

ALMA MATER STUDIORUM ··· UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**GRUPPI SUPERIORI  
DI  
OMOTOPIA**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
MASSIMO FERRI

**Presentata da:**  
EMANUELE PERAZZOLO

‡ Sessione  
Anno Accademico 2015/2016



# Gruppi Superiori di Omotopia

Definizioni, Proprietà, Esempi

Emanuele Perazzolo

19 Giugno 2015



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Omotopia</b>	<b>7</b>
2.1	Definizioni . . . . .	7
2.1.1	Spiegazione intuitiva . . . . .	9
2.2	Gruppi di omotopia delle sfere . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Prime Proprietà</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Metodi di calcolo</b>	<b>15</b>
4.1	Sospensione . . . . .	17
4.2	Proiezioni di rivestimento . . . . .	18
4.3	Spazi fibrati . . . . .	18
4.4	Approssimazione cellulare . . . . .	20
4.5	Gruppi stabili di Omotopia . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Esempi</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>29</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

La TOPOLOGIA, dal greco τόπος (luogo) e λόγος (studio), significa *studio dei luoghi* ed è una branca della matematica che studia le proprietà degli spazi che non cambiano quando vengono deformati in maniera continua. L'idea profonda è che alcuni problemi geometrici non dipendano dalla forma esatta degli oggetti in esame, bensì dalle proprietà di connessione che ci sono fra questi. Per questo motivo vengono utilizzati strumenti algebrici, ad esempio i *Gruppi di Omotopia*, i *Moduli di Omologia* e i *Moduli di Coomologia*, che “tastano” lo spazio esaminato per darci informazioni utili sulle sue proprietà.

In questa tesi affronterò i GRUPPI DI OMOTOPIA. Fondamentale per questi la nozione di *omotopia*, un oggetto basilare della Topologia che permette di portare in modo *liscio* una funzione continua in un'altra, quindi di spostare mappe in modo continuo nello spazio esaminato, scoprendone le caratteristiche. In particolare approfondirò le definizioni e le prime proprietà di questi gruppi: cosa sono e quindi il loro funzionamento, per poi accennare ai vari metodi di calcolo e darne un'idea complessiva costruendo alcuni esempi.

Procediamo un passo alla volta.

In sostanza nel primo capitolo darò le due definizioni generali di omotopia. Descriverò come, da queste, si associa una struttura di gruppo allo spazio in esame per poi spiegare in maniera intuitiva come in effetti funziona tutto ciò e il motivo per cui le due definizioni in effetti sono equivalenti. Nel secondo capitolo elencherò le proprietà base dei Gruppi di Omotopia per accedere alla parte più interessante: il terzo capitolo, dove capiremo realmente come calcolare queste strutture. Questa è la parte più interessante e più densa di teoremi che ci spiegano materialmente dove mettere le mani. Il *Teorema di Sospensione di Freudenthal*, uno strumento molto importante che aiuta non poco a semplificare l'ambiente in cui ci si trova; le *proiezioni di rivestimento*, applicazioni che permettono di trovare ambienti più conosciuti che mostrino lo spazio in esame da un altro punto di vista; gli *spazi fibrati* e le *fibrizioni*, le chiavi di volta per utilizzare metodi, quali le successioni esatte, che cerchino una continuità fra i gruppi calcolati in diverse dimensioni. Poi l'*approssimazione cellulare*, un'applicazione che approssima la figura studiata per mezzo di celle (o dischi)  $n$ -dimensionali e i *Gruppi Stabili di Omotopia*, un isomorfismo che accomuna i vari gruppi di omotopia da una certa dimensione in poi. Infine elencherò alcuni esempi che ben descrivono i problemi, gli spazi e le scoperte fatte in questo campo.





## Capitolo 2

# Omotopia

### 2.1 Definizioni

**Definizione 1** (Omotopia). Sia  $I^n$  il cubo  $n$ -dimensionale unitario, prodotto di  $n$  copie di  $I = [0, 1]$ . Il bordo  $\partial I^n$  è il sottospazio che consiste nei punti con almeno una delle coordinate uguale a 0 o a 1. Per uno spazio  $X$  con punto base  $x_0 \in X$ , definisco  $\pi_n(X, x_0)$  come l'insieme delle classi di omotopia di  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , dove le omotopie  $f_t$  soddisfano  $f_t(\partial I^n) = x_0$ ,  $\forall t$ .

**Definizione 2.** Sia un punto base  $p \in S^n$  e  $x_0$  un altro punto base di un dato spazio topologico  $X$ . Allora definiamo  $\pi_n(X, x_0)$  l'insieme delle classi di omotopia relativa delle mappe  $f : S^n \rightarrow X$  continue tali che  $f(p) = x_0$ .

**Osservazione 1** (Struttura di gruppo). Per  $n \geq 2$ , un'operazione così definita:

$$(f + g)(s_1 \dots s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

in  $\pi_n(X, x_0)$  generalizza l'operazione di prodotto su  $\pi_1$  e rende  $\pi_n(X, x_0)$  un gruppo.

**Osservazione 2.** Il gruppo  $\pi_n(X, x_0)$ , per  $n \geq 2$  è *abeliano*.

*Dimostrazione.* L'omotopia inizia rimpicciolendo i domini di  $f$  e  $g$  a cubi più piccoli di  $I^n$ . Da qui posso portare, finché disgiunti, dove voglio i due elementi (all'interno di  $I^n$ ). Dopo aver finito, riallargo  $f$  e  $g$  come prima, con le posizioni scambiate.

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array}} \approx \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array}} \approx \boxed{\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline g \\ \hline \end{array}} \approx \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}} \approx \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}}$$

Questo lo posso fare perché l'omotopia usata risulta costante sui punti che non appartengono ai domini  $f$  e  $g$  rimpiccioliti, quindi, quando riallargo per ottenere la tesi finale, mappo questi punti su  $x_0$ . □

*N.B* 1. Poiché  $\pi_n(X, x_0)$  è abeliano per  $n \geq 1$ , d'ora in avanti utilizzerò la notazione di somma  $+$  per descrivere l'operazione fra gli elementi di  $\pi_n$ .

Una generalizzazione molto utile per i gruppi di omotopia è la nozione di *gruppo di omotopia relativa*  $\pi_n(X, A, x_0)$  per una coppia  $(X, A)$  con punto base  $x_0 \in A$ .

**Definizione 3** (Omotopia relativa). Sia  $I^{n-1}$  la  $(n-1)$ -faccia del cubo  $I^n$  con l'ultima coordinata  $s_n = 0$  e sia  $J^{n-1}$  la chiusura di  $\partial I^n - I^{n-1}$ , unione delle facce rimanenti di  $I^n$ . Allora  $\pi_n(X, A, x_0)$ , per  $n \geq 1$ , è definito come l'insieme delle classi di omotopia delle mappe

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

dove le omotopie fra le mappe sono definite come sempre.

