

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

LA SUPERFICIE QUADRICA RIGATA E LE CURVE SU DI ESSA

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro Gimigliano

Presentata da:
Alice Farneti

Sessione III
Anno Accademico 2013/2014

*Alla mia famiglia,
ai miei amici,
ad Andrea.*

“La matematica, al di sopra della sua applicabilità alle scienze, possiede una luce ed una sapienza propria, e ricompensa largamente ogni essere umano intelligente che arriva a cogliere un raggio di ciò che essa è in sè.”

Eric Temple Bell

Indice

Introduzione	1
1 Richiami e premesse	3
1.1 Definizione generale di quadrica	3
1.2 Superfici quadriche affini	4
1.2.1 Ipersuperfici affini	4
1.2.2 Classificazione affine delle quadriche	4
1.3 Superfici quadriche proiettive	5
1.3.1 Ipersuperfici proiettive	5
1.3.2 Classificazione proiettiva delle quadriche	7
1.4 Unicità della quadrica proiettiva liscia	10
1.4.1 Definizione e caratterizzazione di una quadrica liscia	10
2 La superficie quadrica rigata	13
2.1 Rappresentazione tramite la mappa di Segre	14
2.1.1 Studio delle due schiere di rette su S	14
2.2 Rappresentazione piana	17
2.2.1 Proiezione della quadrica rigata su di un piano	17
2.2.2 Immagini delle curve su S	20
2.2.3 Come ricavare S a partire dal piano proiettivo	22
3 Curve sulla superficie quadrica	27
3.1 Ricoprimento affine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	27
3.2 Curve su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	28
3.3 Curve su S	30
Bibliografia	33

Elenco delle figure

2.1	Quadrica rigata.	13
2.2	Le due schiere di rette contenute nella quadrica.	15
2.3	Proiezione di S da P su H	18
2.4	Scoppiamento della superficie S nel punto P e sua proiezione su H	20
2.5	Schema riassuntivo delle applicazioni introdotte.	25
2.6	Due diverse contrazioni di $\tilde{S} \cong X$	26

Introduzione

Brevissima introduzione sulla geometria proiettiva

La geometria proiettiva prende le sue origini dall'arte della pittura, che durante il Rinascimento riesce a dare una soluzione al problema di rappresentare la profondità su una tela, cioè di rappresentare la realtà tridimensionale su una superficie piana. A partire dai primi studi sulla prospettiva, con Filippo Brunelleschi e Leon Battista Alberti, inizia a svilupparsi un notevole interesse intorno a questo problema; un problema che, essendo evidentemente di tipo geometrico, non coinvolge solo gli artisti, ma anche i matematici del tempo. È da questo intreccio di interessi matematici e artistici che nascerà la **geometria proiettiva**, e si svilupperà poi in campo strettamente matematico diventando un affascinante ramo della geometria.

Introduzione alla tesi

In questa tesi mi sono proposta di studiare una particolare superficie dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, ovvero la **superficie quadrica rigata**. L'importanza di questa superficie è data non solo dal fatto che è l'unica (a meno di proiettività) superficie quadrica liscia dello spazio proiettivo, ma anche dalla sua particolarità di contenere due fasci di rette (da qui l'aggettivo "rigata", e potremmo anche dire "doppiamente rigata"). Tale particolarità ci permette di metterla in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, riuscendo così a descrivere facilmente le curve su di essa.

Nel primo capitolo, dopo aver introdotto alcune nozioni preliminari sulle quadriche in generale e in particolare sulle superfici quadriche affini e proiettive, vedremo la loro classificazione in $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ e in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, e giungeremo infine a dimostrare l'unicità della quadrica proiettiva liscia.

Nel secondo capitolo invece passeremo allo studio vero e proprio della quadrica rigata, che verrà descritta attraverso diversi tipi di rappresentazione. Per prima introdurremo l'immersione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 , detta "**mappa di Segre**", e mostriamo che rappresenta una biezione fra $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e la quadrica rigata S .

Verranno introdotti i due fasci di rette contenute in S e verrà data una dimostrazione della loro esistenza, oltre ad una descrizione delle loro caratteristiche. Vedremo infine che le stesse conclusioni si possono trarre direttamente anche dalla mappa di Segre.

Un altro tipo di rappresentazione della quadrica rigata è la sua **proiezione su di un piano** (da un suo punto); descriveremo nel dettaglio questa proiezione, estendendola dove necessario allo “scoppiamento” di S in un suo punto, per arrivare infine a descrivere le immagini tramite la proiezione delle curve su S .

Invertiremo poi il nostro punto di vista, partendo dal piano proiettivo \mathbb{P}^2 e ricavando da esso la superficie quadrica S . Arriveremo infine a concludere che il piano proiettivo \mathbb{P}^2 e la quadrica rigata S possono essere visti come due diverse contrazioni di una stessa superficie \tilde{S} .

Nel terzo capitolo, infine, ci occuperemo nel dettaglio delle **curve su S** , servendoci della rappresentazione di S come $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Descriveremo inizialmente le curve di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, introducendo un suo ricompimento affine per definirne la struttura algebrica, utilizzando anche la nozione di “bigrado” di una curva C . Dopo di che tradurremo la nozione di bigrado in una informazione su C intesa come curva di \mathbb{P}^3 , così da poter descrivere le curve su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ quando lo pensiamo come quadrica $S \in \mathbb{P}^3$. Infine ci serviremo del “teorema di Bezout” per osservare che non tutte le curve sulla superficie quadrica rigata possono essere ottenute tagliandola con un'altra superficie, infatti questo è possibile solo per le curve di bigrado (d, d) .

Capitolo 1

Richiami e premesse

In questo capitolo si richiamano alcune definizioni e teoremi preliminari, tra cui una descrizione delle quadriche, sia in generale come ipersuperfici, sia come superfici nello spazio tridimensionale affine o proiettivo, con le loro relative classificazioni. Queste nozioni ci saranno utili successivamente nello studio della superficie quadrica rigata. Per le dimostrazioni o ulteriori approfondimenti si rimanda a [SE].

1.1 Definizione generale di quadrica

Consideriamo un campo K che nel nostro caso sarà \mathbb{R} o \mathbb{C} , e sia K^n l' n -spazio numerico su K .

Definizione 1.1. Una *funzione polinomiale quadratica* è una funzione $f : K^n \rightarrow K$ tale che esistono una forma quadratica $q : K^n \rightarrow K$, una forma lineare $l : K^n \rightarrow K$ e una costante $c \in K$ tali che:

$$f(x) = q(x) + l(x) + c.$$

Definizione 1.2. Una *quadrica o ipersuperficie quadrica* in K^n è una coppia (S, f) , ove $S \subset K^n$ è del tipo:

$$S = \{x \in K^n \mid f(x) = 0\},$$

dove f è una funzione polinomiale quadratica. L'insieme S si dice *supporto* della quadrica.

Sono esempi di quadriche le coniche nel piano, o le coppie di punti in K^1 .

1.2 Superfici quadriche affini

Passiamo ora ad occuparci delle superfici quadriche nello spazio affine complesso $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, introducendo prima brevemente la nozione di ipersuperficie affine.

1.2.1 Ipersuperfici affini

Definizione 1.3. Una *ipersuperficie algebrica* S dello spazio affine complesso $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ è la classe di proporzionalità di un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ non costante. In questo caso si dirà che $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ è una equazione di S , e che S ha *grado* d se $\deg(f) = d$.

Definizione 1.4. Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ non costante di grado d e sia $S \in \mathbb{A}^n$ una ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Si ha allora che:

Se $n = 2$ l'ipersuperficie è detta *curva affine piana*.

Se $n = 3$ l'ipersuperficie è detta *superficie affine*.

Se $d = n = 2$ l'ipersuperficie è detta *conica affine*.

Se $d = 2$ ed $n = 3$ l'ipersuperficie è detta ***superficie quadrica affine***.

Se $d = 3, 4, 5, \dots$ ed $n = 2$ l'ipersuperficie è detta *cubica, quartica, quintica... affine*.

Se $d = 2$ ed $n \geq 4$ l'ipersuperficie è detta *iperquadrica affine*

Definizione 1.5. Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ non costante di grado d e sia $S \in \mathbb{A}^n$ una ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Il *supporto* di S è l'insieme dei punti $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ tali che $f(P) := f(a_1, \dots, a_n) = 0$, cioè il luogo degli zeri di f .

Osservazione 1. Dunque se ci mettiamo in $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ una superficie quadrica può essere data come luogo degli zeri di un'equazione matriciale della forma:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

con $Q = (a_{ij})$ matrice simmetrica a coefficienti in \mathbb{C} .

