

ALMA Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Elaborato Finale

Candidato:

Caterina Caravita

Relatore:

Daniele Dallacasa



Sessione II 2° seduta
Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Il teorema del viriale consiste in una relazione tra energia cinetica e energia potenziale totali di un sistema all'equilibrio. Il concetto di Viriale (dal latino *vires*, plurale di *vis*, 'forza') è stato introdotto dal fisico e matematico tedesco Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888) per indicare la quantità

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

che rappresenta la somma, fatta su tutte le N particelle di un sistema, dei prodotti scalari del vettore forza totale agente su ciascuna particella per il vettore posizione della particella stessa, rispetto ad un riferimento inerziale scelto. Tale quantità altro non è che un'energia potenziale. Dire che un sistema di particelle è virializzato equivale a dire che esso è stazionario, cioè all'equilibrio.

In questo elaborato sono di nostro interesse sistemi astrofisici gravitazionali, in cui cioè l'energia potenziale sia dovuta solo a campi gravitazionali. Distingueremo innanzitutto sistemi collisionali e non collisionali, introducendo i tempi scala di attraversamento e di rilassamento. Dopo una trattazione teorica del teorema, nell'approssimazione di continuità - per cui sostituiamo alle sommatorie gli integrali - e di non collisionalità, andremo a studiarne l'importanza in alcuni sistemi astrofisici: applicazione agli ammassi stellari, alle galassie e agli ammassi di galassie, stima della quantità di materia oscura nei sistemi, instabilità di Jeans in nubi molecolari, rotazione delle galassie ellittiche. Per ragioni di spazio non saranno affrontati altri casi, di cui ne citiamo alcuni: collasso delle stelle, stima della massa dei buchi neri al centro delle galassie, 'mass-to-light ratio' di sistemi sferici.

Parleremo in generale di "particelle" costituenti i sistemi per intendere stelle, galassie, particelle di gas a seconda del sistema in esame. Trascureremo in ogni caso le influenze gravitazionali di distribuzioni di densità esterne al sistema.

Indice

1	Teorema del viriale	3
2	Applicazioni astrofisiche	9
2.1	Teorema del viriale in forma scalare	9
2.1.1	Sistemi autogravitanti	9
2.1.2	Galassie di stelle e materia oscura	12
2.1.3	Instabilità di Jeans	13
2.2	Teorema del viriale in forma tensoriale	14
2.2.1	Rotazione delle galassie ellittiche	14
	Bibliografia	17

Capitolo 1

Teorema del viriale

Un sistema di N particelle legato dalle interazioni gravitazionali è descritto dinamicamente dalla meccanica newtoniana e rappresenta un "problema di N corpi", con $N > 2$. Come tale, la sua soluzione analitica non corrisponde all'intersezione di $6N - 1$ varietà dello spazio delle fasi, ovvero integrali primi del moto, ovvero leggi di conservazione e il problema è definito "non integrabile". Per semplificarlo, riducendone le dimensioni, adottiamo innanzitutto l'approssimazione di sistema "continuo non collisionale", introducendo brevemente il concetto di *tempo di rilassamento*.

Il tempo di rilassamento (t_{relax}) è il tempo caratteristico impiegato da un sistema a modificarsi in modo significativo, attraverso collisioni tra le sue particelle, perdendo memoria delle proprie condizioni iniziali. Nei casi astrofisici questa quantità è grande ($t_{relax} \gg \tau$), la singola collisione è irrilevante ai fini di un cambiamento significativo del sistema, ed esso pur essendo un sistema di particelle discreto può essere trattato come un "fluido continuo". Le collisioni geometriche sono trascurabili e le uniche "collisioni" che consideriamo sono le interazioni gravitazionali. Rigorosamente parlando, tutti i sistemi reali sono sistemi collisionali (in tempi più o meno lunghi raggiungerebbero il rilassamento tramite interazioni gravitazionali), ma se il tempo di rilassamento è maggiore della vita media del sistema stesso (τ), quest'ultimo è considerato "non collisionale": il rilassamento per interazioni gravitazionali non è raggiungibile, il sistema mantiene memoria della propria condizione iniziale, è congelato all'ultimo fenomeno significativo, cioè alla sua formazione. Se invece il rilassamento avviene su tempi scala minori del tempo di vita del sistema, oltre che dell'età dell'Universo, allora esso è a tutti gli effetti un sistema "collisionale", che evolve significativamente nell'arco della propria vita e, se stazionario, ripristina sempre l'equilibrio.