**Osservazione 3** (Struttura di gruppo). L'operazione per  $\pi_n(X, A, x_0)$  è definita in modo analogo a  $\pi_n(X, x_0)$ , eccetto che per la coordinata  $s_n$  gioca un ruolo speciale e non è più utilizzabile per l'operazione. Per cui  $\pi_n(X, A, x_0)$  è un gruppo per  $n \geq 2$  ed è abeliano per  $n \geq 3$ .

Per  $n = 1$  abbiamo

$$I^1 = [0, 1], \quad I^0 = \{0\}, \quad J^0 = \{1\}$$

così  $\pi_1(X, A, x_0)$  è l'insieme delle classi di omotopia dei cammini in  $X$  da un punto variabile in  $A$  ad un punto base fissato  $x_0 \in A$  e in generale questo non è un gruppo poiché in generale non è sempre definito il punto iniziale su cui concatenare di volta in volta i cammini dai quali poi si definisce l'operazione fra le classi di omotopia. L'esempio (6) mostra che  $\pi_1(X, A, x_0)$  non è un gruppo.

**Osservazione 4.** Una mappa  $\varphi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  induce delle mappe

$$\varphi_{\#} : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

che sono *omomorfismi* per  $n \geq 2$  e hanno proprietà analoghe al caso assoluto:

$$(\varphi\psi)_{\#} = \varphi_{\#}\psi_{\#}, \quad \mathbf{1}_{\#} = \mathbf{1}, \quad \varphi_{\#} = \psi_{\#} \text{ se } \varphi \simeq \psi \quad (2.1a)$$

La cosa più importante dell'omotopia relativa è che induce una *successione di gruppi* di omotopia relativa:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

dove  $i$  e  $j$  sono le inclusioni  $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  e  $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  rispettivamente; mentre  $\partial$  *mappa di bordo* e omomorfismo per  $n \geq 2$  è definita come:

$$\begin{aligned} \partial : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) &\rightarrow (X, A, x_0) \quad \text{ristretta a } I^{n-1} \\ (D^n, S^{n-1}, s_0) &\rightarrow (X, A, x_0) \quad \text{ristretta a } S^{n-1} \end{aligned}$$

### 2.1.1 Spiegazione intuitiva

**Definizioni** Le definizioni (1) e (2) sono equivalenti. Le mappe  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  sono le stesse che vanno dal quoziente  $I^n/\partial I^n$  a  $X$ , portando il punto base  $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$  a  $x_0$ . Pertanto possiamo vedere  $\pi_n(X, x_0)$  anche come l'insieme delle classi di omotopia delle mappe  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , dove le omotopie sono fra mappe della stessa forma  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ .

**Struttura di gruppo** Consideriamo lo spazio  $C = [0, 2] \times [0, 1]^{n-1}$ , unione dei due cubi  $[0, 1] \times [0, 1]^{n-1}$  e  $[1, 2] \times [0, 1]^{n-1}$  (dove  $[0, 1]^{n-1}$  è il prodotto  $(n-1)$ -esimo dell'intervallo unitario). Definiamo ora una funzione continua  $h : C \rightarrow X$  tale che sul cubo di sinistra sia  $h = f$ , mentre su quello di destra  $h = g$ . Le due funzioni coincidono sulla parete in comune  $\{1\} \times [0, 1]^{n-1}$ , che viene mappata tutta su  $x_0$ . A questo punto "strizziamo"  $C$  per ottenere un altro cubo tramite la mappa:

$$s : [0, 1]^n \rightarrow C, \quad s(t_1, \dots, t_n) = (2t_1, t_2, \dots, t_n)$$

e quindi definiamo finalmente  $f + g$  come  $hs$ .

Notiamo poi che anche  $f + g$  manda tutto il bordo del cubo su  $x_0$ , e quindi è un elemento di  $\pi_n(X, x_0)$ . Infine l'operazione è ben definita poiché, se  $f'$  e  $g'$  sono funzioni omotope a  $f$  e  $g$ , vale

$$f' + g' \simeq f + g$$

e quindi  $[f' + g'] = [f + g]$ .

Equivalentemente si definisce l'operazione e la struttura di gruppo rispetto alla definizione (2). In questa interpretazione di  $\pi_n(X, x_0)$ , la struttura di gruppo è data dall'operazione  $f + g$  definita come la composizione

$$S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \quad \left| \quad \begin{array}{c} \text{Diagramma: } S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \\ \text{Il diagramma mostra una sfera } S^n \text{ che viene compressa (c) in un bouquet di due sfere } S^n \vee S^n. \text{ Da questo bouquet, due mappe } f \text{ e } g \text{ puntano verso un punto } X. \end{array} \right.$$

dove  $c$  collassa l'equatore  $S^{n-1}$  di  $S^n$  ad un punto, ottenendo un *bouquet* di due circonferenze e poi, scelto un punto base  $s_0$  che giaccia proprio su questo  $S^{n-1}$ ,  $f$  e  $g$  mappano le due sfere su  $X$  in modo che sia il punto base.

## 2.2 Gruppi di omotopia delle sfere

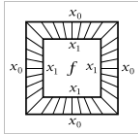
		$\pi_i(S^n)$												
		$i \rightarrow$												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$n$	1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\downarrow$	2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
		3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
		4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
		5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
		6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
		7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
		8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

La tabella mostra i gruppi di omotopia della sfera al variare sia della dimensione di  $S^n$  (lo vediamo al crescere di  $n$  sulle righe), sia del grado del gruppo  $i$ -esimo di omotopia (che vediamo al crescere di  $i$  sulle colonne). La prima cosa interessante che si nota è una specie di diagonale di  $\mathbb{Z}$ , proprio quando il grado del gruppo e la dimensione della sfera combaciano: questo è il risultato del *Teorema di Hurewicz* che vedremo in seguito a pagina 15. Sotto la diagonale, ovvero quando la dimensione di  $S^n$  supera il grado del gruppo di omotopia in esame, cioè per  $n \geq i$ , sono presenti solo degli zeri: vedremo il motivo di questo nel Corollario 3 a pagina 21. Inoltre possiamo notare anche la prima riga di soli zeri eccetto  $\pi_1(S^1)$  (che, come ben sappiamo, è il gruppo fondamentale della circonferenza), dovuta ai risultati che otteniamo utilizzando gli spazi di ricoprimento. Molto interessante invece la riga quattro, dove, da  $i = 7$ , vediamo che i gruppi di omotopia sono dei prodotti di spazi: enunciato di un teorema che accenneremo in seguito.

# Capitolo 3

## Prime Proprietà

1. L'insieme  $\pi_0(X, x_0)$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ . Quindi se  $X$  è connesso per archi, è ininfluente la scelta del punto base  $x_0$ .