1.2.2 Classificazione affine delle quadriche

Definizione 1.6. Due quadriche \mathcal{C} e \mathcal{D} di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ sono dette *affinementemente equivalenti* se e solo se esiste una affinità φ t.c. $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{C})$ (o equivalentemente $\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\mathcal{D})$).

Utilizzando la relazione di equivalenza appena introdotta si possono suddividere in classi tutte le quadriche di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ e, per ogni classe, individuare il rappresentante che ha la forma più semplice possibile (che sarà chiamata *forma canonica* degli elementi di quella classe).

In questo modo si ottiene una *classificazione affine* delle quadriche di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$:

Classificazione affine delle quadriche (in $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$)

- | | | |
|------------------------------|-------------|--------------------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ | (rango = 4) | |
| 2. $x^2 + y^2 - z = 0$ | (rango = 4) | |
| 3. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ | (rango = 3) | <i>cono</i> |
| 4. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ | (rango = 3) | <i>cilindro su conica non deg.a centro</i> |
| 5. $x^2 - y = 0$ | (rango = 3) | <i>cilindro su parabola non deg.</i> |
| 6. $x^2 + y^2 = 0$ | (rango = 2) | <i>due piani incidenti</i> |
| 7. $x^2 - 1 = 0$ | (rango = 2) | <i>due piani paralleli</i> |
| 8. $x^2 = 0$ | (rango = 1) | <i>piano doppio</i> |

Teorema 1.2.1. *Ogni quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ è affinementemente equivalente ad una e una sola delle forme canoniche sopra elencate (per la dimostrazione vedi [PM]).*

1.3 Superfici quadriche proiettive

1.3.1 Ipersuperfici proiettive

Possiamo dare delle definizioni analoghe nel proiettivo.

Definizione 1.7. Sia fissato su $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ il riferimento standard. Una *ipersuperficie algebrica* S di \mathbb{P}^n è la classe di proporzionalità di un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo non nullo.

In questo caso si dirà che $\rho f = 0$, con $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$, è una equazione di S , e che S ha *grado* d se $\deg(f) = d$.

Definizione 1.8. Sia $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo non nullo di grado d e sia $S \in \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Si ha allora che:

Se $n = 2$ l'ipersuperficie è detta *curva proiettiva piana*.

Se $n = 3$ l'ipersuperficie è detta *superficie proiettiva*.

Se $d = n = 2$ l'ipersuperficie è detta *conica proiettiva*.

Se $d = 2$ ed $n = 3$ l'ipersuperficie è detta **superficie quadrica proiettiva**.

Se $d = 3, 4, 5, \dots$ ed $n = 2$ l'ipersuperficie è detta *cubica, quartica, quintica... proiettiva*.

Se $d = 2$ ed $n \geq 4$ l'ipersuperficie è detta *iperquadrica proiettiva*

Definizione 1.9. Sia $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo non nullo di grado d e sia $S \in \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Il *supporto* di S è l'insieme dei punti $P = [a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n$ tali che $f(P) := f(a_0, \dots, a_n) = 0$, cioè il luogo degli zeri di f .

La definizione è ben posta in quanto cambiando rappresentante per P , cioè considerando $[\rho a_0, \dots, \rho a_n]$ con $\rho \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, si verifica che $f(\rho a_0, \dots, \rho a_n) = \rho^d f(a_0, \dots, a_n) = 0$. Quindi la nozione è indipendente dal rappresentante scelto per il punto.

Osservazione 2. Ora, se ci mettiamo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, avremo che una superficie quadrica può essere data come luogo degli zeri di una equazione matriciale della forma:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

dove $Q = (a_{ij})$ è una matrice simmetrica a coefficienti in \mathbb{C} e x_0, \dots, x_3 sono le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

Naturalmente la cosa analoga vale per ogni ipersuperficie quadrica di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, che potrà essere definita da un'equazione matriciale:

$${}^tXQX = 0,$$

ove Q è una matrice simmetrica $(n+1) \times (n+1)$ e ${}^tX = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n)$.

Osserviamo che un cambiamento proiettivo di coordinate cambierà l'equazione della quadrica in ${}^tX{}^tMQMX = 0$, ove M è la matrice associata al cambio di coordinate,

e la nuova matrice tMQM associata alla quadrica ha lo stesso rango di Q ; si può quindi definire:

Definizione 1.10. Data una quadrica S in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si dice *rango* di S il rango della matrice Q ad essa associata. Tale nozione è indipendente dalla scelta delle coordinate omogenee.

1.3.2 Classificazione proiettiva delle quadriche

Come nel caso affine, anche in quello proiettivo possiamo definire una relazione di equivalenza che ci aiuti a classificare le ipersuperfici.

Definizione 1.11. Consideriamo due quadriche \mathcal{C} e \mathcal{D} di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ *proiettivamente equivalenti* se e solo se esiste una proiettività ψ t.c. $\mathcal{D} = \psi(\mathcal{C})$ (o equivalentemente $\mathcal{C} = \psi^{-1}(\mathcal{D})$).

Anche in questo caso utilizzando la relazione di equivalenza proiettiva si può ottenere una *classificazione proiettiva* di tutte le quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$:

Classificazione proiettiva delle quadriche (in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$)

- | | |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (rango = 4) | <i>superficie quadrica rigata</i> |
| 2. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (rango = 3) | <i>cono</i> |
| 3. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (rango = 2) | <i>coppia di piani complessi coniugati</i> |
| 4. $x_0^2 = 0$ (rango = 1) | <i>piano doppio</i> |

Teorema 1.3.1. Ogni quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente ad una e una sola delle forme canoniche qui elencate.

Allo scopo di dimostrare questa affermazione richiamiamo la nozione di *congruenza* tra matrici e un importante teorema di algebra lineare: il *Teorema di Sylvester* complesso.

Definizione 1.12. Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono *congruenti* se $\exists M \in M_n(K)$ tale che:

$$B = {}^tMAM.$$

Lemma 1.3.2. *Ogni matrice simmetrica $A \in M_n(K)$, $n \geq 1$, è congruente a una matrice diagonale.*

Equivalentemente, se V è un K -spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e b è una forma bilineare simmetrica su V , allora in V esiste una base diagonalizzante per b .

Dimostrazione. Dimostriamo la seconda formulazione.

Procediamo per induzione su $n = \dim(V)$.

Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $n \geq 2$, e che ogni forma bilineare simmetrica possieda una base diagonalizzante su uno spazio di dimensione $< n$.

Se b è la forma bilineare nulla non c'è niente da dimostrare, perché in una qualsiasi base la matrice di b è la matrice nulla, che è diagonale, e quindi ogni base di V è diagonalizzante.

Possiamo dunque supporre che b non sia la forma bilineare nulla, e quindi che esistono $v, w \in V$ tali che $b(v, w) \neq 0$. Da ciò segue che uno dei tre vettori $v, w, v + w$ non è isotropo. Infatti, se v e w sono entrambi isotropi, allora

$$b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(w, w) + 2b(v, w) \neq 0.$$

Dunque esiste un vettore $e_1 \in V$ tale che $b(e_1, e_1) \neq 0$ e possiamo scrivere $V = \langle e_1 \rangle \oplus e_1^\perp$; in particolare $\dim(e_1^\perp) = n - 1$.

Ora, per l'ipotesi induttiva la forma bilineare b' indotta da b su e_1^\perp possiede una base diagonalizzante, chiamiamola $\{e_2, \dots, e_n\}$. Allora la base $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base di V : infatti e_2, \dots, e_n sono linearmente indipendenti e d'altra parte $e_1 \notin \langle e_2, \dots, e_n \rangle = e_1^\perp$ quindi si ha che e_1, e_2, \dots, e_n sono ancora linearmente indipendenti. Inoltre $b(e_1, e_j) = 0$ per ogni $j = 2, \dots, n$ perché $e_j \in e_1^\perp$. Infine $b(e_i, e_j) = b'(e_i, e_j) = 0$ per ogni $i \neq j$, $2 \leq i, j \leq n$, perché $\{e_2, \dots, e_n\}$ è una base di e_1^\perp diagonalizzante per b' .

Quindi e è una base diagonalizzante per b . □

Teorema 1.3.3. (Teorema di Sylvester complesso)

Sia K un campo algebricamente chiuso, ed $A \in M_n(K)$ una matrice simmetrica $n \times n$, $n \geq 1$, di rango r .

Allora A è congruente alla matrice:

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

dove I_r è la matrice identica $r \times r$ e le 0_i sono le matrici nulle $M_{r,n-r}$, $M_{n-r,r}$ e $M_{n-r,n-r}$, rispettivamente.