Ricaviamo approssimativamente il tempo di rilassamento di un sistema in funzione del numero di particelle (N) e del *tempo di attraversamento* (t_{cross}), cioè il tempo che una particella impiega ad attraversare il sistema stesso. Definiamo innanzitutto

$$t_{cross} = \frac{2R}{\sigma},$$

ove R è il raggio del sistema e σ è la velocità caratteristica delle particelle; allora il tempo di rilassamento si calcola moltiplicando il numero di attraversamenti necessari a rilassare il sistema (*numero di rilassamento*) per il tempo di ciascun attraversamento:

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross}$$

Vediamo alcuni esempi astrofisici:

- galassie: $N \simeq 10^{11}$, $t_{cross} \simeq 10^8$ anni $\implies t_{relax} \simeq 10^{17}$ anni $\gg \tau \simeq 10^{10}$ anni;
- ammassi di galassie: $N \simeq 10^3$, $t_{cross} \simeq 10^9$ anni $\implies t_{relax} \simeq 10^{10}$ anni $\sim \tau \simeq 10^{10}$ anni;
- ammassi chiusi: $N \simeq 10^6$, $t_{cross} \simeq 10^6$ anni $\implies t_{relax} \simeq 10^9$ anni $< \tau \simeq 10^{10}$ anni;
- ammassi aperti: $N \simeq 10^2$, $t_{cross} \simeq 10^6$ anni $\implies t_{relax} \simeq 10^5$ anni $\ll \tau \simeq 10^8$ anni.

Le galassie e gli ammassi di galassie si comportano allora come sistemi non collisionali, mentre gli ammassi stellari aperti e chiusi sono sistemi collisionali.

Diversamente da quanto ci si potrebbe intuitivamente aspettare, senza variare la massa totale M del sistema, il tempo di rilassamento aumenta linearmente all'aumentare del numero di particelle: più il sistema è popolato, più tempo impiega a rilassarsi. Infatti, mentre il numero di urti gravitazionali per unità di tempo (n) cresce linearmente con N , l'energia trasferita durante ciascuna interazione diminuisce all'aumentare di N , precisamente

$$\Delta K \propto \left(\frac{M}{N}\right)^2.$$

Il precedente risultato deriva dalla trattazione approssimata delle interazioni gravitazionali all'interno del sistema come somma degli urti - indipendenti l'uno dall'altro - tra una particella di test e ciascuna altra particella del sistema, attraverso effetto fionda. Un maggior numero di urti con particelle meno massicce è meno efficace, cioè meno energetico, rispetto ad un minor numero di urti con particelle più massicce.

Allora

$$t_{relax} \propto \frac{1}{n\Delta K} \propto \frac{1}{N} \left(\frac{N}{M}\right)^2 = \frac{N}{M^2}$$

Consideriamo infine che $N \rightarrow \infty$ e dunque $t_{relax} \rightarrow \infty$ e adottiamo l'ipotesi di "non collisionalità".

Un fluido continuo non collisionale, in generale non stazionario, soddisfa la cosiddetta *equazione non collisionale di Boltzmann* (CBE), di seguito espressa in forma scalare:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (1.1)$$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ è la *funzione di distribuzione* delle particelle in funzione della loro posizione, della loro velocità e del tempo; è non negativa ed è continua (approssimazione continua). $\Phi_{tot} = \Phi_{int} + \Phi_{ext}$ è il potenziale gravitazionale totale che tiene legato il sistema e sotto l'azione del quale le particelle si muovono, dovuto all'autogravità e ad un'ulteriore eventuale distribuzione di densità; se $\Phi_{ext} = 0$ il sistema è autogravitante, ovvero il potenziale gravitazionale totale è dovuto solo alle particelle stesse. Data una generica funzione di distribuzione delle particelle, la distribuzione di densità ad essa associata è data dalla formula

$$\rho(\mathbf{x}; t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3\mathbf{v} \quad (1.2)$$

e il potenziale sentito dalle particelle è

$$\Phi(\mathbf{x}; t) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}'; t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}', \quad (1.3)$$

ricavato dall'equazione

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho,$$

ove $\rho(\mathbf{x}'; t)$ è in questo caso la distribuzione di densità che genera il potenziale e che può o meno coincidere con la distribuzione su cui il potenziale agisce, a seconda che il sistema sia autogravitante o meno. Affronteremo più in dettaglio questo aspetto nel prossimo capitolo, nell'ambito delle applicazioni astrofisiche.

Il problema è ora ridotto ad un'equazione in 6 variabili spaziali e una temporale: una semplificazione notevole rispetto all'originario sistema newtoniano del moto di N corpi. Un'ulteriore semplificazione si ottiene attraverso l'applicazione del *metodo dei momenti* sullo spazio delle velocità: moltiplichiamo la CBE per una potenza della velocità media delle particelle e integriamo l'equazione su tutte le velocità, ottenendo così infinite *equazioni di Jeans*, così chiamate perché fu James Jeans ad applicarle per primo alla dinamica stellare (1919). Per motivi di spazio, la trattazione delle equazioni di Jeans non sarà dettagliata in ogni passaggio, ma saranno infine brevemente discussi i risultati. Definiamo innanzitutto i *momenti delle velocità*, limitandoci ai momenti del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(\mathbf{x}; t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f d^3 \mathbf{v}, \\ \overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f d^3 \mathbf{v}, \\ \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3 \mathbf{v} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j. \end{aligned}$$

Ove $i, j = 1, 2, 3$; \bar{v}_i e \bar{v}_j sono componenti delle *velocità medie* delle particelle; σ_{ij}^2 è il *tensore di dispersione delle velocità*, il quale misura la deviazione (scarti quadratici) delle velocità delle particelle dai loro valori medi, ovvero rappresenta una stima del "disordine" dei moti. Parlando di medie ci riferiamo qui, come mostrano le formule, a medie "locali", cioè in funzione della posizione e del tempo, non a medie temporali su tutto il sistema.