*Dimostrazione.* Dato un cammino  $\gamma : I \rightarrow X$  da  $x_0 = \gamma(0)$  a  $x_1 = \gamma(1)$ , possiamo associare ad ogni mappa  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  una nuova mappa  $(\gamma f) : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , riducendo il dominio di  $f$  a un cubo concentrico più piccolo in  $I^n$ . Quindi inseriamo il cammino  $\gamma$  su ogni segmento radiale nella fascia fra i due cubi.

□

*N.B.* 2. Per  $n = 1$  la mappa  $\gamma f$  è la composizione dei tre cammini  $\gamma$ ,  $f$  e  $\gamma^{-1}$ .

2. Il gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  è il *gruppo fondamentale*.
3. Ogni mappa  $f : Y \rightarrow X$  tale che  $f(y_0) = x_0$ , induce *omomorfismi*

$$f_{\#} : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

4. Mappe omotope inducono gli stessi omomorfismi; segue che spazi omotopicamente equivalenti hanno gli stessi gruppi di omotopia.
5. Una *proiezione di rivestimento*  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  induce una mappa iniettiva sui gruppi fondamentali e un *isomorfismo*

$$p_{\#} : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad \text{per } n \geq 2.$$

6. Una omotopia di  $\gamma$  o  $f$  sulle mappe che fissano  $\partial I$  o  $\partial I^n$  rispettivamente, definisce una omotopia di  $\gamma f$  sulle mappe  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Qui ho tre proprietà:

$$\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g \tag{3.1a}$$

$$(\gamma \eta) f \simeq \gamma(\eta f) \tag{3.1b}$$

$$\mathbf{1} \simeq \mathbf{1} f, \quad \mathbf{1} := \text{cammino costante} \tag{3.1c}$$

*Dimostrazione.* Le omotopie (3.1b) e (3.1c) sono ovvie. Per dimostrare la-(3.1a) iniziamo con il deformare  $f$  e  $g$  affinché siano costanti sul lato destro e sinistro di  $I^n$ , rispettivamente, così da creare mappe che possiamo chiamare  $f+0$  e  $0+g$ . Quindi dividiamo una progressivamente più ampia sezione centrale simmetrica di  $\gamma(f+0) + \gamma(0+g)$  finché non troviamo  $\gamma(f+g)$ . Una omotopia può essere questa:

$$h_t(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \gamma(f+0)\left((2-t)s_1, s_2, \dots, s_n\right), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(0+g)\left((2-t)s_1 - 1, s_2, \dots, s_n\right), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3.2)$$

Quindi abbiamo:

$$\gamma(f+g) \simeq \gamma(f+0) + \gamma(0+g) \simeq \gamma f + \gamma g \quad (3.3)$$

□

*N.B 3.* Supponendo un cambio di punto base

$$\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

allora si ha che  $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$ . Quindi per la-(3.1a),  $\beta_\gamma$  è un *omomorfismo*, mentre per la-(3.1b) e la-(3.1c) è un *isomorfismo* con inversa  $\beta_{\bar{\gamma}}$ , con  $\bar{\gamma}$  cammino inverso di  $\gamma : \bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s)$ .

7. Per un prodotto  $\prod_\alpha X_\alpha$  di una collezione arbitraria di spazi connessi per archi  $X_\alpha$ , esistono isomorfismi

$$\pi_n(\prod_\alpha X_\alpha) \cong \prod_\alpha (\pi_n(X_\alpha)), \forall n$$

*Dimostrazione.* Una mappa  $f : Y \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$  si può anche vedere come una collezione di mappe  $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ . Preso quindi  $Y = S^n$ , allora  $S^n \times I$  dà la tesi. □

8.

**Osservazione 5** (Azione di  $\pi_1$ ). Sofferamoci sui lacci  $\gamma$  puntati su  $x_0$ . Poiché  $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma \circ \beta_\eta$ ,

l'associazione  $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$  definisce un *omomorfismo* da  $\pi_1(X, x_0)$  a  $\text{Aut}(\pi_n(X, x_0)) =$  gruppo automorfismi di  $\pi_n$ . Questa si chiama *azione di  $\pi_1$  su  $\pi_n$*  e consiste nel fatto che ogni elemento di  $\pi_1$  agisce come un automorfismo  $[f] \mapsto [\gamma f]$  di  $\pi_n$ .

Quando  $n > 1$ , l'azione rende il gruppo abeliano  $\pi_n(X, x_0)$  un modulo sull'anello  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .

Gli elementi di  $\mathbb{Z}[\pi_1]$  sono somme finite  $\sum_i n_i \gamma_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$  e  $\gamma_i \in \pi_1$ ; la moltiplicazione è definita dalla distributività e dalla moltiplicazione in  $\pi_1$ . La struttura di modulo su  $\pi_n$  è data da

$$\left(\sum_i n_i \gamma_i\right)\alpha = \sum_i n_i (\gamma_i \alpha), \quad \text{per } \alpha \in \pi_n$$

*Notazione 1.* Uno spazio con una azione di  $\pi_1$  banale è chiamato *n-sempllice*, ( $\forall n$ ).

9.

**Osservazione 6** ( $\pi_n$  è un funtore). Una mappa  $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induce una mappa

$$\varphi_{\#} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

definita da  $\varphi_{\#}([f]) = [\varphi f]$ .

$\varphi_{\#}$  è ben definita ed è un omomorfismo per  $n \geq 1$ . Inoltre è evidente la *funtorialità*:

$$(\varphi\psi)_{\#} = \varphi_{\#}\psi_{\#} \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{1}_{\#} = \mathbf{1} \quad (3.4b)$$

$$\text{se } \varphi_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \text{ è una omotopia } \Rightarrow \varphi_{0\#} = \varphi_{\#} \quad (3.4c)$$

*N.B* 4. Come per  $\pi_1$ , se ho una equivalenza omotopica  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ , questa induce isomorfismi su tutti i *gruppi di omotopia*  $\pi_n$ .





# Capitolo 4

## Metodi di calcolo

Esistono vari metodi, sebbene piuttosto complicati, per calcolare i *gruppi di omotopia* di un dato spazio. Prima di elencarne alcuni, anticiperei alcuni concetti base che aiutino a capire meglio questi oggetti. Innanzitutto parliamo del legame che congiunge i *gruppi di omotopia* ai *gruppi di omologia*.

**Osservazione 7** (Legame tra omotopia e omologia). Il legame fra omotopia e omologia è rappresentato dall'esistenza di un omomorfismo:

$$\varphi : \pi_k(X, x_0) \rightarrow H_k(X), \quad \forall k \quad (4.1)$$

Inoltre abbiamo un Teorema importante.