Si può dare di questo teorema un'altra **formulazione equivalente**:

Sia K un campo algebricamente chiuso e V un K -spazio vettoriale con $\dim(V) = n \geq 1$, e sia $b : V \times V \rightarrow K$ una forma bilineare simmetrica.

Allora \exists una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ diagonalizzante per b rispetto alla quale la matrice di b è della forma:

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

dove r è il rango di b e le 0_i sono le matrici nulle $M_{r,n-r}$, $M_{n-r,r}$ e $M_{n-r,n-r}$, rispettivamente.

Dimostrazione. L'equivalenza delle due formulazioni è evidente, dimostriamo la seconda.

Il Lemma 1.3.2. ci assicura che esiste una base $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ tale che la matrice di b rispetto ad f sia diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Salvo cambiare tra loro f_1, \dots, f_n possiamo supporre

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr} \neq 0$$

e

$$a_{r+1r+1} = \dots = a_{nn} = 0.$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K$ tali che $\alpha_i^{-2} = a_{ii}$, $i = 1, \dots, r$ (gli α_i esistono perché K è algebricamente chiuso) consideriamo i vettori

$$e_1 = \alpha_1^{-1} f_1, \dots, e_r = \alpha_r^{-1} f_r, e_{r+1} = f_{r+1}, \dots, e_n = f_n.$$

Ovviamente $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale. Inoltre

$$b(e_i, e_i) = b(\alpha_i^{-1} f_i, \alpha_i^{-1} f_i) = \alpha_i^{-2} b(f_i, f_i) = \alpha_i^{-2} a_{ii} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$$b(e_i, e_i) = b(f_i, f_i) = 0 \quad \forall i = r + 1, \dots, n$$

Quindi e è la base cercata. □

1.4 Unicità della quadrica proiettiva liscia

1.4.1 Definizione e caratterizzazione di una quadrica liscia

Definizione 1.13. Una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, rispettivamente di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, è detta *liscia* se e solo se non ha punti singolari, ovvero non ci sono punti in cui tutte le derivate parziali si annullano contemporaneamente.

Teorema 1.4.1. Una quadrica S di $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, rispettivamente di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, è liscia se e solo se il rango di S è massimo.

Dimostrazione. Consideriamo S una generica superficie quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

con $Q = (a_{ij})$ matrice simmetrica.

Possiamo riscriverla in forma compatta come:

$$\sum_{i,j=0}^3 a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Allora $\forall k = 0, \dots, 3$ la sua derivata parziale rispetto a x_k sarà:

$$\frac{\partial \sum_{i,j=0}^3 a_{ij}x_i x_j}{\partial x_k},$$

in cui tutti i termini che non contengono x_k spariscono, i termini del tipo $a_{ik}x_i x_k$ diventano $a_{ik}x_i$ e i termini del tipo $a_{kj}x_k x_j$ diventano $a_{kj}x_j$. Allora questa diventa:

$$\sum_{j=0}^3 a_{kj}x_j + \sum_{i=0}^3 a_{ik}x_i.$$

Ora, poiché la matrice Q è simmetrica, possiamo riscrivere l'espressione come:

$$2 \sum_{j=0}^3 a_{kj} x_j = 2(a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora che richiedere che si annullino in un punto tutte le derivate parziali equivale a richiedere che:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ovvero che :

$$QX = 0.$$

Ora, Q ha rango 4 (massimo) se e solo se $\det Q \neq 0$ e cioè se e solo se il sistema $QX = 0$ ammette come unica soluzione $(0, 0, 0, 0)$; quindi se e solo se in nessun punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ le derivate parziali si annullano contemporaneamente, vale a dire se la superficie S è liscia.

Tale dimostrazione si ripete in modo del tutto analogo nel caso affine e per ipersuperfici quadriche in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ o $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, $n \neq 3$. \square

Osservando la classificazione proiettiva delle quadriche è evidente che compare una sola quadrica di rango massimo, dunque sulla base di quello che è stato detto nel paragrafo precedente dovrà valere il seguente corollario:

Corollario 1.4.2. *Ogni quadrica liscia di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente alla quadrica S di equazione:*

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Capitolo 2

La superficie quadrica rigata

Abbiamo visto che l'unica quadrica liscia di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, detta anche **quadrica rigata**, si può esprimere con l'equazione:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

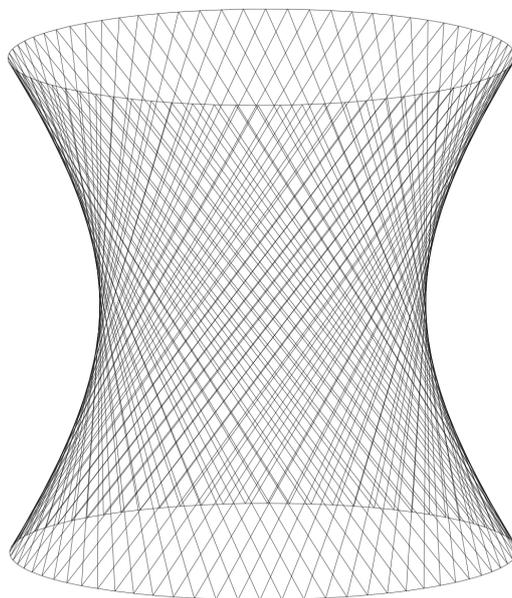


Figura 2.1: Quadrica rigata.

Vedremo però che esistono diversi modi di rappresentarla e di considerarla.

2.1 Rappresentazione tramite la mappa di Segre

Consideriamo l'immersione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 detta *mappa di Segre* e data da:

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([s_0, s_1], [t_0, t_1]) \longmapsto [s_0t_0, s_0t_1, s_1t_0, s_1t_1].$$

Osserviamo che l'immagine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è contenuta nella quadrica liscia S di equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ (si vede facilmente che S non ha punti singolari).

Infatti basta sostituire per vedere che:

$$s_0t_0s_1t_1 - s_0t_1s_1t_0 = s_0t_0s_1t_1 - s_0t_0s_1t_1 = 0.$$

Mostriamo ora che l'immagine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ deve coincidere proprio con S .

Vediamo che se $P = (1 : x_1 : x_2 : x_3) \in S$ allora $x_3 = x_1x_2$, e quindi se consideriamo il punto $([1, x_2], [1, x_1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ avremo che $\varphi([1, x_2], [1, x_1]) = P$ (in modo analogo si può vedere che $P \in S$ allora $P \in \text{Im}\varphi$, anche se $x_0(P) = 0$).

Dunque $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = S$ e si ha quindi che la φ (che è iniettiva) rappresenta una *biezione* fra $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ed S .

Osservazione 3. Ovviamente la quadrica S di cui si sta parlando è esattamente la quadrica rigata, in quanto abbiamo visto che (a meno di proiettività) esiste una sola quadrica liscia in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, dunque sarà necessariamente la stessa.

Abbiamo quindi mostrato la seguente affermazione:

Proposizione 2.1.1. *La quadrica rigata S è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

2.1.1 Studio delle due schiere di rette su S

Esistenza delle due schiere di rette su S

In particolare si può vedere che:

Proposizione 2.1.2. *S contiene due schiere (fasci) di rette*

Dimostrazione. Sia P un punto di S , e $T_P(S)$ il piano tangente a S in P .

Preso un altro punto $Q \in S \cap T_P(S)$ si ha che la retta PQ incontra S in Q e doppiamente in P .

Questo avviene perché la retta PQ sta sul piano tangente $T_P(S)$ e passa per P , quindi è tangente a S in P . Ne viene che la molteplicità di intersezione di PQ ed S

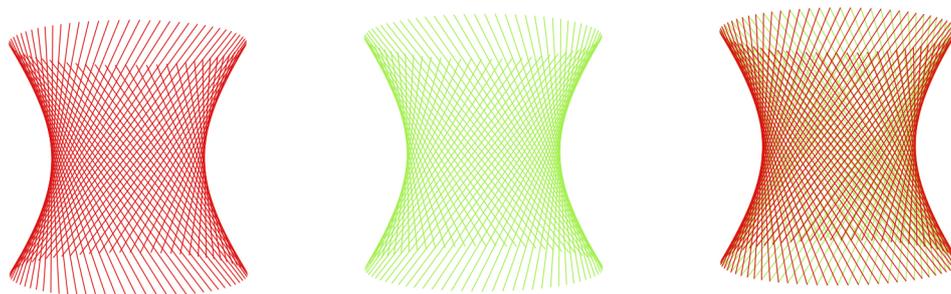


Figura 2.2: Le due schiere di rette contenute nella quadrica.

in P è due, dunque il grado totale di $PQ \cap S$ è ≥ 3 .

Sappiamo però che una retta non contenuta in S può avere con essa al più due punti in comune, quindi $PQ \subseteq S$.

