístico, por ejemplo, cuando obtienen la distribución de probabilidad del lanzamiento de un dado, están relacionando distintos campos numéricos con el concepto de probabilidad y de distribución de probabilidad. Por otro lado, cuando construyen gráficamente la distribución de probabilidad, tienen la oportunidad de apreciar que los ejes cartesianos se pueden utilizar en contextos diferentes, como puede ser justamente la construcción de una distribución de probabilidad si trabajamos con un concepto estocástico o de una función lineal, si trabajáramos específicamente en un modelo matemático o en la representación de la velocidad de un móvil si estamos representando una situación determinada en Física.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico. El trabajo propuesto a partir de estas actividades también permitirá identificar preguntas, elaborar conjeturas como por ejemplo en el Actividad 2, una conjetura que podría plantearse es que, si se toman muestras aleatorias independientes del mismo tamaño de una población con distribución normal y con determinadas media y varianza, entonces la distribución muestral de medias se aproximará a una distribución normal que tendrá la misma media de la población pero con una mayor concentración alrededor de la media que la distribución poblacional, lo cual corresponde al concepto de error estándar de la distribución de medias muestrales. Por supuesto, la conjetura que puede realizarse a partir del trabajo con la simulación, al comienzo puede ser de carácter intuitivo, justamente el trabajo en el aula y a través del tiempo llevará a formalizar estos resultados a través de los teoremas correspondientes. Por supuesto, este proceso podría llevar algunos años a través de la enseñanza hasta llegar a la definición de los teoremas. Otra cuestión que se genera a partir de estas actividades es que permitirán que el alumno obtenga conclusiones basadas en la evidencia que proporciona la simulación, lo cual le permitirá comprender el proceso de la inferencia y tomar decisiones. Asimismo, se procura una habilidad progresiva para poner en práctica los procesos y actitudes propios del análisis sistemático de una tarea y de la indagación científica, ya que podemos concebir estas actividades como pequeñas investigaciones cuyo objetivo en ambas actividades es encontrar los fundamentos de propiedades teóricas.

Tratamiento de la información y competencia digital. Cuando se propone a los alumnos que recojan la información correspondiente a través de las tablas de distribución o de los gráficos, estamos promoviendo que el alumno se enfrente a procesos de “recogida de datos” y “organización, análisis e interpretación de los datos”. De esta manera permitimos que los alumnos se habitúen a buscar, obtener y procesar información para transformarla en conocimiento. En estos casos estamos contribuyendo al aprendizaje del uso de computadoras y de distintos tipos de software y a adquirir destrezas de razonamiento para organizar la información, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad.

Competencia social y ciudadana. A partir del trabajo propuesto se pueden adquirir conocimientos diversos y habilidades complejas que permitirán al alumno participar, tomar decisiones y responsabilizarse de las elecciones y conclusiones adoptadas. Además, permite

concientizar de la importancia de la estadística en la sociedad actual, implicándose a través de procesos estadísticos. (Debemos aclarar que proponemos que estas actividades se realicen en grupos de 2 o 3 personas, dado que este tipo de trabajo fomenta la cooperación y la valoración del trabajo de los demás). Finalmente, ayuda a tener una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetando las normas de conducta acordadas socialmente.

Competencia para aprender a aprender. Se ejercita la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar las diversas técnicas y estrategias con las que afrontar una misma situación problemática y afrontar la toma de decisiones con la información de la que se dispone. Se ejercitan habilidades para obtener información y para transformar dicha información en conocimientos propios y relacionarla con conocimientos previos.

