

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**DERIVATE FRAZIONARIE ED  
INDICE DI HURST**

Tesi di Laurea in Finanza matematica

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA PASCUCCI

**Presentata da:**  
ANGELA IOZZO

**Sessione II**  
**Anno Accademico 2014-2015**



*A mia nonna.*



# Introduzione

L'obiettivo della tesi è fornire un'estensione nel caso stocastico di un particolare integrale.

Il concetto di derivata è tradizionalmente associato ad un intero positivo, nel senso che data una funzione questa può essere derivata una, due, tre volte e così via. Una funzione può anche essere derivata un numero reale di volte. Nel primo capitolo viene presentata l'estensione del calcolo classico, il calcolo frazionario nel senso di Riemann-Liouville, e si forniscono esempi concreti.

Nel secondo capitolo si introduce il concetto di dipendenza tra gli eventi di un dato fenomeno, si dà una definizione di Indice di Hurst e in seguito di moto Browniano frazionario, che si presta a descrivere i fenomeni che presentano un fattore di dipendenza, e se ne descrivono le proprietà principali.

Nel terzo capitolo si definisce un particolare integrale frazionario, e se ne dà una approssimazione che permette il passaggio dal calcolo frazionario, al calcolo stocastico rispetto ad un moto browniano frazionario.

Infine, si riportano alcune nozioni di teoria della probabilità.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Calcolo Frazionario</b>	<b>1</b>
1.1 Funzioni speciali . . . . .	1
1.1.1 La funzione Gamma . . . . .	1
1.1.2 La funzione Beta . . . . .	2
1.2 Integrali frazionari . . . . .	2
1.3 Derivate frazionarie . . . . .	6
<b>2 Indice di Hurst</b>	<b>11</b>
2.1 Storia dell'indice . . . . .	12
2.2 Definizione di $H$ . . . . .	13
2.3 Moto Browniano Frazionario . . . . .	14
<b>3 Relazione tra calcolo frazionario e calcolo stocastico</b>	<b>19</b>
<b>A Teoria della probabilità</b>	<b>25</b>
A.1 Spazi di probabilità . . . . .	25
A.2 Dalle variabili aleatorie ai processi stocastici . . . . .	26
A.3 Valore atteso, Varianza e Covarianza . . . . .	27
<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>



# Capitolo 1

## Calcolo Frazionario

Il calcolo frazionario è una generalizzazione del calcolo integrale e differenziale classico, con ordine arbitrario  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Prima, si danno di seguito le definizioni di due funzioni speciali.

### 1.1 Funzioni speciali

#### 1.1.1 La funzione Gamma

La *funzione Gamma* di Eulero è una funzione meromorfa con poli semplici per  $x = -n$  (con  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), continua e positiva sui numeri reali positivi che generalizza il concetto di fattoriale estendendo il calcolo a valori non interi e complessi. La funzione  $\Gamma$  è definita come segue:

$\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0,$

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

Una delle proprietà fondamentali della funzione Gamma è la seguente:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.2)$$

che può essere dimostrata integrando per parti:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Tenendo conto di ciò e sapendo che  $\Gamma(1) = 1$  si ottiene che:

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

...

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

### 1.1.2 La funzione Beta

La *funzione Beta* di Eulero, è definita come segue:  
 $\forall z, \omega \in \mathbb{C}$  tali che  $Re(z) > 0, Re(\omega) > 0$ ,

$$B(z, \omega) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1} dt$$

che è legata alla funzione Gamma dalla seguente relazione:

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \quad (1.3)$$

## 1.2 Integrali frazionari

**Teorema 1.1 (Fubini).** Siano  $\Omega_1 = [a, b]$  e  $\Omega_2 = [c, d]$ ,  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ ,  $-\infty \leq c \leq d \leq +\infty$ , e sia  $f(x, y)$  una funzione misurabile su  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Se almeno uno degli integrali:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy, \quad \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx, \quad \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy$$

è assolutamente convergente, allora coincidono.

**Definizione 1.2.** Sia  $f \in L^1(a, b)$ , spazio delle funzioni sommabili, con  $(a, b)$  intervallo di  $\mathbb{R}$ . Si definiscono gli *Integrali frazionari di Riemann-Liouville* (brevemente RL), di ordine  $\alpha > 0$  per quasi ogni  $x \in (a, b)$  come:

1. integrale sinistro, per  $x > a$ :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy \quad (1.4)$$

2. integrale destro, per  $x < a$ :

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy \quad (1.5)$$

Si pone per definizione

$$I_{a+}^0 f(x) := f(x), \quad I_{b-}^0 f(x) := f(x)$$

*Osservazione 1.3.* Per  $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$  si ottiene il seguente integrale di ordine  $n$ :

$$I_{a+}^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

$$I_{b-}^n f(x) = \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b f(x_n) dx_n$$

*Dimostrazione.* Bisogna dimostrare che

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - x_n)^{n-1} f(x_n) dx_n = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

Per induzione su  $n$  si ha:

- per  $n = 2$

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_a^x f(x_2) dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 = \int_a^x (x - x_2) f(x_2) dx_2$$

- Suppongo ora sia vero per  $n - 1$  e lo provo per  $n$ .

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_1 \left[ \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \right] &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} \frac{(x_1 - x_n)^{n-2}}{(n-2)!} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(x_n) (x - x_n)^{n-1} dx_n \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(x_n) (x - x_n)^{n-1} dx_n \end{aligned}$$

□

### Alcune proprietà

- Presi  $\alpha > 0, \beta > 0$ , vale la formula di composizione seguente:

$$I_{a+}^\alpha \left( I_{a+}^\beta f \right) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.* Si ottiene scambiando l'ordine di integrazione

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} \left( I_{a+}^{\beta} f \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} du \int_a^u f(y) (u-y)^{\beta-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(y) dy \int_y^x (x-u)^{\alpha-1} (u-y)^{\beta-1} du \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} \int_y^x (x-u)^{\alpha-1} (u-y)^{\beta-1} du &= \int_0^1 (x-y)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} (x-y)^{\beta-1} (x-y) d\tau \\ &= \int_0^1 (x-y)^{\alpha+\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= (x-y)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= (x-y)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) \\ &= (x-y)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \end{aligned}$$

dove ho effettuato il cambio di variabile  $u = y + \tau(x-y)$ , e usato la relazione (1.3).