Integriamo ora la CBE su tutte le velocità:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = 0,$$

che è equivalente a

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1.4)$$

Moltiplicando invece la CBE per v_j e integrando sulle velocità, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_j d^3 \mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = 0,$$

che è equivalente a

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial\Phi_{tot}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.5)$$

che possiamo riscrivere inserendo nell'equazione il tensore di dispersione delle velocità:

$$\rho \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} + \rho\bar{v}_i \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i} = \rho \frac{D\bar{v}_j}{Dt} = -\rho \frac{\partial\Phi_{tot}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

Le equazioni (1.4), (1.5) e (1.6) sono equazioni di Jeans. Si può notare una forte somiglianza tra queste equazioni e le equazioni di continuità e dell'impulso della fluidodinamica, che descrivono rispettivamente la conservazione della massa e della quantità di moto di un fluido in moto in un volume arbitrario. Vi è tuttavia una sostanziale differenza tra il fluido appena considerato e il fluido non collisionale della nostra trattazione. Tale differenza risiede proprio nella proprietà di non collisionalità: un fluido "ordinario" naturalmente collisionale è caratterizzato da pressione e temperatura scalari, che corrispondono a tensori isotropi, indipendenti quindi dalla direzione considerata, a differenza di un fluido non collisionale, nel quale queste quantità sono in generale descritte da tensori anisotropi. Nel primo caso allora, una qualunque deviazione dall'isotropia dei moti quadratici delle particelle viene eliminata dai frequenti urti tra le particelle stesse e l'isotropia è conservata; nel caso non collisionale, per definizione, gli urti sono trascurabili e l'anisotropia non può essere eliminata su tempi scala minori della vita del sistema stesso.

Per questo motivo le galassie ellittiche hanno forma ellissoidale, in particolare sono *ellissoidi triassiali*: la distribuzione delle velocità è anisotropa, la componente della velocità media (delle stelle che si muovono nella galassia) lungo l'asse maggiore dell'ellissoide è maggiore rispetto a quella lungo l'asse medio, a sua volta maggiore rispetto a quella lungo l'asse minore. L'anisotropia del tensore di dispersione delle velocità delle galassie ellittiche è una prova del fatto che esse non sono ellissoidi di rotazione, oltre a non essere collisionali. Se infatti le galassie fossero sistemi collisionali, tutte le galassie ellittiche diventerebbero perfettamente sferiche nell'arco della loro vita.

Con l'introduzione dei momenti delle velocità, abbiamo ricavato da un'equazione non integrabile (l'equazione di Boltzmann non collisionale) infinite equazioni, benché esatte. Un'ulteriore applicazione del metodo dei momenti, questa volta sullo spazio delle configurazioni, permette di ottenere un'unica equazione esatta e giungere finalmente alla formulazione del teorema del viriale.

Moltiplichiamo l'equazione (1.5) per x_k e integriamo su tutto lo spazio:

$$\int_{\mathbb{R}^3} x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_k \frac{\partial\Phi_{tot}}{\partial x_j} d^3\mathbf{x} = 0, \quad (1.7)$$

ove a ciascuno dei tre termini è associato un tensore.

Il primo termine deriva dal tensore d'inerzia

$$I_{jk}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_j x_k d^3\mathbf{x},$$

la cui traccia è il *momento di inerzia*:

$$Tr(I_{jk}) = I(t).$$

Derivando il tensore rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{jk}}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k d^3 \mathbf{x} = \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d^3 \mathbf{x} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_i (x_k \delta_{ij} + x_j \delta_{ki}) d^3 \mathbf{x} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\bar{v}_j x_k + \bar{v}_k x_j) d^3 \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Allora, essendo x_k indipendente dal tempo,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = \int_{\mathbb{R}^3} x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3 \mathbf{x}.$$

Il secondo termine dell'equazione (1.7) rappresenta il tensore di energia cinetica totale

$$\begin{aligned}
K_{jk}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \mathbf{x} = \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x},
\end{aligned}$$

il quale può essere scomposto in un termine dovuto al moto ordinato e uno dovuto al moto random delle particelle:

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}$$

ove

$$\begin{aligned}
T_{jk}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \mathbf{x}, \\
\Pi_{jk}(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{jk}^2 d^3 \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Le tracce dei tre tensori di energia cinetica corrispondono rispettivamente all'*energia cinetica totale*, l'*energia cinetica ordinata* e l'*energia cinetica di dispersione*:

$$\begin{aligned}
Tr(K_{jk}) &= K(t), \\
Tr(T_{jk}) &= T(t), \\
Tr(\Pi_{jk}) &= \Pi(t).
\end{aligned}$$