Autonomía e iniciativa personal. Una de las virtudes (especialmente de la actividad 2) es que brinda una buena gama de posibilidades de apertura de la propia actividad, ya que podría plantearse de manera flexible y, una vez descubiertas las primeras regularidades, permite analizar distribuciones muestrales de otros estadísticos y obtener conclusiones en función de ellos. Esto permite que los mismos alumnos puedan utilizar otros criterios de análisis, ejercitar su imaginación y llevar adelante las acciones necesarias para encontrar otros tipos de regularidades y, con el tiempo, lograr probar otras conjeturas. Otra virtud de las actividades planteadas es que permiten que el estudiante no dependa tanto del profesor, dado que tiene libertad para elegir las estrategias a seguir para llegar a sus conclusiones. Es por todo lo expuesto que consideramos un factor de gran relevancia en la enseñanza de la estadística, la utilización de software de distribución libre o de simulaciones que posibilitan la comprensión intuitiva de conceptos estocásticos. Esto se hace más relevante aún, considerando la disponibilidad que actualmente tienen los alumnos de secundaria a través del uso de las netbooks entregadas por los distintos organismos gubernamentales.

6. Reflexiones Finales

En este trabajo hemos descrito las características de dos actividades propuestas para el aula de estadística para el Nivel Medio y el Nivel Universitario (en un sentido introductorio en este último) basada en la utilización de software didáctico. También, hemos mostrado algunas de las virtudes de este tipo de trabajo, pero no debemos dejar de decir que el planteo de este tipo de propuestas debe ser siempre muy bien pensada y elaborada por el docente de acuerdo a sus propios intereses de enseñanza y también a los intereses en relación con el aprendizaje que se pretende lograr en los alumnos.

En este sentido, es importante que el docente pueda comprometerse con las tareas planteadas, que es justamente uno de los defectos cuando se utilizan actividades extraídas de libros de texto, no sólo porque el docente no ha estado comprometido en la elaboración de esa tarea sino porque generalmente, los autores de libros de texto deben seguir ciertas normas y presentar cuestiones que no están pensadas para cada grupo en particular. Es por ello que fomentamos la idea de elaborar nuestras propias actividades en función del interés de los grupos con los que trabajamos y además, propiciamos la idea de utilizar las herramientas que están disponibles en internet y que pueden ayudarnos a proponer nuestros propios objetivos de enseñanza y aprendizaje. Lo único que puede limitarnos es nuestra propia imaginación.

Debemos aprovechar además los resultados de estudios e investigaciones relacionados con la Educación Matemática y con la Educación Estadística, los cuales también nos aportarán ideas que pueden ayudarnos en la planificación de nuestras clases y de las actividades que propondremos a nuestros alumnos.

7. Referencias Bibliográficas

- [1] Aliaga, M.; Cuff, C.; Garfield, J.; Lock, R.; Utts, J. y Witmer, J. *GAISE College Report*. American Statistical Association. 2010. <http://www.amstat.org/education/gaise/>
- [2] Anderson, C. W. y Loynes, R. M. *The teaching of practical statistics*. New York: Wiley. 1987.
- [3] Batanero, C. *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. 2001.
- [4] Batanero, C. Retos para la formación estadística de los profesores. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, 2009, Braga, Portugal.
- [5] Batanero, C. y Díaz, C. *Estadística con Proyectos*. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada. 2011.
- [6] Ben-Zvi, D. y Garfield, J. Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 3-15, 2004.
- [7] Bruner, J. S. *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1960.
- [8] Cravero, M.; Redondo, Y.; Santellán, S. y Tauber, L. Relaciones entre Alfabetización Científica y Alfabetización Estadística. En: *Actas de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática*. La Pampa. Argentina. 2010.
- [9] Gal, I. Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 47 – 78, 2004.
- [10] Garfield, J.; Delmas, B. y Chance, B. The Web based ARTIST: Assesment Resource for improving Statistical Thinking. En: *Assesmenton Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality of AERA Annual Meating*, Chicago. 2003.
- [11] Gil Pérez, D. y Vilches, A. Educación ciudadana y alfabetización científica: mitos y realidades. En: *Revista Iberoamericana de Educación*, N° 42, pp. 31-54, 2006.
- [12] Goetz, S. Fundamental ideas and basic beliefs in Stochastics. Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers. 2008. Disponible en: <http://fplfachdidaktik.univie.ac.at/fileadmin/contributiongoetzrevised.pdf>
- [13] Graham, A. *Statistical investigations in the secondary school*. Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education. 1987.
- [14] Holmes, P. Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 153-164). Voorburg: IOS Press. 1997.