Quindi tornando al calcolo precedente:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy = I_{a+}^{\alpha+\beta} f$$

□

**Teorema 1.4 (Hardy-Littlewood).** *Sia  $0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}$ . Allora  $I_{a+}^{\alpha} : L^p(a, b) \rightarrow L^q(a, b)$ , con  $q = \frac{p}{1-\alpha p}$ , è limitato.*

*Dimostrazione.* Lo si dimostra solo per il caso  $1 \leq p < r < q = \frac{p}{1-\alpha p}$ . Devo far vedere che  $\| I_{a+}^{\alpha} f \|_{L^r} \leq c \| f \|_{L^p}$ , dove  $c$  indica una costante. Pongo  $\varepsilon = \frac{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}{2}$ . Si ha che  $\alpha - 1 = 2\varepsilon - \frac{1}{r} - \frac{1}{p'}$  quindi:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) |I_{a+}^{\alpha} f| &\leq \int_a^x |f(y)| (x-y)^{\alpha-1} dy \\ &= \int_a^x \left( |f(y)|^{\frac{p}{r}} (x-y)^{\varepsilon-\frac{1}{r}} \right) |f(y)|^{1-\frac{p}{r}} (x-y)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}} dy \end{aligned}$$

dove  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Usando la disuguaglianza di Hölder si ottiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)|I_{a+}^{\alpha}f| &\leq \left( \int_a^x |f(y)|^p (x-y)^{r\varepsilon-1} dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left( \int_a^x |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left( \int_a^x (x-y)^{\varepsilon p'-1} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \left( \int_a^x |f(y)|^p (x-y)^{r\varepsilon-1} dy \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \|I_{a+}^{\alpha}f\|_{L^r} &\leq c \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \left( \int_a^b |f(y)|^p dy \int_a^b |x-y|^{r\varepsilon-1} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq c \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r}} = c \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

□

- Prese  $f(x) \in L^p(a, b)$  e  $g(x) \in L^q(a, b)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ ,  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$ ; con  $p \neq 1, q \neq 1$  nel caso  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$ , vale la formula di integrazione per parti seguente:

$$\int_a^b I_{a+}^{\alpha}f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) I_{b-}^{\alpha}g(x) dx \quad (1.7)$$

*Dimostrazione.* Dimostro il caso  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$ . Infatti applicando il teorema precedente, posso concludere che gli integrali sono assolutamente convergenti. Allora per il teorema di Fubini si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b I_{a+}^{\alpha}f(x) g(x) dx &= \int_a^b \left( \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy \right) g(x) dx \\ &= \int_a^b f(y) dy \int_y^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-y)^{\alpha-1} g(x) dx \\ &= \int_a^b f(y) I_{b-}^{\alpha}g(y) dy \end{aligned}$$

□

*Esempio 1.5.* Sia  $f(x) = x^k$ , si calcola di seguito  $I_{0+}^{\alpha}f(x)$ .

Dalla definizione si ha che

$$I_{0+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^k dy$$

Ponendo  $u = \frac{y}{x}$ ,  $y = ux$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^k dy &= \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^k (1-u)^{\alpha-1} du = \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} B(k+1, \alpha) \\ &= \frac{x^{\alpha+k} \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(k+1+\alpha)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^{\alpha+k} \end{aligned}$$

### 1.3 Derivate frazionarie

**Definizione 1.6.** Considero  $0 < \alpha < 1$ . Le *Derivate frazionarie di Riemann-Liouville* ( brevemente RL) sono definite:

$$D_{a+}^{\alpha} f := \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-y)^{-\alpha} f(y) dy \quad (1.8)$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f := \frac{d}{dx} I_{b-}^{1-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (y-x)^{-\alpha} f(y) dy \quad (1.9)$$

rispettivamente in versione sinistra e destra.

*Osservazione 1.7.* Si noti che gli integrali frazionari sono stati definiti per un ordine  $\alpha > 0$ ; mentre per le derivate frazionarie ci si limita al caso  $0 < \alpha < 1$ .

Osservo che,  $\forall f \in L^1(a, b)$ , si ha:

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f = f, \quad D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f = f \quad (1.10)$$

*Dimostrazione.* Lo dimostro per la versione sinistra, sar  lo stesso per la versione destra.

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-u)^{-\alpha} du \int_a^u f(y) (u-y)^{\alpha-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x du \int_a^u \frac{f(y)}{(x-u)^{\alpha} (u-y)^{1-\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) B(\alpha, 1-\alpha) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) (\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)) dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy \\ &= f \end{aligned}$$

e quindi l'uguaglianza cercata. □

In modo da garantire che anche l'operazione inversa valga si considera la seguente famiglia di funzioni:

**Definizione 1.8.** Denoto con  $I_{a+}^\alpha(L^p(a, b))$  [rispettivamente con  $I_{b-}^\alpha(L^p(a, b))$ ], la famiglia di funzioni  $f$  che possono essere rappresentate come un  $I_{a+}^\alpha$ -integrale (rispettivamente  $I_{b-}^\alpha$ -integrale) di qualche funzione  $\phi \in L^p(a, b)$ ,  $p \geq 1$ . Questa  $\phi$  è unica e coincide con  $D_{a+}^\alpha f$  (rispettivamente con  $D_{b-}^\alpha f$ ). In particolare:

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha : L^p(a, b) &\longrightarrow I_{a+}^\alpha(L^p(a, b)) \\ \phi &\longmapsto f = I_{a+}^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Allora denotiamo con  $\phi := D_{a+}^\alpha f$ . Ciò significa che per  $f \in (I_{a+}^\alpha(L^p(a, b)))$  si ottiene che  $I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f = f$

### Alcune proprietà

- Vale la formula di composizione seguente:

$$D_{a+}^\alpha \left( D_{a+}^\beta f \right) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f \quad (1.11)$$

che è conseguenza diretta della formula di composizione per gli integrali (1.6).