Dunque $S \cap T_P(S)$ è un insieme di rette, in particolare avendo grado due sarà un insieme di due rette. Notiamo che queste due rette devono essere necessariamente distinte, infatti se fossero coincidenti (cioè una retta doppia) $T_P(S)$ sarebbe tangente a S in ogni punto di questa retta doppia, che chiamiamo L , ma allora preso un punto $Q \in S \setminus L$ si avrebbe che $S \cap T_Q(S)$ intersecherebbe L in un punto R , e quindi $T_P(S) = T_R(S)$ conterrebbe la retta RQ e doppiamente la retta L , il che è *assurdo* perchè sappiamo che $S \cap T_P(S)$ ha grado due.

Quindi abbiamo mostrato che **per ogni punto P di S passano due rette distinte di S** , date da $S \cap T_P(S)$.

Prendiamo ora una retta $L_0 \in S$ e chiamiamo “A-rette” L_0 stessa e tutte le altre rette di S che non intersecano L_0 , e “B-rette” tutte le rette di S che invece intersecano L_0 in un punto. Abbiamo così ottenuto le due schiere di rette su S . \square

Caratterizzazione delle due schiere di rette su S

Diamo ora una caratterizzazione più precisa di queste due schiere.

Proposizione 2.1.3. *Chiamiamo A-rette e B-rette le rette delle due schiere su S , cioè consideriamo come prima una retta $L_0 \in S$ e chiamiamo A-rette L_0 stessa e tutte le altre rette di S che non intersecano L_0 , e B-rette tutte le rette di S che invece intersecano L_0 in un punto. Si ha che:*

1. Ogni A-retta non interseca le altre A-rette (analogamente ogni B-retta non interseca le altre B-rette)
2. Ogni A-retta interseca in un punto tutte le B-rette (analogamente ogni B-retta interseca in un punto tutte le A-rette)
3. Non ci sono altre rette su S

Dimostrazione. Dimostriamo per primi i punti 1 e 2.

Se prendiamo due rette $L, L' \subseteq S$ che si incontrano in un punto $P \notin L_0$, il piano da esse generato (cioè $T_P(S)$) deve incontrare anche L_0 in un punto, e questo punto deve giacere necessariamente su L o su L' , perché $T_P(S) \cap S$ è formato proprio dall'intersezione delle due rette L ed L' . Quindi per come le abbiamo definite una delle due è una A-retta e l'altra una B-retta.

Ma allora due rette su S si incontrano solo se sono di tipo diverso.

Se prendo invece una A-retta L diversa da L_0 e una B-retta L' , il piano generato da L_0 e L' intersecherà L necessariamente in uno dei punti di L' (perché abbiamo appena visto che due rette dello stesso tipo non possono intersecarsi).

Quindi due rette su S si incontrano se e solo se sono di tipo diverso.

Dimostriamo ora che non ci sono altre rette su S .

Se L fosse una retta di S che non appartiene a nessuna delle due schiere, essa dovrebbe intersecare almeno in un punto una delle A-rette, L_1 , e almeno in un punto una delle B-rette, L_2 . Questo può essere visto riportandosi su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e, ad esempio, considerandone una carta affine (vedi anche capitolo 3). Allora le tre rette L, L_1 e L_2 sarebbero contenute in un piano, ma questo è impossibile, infatti l'intersezione di un piano con la quadrica S è una conica, quindi al massimo può essere composta da due rette. \square

Concludiamo questo paragrafo sullo studio della quadrica rigata osservando che: Poiché per ogni punto $P \in L_0$ passa una ed una sola B-retta, si ha che la schiera delle B-rette è parametrizzata da \mathbb{P}^1 .

Allo stesso modo se L è una B-retta, anche per ogni punto di L passa una e una sola A-retta, quindi anche la schiera delle A-rette è parametrizzata da \mathbb{P}^1 .

Tale osservazione può essere ricavata direttamente dalla mappa di Segre, infatti vale la proposizione seguente.

Proposizione 2.1.4. *S* contiene due schiere di rette, immagini tramite la mappa di Segre di $\mathbb{P}^1 \times [a, b]$ e $[a, b] \times \mathbb{P}^1$. Le chiamiamo:

$$\varphi(\mathbb{P}^1 \times [a, b]) =: I$$

$$\varphi([a, b] \times \mathbb{P}^1) =: II$$

Dimostrazione. Per dimostrare questa affermazione ci basta mostrare che fissato un punto $[\alpha, \beta]$ in \mathbb{P}^1 , l'immagine tramite la mappa di Segre della retta $[\alpha, \beta] \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è una retta di \mathbb{P}^3 .

Ora, per come è definita la mappa di Segre, si ha che:

$$\varphi([\alpha, \beta], [t_0, t_1]) = [\alpha t_0, \alpha t_1, \beta t_0, \beta t_1]$$

con α e β fissati.

Questo mi dà la “rappresentazione parametrica” dell'immagine della retta:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha t_0 \\ x_1 = \alpha t_1 \\ x_2 = \beta t_0 \\ x_3 = \beta t_1 \end{cases} .$$

Dalla quale posso ricavare:

$$\begin{cases} \beta x_0 = \alpha x_2 \\ \beta x_1 = \alpha x_3 \end{cases} ,$$

ovvero l'equazione di una retta in \mathbb{P}^3 .

Ovviamente vale l'osservazione analoga per le rette del tipo $\mathbb{P}^1 \times [a, b]$. □

2.2 Rappresentazione piana

La superficie quadrica rigata *S* può essere descritta anche in un altro modo, ovvero tramite la sua *rappresentazione piana*.

2.2.1 Proiezione della quadrica rigata su di un piano

Prendiamo un punto $P \in S$, ed un piano H di \mathbb{P}^3 che non contenga P ; consideriamo allora la proiezione di S su H centrata in P , e la chiamiamo π_P .

Si avrà che per ogni $Q \in S \setminus P$, la retta PQ incontra il piano H in un punto $Q' = \pi_P(Q)$; quindi la π_P è definita su tutta la superficie S tranne che su P .

Osserviamo inoltre che se chiamiamo L_1, L_2 le due rette da cui è formato $T_P(S) \cap S$, avremo che π_P è iniettiva su $S \setminus (L_1 \cup L_2)$. Infatti per ogni $Q \in S \setminus (L_1 \cup L_2)$ la retta PQ incontra S solo in P ed in Q .

Chiamiamo ora P_1 e P_2 le intersezioni rispettivamente di L_1 ed L_2 con H , avremo che per ogni $Q \in L_i \setminus P$, la sua proiezione sarà $\pi_P(Q) = P_i$ (vedi Figura 2.3).

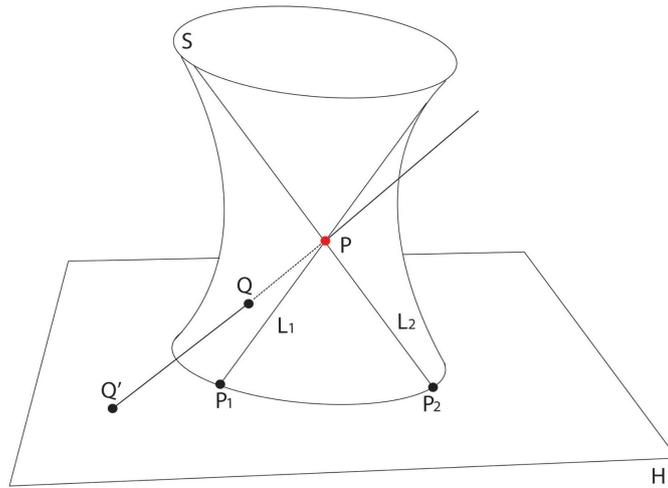


Figura 2.3: Proiezione di S da P su H .

Osserviamo quanto detto fin qui su di un semplice esempio:

Esempio:

Consideriamo in \mathbb{P}^3 la quadrica S di equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$, il punto $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ ed il piano $H = \{x_3 = 0\}$. In questo caso le due rette che compongono $T_P(S) \cap S$ sono:

$$L_1 = \{x_0 = x_1 = 0\}, L_2 = \{x_0 = x_2 = 0\}$$

e le loro intersezioni con H sono:

$$P_1 = (0 : 0 : 1 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0 : 0).$$

Inoltre si ha in generale che ogni punto $Q = (\alpha : \beta : \gamma : \delta) \in S \setminus P$ viene mandato dalla proiezione in $\pi_P(Q) = (\alpha : \beta : \gamma : 0)$.

Osserviamo che se Π è un piano di \mathbb{P}^3 passante per P e diverso da $T_P(S)$, allora $C := \Pi \cap S$ è una conica, e l'applicazione $\pi_{P|C}$ è estendibile anche al punto P .