In seguito scriveremo spesso solo l'energia cinetica totale, lasciando impliciti i due contributi. Il terzo termine dell'equazione (1.7) rappresenta il tensore di energia potenziale totale

$$W_{jk}(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_j \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x},$$

che tiene conto di tutte le distinte distribuzioni di densità interne al sistema e che agiscono su di esso. La densità ρ e il potenziale Φ sono definiti rispettivamente nelle

equazioni (1.2) e (1.3); il tensore è simmetrico ed è perciò legittimo invertire gli indici j e k , essendo $W_{jk} = W_{kj}$; la sua traccia altro non è che l'*energia potenziale totale* del sistema:

$$Tr(W_{jk}) = W(t).$$

Sostituendo i tensori appena definiti ai rispettivi termini nell'equazione (1.7), otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2K_{jk} + W_{jk}$$

e applicando a ciascun tensore la propria traccia, possiamo riscrivere l'equazione in forma scalare, come

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + W.$$

Se il sistema è stazionario e limitato spazialmente, allora I , che è funzione delle variabili spaziali, è indipendente dal tempo e la sua derivata rispetto al tempo è nulla. Per un sistema non collisionale all'equilibrio vale allora la seguente relazione tra energia cinetica e energia potenziale, nota come **Teorema tensoriale del viriale**:

$$2K_{jk} + W_{jk} = 0,$$

che può essere espressa in forma scalare, **Teorema scalare del viriale**, come

$$2K + W = 0.$$

Definita l'energia totale nel baricentro del sistema stazionario $E = K + W$, le relazioni seguenti sono espressioni equivalenti del teorema scalare del viriale:

$$E = -K = \frac{1}{2}W.$$

Abbiamo ricavato il teorema del viriale imponendo la condizione di stazionarietà al termine della trattazione; inseriamola ora invece nell'equazione non collisionale di Boltzmann (eq. (1.1)) e ricaviamo un altro importante risultato. Se un sistema non collisionale è stazionario, la sua funzione di distribuzione non dipende dal tempo, dunque

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i},$$

che rappresenta l'espressione del *teorema di Jeans*: dato un sistema non collisionale all'equilibrio, la funzione di distribuzione dipende dalle coordinate dello spazio delle fasi soltanto attraverso gli integrali regolari del moto permessi dal potenziale del sistema stesso. L'importanza di tale teorema è data dal fatto che esso legghi univocamente la densità, il potenziale e tutte le orbite delle particelle del sistema, attraverso la CBE. Il sistema dinamico è allora descritto da una coppia (ρ, Φ) .

Inoltre la CBE può essere modificata dall'aggiunta di un opportuno termine ed estesa ai sistemi *debolmente collisionali*, quindi le formule fornite per il teorema del viriale sono valide per tutti i sistemi - collisionali e non - all'equilibrio. Questo equilibrio è differente a seconda del sistema in considerazione; ne vedremo alcuni esempi nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Teorema del viriale in forma scalare

Il termine di energia potenziale totale che compare nella formula del teorema del viriale, come detto, tiene conto di tutte le distinte distribuzioni di densità interne al sistema e che agiscono su di esso. Vediamo ora i casi di un sistema autogravitante e di un sistema gravitazionale composto da due distinte ma sovrapposte distribuzioni di densità.

2.1.1 Sistemi autogravitanti

In un sistema autogravitante vi è un'unica distribuzione di densità ρ , le particelle si muovono sotto l'azione del potenziale Φ da esse stesse generato e il sistema è legato dalle loro reciproche interazioni gravitazionali.

Un sistema autogravitante (collisionale o non collisionale), per cui $E = K + U$, è all'equilibrio (stabile o instabile) se e solo se è virializzato, ovvero

$$2K = -U,$$

non essendovi altri contributi alle energie. L'energia potenziale di autogravitazione

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \left(-G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x}' \right) d^3\mathbf{x} = \\ &= -\frac{1}{2} G \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

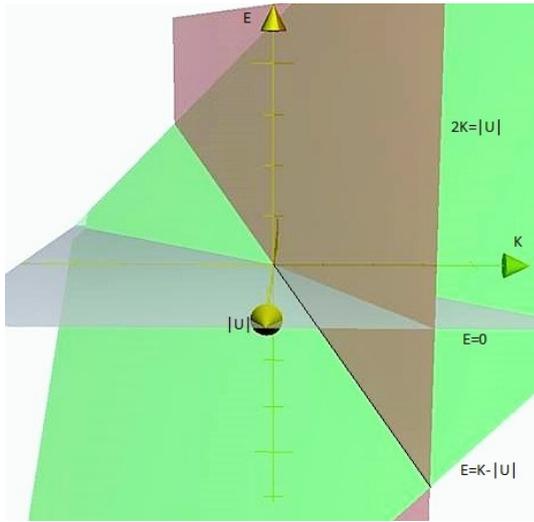
è necessariamente negativa, mentre l'energia cinetica è sempre positiva, allora

$$2K = |U|$$

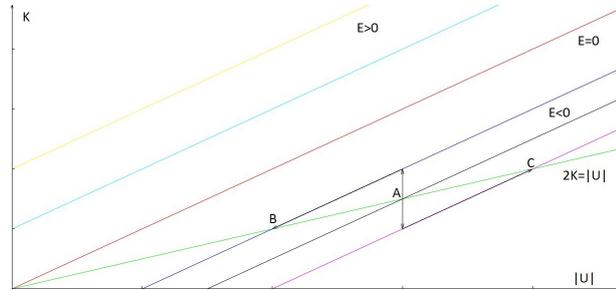
e

$$E = K - |U| = -K = -\frac{|U|}{2} = \frac{U}{2} \leq 0, \quad (2.1)$$

come vedremo ora nel dettaglio.