**Teorema 1** (Isomorfismo di Hurewicz). *Se  $x_0 \in X$ ,  $X$  semplicemente connesso e esiste un  $n \geq 2$  tale che  $H_k(X) = 0$ , per  $0 < k \leq n$ , allora*

$$\pi_k(X, x_0) = 0 \quad \text{per } k < n;$$

*viceversa, se esiste un  $n \geq 1$  tale che  $\pi_k(X, x_0) = 0$  per  $k < n$ , allora*

$$H_k(X) = 0 \quad \text{per } 0 < k < n.$$

*In entrambi i casi:*

$$\pi_n(X, x_0) \cong H_n(X) \quad (4.2)$$

Ne segue un altro teorema importante che mostra la connessione tra i gruppi di omotopia e quelli di omologia è il Lemma di *Whitehead*.

**Lemma 1** (Whitehead). *Siano  $X$  e  $Y$  connessi per archi e sia  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una mappa. Allora*

**a)** *Se, inoltre,  $X$  e  $Y$  sono semplicemente connessi e vi è un  $n \geq 2$  tale che*

$$f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$$

è un isomorfismo per  $k < n$  e un epimorfismo per  $k = n$ , allora

$$f_{\#} : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, y_0)$$

è un isomorfismo per  $k < n$  e un epimorfismo per  $k = n$ .

- b) Viceversa, se  $\exists n \geq 1$  tale che  $f_{\#}$  è un isomorfismo per  $k < n$  e un epimorfismo per  $k = n$ , allora  $f_*$  è un isomorfismo per  $k < n$  e un epimorfismo per  $k = n$ .

Un teorema di *Whitehead* ci mostra invece l'importanza dei *CW-complexi* nel calcolo dell'omotopia. Vediamo infatti che se uno spazio  $X$  è un complesso di celle, le informazioni che se ne deducono sono maggiori rispetto ad altri casi; come quando, con l'omologia, uno spazio *triangolabile* è molto più semplice da calcolare rispetto a uno che non ammette una triangolazione.

Anticipiamo questo teorema di *Whitehead* con un altro:

**Teorema 2** (Lemma di compressione). *Sia  $(X, A)$  una CW-coppia e sia  $(Y, B)$  una coppia di spazi tali che  $B \neq \emptyset$ . Per ogni  $n$  tale che  $X - A$  abbia celle  $n$ -dimensionali, assumiamo che  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ ,  $\forall y_0 \in B$ . Allora ogni mappa  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  è omotopa rel  $A$  a una mappa  $X \rightarrow B$ . Quando  $n = 0$ , la condizione che  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ ,  $\forall y_0 \in B$  è come dire che la coppia  $(Y, B)$  è 0-connessa, ovvero connessa per archi.*

**Teorema 3** (*Whitehead*). *Se una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra due CW-complexi connessi induce isomorfismi  $f_{\#} : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ ,  $\forall n$ , allora  $f$  è una equivalenza omotopica. Nel caso, poi, che  $f$  sia una inclusione di un sottocomplesso  $X \hookrightarrow Y$ , la conclusione è più potente:  $X$  è un retratto per deformazione su  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Nel caso speciale che  $f$  sia l'inclusione di un sottocomplesso, consideriamo la successione esatta lunga di gruppi di omotopia per la coppia  $(Y, X)$ . Dal fatto che  $f$  induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia, allora i gruppi di omotopia relativa  $\pi_n(Y, X)$  sono zero. Applicando il Teorema (2) alla mappa *Identità*  $(Y, X) \rightarrow (Y, X)$  otteniamo una retrazione per deformazione di  $Y$  su  $X$ .

Possiamo provare il caso generale utilizzando il *cilindro mappante*. Siccome un cilindro mappante  $M_f$  di una mappa  $f : X \rightarrow Y$  è lo spazio quoziente dell'unione disgiunta di  $X \times I$  e  $Y$  con la relazione  $(x, 1) \sim f(x)$ , contiene sia  $X = X \times \{0\}$  sia  $Y$  come sottospazi e ammette una retrazione per deformazione su  $Y$ . La mappa  $f$  diventa la composizione tra l'inclusione  $X \hookrightarrow M_f$  e la retrazione  $M_f \rightarrow Y$ . Per il fatto che una retrazione è un'equivalenza omotopica, ciò mostra che  $X$  è un retratto per deformazione di  $M_f$  quando  $f$  induce isomorfismi sui gruppi di omotopia, o equivalentemente, se i gruppi di omotopia relativa  $\pi_n(M_f, X)$  sono tutti zero. Se la mappa  $f$  è una *applicazione cellulare* che porta l' $n$ -scheletro di  $X$  sull' $n$ -scheletro di  $Y$  per tutti gli  $n$ , allora  $(M_f, X)$  è una coppia di *CW-complexi* e così abbiamo risolto la prima parte del teorema.

Se  $f$  non fosse un'applicazione cellulare, per prima cosa applichiamo il Lemma (2) per ottenere un'omotopia *rel*  $X$  dell'inclusione  $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (M_f, X)$  ad una mappa su  $X$ . Dal fatto che ovviamente la coppia  $(M_f, X \cup Y)$  soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia, questa omotopia si può estendere ad un'omotopia dalla mappa *identità* di  $M_f$  a una mappa  $g : M_f \rightarrow M_f$  che porta  $X \cup Y$  in  $X$ . Quindi riappliciamo il Teorema (2) alla composizione

$$(X \times I \amalg Y, X \times \partial I \amalg Y) \rightarrow (M_f, X \cup Y) \xrightarrow{g} (M_f, X)$$

per completare la costruzione di una retrazione per deformazione di  $M_f$  su  $X$ . □

Come sopra anticipato, i metodi di calcolo per i gruppi di omotopia superiore sono molto più complessi dei metodi usati per il calcolo dell'omologia. Questo perché vengono a mancare la *proprietà di escissione* e tutta la teoria di *Mayer-Vietoris*, usate in omologia per “spezzare” un generico spazio in parti più semplici da calcolare. Grazie però al Teorema (1) e al Lemma (1) possiamo elencare dei metodi alternativi che ci permettono di studiare i gruppi di omotopia di molti spazi.

1. Sospensione e Teorema di Freudenthal
2. Isomorfismi indotti da proiezioni di rivestimento
3. Fasci di fibre
4. Approssimazione cellulare

## 4.1 Sospensione

**Definizione 4** (Sospensione). Sia  $X$  uno spazio topologico. Definiamo la sua *sospensione*  $SX$  come lo spazio quoziente di  $X \times [0, 1]$ , dove  $X \times \{0\}$  e  $X \times \{1\}$  sono identificati a due punti.

**Osservazione 8.** Se  $X = S^n$  allora la sua sospensione è  $SX = S^{n+1}$  e i *punti di sospensione* possono essere interpretati come il Nord e il Sud di  $S^{n+1}$ .

**Definizione 5** ( $n$ -connessione). Uno spazio  $X$  con punto base  $x_0$  è detto  *$n$ -connesso* con  $n \geq 0$  se  $\pi_i(X, x_0) = 0$  per  $i \leq n$ .

*Nota 1.* 0-connesso  $\Rightarrow$  connesso per archi.