Infatti si può definire $\pi_{P|C}(P)$ come l'intersezione di H con la retta r tangente a C in P . Si avrà che l'immagine di C su H è la retta $\Pi \cap H$ (infatti proiettando una curva da un punto su di essa, se la proiezione è iniettiva, il suo grado cala di uno).

Osservazione 4. Attenzione, la π_P è estendibile a P solo sulle singole coniche e non su tutto S .

Infatti se Π' è un altro piano per P (diverso da Π), e Π' non contiene la retta r , allora se chiamiamo C' la conica formata da $\Pi' \cap S$ ed r' la sua retta tangente in P , avremo che $r' \neq r$ e quindi

$$\pi_{P|C'}(P) \neq \pi_{P|C}(P).$$

Quello che però si può notare è che la costruzione precedente ci dà per ogni retta $r \in T_P(S)$ un diverso punto sul piano H , che corrisponde alla proiezione di P su H nella direzione di r .

Tutti questi punti corrispondono alla retta $T_P(S) \cap H$, della quale la proiezione π_P copre solo i punti P_1 e P_2 .

Si può dire allora che la π_P proietta la quadrica S sul piano H contraendo le due rette L_1, L_2 sui due punti P_1, P_2 , mentre “fa corrispondere” al punto P tutta la retta $\Gamma := P_1P_2$.

Osservazione 5. (Per una costruzione di \tilde{S} vedere [HA])

Data una superficie algebrica S ed un suo punto P si può definire una superficie \tilde{S} dotata di una proiezione $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ detta “scoppiamento di S in P ”, tale che $\mu^{-1}(P) = E \subset \tilde{S}$ è una retta (cioè è isomorfo a \mathbb{P}^1), e $\mu : \tilde{S} \setminus E \rightarrow S \setminus P$ è un isomorfismo; inoltre ogni punto di E corrisponde ad una direzione tangente in $T_P(S)$.

Utilizziamo ora queste nozioni per spiegare in modo più rigoroso quanto detto in precedenza; consideriamo lo scoppiamento $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$, della superficie S nel punto P ed il divisore eccezionale $E = \mu^{-1}(P) (\cong \mathbb{P}^1)$, che corrisponde alle “direzioni tangenti ad S uscenti da P ”, cioè è definito come $E = \mathbb{P}(T_P(S))$.

Con questa costruzione si ottiene che $\tilde{S} \setminus E \cong S \setminus P$, e che ogni punto P_r di E corrisponde ad una retta $r \in T_P(S)$. Allora si può definire un morfismo $\phi : \tilde{S} \rightarrow H \cong \mathbb{P}^2$ (Figura 2.4), con

$$\begin{aligned} \phi(Q) &= \pi_P(Q) & \forall Q \in \tilde{S} \setminus E \\ \phi(P_r) &= r \cap H & \forall P_r \in E \end{aligned}$$

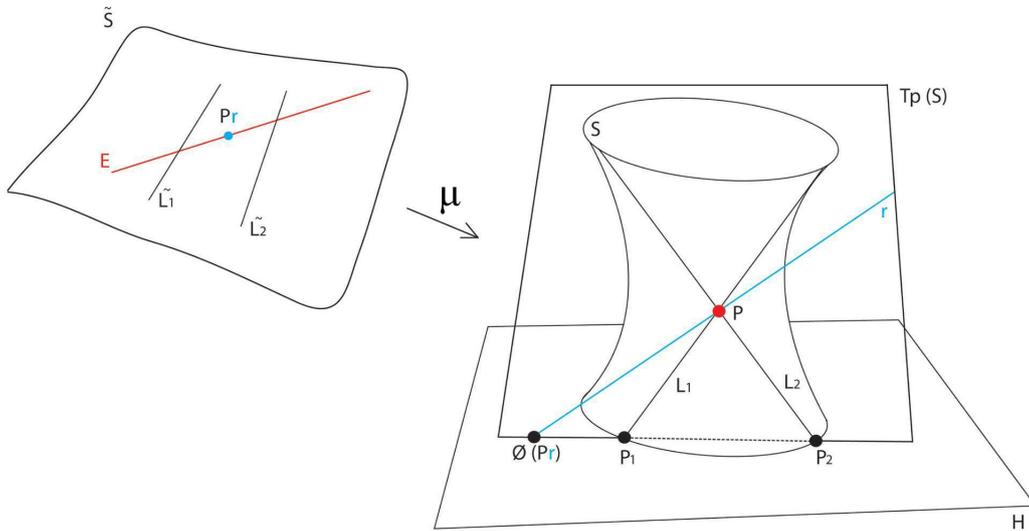


Figura 2.4: Scoppimento della superficie S nel punto P e sua proiezione su H .

2.2.2 Immagini delle curve su S

Vediamo ora come sono fatte le curve che si trovano su S (o su \tilde{S}) tramite questa sua rappresentazione sul piano $H \cong \mathbb{P}^2$.

Se chiamiamo $\tilde{L}_i = \mu^{-1}(L_i)$ per $i = 1, 2$, si avrà che $\phi(\tilde{L}_i) = P_i$, notando che su \tilde{S} le rette \tilde{L}_1 ed \tilde{L}_2 sono disgiunte poiché hanno due direzioni diverse sul piano tangente $T_P(S)$.

Abbiamo già mostrato che una **conica C su S che contiene P** (ottenuta tagliando S in P con un piano diverso da $T_P(S)$) viene mandata dalla proiezione π_P in una retta su H .

Se invece C è una **conica su S non passante per P** , la sua immagine $\pi_P(C)$ rimarrà ovviamente una conica su H . In particolare notiamo che se C è ottenuta intersecando la superficie S con un piano Π non passante per P , allora Π (e quindi anche C) incontra in un punto ogni retta delle due schiere su S , quindi in particolare

C incontrerà sia L_1 che L_2 , ma allora $\pi_P(C)$, cioè la conica immagine di C su H , passerà necessariamente per P_1 e P_2 ; riassumendo:

Proposizione 2.2.1. *La proiezione π_P manda le coniche su S passanti per P in rette di H , e le coniche non passanti per P in coniche di H passanti per P_1 e P_2 .*

Vediamo ora cosa accade alle **rette delle due schiere su S** .

Abbiamo già visto che L_1 ed L_2 vengono contratte nei punti P_1, P_2 ; esse però sono le uniche ad essere contratte in un punto, infatti le immagini delle altre rette tramite π_P saranno ancora rette su H . In particolare possiamo osservare che se L è una retta della schiera di L_1 , allora, per le caratteristiche delle due schiere viste nei paragrafi precedenti, L incontrerà necessariamente L_2 in un punto, e quindi la sua immagine $\pi_P(L)$ sarà una retta che contiene P_2 . Viceversa se L è una retta della schiera di L_2 , allora L incontrerà necessariamente L_1 in un punto, e quindi la sua immagine $\pi_P(L)$ sarà una retta che contiene P_1 .

Osservazione 6. Sappiamo che se C è una curva su S , la proiezione $\pi_P(C)$ ha lo stesso grado di C se P non è su C , mentre il suo grado cala di uno se $P \in C$.

Quindi le uniche curve la cui immagine su H è una retta sono:

- le coniche per P ;
- le rette delle due schiere ($\neq L_1, L_2$).

In particolare, poiché la π_P è suriettiva, si ha che:

- Ogni retta di H non passante per P_1, P_2 è l'immagine di una conica per P .
- I due fasci di rette per P_1, P_2 (esclusa Γ) sono immagine delle due schiere di rette.
- La retta $\Gamma = P_1P_2$ è immagine della retta E in \tilde{S} .

Si può quindi affermare, passando eventualmente a $\phi : \tilde{S} \rightarrow H$, che:

Proposizione 2.2.2. *L'immagine di ogni conica C di S è una conica di H contenente P_1 e P_2*

Dimostrazione. Se C è una conica irriducibile non passante per P non c'è niente da dimostrare, in quanto abbiamo già visto che rimane una conica su H passante per P_1 e P_2 .

Se invece C è irriducibile ma contiene P , sappiamo che $\pi_P(C)$ è una retta L del

piano. Allora consideriamo $\mu^{-1}(C)$ in \tilde{S} ; dato che $P \in C$, avremo ovviamente che il divisore eccezionale E è contenuto in $\mu^{-1}(C)$, e quindi:

$$\phi(\mu^{-1}(C)) = L \cup \phi(E) = L \cup \Gamma$$

cioè otteniamo ancora una conica, spezzata in due rette, passante per P_1 e P_2 .