(a) La retta di intersezione dei piani $E = K - |U|$ e $2K = |U|$ è il solo luogo dei punti $(|U|, K, E)$ in cui si possono trovare sistemi autogravitanti virializzati.



(b) Meccanismo di rilassamento del sistema autogravitante virializzato.

All'aumentare di $|U|$, cioè per potenziali attrattivi più intensi, un generico sistema autogravitante è più concentrato, mentre al diminuire di $|U|$ il sistema è più rarefatto. All'aumentare di K invece il sistema è più caldo e più freddo al diminuire di K .

Nello spazio $(|U|, K, E)$, come mostra il grafico (a), il piano $E = K - |U|$ interseca il piano $K = |U|/2$ solo per valori di $E \leq 0$. Questo significa che un sistema autogravitante con energia totale nel baricentro positiva non può mai essere all'equilibrio; ciò implicherebbe infatti energia cinetica negativa e energia potenziale gravitazionale positiva (eq. (2.1)), condizioni assolutamente impossibili. Può invece essere all'equilibrio con energia totale nulla se e solo se $K = |U| = 0$, cioè quando il sistema si trova nell'origine dello spazio $(|U|, K, E)$. Dunque, a parte il caso banale, un sistema autogravitante stazionario ha necessariamente energia totale nel baricentro negativa, $E = K - |U| < 0$.

Se un sistema stazionario guadagna energia, può ripristinare l'equilibrio (raggiungendo un nuovo equilibrio di energie) solo diminuendo la propria energia cinetica e diminuendo in modulo l'energia potenziale: dunque il sistema è ora più energetico, più freddo e più rarefatto. Viceversa se un sistema stazionario perde energia, torna all'equilibrio contraendosi e riscaldandosi, con un'energia finale complessiva minore di quella iniziale. Questo meccanismo è visibile dall'intersezione dei piani nel grafico tridimensionale (a) al variare di E ed è schematizzato nel grafico bidimensionale (b): le frecce verticali verso l'alto e verso il basso rappresentano rispettivamente il guadagno e la perdita di energia totale di un sistema autogravitante stazionario nel punto A, che si convertono in diminuzione e aumento sia di K sia di $|U|$, portando il sistema ad un nuovo equilibrio nei punti B e C. Tale fenomeno è conseguenza della relazione tra K e U fornita dal teorema del viriale, per cui il modulo dell'energia potenziale (negativa) cresce col doppio dell'energia cinetica. Il calore specifico di un sistema autogravitante virializzato è necessariamente negativo: per aumentare/diminuire la sua temperatura occorre che perda/guadagni energia.

Il meccanismo appena descritto è alla base dell'*evaporazione gravitazionale* che caratterizza gli ammassi stellari, aperti (o galattici) e chiusi (o globulari), i quali hanno il comportamento di sistemi autogravitanti.

La formula del teorema del viriale fornita per sistemi autogravitanti è valida in ogni istante di tempo. Nel caso più generale, in realtà, tale relazione è valida calcolando le medie delle energia del sistema su un tempo $t \rightarrow \infty$, considerando cioè che il momento di inerzia possa avere lievi fluttuazioni su tempi brevi, ma sia costante su un intervallo di tempo $t \rightarrow \infty$. L'espressione più generale del teorema scalare del viriale per sistemi autogravitanti è nota come **teorema del viriale in media temporale**:

$$2 \langle K \rangle_{\infty} = - \langle U \rangle_{\infty},$$

ove

$$\langle K \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t K(\tau) d\tau$$

e

$$\langle U \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t U(\tau) d\tau$$

sono le *medie temporali* dell'energia cinetica e dell'energia potenziale totali e sono calcolate per $t \rightarrow \infty$. Se un sistema è virializzato è allora necessariamente virializzato anche in media temporale, mentre non vale in generale il contrario. Inoltre, quando N è piccolo, il momento di inerzia I è soggetto a lievi fluttuazioni statistiche; è solo per N molto grande che I è quasi indipendente dal tempo e allora la sua derivata temporale è approssimativamente nulla.