**Teorema 4.** Sia  $X$  un *CW-complesso*, unione di due sottocomplessi  $A$  e  $B$  con  $A \cap B = C \neq \emptyset$ , con  $C$  connesso. Se la coppia  $(A, C)$  è  $m$ -connessa e  $(B, C)$  è  $n$ -connessa, con  $m, n \geq 0$ , allora la mappa

$$\pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$$

indotta dall'inclusione  $A \hookrightarrow X$  è un isomorfismo per  $i \leq m + n$  e un morfismo suriettivo per  $i = m + n$ .

Questo teorema porta alla conclusione di Freudenthal.

**Corollario 1** (Sospensione di Freudenthal). *La mappa di sospensione*

$$\pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

indotta dall'inclusione  $S^n \hookrightarrow S^{n+1}$ , è un isomorfismo per  $i < 2n - 1$  e un morfismo suriettivo per  $i = 2n - 1$ .

Più in generale, queste proprietà della sospensione valgono per qualsiasi *CW-complesso*  $(n - 1)$ -connesso  $X$ :

$$\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX)$$

con mappe analoghe a quelle del caso speciale con le sfere  $S^n$ .

*Dimostrazione.* Decomponiamo la sospensione  $SX$  come l'unione dei due coni  $C_+X$  e  $C_-X$  che si intersecano in una copia di  $X$ . La mappa di sospensione si può riscrivere in questo modo:

$$\pi_i(X) \simeq \pi_{i+1}(C_+X, X) \xrightarrow{a} \pi_{i+1}(SX, C_-X) \simeq \pi_{i+1}(SX)$$

dove i due isomorfismi derivano dalla successione esatta lunga di coppie di spazi e la mappa  $a$  è indotta dall'inclusione.

Dalla successione esatta lunga di coppie di spazi  $(C_\pm X, X)$  vediamo che questa è  $n$ -connessa se  $X$  è  $(n-1)$ -connesso. Dal teorema precedente deduciamo quindi che la mappa  $a$  è un isomorfismo per  $i+1 < 2n$  ed è suriettiva per  $i+1 = 2n$ .  $\square$

**Corollario 2.**  $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ , generato dalla mappa identità, per ogni  $n$ .

In particolare, l'applicazione grado  $\pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Dal corollario -(1), sappiamo che la successione delle mappe di sospensione

$$\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \dots$$

la prima mappa è suriettiva mentre le seguenti sono isomorfismi. Dal fatto che  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ , segue che  $\pi_n(S^n)$  per  $n \geq 2$  è un gruppo ciclico finito o infinito indipendente da  $n$ , generato dalla mappa identità. Possiamo poi dedurre che il gruppo ciclico è infinito dalla teoria dell'*omologia*, per la quale esistono mappe  $S^n \rightarrow S^n$ , che preservano il punto base, di grado arbitrario, e il grado è un invariante omotopico. Un altro modo è vedere come funziona la *fibrato di Hopf*

$$S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^3$$

di cui parlerò in dettaglio nell'esempio -(3), la quale mi dà come risultato

$$\pi_1(S^1) \simeq \pi_2(S^2).$$

Infine l'applicazione grado  $\pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  è un isomorfismo perché la mappa  $z \mapsto z^k$  in  $S^1$  ha grado  $k$ .  $\square$

## 4.2 Proiezioni di rivestimento

**Definizione 6.** Una proiezione di rivestimento di uno spazio topologico  $X$  è una mappa  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  tale che ogni  $x \in X$  ammetta un intorno aperto  $U$  in modo che  $p^{-1}(U)$  sia una unione disgiunta di aperti di  $\tilde{X}$ , ognuno dei quali è mappato omeomorficamente in  $U$  tramite  $p$ .  $\tilde{X}$  si chiama *spazio di rivestimento* di  $X$ .

**Teorema 5.** Sia  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  una proiezione di rivestimento per  $(X, x_0)$ .

Allora, per  $n \geq 2$ , tale proiezione induce isomorfismi

$$p_\# : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \tag{4.3}$$

## 4.3 Spazi fibrati

Una successione esatta corta  $A \hookrightarrow X \rightarrow X/A$  fornisce, come anticipato a inizio paragrafo, una successione esatta lunga per i gruppi di omologia, ma non per i gruppi di omotopia perché

falliscono la *proprietà di escissione* e il *Teorema di Mayer-Vietoris*, ovvero quei metodi che nell'omologia permettevano di "spezzare" lo spazio in esame e facilitarne quindi lo studio.

Esiste però un altro tipo di successione esatta corta del tipo  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ , dove  $p$  è una proiezione, chiamata *spazio fibrato* o *fibrato*, molto più omogenea della precedente: tutti i sottospazi  $p^{-1}(b) \in E$ , chiamati *fibre*, sono omeomorfi.

*Nota 2.* L'omogeneità topologica di tutte le fibre di uno spazio fibrato si può vedere come l'omogeneità algebrica in una successione esatta corta di gruppi

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \xrightarrow{p} H \rightarrow 0$$

dove le fibre  $p^{-1}(h)$  sono i laterali di  $K$  in  $G$ .

In alcuni spazi fibrati del tipo  $F \rightarrow E \rightarrow B$ ,  $E$  è proprio un gruppo,  $F$  un sottogruppo e  $B$  lo spazio dei laterali destri e sinistri.

Accenniamo ora un primo esempio dimostrativo, tralasciandone la spiegazione vera e propria che verrà introdotta in seguito.

*Esempio 1 (Hopf).*  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ , dove  $S^3$  è il gruppo dei cosiddetti *quaternioni* di norma unitaria e  $S^1$  il sottogruppo dei *complessi*, genera una successione esatta lunga

$$\dots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \rightarrow \pi_i(S^2) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \dots$$

che fornisce l'informazione

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$$

poiché  $\pi_2(S^3)$  e  $\pi_1(S^3)$  sono zero grazie all'*approssimazione cellulare* che vedremo in seguito. Da qui segue per induzione che  $\pi_i(S^i) \cong \mathbb{Z}$ .

Ora vediamo come costruire tutto questo.

**Definizione 7.** Siano le mappe  $p : E \rightarrow B$ ,  $g : X \rightarrow B$ .

Una mappa  $\tilde{g} : X \rightarrow E$  tale che  $p\tilde{g} = g$ , viene detta *sollevamento* di  $g$  rispetto a  $p$ .

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{g}_0 & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g_0} & B \end{array}$$

**Osservazione 9.** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  ha la *proprietà di sollevamento delle omotopie* rispetto a uno spazio  $X$  se, data una omotopia  $H : X \times I \rightarrow B$  da  $g_0$  a  $g_1$  e un sollevamento  $\tilde{g}$  di  $g$ , allora esiste una omotopia

$$\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$$

sollevamento di  $H$ .