- Prese  $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L^p(a, b))$  e  $g(x) \in I_{b-}^\alpha(L^q(a, b))$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ , vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b D_{a+}^\alpha f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) D_{b-}^\alpha g(x) dx \quad (1.12)$$

*Dimostrazione.* Denoto  $D_{a+}^\alpha f = \varphi(x)$  e  $D_{b-}^\alpha g = \psi(x)$ . Per la funzione definita in precedenza si ha:  $\varphi \mapsto I_{a+}^\alpha(\varphi) = f$  e  $\psi \mapsto I_{b-}^\alpha(\psi) = g$ . Posso quindi ricondurmi alla formula di integrazione per parti relativa agli integrali frazionari (1.7).

$$\int_a^b D_{a+}^\alpha f(x) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) I_{b-}^\alpha \psi(x) dx = \int_a^b I_{a+}^\alpha \varphi(x) \psi(x) dx = \int_a^b f(x) D_{b-}^\alpha g(x) dx$$

□

**Definizione 1.9.** Sia  $\Omega$  un intervallo finito. Ricordiamo che una funzione si dice *assolutamente continua* in  $\Omega$ , se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni coppia di intervalli disgiunti  $[a_k, b_k] \subset \Omega, k = 1, 2, \dots, n$  tale che  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ , valga la disuguaglianza  $\sum_{k=1}^n |(f(b_k) - f(a_k))| < \varepsilon$ . Lo spazio di siffatte funzioni si denota con  $AC(\Omega)$ .

Diamo ora un risultato che si mostra essere condizione sufficiente per l'esistenza delle derivate frazionari, di cui non darò la dimostrazione.

**Lemma 1.10.** Sia  $f(x) \in AC([a, b])$ . Allora le derivate  $D_{a+}^\alpha f$  e  $D_{b-}^\alpha f$  esistono quasi dappertutto per  $0 < \alpha < 1$ . Inoltre  $D_{a+}^\alpha f, D_{b-}^\alpha f \in L^p(a, b), 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ , e valgono le seguenti formule:

$$D_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(y)dy}{(x-y)^\alpha} \right] \quad (1.13)$$

$$D_{b-}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(b)}{(b-x)^\alpha} - \int_x^b \frac{f'(y)dy}{(y-x)^\alpha} \right] \quad (1.14)$$

Per la dimostrazione si veda pag 36 [1].

Un altro modo per rappresentare le derivate frazionarie (sinistre e destre rispettivamente), è la *Rappresentazione di Weyl* seguente:

Considero  $f \in C^1(a, b)$ . Allora:

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right] \quad (1.15)$$

e

$$D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(x)}{(b-x)^\alpha} + \alpha \int_x^b \frac{f(x) - f(y)}{(y-x)^{\alpha+1}} dy \right] \quad (1.16)$$

*Dimostrazione.* Integrando per parti l'espressione (1.13), e ricordando che  $\alpha \in (0, 1)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x (x-y)^{-\alpha} d[f(y) - f(x)] \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{f(y) - f(x)}{(x-y)^\alpha} \right) + \alpha \int_a^x \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^{1+\alpha}} dy \right] \end{aligned}$$

Il termine centrale sparisce per funzioni  $f \in C^1$ , e si ottiene la rappresentazione cercata.  $\square$

È importante sottolineare che questa rappresentazione non vale solo per funzioni  $f \in C^1$  ma anche, per esempio, per funzioni  $f$  che soddisfano la condizione di Hölder con ordine  $\lambda > \alpha$ , di cui darò la definizione nel capitolo terzo.

*Esempio 1.11.* Si calcola la derivata frazionaria sinistra di  $f(x) = 1$  con  $\alpha \in (0, 1)$ .

$$D_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} dy = \frac{d}{dx} \left( -\frac{x^{-\alpha}}{\alpha-1} \right) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Si nota quindi che la derivata  $\alpha$ -esima di una funzione costante non è sempre nulla, ma che per  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $D_{0+}^{\alpha} \rightarrow 0$

*Esempio 1.12.* Vediamo che le derivate frazionarie dipendono dagli estremi dell'intervallo considerato. Si prendano ad esempio le funzioni seguenti:

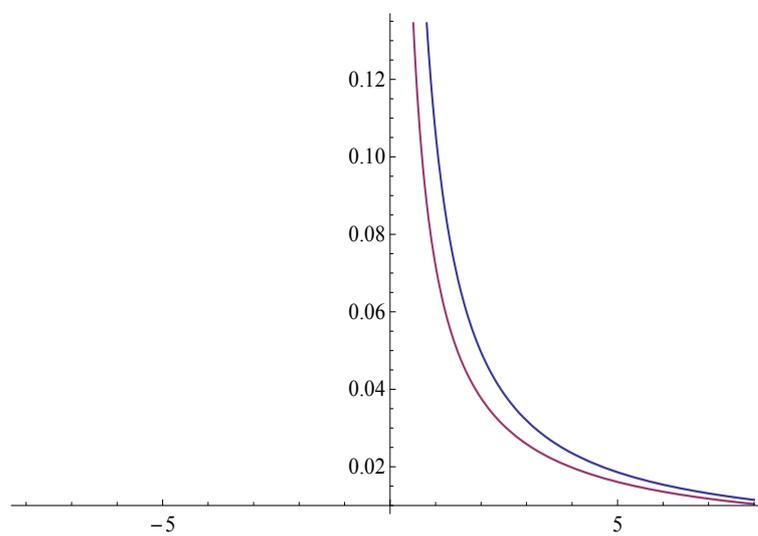
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

che si differenziano solo per le  $x < 0$ , e vediamo che studiando le derivate frazionarie sinistre in diversi valori di  $a$ , queste sono diverse.

$$\begin{aligned} D_{-1+}^{\alpha} f(x) &= \frac{d}{dx} I_{-1+}^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( -\int_{-1}^0 (x-y)^{-\alpha} dy + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} dy \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{(x(1+x))^{-\alpha} + (x^{\alpha} + x^{1+\alpha} - 2x(1+x)^{\alpha})}{(-1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right] \\ &= -\frac{(x(1+x))^{-\alpha} (x^{\alpha} - 2(1+x)^{\alpha})}{\Gamma(1-\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} g(x) &= \frac{d}{dx} I_{0+}^{1-\alpha} g(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} dy \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( -\frac{x^{1-\alpha}}{(-1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \end{aligned}$$



**Figura 1.1:** In rosso è evidenziata la derivata frazionaria sinistra di  $f$ , in blu quella di  $g$

# Capitolo 2

## Indice di Hurst

**Definizione 2.1.** Un *random walk* o *passeggiata aleatoria* è un processo stocastico  $(X_n)_{n=1,2,\dots}$  tale che

$$X_0 = 0$$

e

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad n > 0$$

dove  $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$  sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite.