Per sistemi autogravitanti virializzati, le formule dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di autogravitazione forniscono le definizioni rispettivamente di *dispersione di velocità viriale* σ_v^2 e *raggio viriale* R_v :

$$K = \frac{M\sigma_v^2}{2}, \quad |U| = \frac{GM^2}{R_v}.$$

La relazione tra K e $|U|$ data dal teorema del viriale permette, note le velocità interne e le dimensioni del sistema, di ricavarne la massa totale:

$$M = \frac{\sigma_v^2 R_v}{G}. \quad (2.2)$$

Applicando la formula (2.2) ad una galassia, trattando quindi la galassia come un sistema autogravitante composto solo da stelle, si ricava una massa totale molto maggiore di quella stimata tramite la misura della luminosità. Ciò è dovuto alla notevole presenza di materia oscura che interagendo gravitazionalmente ma non elettromagneticamente, è invisibile ma contribuisce alla massa e all'energia potenziale totali del sistema. Le galassie dunque non possono essere trattate come sistemi autogravitanti. La formula (2.2) è particolarmente importante perché ha suggerito che nell'Universo vi sia una presenza di materia non visibile molto maggiore in massa rispetto alla materia visibile.

2.1.2 Galassie di stelle e materia oscura

Sapendo che all'aumentare della scala del sistema la massa di materia oscura aumenta più della massa di materia visibile, nei sistemi più grandi come le galassie e gli ammassi di galassie la materia oscura ha effetti notevoli - un ruolo importante nella dinamica del sistema (si pensi ad esempio alla curva di rotazione delle galassie a spirale) - e non è trascurabile, mentre nei sistemi più piccoli come gli ammassi stellari la presenza di materia oscura può essere trascurata.



Figura 2.1: Galassia a spirale NGC 634. [4]

Le galassie e gli ammassi di galassie sono sistemi gravitazionali non collisionali stazionari. Consideriamo ad esempio una galassia per

semplicità composta solo da stelle e materia oscura, con distribuzioni di densità rispettivamente ρ_1 e ρ_2 , trascurando polvere e gas interstellari.

L'energia potenziale totale è dovuta alle reciproche interazioni delle particelle di ciascuna distribuzione (le particelle sentono l'effetto del potenziale da esse stesse generato) e alle interazioni tra le due distribuzioni (le particelle di ciascuna distribuzione sentono l'effetto del potenziale generato dalle particelle dell'altra). Senza la presunzione di conoscere la struttura della materia oscura, ci limiteremo qui a considerarla come un insieme di particelle che interagiscono gravitazionalmente. Allora la densità e il potenziale totali del sistema sono $\rho_{tot} = \rho_1 + \rho_2$ e $\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2$ e l'energia potenziale totale

$$Tr(W_{jk}) = W = W_{11} + W_{12} + W_{22} + W_{21},$$

ove

$$\begin{aligned} W_{11} = U_{11} &= \frac{1}{2} \int \rho_1(\mathbf{x}) \Phi_1(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \rho_1(\mathbf{x}) \left(-G \int \frac{\rho_1(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}' \right) d^3 \mathbf{x} = \\ &= -\frac{1}{2} G \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_{12} = \frac{1}{2} U_{12} &= \frac{1}{2} \int \rho_1(\mathbf{x}) \Phi_2(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \rho_1(\mathbf{x}) \left(-G \int \frac{\rho_2(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}' \right) d^3 \mathbf{x} = \\ &= -\frac{1}{2} G \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{x}) \rho_2(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x} \end{aligned}$$

con le definizioni (1.2) e (1.3) della densità e del potenziale. Analogamente si definiscono W_{22} e W_{21} . Per il terzo principio della dinamica, $U_{12} = U_{21}$, allora

$W_{12} + W_{21} = \frac{1}{2}U_{12} + \frac{1}{2}U_{21} = U_{12} = U_{21}$ ed è detta *energia potenziale di interazione*.

Per quanto riguarda l'energia cinetica totale dovuta alla sovrapposizione delle due distribuzioni, essa è semplicemente la somma delle due distinte energie cinetiche:

$$Tr(K_{jk}) = K = K_1 + K_2 = T_1 + \frac{1}{2}\Pi_1 + T_2 + \frac{1}{2}\Pi_2 = T + \frac{1}{2}\Pi.$$

Il teorema del viriale in forma scalare, esplicitando tutti i contributi alle energie, è allora

$$2T_1 + \Pi_1 + 2T_2 + \Pi_2 = -U_{11} - U_{22} - U_{12}.$$

2.1.3 Instabilità di Jeans

In una regione di formazione stellare, consideriamo una nube molecolare, assunta sferica e a densità costante, che trattiamo come sistema gassoso autogravitante. Trascuriamo gli effetti dovuti alla rotazione, alla turbolenza e al campo magnetico e anche la pressione del mezzo interstellare esterno alla nube, che tende a farla contrarre.