Più formalmente questo è un caso speciale della *proprietà di estensione* del sollevamento per una coppia  $(Z, A)$ , per cui ogni mappa  $Z \rightarrow B$  ha un sollevamento  $Z \rightarrow E$  che estende un dato sollevamento sul sottospazio  $A \in Z$ . Il caso  $(Z, A) = (X \times I, X \times \{0\})$  è la proprietà di sollevamento cercata.

**Definizione 8.** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  è detta FIBRAZIONE DEBOLE (o di *Serre*) se, dati  $n$ , una mappa  $g : I^n \rightarrow E$  e una omotopia

$$F : I^n \times I \rightarrow B \quad \text{tale che} \quad F|_{I^n \times \{0\}} = p g$$

esiste una omotopia

$$G : I^n \times I \rightarrow E \quad \text{tale che} \quad G|_{I^n \times \{0\}} = g \quad \text{e} \quad F = p G$$

*N.B* 5. Una fibrazione gode della stessa proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto a qualunque spazio  $X$ , non solo  $I^n$ .

**Teorema 6.** Supponiamo  $p : E \rightarrow B$  abbia la proprietà del sollevamento delle omotopie rispetto ai dischi  $D^k$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Scelto il punto base  $b_0 \in B$  e  $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ , allora la mappa

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

è un isomorfismo  $\forall n \geq 1$ . In più se  $B$  è connesso per archi, si ha la successione esatta lunga

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0)$$

**Definizione 9.** Un FIBRATO su uno spazio topologico  $E$  con fibra  $F$  è la successione

$$F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$$

dove  $p : E \rightarrow B$  è una proiezione tale che ogni punto di  $B$  abbia un intorno  $U$  tale che esiste un omeomorfismo  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ \downarrow p & \swarrow \pi & \\ U & & \end{array} \quad (4.4)$$

dove  $\pi$  è la proiezione al primo fattore.

La commutatività del diagramma significa che  $h$  porta ogni fibra  $F_b = p^{-1}(b)$  omeomorficamente sulla copia di  $F$  data da  $\{b\} \times F$ . Pertanto, localmente, le fibre  $F_b$  sono disposte come nel prodotto  $B \times F$ .

*Esempio 2.* Uno spazio fibrato con fibra discreta è uno *spazio di rivestimento*.

## 4.4 Approssimazione cellulare

**Definizione 10.** Un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  tra due *CW*-complessi viene detta *mappa cellulare* se  $f(X^n) \in Y^n$ ,  $\forall n$ , cioè se manda ogni  $n$ -scheletro di  $X$  nell' $n$ -scheletro di  $Y$ .

**Teorema 7.** *Ogni mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra  $CW$ -complessi è omotopa a una applicazione cellulare.*

*Se  $f$  è già una mappa cellulare su un sottocomplesso  $A$ , l'omotopia può essere fatta relativamente ad  $A$ .*

Questo Teorema ha una diretta e importante conseguenza riassunta nel seguente corollario.

**Corollario 3.**

$$\pi_n(S^k) = 0, \quad \text{per } n < k.$$

*Dimostrazione.* Considerando  $S^n$  e  $S^k$  con l'usuale struttura di  $CW$ -complessi, con la 0-cella come punto base, allora ogni mappa  $S^n \rightarrow S^k$  che mantenga fisso il punto base, può essere omotopicamente piegata, fissando il punto base, ad una applicazione cellulare, che è poi costante se  $n < k$ .  $\square$

## 4.5 Gruppi stabili di Omotopia

Dal Corollario (1) vediamo che per un  $CW$ -complesso  $n$ -connesso  $X$ , la mappa di sospensione  $\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX)$  è un isomorfismo per  $i < 2n + 1$  e, in particolare, ne deduciamo che per  $i \leq n$ ,  $SX$  è  $(n + 1)$ -connesso. Questo ci porta ad avere una successione di sospensioni iterate di questo tipo:

$$\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX) \rightarrow \pi_{i+2}(S^2X) \rightarrow \dots$$

dove le mappe sono isomorfismi, anche senza aver supposto condizioni di connessione su  $X$ . Da ciò definiamo l' **$i$ -esimo gruppo stabile di omotopia**:  $\pi_i^s(X)$ . Questo non è propriamente un gruppo, bensì una condizione, appunto, di stabilità tra i gruppi di omotopia studiati. In sostanza vediamo che, oltre un certo  $i$  e grazie alle sospensioni  $S^i X$ , tutti i gruppi di omotopia sono fra loro isomorfi perciò è possibile ricondurci al primo gruppo che inizia la catena di isomorfismi. Quindi con  $\pi_i^s$  denotiamo proprio questa successione di isomorfismi. Nella pagina seguente vedremo una tabella che mostra proprio questo.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i^s$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$
	8	9	10	11	12	13	14	
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{504}$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	
	15	16	17	18	19			
	$\mathbb{Z}_{480} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{264} \times \mathbb{Z}_2$			

Questa tabella elenca i gruppi stabili di omotopia di  $S^n$  fino a  $i = 19$ ; in realtà nella storia sono stati calcolati fino a  $i = 60$ , mentre per dimensioni superiori il problema è ancora aperto.

Ma cosa vuol dire  $\pi_i^s$ ?

Come abbiamo visto sopra, i gruppi stabili sono un insieme di gruppi di omotopia provenienti da successioni di sospensioni su un dato spazio. Nella tabella abbiamo elencato questi gruppi riguardanti  $S^n$  evitando perciò di mettere la dimensione della sfera in esame. Questo viene anche dal fatto che per le sfere vale questo caso specifico:

$$\pi_i^s(S^0) = \pi_{i+n}(S^n), \quad \text{per } n \geq i + 1$$

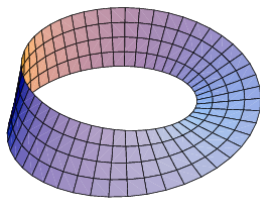
In definitiva i gruppi stabili indicano una regolarità fra gli isomorfismi dei gruppi di omotopia e le sospensioni di questi oltre un certo  $i$ , in particolare per  $i > n$ , e ci permettono di calcolare i gruppi di omotopia in modo più esteso poiché il risultato che uscirà per uno spazio di una certa dimensione, varrà anche per dimensioni maggiori.



# Capitolo 5

## Esempi

1. Il *Nastro di Möbius* è uno spazio fibrato su  $S^1$  con come fibra un intervallo. Nello specifico, prendiamo  $E$  come il quoziente di  $I \times [-1, 1]$  sotto l'identificazione  $(0, v) \sim (1, -v)$  e con  $p : E \rightarrow S^1$  indotta dalla proiezione  $I \times [-1, 1] \rightarrow I$ ; allora la fibra è  $[-1, 1]$  stesso.



Incollando poi due copie di  $E$  assieme alla mappa identità sulla loro circonferenza di bordo, otteniamo una *Bottiglia di Klein*: spazio fibrato su  $S^1$  con fibra  $S^1$ .