Si può pensare ad esempio al moto unidimensionale di una particella lungo un asse. Essa può muoversi in avanti o indietro. La probabilità della sua futura posizione dipende unicamente dalla posizione immediatamente precedente e da una variabile aleatoria indipendente dal processo e di distribuzione arbitraria.

Ad esempio, la sequenza di teste e di croci che si ottiene con il lancio di una moneta è un random walk di distribuzione binomiale.

**Definizione 2.2.** Si dice *Moto Browniano* qualunque processo stocastico continuo reale  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  che soddisfi le seguenti proprietà:

- $B_0 = 0$ ;
- $B$  ha incrementi indipendenti, cioè per ogni scelta di  $k \geq 2$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < +\infty$  le variabili aleatorie  $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{1 \leq i \leq k}$  sono indipendenti;
- $B$  ha incrementi stazionari gaussiani centrati, ovvero per ogni scelta di  $t > s \geq 0$  si ha  $(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

La funzione di autocovarianza si ottiene facilmente ed è  $E[B_t B_s] = \min(t, s)$

Intuitivamente si può pensare al moto incessante di una particella immersa in un liquido omogeneo, provocato dai continui urti con le molecole di quest'ultimo. In questo esempio le  $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$  indicano lo spostamento della particella nell'intervallo di tempo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Il moto è del tutto casuale, le varie posizioni assunte dalla particella in intervalli di tempo successivo dipendono dalla posizione subito precedente ma anche da un fattore casuale, rappresentato dagli urti con le molecole.

**Definizione 2.3.** Una *serie storica* è una successione di osservazioni  $X_1, \dots, X_n$  di un fenomeno  $X$  effettuate in  $n$  periodi.

## 2.1 Storia dell'indice

L'idrologo Harold Edwin Hurst lavorò ad alcuni progetti sulle dighe del Nilo all'inizio del ventesimo secolo occupandosi del controllo delle riserve idriche. Il suo compito fu quello di far sì che l'acqua presente in riserva non fosse mai troppa o troppo poca.

Nel tentativo di definire un modello matematico per la risoluzione del problema, Hurst ipotizzò che l'afflusso di acqua nel bacino, che è la componente casuale del processo, seguisse un random walk.

Grazie a precedenti dati raccolti sulle piene del Nilo, egli ebbe modo di notare che ad un livello di acqua nel bacino superiore (inferiore) alla media calcolata, seguiva con maggiore probabilità un incremento (decremento) del livello stesso. Ciò suggerì che le variazioni annuali del flusso del Nilo non fossero indipendenti.

Egli quindi svolse studi analoghi su altri fenomeni, notando che in natura molti processi sono influenzati da una memoria di fondo, per la quale gli eventi passati influenzano quelli futuri.

Per dare forma matematica alle osservazioni utilizzò un nuovo metodo di analisi statistica che portò all'individuazione dell'indice  $H$ .

E' proprio tramite il valore assunto da  $H$  che si riesce a distinguere tra serie casuali e non casuali, nel senso appena detto.

## 2.2 Definizione di $H$

Si supponga  $x_1, \dots, x_n$  rappresentino i valori dell'acqua defluita dalla riserva al  $k$ -esimo anno, in  $n$  anni successivi. Si considera  $X_n := \sum_{k=1}^n x_k$  la totalità di acqua defluita in  $n$  anni.

Pongo  $X_k = \sum_{i=1}^k x_i$ , e considero la quantità

$$X_k - \frac{k}{n}X_n$$

cioè la deviazione del valore  $X_k$  dalla rispettiva media calcolata su osservazioni raccolte in  $n$  anni.

Il range della deviazione è

$$R_n := \max_{1 \leq k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right) - \min_{1 \leq k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right)$$

per standardizzare la misura si divide per la deviazione standard

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( x_k - \frac{X_n}{n} \right)^2}$$

Hurst scoprì che la quantità calcolata  $\frac{R_n}{S_n}$  si comportava come  $cn^H$  con  $c$  costante e  $H = 0.7$ , diversamente da  $H = 0.5$  come aveva inizialmente ipotizzato, perciò viene scartata l'idea di un random walk.

Passando al logaritmo la formula può essere riscritta come

$$\log \frac{R_n}{S_n} = \log c + H \log n$$

Perciò una buona stima di  $H$  è data dall'espressione

$$H \approx \frac{\log \frac{R_n}{S_n}}{\log n}$$

Mandelbrot denominò  $H$  come *Indice di Hurst* e provò che assume valori in  $(0, 1)$ .

Distinguo di seguito le diverse situazioni al variare di  $H$ :

- $H = \frac{1}{2} \Rightarrow$  Si registrano osservazioni indipendenti le une dalle altre, la serie segue un random walk.

- $H \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$  Si registrano osservazioni dipendenti tra loro. Vi è quindi una sorta di memoria alla base del fenomeno, che in teoria influenzerebbe all'infinito gli andamenti futuri, anche se via via in maniera più smorzata.

L'influenza del passato sul futuro può essere calcolata tramite il seguente coefficiente di correlazione:

$$C(H) := 2^{(2H-1)} - 1$$

dove è importante sottolineare l'indipendenza di  $C$  da  $t$ .