La nube è stabile finché le forze di pressione e le forze gravitazionali sono in equilibrio, cioè finché il doppio dell'energia cinetica totale eguaglia il modulo dell'energia potenziale totale di autogravitazione. Questo significa che, per sistemi sferici autogravitanti trattabili come fluidi, per cui si può parlare di condizione di equilibrio idrostatico, essa coincide con il teorema del viriale: il sistema è virializzato se e solo se è all'equilibrio idrostatico. Se il modulo dell'energia potenziale gravitazionale è maggiore del doppio dell'energia cinetica, le forze di gravità dominano sulle forze di pressione e il sistema si contrae; viceversa se le forze di pressione superano quelle di gravità, il sistema si espande. James Jeans fu il primo a studiare gli effetti di piccole deviazioni delle nubi molecolari dall'equilibrio idrostatico (1902) e dunque la condizione di collasso della nube molecolare, situazione nota come *instabilità di Jeans*, con conseguente formazione di una protostella, applicando il teorema del viriale nella forma

$$2K = -U.$$

Per la nube molecolare di raggio R , massa M , temperatura T , numero di particelle N , si ha:

$$U \simeq -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

$$K = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} kT,$$

ove μ è il peso molecolare medio e m_H la massa dell'atomo di idrogeno, perché il mezzo interstellare che costituisce le regioni di formazione stellare è composto prevalentemente da idrogeno molecolare H_2 .

La condizione di inizio spontaneo del collasso della nube è dunque

$$2K < |U|,$$

cioè

$$\frac{3MkT}{\mu m_H} < \frac{3GM^2}{5R}$$

$$\frac{kT}{\mu m_H} < \frac{GM}{5R}.$$

Tale condizione è nota come *criterio di Jeans* ed è solitamente espressa in termini di massa o di raggio minimi necessari per il collasso gravitazionale, detti *massa di Jeans* e *lunghezza di Jeans*:

$$M > M_J \simeq \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

oppure

$$R > R_J \simeq \left(\frac{15kT}{4\pi G\mu m_H \rho} \right)^{1/2}.$$

Il raggio è stato ricavato, avendo imposto densità costante ρ , dalla formula

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

quindi

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}.$$

2.2 Teorema del viriale in forma tensoriale

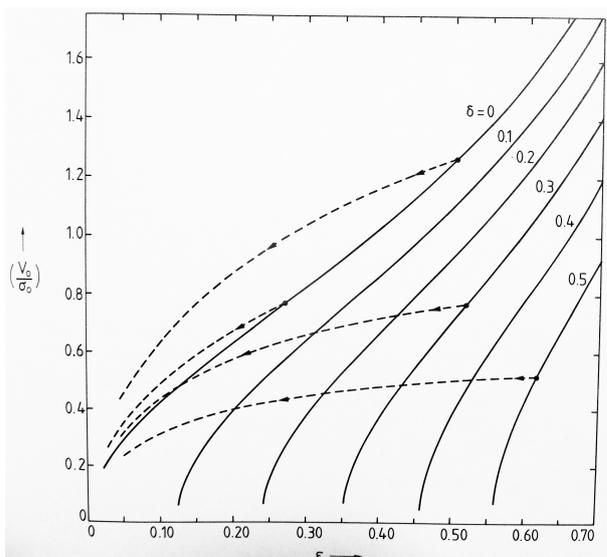
2.2.1 Rotazione delle galassie ellittiche

Note alcune grandezze riguardanti la forma e la velocità di rotazione di una galassia ellittica, il teorema tensoriale del viriale permette di ricavare importanti informazioni circa la sua dinamica interna.

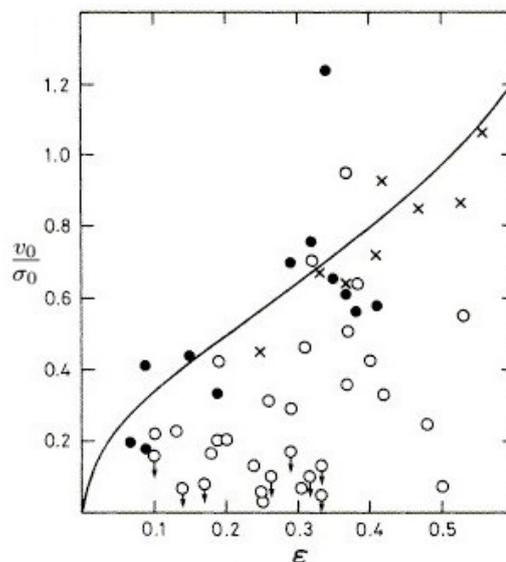
Consideriamo per semplicità galassie ellittiche di forma oblata, osservate di taglio, con linea di vista coincidente con l'asse x e rotazione attorno all'asse z . Definiamo innanzitutto i tensori di energia:

$$\begin{aligned} W_{xx} &= W_{yy}, & W_{ij} &= 0; \\ T_{xx} &= T_{yy}, & T_{ij} &= 0; & (i \neq j) \\ \Pi_{xx} &= \Pi_{yy}, & \Pi_{ij} &= 0; \\ 2T_{xx} &= \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_\phi^2 d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} M v_0^2; \\ T_{zz} &= 0; \\ \Pi_{xx} &= M \sigma_0^2; \\ \Pi_{zz} &= (1 - \delta) \Pi_{xx} = (1 - \delta) M \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Ove v_0 è la velocità media di rotazione della galassia attorno all'asse z , σ_0 è la dispersione di velocità della galassia lungo la linea di vista, $\delta < 1$ è un parametro non negativo che misura l'anisotropia del tensore di dispersione di velocità. In particolare, $\delta = 0$ quando il tensore di dispersione di velocità è isotropo e tende a 1 all'aumentare dell'anisotropia. La rotazione attorno all'asse z è l'unico moto ordinato all'interno del sistema, per cui