2. Un esempio classico sono gli *spazi proiettivi*, i quali ci danno molti esempi interessanti di fibrazioni. Ad esempio nel caso di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  si ha il già conosciuto spazio di rivestimento  $S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  che non è altro che una fibrazione con fibra  $S^0$ . Nel caso complesso abbiamo una cosa analoga:

$$S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Qui  $S^{2n+1}$  è la sfera unitaria in  $\mathbb{C}^{n+1}$  e vediamo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  come lo spazio quoziente di  $S^{2n+1}$  con la relazione di equivalenza

$$(z_0, \dots, z_n) \sim \lambda(z_0, \dots, z_n)$$

per  $\lambda \in S^1$ , la circonferenza unitaria in  $\mathbb{C}$ . La proiezione  $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  manda  $(z_0, \dots, z_n)$  sulla sua classe di equivalenza  $[z_0, \dots, z_n]$ , per cui le fibre sono copie di  $S^1$ .

Per vedere che la *locale banalità* (ovvero che localmente omeomorfismi portano la fibra di un dato aperto in sé stesso) è soddisfatta, prendiamo  $U_i \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , aperto contenente le classi di equivalenza  $[z_0, \dots, z_n]$  con  $z_i \neq 0$ . Definiamo

$$h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1, \text{ con } h_i(z_0, \dots, z_n) = ([z_0, \dots, z_n], z_i/|z_i|).$$

Questa porta fibra a fibra ed è un omeomorfismo poiché la sua inversa è la mappa

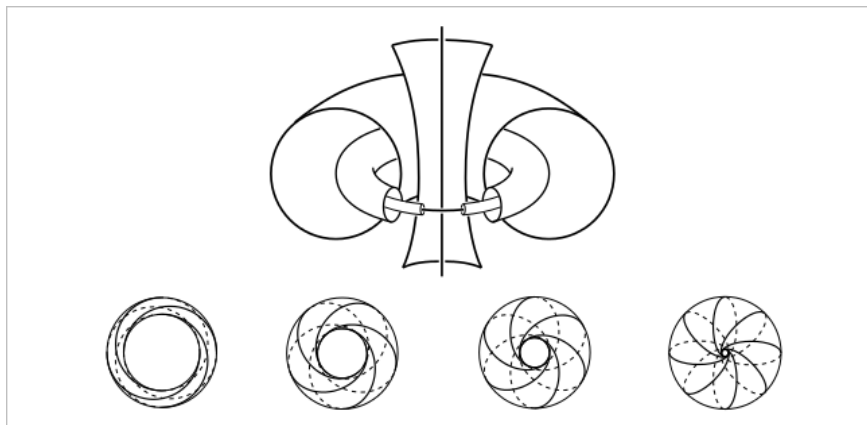
$$([z_0, \dots, z_n], \lambda) \mapsto \lambda |z_i| z_i^{-1} (z_0, \dots, z_n).$$

*Nota 3.* La costruzione della fibrazione  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  funziona anche per  $n = \infty$ , per cui esiste una fibrazione  $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ .

3. Un caso particolare è  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ , ovvero quando  $n = 3$ , chiamata *Fibrazione di Hopf*. Questo esempio è utile perché rende visibile, grazie alla dimensione bassa, quanto detto nell'esempio precedente. La proiezione  $S^3 \rightarrow S^2$  si può definire come  $(z_0, z_1) \mapsto z_0/z_1 \in \mathbb{C} \cup \infty = S^2$ . In coordinate polari si scrive anche  $p(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = (r_0/r_1) e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$  dove  $r_0^2 + r_1^2 = 1$ .

Vediamo che per un raggio fissato  $\rho = r_0/r_1 \in (0, \infty)$  gli angoli  $\theta_0$  e  $\theta_1$  variano indipendentemente su  $S^1$ , cosicché i punti  $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$  formano un *toro*  $T_\rho \subset S^3$ . Lasciando, quindi, che il raggio  $\rho$  vari, tutti questi tori disgiunti  $T_\rho$  riempiono  $S^3$  e se includiamo anche i casi limite  $T_0$  e  $T_\infty$  dove i raggi  $r_0$  e  $r_1$  sono zero, allora i tori  $T_0$  e  $T_\infty$  degenerano a circonferenze. Queste due circonferenze sono circonferenze unitarie nei due fattori  $\mathbb{C}$  di  $\mathbb{C}^2$ , quindi, con la proiezione stereografica di  $S^3$  dal punto  $(0, 1)$  a  $\mathbb{R}^3$ , questi corrispondono alla circonferenza unitaria del piano  $xy$  e all'asse  $z$ .

Possiamo vedere i tori concentrici  $T_\rho$  su questa figura.



Ogni toro è unione di fibre circolari e la coppia  $(\theta_0, \theta_1)$  con  $\theta_0 - \theta_1$  è costante. Queste fibre circolari hanno pendenza 1 sul toro, viaggiando una volta lungo un parallelo, una volta lungo un meridiano. In realtà, pensando allo spazio ambiente, sarebbe più giusto dire che hanno pendenza  $\rho$ . Come  $\rho$  viaggia tra 0 e  $\infty$ , anche le fibre si avvicinano alle circonferenze  $T_0$  e  $T_\infty$ , che sono pure loro fibre.

4. Un'altro esempio di fibrazione che, diversamente dalle precedenti con fibra  $S^1$ , ha come fibra  $S^3$  è la successione

$$S^3 \rightarrow S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^n;$$

dove  $\mathbb{H}$  è il corpo dei quaternioni, generalizzazione del campo complesso a dimensione 4, e  $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$  è lo spazio proiettivo su quel corpo. Come si può vedere dalla successione, la fibra  $S^3$  identifica i quaternioni unitari, mentre  $S^{4n+3}$  è la sfera unitaria in  $\mathbb{H}$ . Inoltre se prendiamo  $n = 1$  otteniamo una diversa fibrazione di *Hopf*:  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4 = \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ .

5. Dall'aver calcolato  $\pi_n(S^n)$  grazie al corollario (2) possiamo estendere il problema e mostrare che  $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$  per  $n \geq 2$  è un gruppo abeliano libero con base le classi di omotopia indotte dalle inclusioni  $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Vediamo intanto il caso finito, ovvero che ci sia solo un numero finito di  $S_{\alpha}^n$ . Guardiamo quindi  $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$  come l' $n$ -scheletro del prodotto  $\Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n$ , dove  $S_{\alpha}^n$  è scritto con la solita struttura di  $CW$ -complessi e  $\Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n$  è il prodotto di  $CW$ -complessi. Finché  $\Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n$  contiene celle di dimensioni che sono multipli di  $n$ , otteniamo che la coppia di spazi  $(\Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$  è  $(2n-1)$ -connessa. Quindi dalla successione esatta lunga di gruppi di omotopia, per questa coppia vediamo che l'inclusione

$$\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \hookrightarrow \Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n$$

induce un isomorfismo su  $\pi_n$  se  $n \geq 2$ .