- Se  $H = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$  cioè non c'è dipendenza tra gli eventi, come già visto.
- Se  $H \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow C > 0$ . La serie è persistente. La dipendenza tra gli eventi è detta long-range (memoria lunga) In questo caso è più probabile che ad un andamento positivo (negativo) segua un andamento positivo (negativo). Vale che il fenomeno di ripetizione di un evento sia tanto più probabile quanto più  $H$  sia vicino ad 1.
- Se  $H \in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow C < 0$ . La serie delle osservazioni è antipersistente. La dipendenza tra gli eventi è detta short-range (memoria breve). Si osservano continue inversioni di trend, questo fa sì che la serie sia molto più volatile rispetto alle altre. In questo caso le inversioni di trend sono più probabili quanto più  $H$  si avvicina a 0.

Il moto Browniano classico non si presta bene a descrivere fenomeni in cui si verificano questi casi di dipendenza. Questi fenomeni seguono un andamento che può essere descritto come un particolare processo stocastico che Mandelbrot definisce *Fractional Brownian Motion* ( $fBm$ ).

### 2.3 Moto Browniano Frazionario

Come osservato in precedenza, il primo aspetto che caratterizza il  $fBm$  è la dipendenza tra gli eventi, a meno del moto Browniano standard. Un secondo aspetto importante è la proprietà di **autosimilarità**.

**Definizione 2.4.** Un processo casuale  $(X(t))_{t \geq 0}$  si dice *autosimilare* se  $\forall a > 0, \exists b > 0$  tale che:

$$Legge(X_{at}, t \geq 0) = Legge(bX_t, t \geq 0). \quad (2.1)$$

La relazione suggerisce che per ogni scelta  $t_0, \dots, t_n$  in  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{at_0} \leq x_0, \dots, X_{at_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(bX_{t_0} \leq x_0, \dots, bX_{t_n} \leq x_n), \forall x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Intuitivamente un processo è autosimilare se si presenta un'invarianza dei comportamenti rispetto alla scala utilizzata per descrivere il fenomeno.

**Definizione 2.5.** Se  $b = a^H$  nella (2.1), cioè se vale che

$$\text{Legge}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Legge}(a^H X_t, t \geq 0)$$

si dice che  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  è un *processo autosimilare* con indice di Hurst  $H$ . La quantità  $D := \frac{1}{H}$  è detta la *dimensione statistica frattale* di  $X$ .

**Definizione 2.6.** Si dice che un processo gaussiano continuo  $B^{(H)} = (B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$  con media nulla, cioè  $E[B^{(H)}(t)] = 0$ ,  $\forall t \geq 0$  e funzione di autocovarianza data da:

$$E[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad t, s \geq 0 \quad (2.2)$$

è un moto Browniano frazionario di indice  $H \in (0, 1)$ .

Il più noto tra essi è il moto Browniano standard, che si ottiene per  $H = \frac{1}{2}$ .

Il moto Browniano frazionario gode delle seguenti proprietà:

1.  $B^{(H)}(0) = 0$  cioè il processo inizia da un punto che può essere considerato l'origine.
2. Dalla (2.2) si ricava la varianza:

$$E[(B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s))^2] = |t - s|^{2H} \quad t \geq 0, \quad s \geq 0, \quad H \in (0, 1)$$

3. Dalla precedente viene che  $B^{(H)}$  è un processo ad incrementi stazionari, ovvero:  
 $\forall s \geq 0$

$$\text{Legge}(B^{(H)}(t + s) - B^{(H)}(s))_{t \geq 0} = \text{Legge}(B^{(H)}(t) - B^{(H)}(0))_{t \geq 0}$$

Infatti

$$E[(B^{(H)}(t + s) - B^{(H)}(s))^2] = |t + s - s|^{2H} = t^{2H} = E[(B^{(H)}(t))^2]$$

4.  $B^{(H)}(t)$  è un processo autosimilare con indice di Hurst  $H$ . Infatti:

$$\begin{aligned} E[B^{(H)}(as)B^{(H)}(at)] &= \frac{1}{2}((at)^{2H} + (as)^{2H} - |at - as|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2}a^{2H}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \\ &= a^{2H}E[B^{(H)}(s)B^{(H)}(t)] \\ &= E[(a^H B^{(H)}(s))(a^H B^{(H)}(t))] \end{aligned}$$

Allora siccome la funzione autocovarianza è omogenea di ordine  $2H$ ,

$$Legge(B^{(H)}(at)) = Legge(a^H B^{(H)}(t))$$

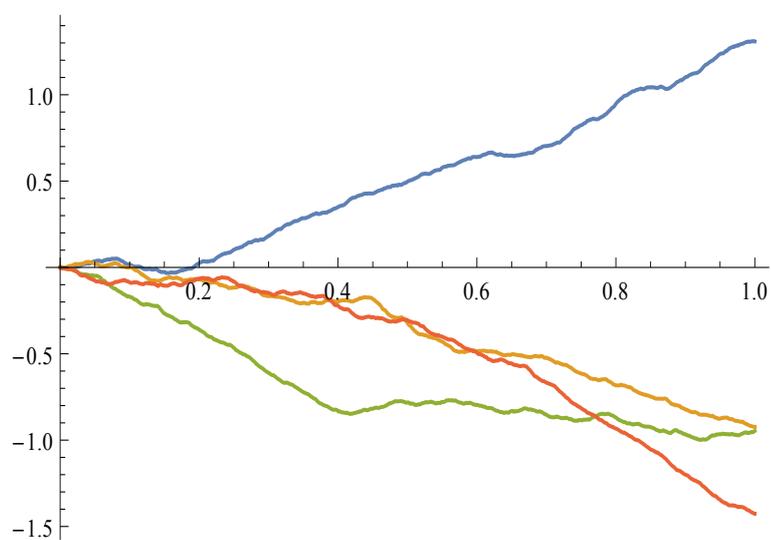
*Esempio 2.7.* Considero  $(B_t)_{t \geq 0}$  un moto Browniano. La funzione di autocovarianza è data da  $E[B_t B_s] = \min(t, s)$ . Si ottiene quindi

$$E[B_{at} B_{as}] = \min(at, as) = a(\min(t, s)) = E[(a^{\frac{1}{2}} B_t)(a^{\frac{1}{2}} B_s)]$$