(a) Relazione tra parametro di rotazione v_0/σ_0 , ellitticità ϵ e anisotropia del tensore di velocità δ , per angolo di inclinazione della galassia $i = \pi/2$. Le curve tratteggiate rappresentano lo spostamento dei punti ($\epsilon_{app}(i), \tilde{v}(i)/\tilde{\sigma}(i)$) al diminuire di i . [2]



(b) Piano $(\epsilon, v_0/\sigma_0)$, con curva per $\delta = 0$. I puntini neri rappresentano galassie ellittiche e le crocette bulge di galassie a spirale, con luminosità $L < 2.5 \cdot 10^{10} L_\odot$; i cerchi bianchi rappresentano galassie ellittiche con luminosità $L > 2.5 \cdot 10^{10} L_\odot$. [5]

$$T_{zz} = 0.$$

Il teorema del viriale si esprime allora come

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} = -W_{xx}, \quad \Pi_{zz} = -W_{zz};$$

il rapporto tra le due precedenti equazioni fornisce

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{\Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}},$$

da cui, inserendo le definizioni dei tensori di energia, si ottiene

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1 - \delta) \frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2.$$

Sapendo che, per un sistema con superfici di equi-densità che sono circa ellissoidi oblati coassiali, W_{xx}/W_{zz} dipende solo dall'ellitticità ϵ degli ellissoidi e non dalla distribuzione radiale di densità, il parametro di rotazione v_0/σ_0 dato dalla formula precedente è funzione solo di ϵ e di δ .

Disegnando le curve per diversi valori di δ in un grafico $(\epsilon, v_0/\sigma_0)$, grafico (a), si osserva sulle superfici di equi-densità una quasi indipendenza dell'ellitticità dal parametro di rotazione, per piccoli valori di quest'ultimo.

Al variare dell'inclinazione del piano equatoriale rispetto alla linea di vista con cui si osserva la galassia, variano naturalmente la sua velocità di rotazione, la sua dispersione di velocità e la sua ellitticità apparenti; definito l'angolo di inclinazione $i = \pi/2$ quando la galassia è di taglio, valgono le seguenti relazioni:

$$\tilde{v}(i) = v_0 \sin i,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2(i) &= \sigma_0^2 \sin^2 i + (1 - \delta)\sigma_0^2 \cos^2 i = \sigma_0^2(1 - \delta \cos^2 i), \\ (1 - \epsilon_{app})^2 &= (1 - \epsilon_{vera})^2 \sin^2 i + \cos^2 i.\end{aligned}$$

I punti $(\epsilon_{app}(i), \tilde{v}(i)/\tilde{\sigma}(i))$ nel grafico si discostano tanto più dai valori ottenuti per $i = \pi/2$ quanto più i diminuisce rispetto a $\pi/2$. Quando tuttavia il tensore di dispersione delle velocità è isotropo, i valori del parametro di rotazione in funzione dell'ellitticità sono quasi indipendenti dall'inclinazione della galassia (nel grafico (a), la curva tratteggiata è quasi parallela alla curva continua) e questo permette di calcolarli anche nei frequenti casi in cui l'angolo di inclinazione non sia stimabile. La curva per $\delta = 0$ è allora rappresentativa per tutte le galassie ellittiche oblate osservate, a prescindere dall'inclinazione del piano equatoriale rispetto alla linea di vista.

Osservazioni molto sofisticate permetterebbero teoricamente di calcolare esattamente \tilde{v} e $\tilde{\sigma}$, ma non potendo ottenere una precisione così alta, i valori sono calcolati con una serie di approssimazioni. Inoltre, in galassie reali, l'ellitticità non è una proprietà intrinseca del sistema, ma varia col raggio, dunque il valore utilizzato di ϵ è un valore caratteristico, ma non esatto. Tuttavia, dal grafico (b), si osserva che la distribuzione di galassie ellittiche di bassa luminosità e di bulge di galassie a spirale è vicina alla curva per $\delta = 0$, quindi in effetti l'approssimazione di isotropia del tensore di dispersione di velocità è accettabile. Lo stesso non si può dire per le galassie ellittiche giganti - molto luminose -, che invece si discostano parecchio dalla curva di isotropia. L'anisotropia osservata in una galassia fornisce allora un'importante informazione sulla struttura di quest'ultima.

Il teorema tensoriale del viriale, qui applicato al caso particolare di galassie ellittiche di forma oblate, è applicabile anche al caso generale di ellipsoidi triassiali.

Bibliografia

- [1] B. W. Carrol - D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson Education, 2007.
- [2] J. Binney - S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 1987.
- [3] L. Ciotti, *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare.*, Zanichelli Editore, 2002.
- [4] <http://www.spacetelescope.org/>.
- [5] <http://www.astr.ua.edu/>.