Per la proprietà (7), troviamo che

$$\pi_n(\Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n) \simeq \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n),$$

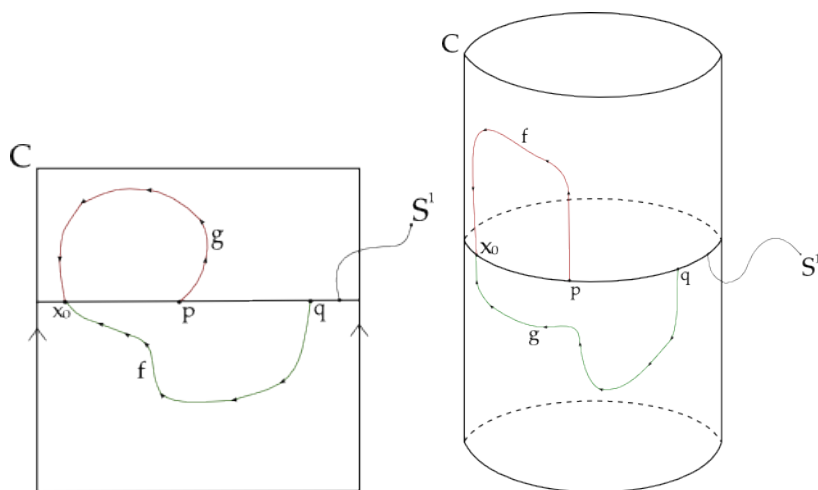
un gruppo abeliano libero con base le inclusioni  $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \Pi_{\alpha} S_{\alpha}^n$  e lo stesso vale per  $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Questo dimostra il caso di unioni puntate finite  $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Nel caso non finito dovremo ricondurci al caso finito. Per ottenere ciò, consideriamo l'omomorfismo

$$\Phi : \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n) \rightarrow \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$$

indotto dalle inclusioni  $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Allora  $\Phi$  è suriettiva per il fatto che le mappe  $f : S^n \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$  hanno come immagine un compatto contenuto nel bouquet di un numero finito di  $S_{\alpha}^n$ , per cui ci riconduciamo al caso finito in quanto  $[f]$  è contenuta nell'immagine di  $\Phi$ . Analogamente, una omotopia nulla (banale) di  $f$  ha immagine compatta contenuta nel bouquet finito di  $S_{\alpha}^n$ , quindi nel caso finito otteniamo che  $\Phi$  è pure iniettiva.

6. Questo esempio mostra come mai nell'omotopia relativa  $\pi_n(X, A, x_0)$ , con  $X$  spazio topologico,  $A$  sottospazio di  $X$  e  $x_0$  punto base, non è un gruppo per  $n = 1$ . Prendiamo un cilindro  $C$  come nella figura 6, come sottospazio  $S^1$ ,  $x_0 \in S^1$  il punto base e studiamo  $\pi_1(C, S^1, x_0)$ . Come abbiamo visto nell'osservazione (3), abbiamo l'omotopia

$$F : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (C, S^1, x_0)$$



che porta  $t \in [0, 1]$  formando dei cammini che hanno come punto iniziale  $p \in S^1$  variabile e come punto finale  $x_0$  fissato. Questo, come vedremo, non permette di definire un'operazione fra i cammini e di conseguenza fra le classi di omotopia in  $\pi_1$ . Siano quindi

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow C : f(0) = p \text{ e } f(1) = x_0 \\ g : [0, 1] &\rightarrow C : g(0) = q \text{ e } g(1) = x_0 \end{aligned}$$

due cammini generici con  $p \neq x_0 \neq q$ . Definiamo per assurdo la loro somma

$$(f + g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t - 1) & \text{per } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Vediamo subito che  $f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = f(1) = x_0$  per ipotesi, mentre  $g\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = g(0) = q$  e questo è un assurdo perché per ipotesi abbiamo che  $x_0 \neq q$  e per costruzione della somma dovrebbero essere uguali. Inoltre se anche fosse  $x_0 = q$ ,  $g$  sarebbe un cappio, diversamente da come sono stati definiti i cammini.



## Capitolo 6

# Conclusioni

Arriviamo ora al succo della questione: cosa abbiamo capito? Riepilogando, abbiamo definito l'omotopia in generale, la struttura di gruppo che associa a uno spazio e abbiamo visto in particolare come funziona. Intanto con queste prime nozioni concludiamo che:

1. Non sempre l'omotopia fornisce un gruppo (ad esempio  $\pi_1(X, A, x_0)$ ).
2. Nonostante ciò, per  $n \geq 2$ , un gruppo di omotopia è abeliano.
3. Non esiste un metodo per classificare a dovere i gruppi di omotopia delle sfere.
4. Contrariamente all'omologia, se l'ordine di un gruppo di omotopia supera la dimensione dello spazio studiato non sempre il gruppo è nullo. Questo è la caratteristica fondamentale dei gruppi di omotopia e che li rende densi di informazioni.
5. La *proprietà di escissione* e il *teorema di Mayer-Vietoris*, fondamentali nello studio dell'omologia, non funzionano nei gruppi di omotopia.

Per questo motivo sono stati studiati metodi per aggirare queste mancanze, con il risultato di aver trovato strumenti ancor più omogenei di quelli usati nell'omologia, come ad esempio le *fibrazioni* e la *proprietà di estensione*. Da ciò traiamo queste conclusioni:

1. Le successioni di fibrazioni facilitano il calcolo dei gruppi di omotopia delle sfere, nonché inducono a pensare che ci possa essere un algoritmo per classificare le sfere in modo sistematico.
2. Le sospensioni inducono delle successioni di gruppi particolarmente omogenee, le quali, dopo un  $n$  opportuno, mostrano un isomorfismo che collega fra loro i gruppi di omotopia, rendendo la dimensione degli spazi associati a tali gruppi superflua. Questo isomorfismo viene chiamato infatti *Gruppo stabile di omotopia* perché è una collezione di gruppi tutti isomorfi fra loro.

Abbiamo capito quindi che in questa materia ci sono grandi lacune che non permettono la conoscenza completa degli oggetti con cui si lavora; questo però è un punto che suggerisce la ricerca di nuovi strumenti e teorie che rendano più luminoso questo argomento. Continuare la classificazione delle sfere per dimensioni sempre maggiori o, alternativamente, studiare un metodo che calcoli sistematicamente i loro gruppi associati, raffinare gli strumenti già esistenti per carpire maggiori informazioni dagli spazi esaminati oppure cercare possibili utilizzi pratici derivati da questa materia: questi sono i punti su cui lavorare.





# Bibliografia

- [1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [2] Massimo Ferri, *Appunti di Topologia Algebrica*.
- [3] Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology*, EMS: European Mathematical Society.
- [4] Allen Hatcher, *Spectral Sequences in Algebraic Topology*.
- [5] Edwin H.Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Inc., US, 1966.