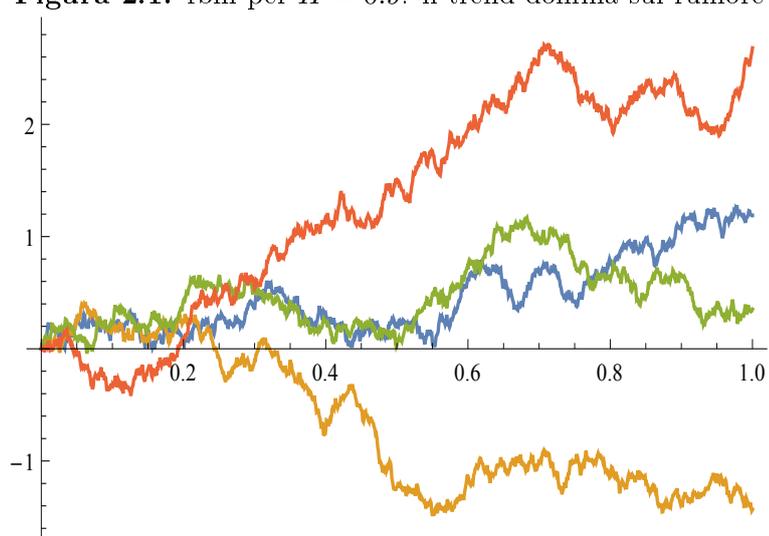
La funzione autocovarianza è omogenea di ordine 1, allora ne viene che

$$Legge(B_{at}, B_{as}) = Legge(a^{\frac{1}{2}} B_t, a^{\frac{1}{2}} B_s)$$

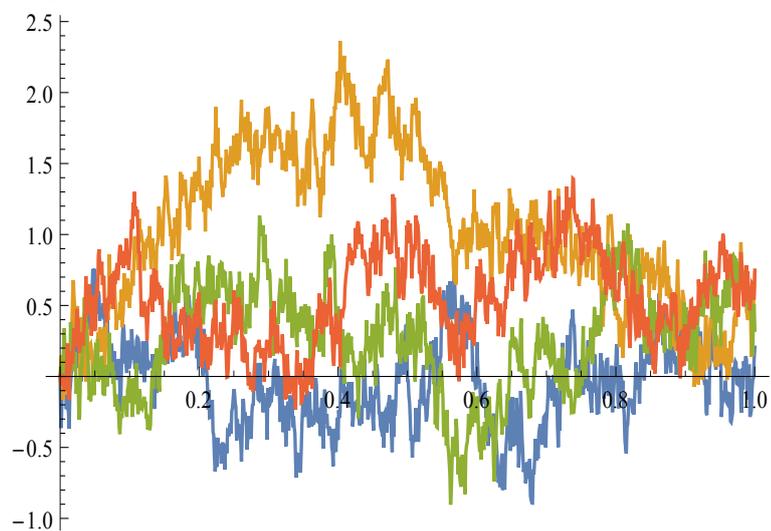
Di seguito introduco qualche esempio di simulazione di  $fBm$ .



**Figura 2.1:** fbm per  $H = 0.9$ : il trend domina sul rumore



**Figura 2.2:** fbm per  $H = 0.5$ : rumore e trend in equilibrio



**Figura 2.3:** fbm per  $H = 0.1$ : prevale il rumore sul trend



## Capitolo 3

# Relazione tra calcolo frazionario e calcolo stocastico

Avendo definito le derivate frazionarie, si vuole di seguito definire un nuovo integrale e vedere come poter relazionare calcolo frazionario e stocastico.

**Definizione 3.1.** Sia  $\Omega$  un intervallo finito. Una funzione  $f(x)$  a valori, in generale complessi, si dice *hölderiana* se soddisfa la condizione di Hölder di ordine  $\lambda$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|^\lambda$$

per ogni  $x_1, x_2 \in \Omega$ , con  $c$  costante.

L'insieme delle funzioni hölderiane si denota con  $\mathbb{H}^\lambda = \mathbb{H}^\lambda(\Omega)$ .

Se  $\lambda = 1 \implies \mathbb{H}^1(\Omega)$  è l'insieme delle funzioni lipschitziane.

**Definizione 3.2.** La *funzione indicatrice* di un sottoinsieme  $A$  di  $\Omega$  è una funzione

$$1_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

definita come

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

Si pone:

$$f_{a+} := 1_{(a,b)}(x)(f(x) - f(a+))$$

$$g_{b-} := 1_{(a,b)}(x)(g(x) - g(b-))$$

in modo tale che le funzioni  $f$  e  $g$  si annullino in  $x = a+$  e  $x = b-$ , rispettivamente, dove

$$f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \quad g(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$$

si suppone esistano quando appaiono nella formula.

**Definizione 3.3.** L'Integrale frazionario di  $f$  rispetto a  $g$  è definito come segue:

prese  $f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha}(L^p(a, b))$ ,  $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L^q(a, b))$ ,  $g(a+)$  esiste,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , e  $f \in \mathbb{H}^{\alpha-\frac{1}{p}}((a, b))$  se  $\alpha p > 1$ ,

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x) dx + f(a+) [g(b-) - g(a+)] \quad (3.1)$$

**Proposizione 3.4.** La definizione è indipendente dalla scelta di  $\alpha$ .

*Dimostrazione.* Suppongo che la definizione valga per  $(\alpha, p, q)$  e  $(\alpha', p', q')$  con  $\alpha' = \alpha + \beta > \alpha$  si avrebbe:

$$\begin{aligned} \int_a^b D_{a+}^{\alpha'} f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha'} g_{b-}(x) dx &= \int_a^b D_{a+}^{\beta} (D_{a+}^{\alpha} f_{a+})(x) D_{b-}^{1-(\alpha+\beta)} g_{b-}(x) dx \\ &= \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f_{a+}(x) D_{b-}^{\beta} (D_{b-}^{1-(\alpha+\beta)} g_{b-})(x) dx \\ &= \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x) dx \end{aligned}$$

dove ho usato la formula di composizione (1.11) e la formula di integrazione per parti (1.12).  $\square$

*Osservazione 3.5.* Se  $\alpha p < 1$  allora  $f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha}(L^p(a, b))$  se  $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p(a, b))$ ,  $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L^q(a, b))$  e  $g \in \mathbb{H}^{1-\alpha-\frac{1}{q}}((a, b))$  vale che

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x) dx \quad (3.2)$$

Per la dimostrazione si veda pag 340-342 [4].