Se invece $C \in S$ è una conica riducibile, allora è composta da due rette complanari (in quanto C è una curva piana), e quindi da due rette appartenenti a due schiere diverse. Chiamiamo queste due rette L, L' , se P non appartiene a nessuna delle due, per quanto abbiamo visto finora, esse sono mandate in due rette $\pi_P(L), \pi_P(L')$ passanti per P_1 e per P_2 , rispettivamente. Dunque $\pi_P(L) \cup \pi_P(L')$, cioè l'immagine di C su H , è una conica degenera (formata appunto dalle due rette) e contenente P_1 e P_2 .

Infine per la conica $C = L_1 \cup L_2$, si ha che:

$$\mu^{-1}(C) = \tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2 \cup 2E$$

in cui la retta E è da considerare doppiamente perché essa è contenuta sia in $\mu^{-1}(L_1)$ che in $\mu^{-1}(L_2)$. E quindi:

$$\phi(\mu^{-1}(C)) = 2\Gamma$$

che è una conica degenera (retta doppia) contenente P_1 e P_2 . □

2.2.3 Come ricavare S a partire dal piano proiettivo

La rappresentazione di S su un piano, che abbiamo appena descritto, ci può suggerire un modo per ricavare S da \mathbb{P}^2 , più precisamente dalle coniche di \mathbb{P}^2 passanti per due punti dati P_1, P_2 .

Siano $(w_0 : w_1 : w_2)$ coordinate omogenee in \mathbb{P}^2 , consideriamo due punti:

$$P_1 = (0 : 0 : 1), P_2 = (0 : 1 : 0).$$

Ora, lo spazio vettoriale V (su \mathbb{C}) dei polinomi omogenei di grado due nelle w_i ha dimensione sei, ed è generato dai monomi:

$$V = \langle w_0^2, w_1^2, w_2^2, w_0w_1, w_0w_2, w_1w_2 \rangle .$$

Mentre il suo sottospazio W dato dai polinomi che si annullano in $P_1 = (0 : 0 : 1)$ e $P_2 = (0 : 1 : 0)$ ha dimensione quattro, ed è generato da:

$$W = \langle w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_1w_2 \rangle .$$

Allora W definisce una applicazione razionale φ fatta in questo modo:

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(w_0 : w_1 : w_2) \longmapsto (w_0^2 : w_0w_1 : w_0w_2 : w_1w_2).$$

Possiamo vedere che la φ è definita su tutto \mathbb{P}^2 tranne che sui punti P_1 e P_2 , sui quali i quattro monomi $w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_1w_2$ si annullano contemporaneamente.

In particolare P_1 e P_2 sono gli unici punti su cui questo accade, e inoltre, visto che annullando w_0 si annullano tutti i monomi tranne w_1w_2 si ha anche che il resto della retta $\Gamma = P_1P_2 = \{w_0 = 0\}$ viene contratta dalla φ in un punto:

$$\varphi(\Gamma \setminus \{P_1 \cup P_2\}) = (0 : 0 : 0 : 1).$$

Al di fuori di Γ , invece, la φ è iniettiva. Infatti prendiamo due punti $P = (x_0 : x_1 : x_2), P' = (y_0 : y_1 : y_2)$ di \mathbb{P}^2 non appartenenti a Γ e tali che $\varphi(P) = \varphi(P')$, dove:

$$\varphi(P) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$$

$$\varphi(P') = (y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2)$$

con $x_0, y_0 \neq 0$ (perché $P, P' \notin \Gamma$).

Abbiamo posto $\varphi(P) = \varphi(P')$, si avrà quindi che $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che: $x_0^2 = \lambda y_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\lambda}y_0$.

Inoltre deve valere: $x_0x_1 = \lambda y_0y_1 \Rightarrow$ (essendo $y_0 \neq 0$) $x_1 = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\lambda}}y_1 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\lambda}y_1$.

Allo stesso modo, dato che deve essere $x_0x_2 = \lambda y_0y_2$, avremo $x_2 = \pm\sqrt{\lambda}y_2$.

Dunque:

$$P = (x_0 : x_1 : x_2) = (\pm\sqrt{\lambda}y_0 : \pm\sqrt{\lambda}y_1 : \pm\sqrt{\lambda}y_2) = \pm\sqrt{\lambda}(y_0 : y_1 : y_2) = (y_0 : y_1 : y_2) = P'.$$

Cioè $P = P'$ in \mathbb{P}^2 , e abbiamo quindi mostrato che la φ è iniettiva in $\mathbb{P}^2 \setminus \Gamma$.

Dimostriamo ora che $Im(\varphi) = S$.

Innanzitutto se usiamo in \mathbb{P}^3 le coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, vediamo che i punti di $Im(\varphi)$ verificano l'equazione di S : $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.

Infatti su $\varphi(w_0 : w_1 : w_2) = (w_0^2 : w_0w_1 : w_0w_2 : w_1w_2)$ l'equazione diventa:

$$w_0^2w_1w_2 - w_0w_1w_0w_2 = 0,$$

che è identicamente soddisfatta. Quindi $Im\varphi \subseteq S$.

Ora, per mostrare che $Im(\varphi) = S$ notiamo che su $\mathbb{P}^2 \setminus \Gamma$, la φ è l'inversa della proiezione π_P ; e cioè che, identificando \mathbb{P}^2 con H e le coordinate omogenee $(w_0 : w_1 : w_2)$

con $(x_0 : x_1 : x_2 : 0)$, se $Q \in S \setminus P$, allora $\varphi(\pi_P(Q)) = Q$.

Infatti, sia $Q = (\alpha : \beta : \gamma : \delta)$, allora si ha che $\pi_P(Q) = (\alpha : \beta : \gamma : 0)$ e $\varphi(\pi_P(Q)) = (\alpha^2 : \alpha\beta : \alpha\gamma : \beta\gamma)$. Inoltre, dato che $Q \in S$, ne soddisfa l'equazione, sappiamo quindi che vale $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ e cioè $\alpha\delta = \beta\gamma$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}\varphi(\pi_P(Q)) &= (\alpha^2 : \alpha\beta : \alpha\gamma : \beta\gamma) = (\alpha^2 : \alpha\beta : \alpha\gamma : \alpha\delta) = \alpha(\alpha : \beta : \gamma : \delta) = \\ &= (\alpha : \beta : \gamma : \delta) = Q.\end{aligned}$$

Dunque φ è un isomorfismo fra $\mathbb{P}^2 \setminus \Gamma$ e $S \setminus \{L_1 \cup L_2\}$, e la proiezione π_P è la sua inversa.

Estensione di φ :

Come la π_P si poteva “estendere” passando alla ϕ su \tilde{S} , si può fare un'operazione analoga anche sulla φ . Consideriamo lo scoppimento X di \mathbb{P}^2 sui punti P_1 e P_2 , se $\lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ è tale scoppimento, si hanno su X due rette ($\cong \mathbb{P}^1$): $E_i = \lambda^{-1}(P_i)$ per $i = 1, 2$ corrispondenti alle direzioni uscenti da P_1 e P_2 , rispettivamente.

Allora si può definire un'altra applicazione $\varphi' : X \rightarrow S$, con:

- $\varphi'(Q) = \varphi(\lambda(Q))$ per ogni $Q \in X \setminus \{E_1 \cup E_2\}$ (vedi Figura 2.5).
- Se $Q \in E_1$, allora Q corrisponde ad una direzione uscente da P_1 in \mathbb{P}^2 , e quindi ad una retta passante per P_1 . Tale retta corrisponde, attraverso la φ , ad una retta su S che taglia $L_1 (= \pi_P^{-1}(P_1))$ in un punto. Chiamiamo questa retta L_Q , allora si definisce:

$$\varphi'(Q) = L_Q \cap L_1.$$

- Analogamente se $Q \in E_2$, allora Q corrisponde ad una direzione uscente da P_2 in \mathbb{P}^2 , e quindi ad una retta passante per P_2 . Tale retta corrisponde, attraverso la φ , ad una retta su S che taglia $L_2 (= \pi_P^{-1}(P_2))$ in un punto. Chiamiamo questa retta L_Q , allora si definisce:

$$\varphi'(Q) = L_Q \cap L_2.$$

In questo modo la φ' è suriettiva, e si ha che:

$$(\varphi')^{-1}(L_i) = E_i \quad i = 1, 2$$

$$(\varphi')^{-1}(P) = \tilde{\Gamma} = \lambda^{-1}(\Gamma).$$

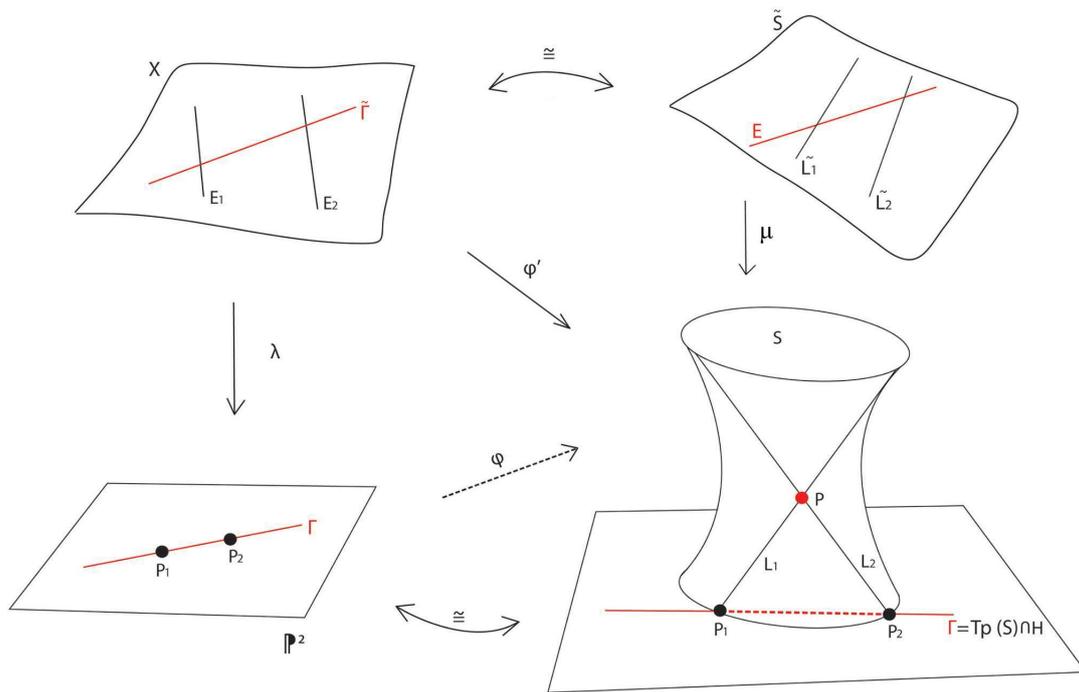


Figura 2.5: Schema riassuntivo delle applicazioni introdotte.

Allora φ' è un isomorfismo tra $X \setminus \tilde{\Gamma}$ ed $S \setminus P$, mentre $(\varphi')^{-1}(P)$ è la retta $\tilde{\Gamma}$ in X . Da tutto ciò si vede che, come (\tilde{S}, μ) , anche (X, φ') è lo scoppimento di S su P , quindi:

$$X \cong \tilde{S}.$$

Dunque si possono vedere S e \mathbb{P}^2 come due diversi “blow down” (contrazioni) di \tilde{S} (Figura 2.6), infatti:

- Contraendo E a P si ottiene S
- Contraendo $E_1(= \tilde{L}_1)$ a P_1 ed $E_2(= \tilde{L}_2)$ a P_2 si ottiene \mathbb{P}^2

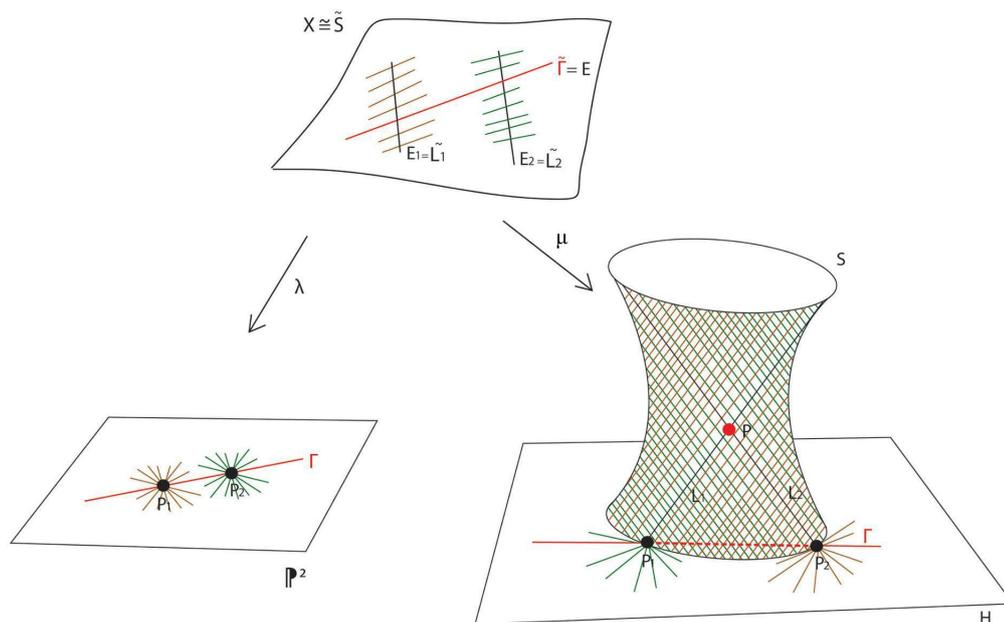


Figura 2.6: Due diverse contrazioni di $\tilde{S} \cong X$.

Capitolo 3

Curve sulla superficie quadrica

Ora che abbiamo visto la superficie quadrica rigata S da diversi punti di vista, ci proponiamo di dare una descrizione delle curve su di essa.

Per fare ciò utilizzeremo la rappresentazione di S come $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (cioè tramite la *mappa di Segre*).

3.1 Ricoprimento affine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Innanzitutto ricordiamo qualche definizione che ci sarà utile per descrivere la struttura algebrica di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Sappiamo che lo spazio proiettivo può essere visto anche come ampliamento di uno spazio affine, ottenuto aggiungendo i così detti *punti impropri*:

Definizione 3.1. Preso lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n , ed un suo iperpiano H_0 si può definire una applicazione $j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0$.

Ad esempio se $H_0 = \{x_0 = 0\}$ la j_0 sarà fatta in questo modo:

$$j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n].$$

Questa è una biezione la cui inversa è:

$$j_0^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus H_0 \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$[a_0, \dots, a_n] = \left[1, \frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right] \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right).$$

Dove $a_0 \neq 0$ in quanto il piano $\{x_0 = 0\}$ è escluso dal dominio.

Analogamente se si esclude il piano $H_1 = \{x_1 = 0\}$ si può ottenere l' applicazione:

$$j_1 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_1$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [y_1, 1, \dots, y_n]$$

e :

$$j_1^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus H_1 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \left[\frac{a_0}{a_1}, 1, \dots, \frac{a_n}{a_1} \right] \longmapsto \left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1} \right).$$

E così via.

Questi insiemi $U_i := \mathbb{P}^n \setminus H_i$ sono dette **carte affini** di \mathbb{P}^n .

Inoltre, dato che siamo su \mathbb{C} , essi sono aperti densi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, e $\{U_i\}_{i=0, \dots, n}$ è un ricoprimento aperto di \mathbb{P}^n , detto anche **ricoprimento affine**.

Ora, per descrivere la struttura algebrica di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, vediamo in che modo esso si può ricoprire con carte affini, cioè in questo caso con degli aperti di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ isomorfi ad $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Se $(s_0 : s_1)$ e $(t_0 : t_1)$ sono coordinate omogenee sui due fattori \mathbb{P}^1 , allora ogni punto di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è rappresentato da una coppia del tipo: $((s_0 : s_1), (t_0 : t_1))$.

Sia allora U_{00} l'aperto di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ formato dai punti tali che $s_0 \neq 0$ e $t_0 \neq 0$; si ha che U_{00} è una carta affine su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Infatti su U_{00} le coordinate $(\frac{s_1}{s_0}, \frac{t_1}{t_0})$ danno un sistema di riferimento affine, e quindi $U_{00} \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

In modo analogo possiamo definire gli aperti $U_{ij}, i, j = 0, 1$, che formeranno un ricoprimento affine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; osserviamo che sono necessari quattro aperti affini per ottenere un ricoprimento di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, mentre per \mathbb{P}^2 ne bastano tre, inoltre il completamento di un aperto affine, come U_{00} , a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è ottenuto aggiungendo due "rette all'infinito", e cioè la retta $\{s_0 = 0\} = \{((0, 1), (\alpha, \beta))\}$ e quella $\{t_0 = 0\} = \{((\alpha, \beta), (0, 1))\}$.

3.2 Curve su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Ora che abbiamo definito la struttura algebrica di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tramite le carte affini, possiamo descrivere più facilmente una curva su questo spazio.