Vediamo di seguito due approssimazioni indispensabili per l'estensione del calcolo frazionario al calcolo stocastico.

**Lemma 3.6.** *Se  $f$  e  $g$  sono definite come in (3.1) o (3.2)*

$$\int_a^b f dg = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^b I_{a+}^\varepsilon f dg \quad (3.3)$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di integrale frazionario di  $f$  rispetto a  $g$  abbiamo che:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^b I_{a+}^\varepsilon f dg = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^b D_{a+}^\alpha I_{a+}^\varepsilon f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-} dx + f(a+)(g(b-) - g(a+))$$

Poiché  $D_{a+}^\alpha I_{a+}^\varepsilon f_{a+} = I_{a+}^\varepsilon D_{a+}^\alpha f_{a+}$  e  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} I_{a+}^\varepsilon D_{a+}^\alpha f_{a+} = D_{a+}^\alpha f_{a+}$ , l'approssimazione resta provata.  $\square$

**Lemma 3.7.** *Suppongo  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$  e  $\varepsilon > 0$ . Vale che:*

$$\int_a^b I_{a+}^\varepsilon f dg = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \lim_{\delta \searrow 0} \int_\delta^\infty u^{\varepsilon-1} \int_a^b f(s) \frac{g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)}{u} ds du \quad (3.4)$$

per  $f \in I_{a+}^{\alpha-\varepsilon}(L^p(a, b))$ ,  $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L^q(a, b))$  con  $\alpha p \neq 1$

*Dimostrazione.* Ricordando che valgono la formula di composizione  $I_{a+}^{\alpha-\varepsilon} D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f = f$  e la formula di integrazione per parti  $\int_a^b I_{a+}^{\alpha-\varepsilon} \varphi(s) \psi(s) ds = \int_a^b \varphi(s) I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} \psi(s) ds$ , per  $\varphi := D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f$  e  $\psi(s) := g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)$ ,  $u > 0$ , quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s)(g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)) ds &= \int_a^b I_{a+}^{\alpha-\varepsilon} D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f(s)(g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)) ds \\ &= \int_a^b D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f(s) [I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s+u) - I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s)] ds \\ &=: \Phi(u) \end{aligned}$$

Ora vale che:

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \lim_{\delta \searrow 0} \int_\delta^\infty u^{\varepsilon-1} \int_a^b f(s) \frac{g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)}{u} ds du = \lim_{\delta \searrow 0} \int_\delta^\infty \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} u^{\varepsilon-2} \Phi(u) du$$

e dal teorema di Fubini:

$$\int_\delta^\infty \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} u^{\varepsilon-2} \Phi(u) du = \int_a^b D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f(s) \int_\delta^\infty \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s+u) - I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s)}{u^{1-\varepsilon+1}} du ds$$

e si noti che  $\int_\delta^\infty \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s+u) - I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s)}{u^{1-\varepsilon+1}} du ds$  per  $\delta \rightarrow 0$  tende a

$$D_{b-}^{1-\varepsilon} I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s) = \frac{d}{dx} I_{b-}^\varepsilon (I_{b-}^{\alpha-\varepsilon} g_{b-}(s)) = \frac{d}{dx} I_{b-}^\alpha g_{b-}(s) = D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(s)$$

come si può vedere a pag 338 [4].

Usando il fatto che  $D_{a+}^{\alpha-\varepsilon} f_{a+} = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha+\varepsilon} f_{a+} = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha} (I_{a+}^{\varepsilon} f_{a+}) = D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\varepsilon} f_{a+}$  si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_{\delta}^{\infty} u^{\varepsilon-2} \Phi(u) du &= \int_a^b D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\varepsilon} f(s) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(s) ds \\ &= \int_a^b I_{a+}^{\varepsilon} f(s) dg(s) \end{aligned}$$

e per il lemma precedente concludo.  $\square$

Allora a questo punto i due lemmi suggeriscono l'approssimazione dell'integrale frazionario di  $f$  rispetto a  $g$ :

$$\int_a^b f dg := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\delta}^1 u^{\varepsilon-1} \int_a^b f(s) \frac{g_{b-}(s+u) - g_{b-}(s)}{u} ds du \quad (3.5)$$

Vediamo come è possibile applicare quanto detto a processi stocastici ed in particolare ad un moto Browniano frazionario.

**Teorema 3.8** (Criterio di Kolmogorov). *Sia  $X : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un processo stocastico e suppongo che esistano  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $k > 0$  tale che  $E[|X_t - X_s|^{\alpha}] \leq k|t - s|^{1+\beta} \quad \forall t, s \geq 0$ . Allora esiste una versione di  $X$  continua, cioè un processo  $Y$  continuo tale che  $X_t = Y_t$  quasi certamente. Inoltre l'applicazione  $t \mapsto Y_t$  è hölderiana di esponente  $\lambda$ ,  $\forall \lambda \leq \frac{\beta}{\alpha}$ .*

Si può dimostrare usando il criterio di Kolmogorov che un moto Browniano frazionario  $B^{(H)}(t)$  definito su  $[0, T]$ , ha traiettorie hölder continue di ordine  $\lambda$ ,  $\forall 0 < \lambda < H$ .

Per la dimostrazione si veda pag 228 [2].

Per questo motivo è allora possibile definire l'integrale frazionario rispetto ad un moto browniano frazionario

$$\int_0^t f(s) dB^{(H)}, \quad t \in (0, T]$$

per ogni funzione  $f$  misurabile su  $[0, T]$  tale che  $f_{0+} \in I_{0+}^{\alpha}(L^1(0, T))$  per  $\alpha > 1 - H$ .