Infatti con *curva algebrica* in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si intende una curva associata ad un polinomio $f \in \mathbb{C}[s_0, s_1, t_0, t_1]$ che sia omogeneo e biomogeneo, cioè omogeneo sia rispetto a $s_0 s_1$

che a $t_0 t_1$. Ora, presa una curva algebrica C in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, consideriamo la restrizione di C ad uno degli aperti affini considerati, ad esempio (nelle notazioni precedenti) la restrizione a U_{00} ; allora la curva sarà data dal polinomio $f\left(\frac{s_1}{s_0}, \frac{t_1}{t_0}\right)$.

Inoltre, per avere una “visione globale” della curva C , basterà omogeneizzare il polinomio f sia rispetto alle s_i che rispetto alle t_i . In pratica se f ha grado a nelle s_i e b nelle t_i , consideriamo il polinomio (omogeneo nelle s_i e nelle t_i):

$$f \cdot s_0^a \cdot t_0^b \in \mathbb{C}[s_0, s_1, t_0, t_1]$$

e diremo che C è una curva di *bigrado* (a, b) .

Esempio: Sia $C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la curva algebrica di equazione $x^3 - yx + y^2 = 0$; considerando \mathbb{A}^2 come $U_{00} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $x = \frac{s_1}{s_0}$, $y = \frac{t_1}{t_0}$, posso scrivere C come:

$$\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^3 - \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{s_1}{s_0} + \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2 = 0.$$

Quindi, come abbiamo già visto, basta omogeneizzare il polinomio sia rispetto alle s_i che alle t_i per ottenere il completamento di C in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (che è una diversa compattificazione di \mathbb{A}^2 rispetto a \mathbb{P}^2); il quale sarà dato dalla curva C' di equazione:

$$\left[\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^3 - \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{s_1}{s_0} + \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2\right] \cdot s_0^3 t_0^2 = s_1^3 t_0^2 - s_0^2 s_1 t_1 t_0 + t_1^2 s_0^3 = 0.$$

Quindi C' è una curva di bigrado $(3, 2)$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Significato geometrico della nozione di bigrado:

Vediamo ora qual'è il significato geometrico della nozione di bigrado di una curva. Nel caso di una curva di \mathbb{P}^2 il grado della curva corrisponde al grado del polinomio omogeneo che la definisce, ma anche al numero di punti (contati con molteplicità) in cui essa incontra una retta generica.

Si può vedere che in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ il bigrado ha una funzione simile. Infatti se consideriamo le “rette” in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, esse sono del tipo $([\alpha : \beta], [t_1 : t_0])$ oppure del tipo $([s_1 : s_0], [\alpha : \beta])$, a seconda che appartengano all'una o all'altra schiera di rette su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Allora esse soddisfano equazioni del tipo $\beta s_1 - \alpha s_0 = 0$ oppure $\beta t_1 - \alpha t_0 = 0$, e quindi hanno rispettivamente bigrado $(1, 0)$ o $(0, 1)$.

Presa quindi una curva $C \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ di bigrado (a, b) data da un polinomio biomogeneo $f(s_1, s_0, t_1, t_0)$, la sua intersezione con una retta di bigrado $(1, 0)$ sarà data dalle

soluzioni di un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} \beta s_1 - \alpha s_0 = 0 \\ f(s_1, s_0, t_1, t_0) = 0 \end{cases} .$$

Questo sistema individua i b punti di tipo $([\alpha : \beta], [t_1 : t_0])$, in cui $[t_1 : t_0]$ è una delle b soluzioni di $f(\alpha, \beta, t_1, t_0) = 0$.

Analogamente l'intersezione di C una retta di bigrado $(0, 1)$ sarà data dalle soluzioni di:

$$\begin{cases} \beta t_1 - \alpha t_0 = 0 \\ f(s_1, s_0, t_1, t_0) = 0 \end{cases} ,$$

che individua questa volta gli a punti di tipo $([s_1 : s_0], [\alpha : \beta])$, in cui $[s_1 : s_0]$ è una delle a soluzioni di $f(s_1, s_0, \alpha, \beta) = 0$.

Conclusione: *il bigrado esprime il numero di punti (contati con molteplicità) in cui la curva interseca le rette delle due schiere.*

3.3 Curve su S

Quello che abbiamo detto fino ad ora riguarda le proprietà di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ come superficie astratta; quindi, se vogliamo descrivere le curve su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ quando lo pensiamo come quadrica $S \in \mathbb{P}^3$, dovremo tradurre la nozione di bigrado in una informazione anche su C intesa come curva di \mathbb{P}^3 .

Dobbiamo chiederci ad esempio quale sia il grado di C come curva di \mathbb{P}^3 , cioè in quanti punti essa incontra un generico piano di \mathbb{P}^3 .

Per fare ciò possiamo considerare un piano tangente ad S , infatti la “genericità” di tale piano deve consistere nel fatto che esso non è tangente alla curva C in nessun punto in cui la interseca. Mostriamo che possiamo scegliere un piano tangente $T_P(S)$ che abbia questa proprietà. Si ha che:

$$T_P(S) \cap C = T_P(S) \cap S \cap C = (L \cup L') \cap C.$$

Dove L ed L' sono le rette delle due schiere passanti per P .

Ora, dato che in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le rette delle due schiere che sono tangenti a C sono solo un numero finito (dato dall'annularsi delle derivate parziali rispetto alle s_i o alle t_i), con una scelta generica di P possiamo evitare che L o L' siano tangenti alla curva

C . Così facendo il piano $T_P(S)$ soddisferà la proprietà richiesta.

Inoltre abbiamo visto che:

$$C \cap T_P(S) = C \cap (L \cup L').$$

Quindi, se (a, b) è il bigrado di C , si avrà che :

- $C \cap L$ è dato da a punti
- $C \cap L'$ è dato da b punti.

Dunque:

$$\deg C = a + b.$$

Richiamiamo ora una formulazione del *Teorema di Bezout*.

Teorema 3.3.1. (Teorema di Bezout per le rette)

Una superficie di grado d interseca ogni retta di \mathbb{P}^3 in d punti, contati con molteplicità, a meno che la retta sia contenuta nella superficie.

Inoltre il *Teorema di Bezout per le superfici* ci assicura che, intersecando la superficie quadrica S (di grado 2) con una superficie $F \subseteq \mathbb{P}^3$ di grado d , si ottiene una curva $C = S \cap F$ di grado $2d$ (per le dimostrazioni e per ulteriori approfondimenti si rimanda ad [HA]).

Quindi, considerate le due schiere di rette su S , si avrà che F interseca in d punti le rette della prima schiera ed in d punti le rette della seconda schiera; ma allora, per quanto visto sul significato geometrico del bigrado, la curva C avrà necessariamente bigrado (d, d) .

Ad esempio vediamo che le coniche su S hanno bigrado $(1, 1)$ perché esse si ottengono tagliando S con un piano.

Conclusione: *Possiamo quindi concludere che non tutte le curve sulla quadrica S si possono ottenere tagliandola con un'altra superficie; questo infatti è possibile solo per le curve di bigrado (d, d) .*

Bibliografia

[GI] A.Gimigliano, *Appunti di geometria algebrica*, a.a.1992/93

[ID] M.Idà, *Appunti di geometria proiettiva*, a.a.2013/2014.

[SE] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1998.

[HA] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[PM] <http://progettomatematica.dm.unibo.it>

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare infinitamente tutti coloro che mi hanno aiutata e mi sono stati vicini in questi anni, a partire dalla mia famiglia, mia madre Paola mio padre Angelo e mio fratello Claudio e la sua compagna Silvia che mi hanno sempre sostenuta e spesso sopportata; ma anche mia zia Liviana, le mie meravigliose nonne Valentina e Maria e tutti quanti i miei familiari.

Desidero ringraziare il professor Alessandro Gimigliano per la sua professionalità e per avermi dato tutto il sostegno necessario che mi ha permesso di realizzare con serenità la mia tesi.

Un pensiero va anche a tutti gli altri docenti che ho incontrato lungo il mio percorso perché il loro lavoro, svolto con grande serietà, mi ha permesso di arrivare fin qui.

Un enorme grazie va inoltre a tutte le amiche che mi hanno aiutata a staccare la spina quando ne avevo bisogno e che, anche se in tanti modi diversi, mi sono state vicine: Carlotta, Linda, Benedetta, Alessia, Carlotta, Giorgia, Chiara, Carlotta, Alice e tante altre. In particolare ringrazio anche tutti gli amici del GAPP per le belle serate passate insieme.

Come dimenticare poi il “gruppetto affiatato” che nonostante la lontananza spero riuscirà a rimanere tale, e gli amici del mare che, nonostante le poche occasioni di incontrarsi, sento sempre vicini.

Infine vorrei riservare un ringraziamento speciale ad Andrea per non avere mai smesso di sostenermi e darmi fiducia, e per essere ogni giorno la mia più grande fonte di energia.