Vale allora l'approssimazione (3.5), che riporto nel caso di processi stocastici, ma prima si danno due definizioni utili:

**Definizione 3.9.** Un processo stocastico  $X^n$  converge uniformemente ad  $X$  in probabilità se:

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall t, \varepsilon > 0$ .

**Definizione 3.10.** Un processo stocastico  $(Y(t))_{t \geq 0}$  si dice *càglàd* se il processo ha traiettorie continue a sinistra e limitate a destra cioè:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} Y(t) = Y(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} Y(t) < +\infty, \quad \forall t, t_0 \in [0, T]$$

*Càglàd* non è altro che l'acronimo dal francese di *continue à gauche, limitée à droite*.

Considero  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  un processo stocastico càglàd e  $(B^{(H)}(t))_{t \in [0, T]}$  un moto browniano frazionario. Allora definisco *l'integrale stocastico* di  $Y$  rispetto a  $B^{(H)}$ :

$$\int_0^t Y dB^{(H)} := \lim_{\varepsilon \searrow 0_{ucp}} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_0^t Y(s) \frac{B_{t-}^{(H)}(s+u) - B_{t-}^{(H)}(s)}{u} ds du \quad (3.6)$$



# Appendice A

## Teoria della probabilità

### A.1 Spazi di probabilità

**Definizione A.1.** con  $\Omega$  un insieme diverso dal vuoto. Una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $\Omega$  tali che:

1.  $\phi \in \mathcal{F}$
2. se  $F \in \mathcal{F}$  allora  $F^c \in \mathcal{F}$
3. per ogni successione  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $\mathcal{F}$ ,  $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$

*Esempio A.2.* Sia  $\Omega = \mathbb{R}$ . Si chiama  $\sigma$ -algebra di Borel e si indica con  $\mathcal{B}$  la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene tutti gli aperti di  $\mathbb{R}$ , ovvero:

$$\mathcal{F} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

**Definizione A.3.** Una *misura di probabilità* sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  di  $\Omega$  è un'applicazione

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

tale che:

1.  $\mathbb{P}(\phi) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. per ogni successione  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $\mathcal{F}$ , tale che  $F_i \cap F_k = \phi \quad \forall i, k$  con  $i \neq k$  vale:

$$\mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} F_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(F_n)$$

**Definizione A.4.** Uno *Spazio di probabilità* è una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dove  $\mathcal{F}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$  e  $\mathbb{P}$  è una misura di probabilità su  $\mathcal{F}$ .

Si può pensare agli  $\omega \in \Omega$  come ai risultati di un fenomeno. Ogni elemento  $F \in \mathcal{F}$  è un evento di cui si può dare una misura di probabilità  $\mathbb{P}(F)$ .

**Definizione A.5.** Una misura di probabilità definita su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  è detta *distribuzione*

Considero lo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- $f$  sia  $\mathcal{B}$ -misurabile, cioè  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$
- $f \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

Allora la misura di probabilità su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  è data da:

$$\mathbb{P}_f(B) := \int_B f(x) dx, \quad B \in \mathcal{B}$$

$\mathbb{P}_f$  è una distribuzione e la  $f$  è detta *densità*.

*Esempio A.6.*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , è la densità gaussiana.

## A.2 Dalle variabili aleatorie ai processi stocastici

**Definizione A.7.** Una *variabile aleatoria reale* nello spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  è una funzione misurabile

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}$ .

Le variabili aleatorie di nostro interesse sono quelle in tempo continuo, per le quali si può dare una densità.

**Definizione A.8.** Data  $X$  v.a. su  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ha senso definire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(X \in B) \end{aligned}$$

che risulta essere una distribuzione detta *legge* o *distribuzione* della v.a.  $X$ .

*Esempio A.9.* Una variabile aleatoria  $X$  segue una *distribuzione normale* e si indica con

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

se  $\mathbb{P}^x(B)$  è determinata dalla densità gaussiana.

**Definizione A.10.** Un *Processo stocastico* può essere definito come la versione dinamica di una variabile aleatoria. Nel particolare, è una famiglia di variabili aleatorie  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nel caso discreto,  $(X_t)_{t \geq 0}$  nel caso continuo, quindi una funzione

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (n, \omega) &\longmapsto X_n(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X : [0, +\infty] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

In particolare un processo stocastico è detto *gaussiano* se prendendo un qualsiasi numero finito di variabili aleatorie dalla collezione che forma il processo stocastico stesso, esse hanno una distribuzione di probabilità congiunta gaussiana.

### A.3 Valore atteso, Varianza e Covarianza

**Definizione A.11.** Se  $X$  è una v.a. su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , si definisce il *Valore atteso* di  $X$  come l'integrale:

$$E[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Nel caso in cui  $X$  sia una v.a. reale continua con densità  $f$  allora

$$E[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

Si definiscono poi la *Varianza*

$$\text{Var}(X) := E[(X - E[X])^2]$$

che indica di quanto  $X$  si allontani quadraticamente dal proprio valore atteso; la *Deviazione standard*

$$\sqrt{\text{Var}(x)} =: S$$

e la *Covarianza* di due variabili aleatorie  $X, Y$ , data da

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

che fornisce una misura della dipendenza tra le due variabili.

La funzione di autocovarianza allora è la covarianza calcolata non tra due variabili diverse, ma in riferimento alla stessa, considerata in due istanti di tempo diversi.

*Esempio A.12.* Per una  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  la media e la varianza sono rispettivamente i parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

# Bibliografia

- [1] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I.: *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [2] Shiryaev A.N.: *Essentials of Stochastic Finance*, World Scientific, 1999.
- [3] Nualart D.: *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications*, article in *stochastics and stochastic reports*, 2003.
- [4] Zähle M.: *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I*, *Probab. Theory Rel. Fields* 111, 333-374, 1998.
- [5] Zähle M.: *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. II*, *Math. Nachr.* 225, 145-183, 2001.
- [6] Zähle M.: *On the link between fractional and stochastic calculus*.
- [7] Pascucci A.: *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer, 2008.
- [8] F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, T. Zhang: *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*, Springer.