

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'EFFETTO GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
ANNAMARIA
MONTANARI

Presentata da:
MARCO MANGIANTI

Sessione II
Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione	ii
1 Convergenza delle serie di Fourier	1
1.1 Le serie di Fourier	1
1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier	6
1.3 La convergenza uniforme	11
2 L'effetto Gibbs	13
2.1 Un esempio particolare: l'onda quadra	13
2.2 L'effetto Gibbs.	18
2.3 L'onda semitriangolare	21
3 Le somme di Fejér	23
3.1 La convergenza secondo Cesàro	23
3.2 Somme e teorema di Fejér	24
3.3 Eliminazione dell'effetto Gibbs.	28
Appendice	33
Bibliografia	35

INTRODUZIONE

Nella tesi ho deciso di affrontare l'effetto Gibbs. Inizialmente il primo che notò questo fenomeno fu Henry Wilbraham nel 1848 e venne ripreso poi da Josiah Willard Gibbs solamente nel 1898. Questo fenomeno consiste nella presenza di forti oscillazioni nei polinomi di Fourier di funzioni con discontinuità di prima specie, ovvero che la differenza tra il massimo e il minimo di tali polinomi in un intorno del punto di discontinuità si mantiene maggiore della funzione in tale punto. Con l'aumentare del grado del polinomio queste "sovra-oscillazioni" non diminuiscono. Vediamo che utilizzando un altro tipo di polinomi trigonometrici, quelli di Fejér, l'effetto Gibbs tende a scomparire.

La tesi è suddivisa in tre parti. Nella prima parte vengono introdotte le serie di Fourier ed analizziamo la convergenza puntuale di tali serie attraverso il teorema di localizzazione di Riemann. Notiamo, inoltre, che i polinomi di Fourier minimizzano l'errore in norma quadratica. La seconda parte si focalizza sull'effetto Gibbs. Osserviamo che prendendo l'esempio dell'onda quadra, i polinomi di Fourier vicino ad un punto di discontinuità di prima specie presentano delle sovra-oscillazioni. Analizziamo anche un altro esempio in cui si presenta l'effetto Gibbs: l'onda semitriangolare. Infine nella terza parte introduciamo la convergenza secondo Cesàro e le somme di Fejér e possiamo notare come con questi polinomi trigonometrici si possa eliminare l'effetto Gibbs.

Per osservare questo, nella tesi ho inserito delle figure della funzione onda quadra e onda semitriangolare sia con i polinomi di Fourier, sia con le somme di Fejér. Per rappresentarli ho utilizzato il programma Matlab e nell'appendice ho riportato i codici usati per i grafici.

Capitolo 1

Convergenza delle serie di Fourier

1.1 Le serie di Fourier

Definizione 1.1. Sia $f \in L(-\pi, \pi)$ e 2π -periodica. Definiamo il polinomio di Fourier di grado $n \in \mathbb{N}$ di f come

$$S_n(f)(t) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \end{aligned}$$

Osservazione 1. I coefficienti di Fourier di f $a_0, a_k,$ e b_k sono ben definiti dato che:

- $|\cos(kt)| \leq 1$
- $|\sin(kt)| \leq 1$
- f è sommabile su $(-\pi, \pi)$

Definizione 1.2. Una funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detto *polinomio trigonometrico* di grado $\leq n$ se è del tipo:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

con $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \forall k = 1, \dots, n$ con a_n e b_n non entrambi nulli. Definisco poi T_n l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado $\leq n$.

Definizione 1.3. Siano f e $g \in L^2((-\pi, \pi))$. Definiamo *prodotto interno* di f per g in L^2

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

- è simmetrico, ovvero $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad \forall f, g \in L^2((-\pi, \pi))$
- $\langle f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in L^2((-\pi, \pi)) \quad (\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0)$
- è lineare rispetto al primo argomento (e al secondo per simmetria)

Teorema 1.1.1. Sia $f \in L^2((-\pi, \pi))$ 2π -periodica, allora $\forall p \in T_n$ vale:

$$\|f - p\|_2 \geq \|f - S_n(f)\|_2$$

Dimostrazione. Prima verifichiamo che se $f \in L^2(-\pi, \pi)$ allora vale che $f \in L(-\pi, \pi)$.

$$|f(t)| \leq \frac{1 + |f(t)|^2}{2}, \text{ perchè } |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + |f(t)|^2}{2} dt < +\infty \quad \text{dato che } f \in L^2$$

Ne viene che i coefficienti a_0, a_k e b_k sono ben definiti.

Sia $U^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, k = 1, \dots, 2n + 1 \right\} = \{e_k, k = 1, \dots, 2n + 1\}$ una base ortonormale rispetto al prodotto interno in $L^2((-\pi, \pi))$ definito precedentemente e siano \hat{f}_k i coefficienti di Fourier di f rispetto alla base ortonormale U^*

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e_k(t)dt$$

Ora il polinomio di Fourier di f di grado n risulterà essere

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k e_k$$

Quindi vale che

$$\begin{aligned}\|S_n(f) - f\|^2 &= \langle S_n(f) - f, S_n(f) - f \rangle = \langle S_n(f), S_n(f) - f \rangle - \langle f, S_n(f) - f \rangle = \\ &= \langle S_n(f), S_n(f) \rangle - 2 \langle f, S_n(f) \rangle + \langle f, f \rangle\end{aligned}$$

osservo che

$$\begin{aligned}\langle S_n(f), S_n(f) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k e_k, \sum_{m=1}^{2n+1} \hat{f}_m e_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k \left\langle e_k, \sum_{m=1}^{2n+1} \hat{f}_m e_m \right\rangle \\ &= \sum_{k,m=1}^{2n+1} \hat{f}_k \hat{f}_m \langle e_k, e_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k^2\end{aligned}$$

invece

$$\langle f, S_n(f) \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{f}_k^2$$

raccogliendo tutto insieme

$$\|S_n(f) - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k)^2$$

questo (per positività del membro sinistro) mi da la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k)^2 \leq \|f\|^2$$

Ora valutiamo

$$\|f - p\|^2 = \langle f - p, f - p \rangle = \|f\|^2 - 2 \langle f, p \rangle + \langle p, p \rangle$$

- $\langle p, p \rangle = \sum_{k,m=1}^{2n+1} c_k c_m \langle e_k, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k^2, \quad c_k \in \mathbb{R}$
- $\langle f, p \rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \hat{f}_k$

$$\begin{cases} \|S_n(f) - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k)^2 \\ \|f - p\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \hat{f}_k + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k^2 \end{cases}$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza tra i quadrati

$$\begin{aligned}
 \|S_n(f) - f\|^2 &\leq \|f - p\|^2 \\
 &\Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k)^2 \leq -2 \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \hat{f}_k + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k^2 \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k^2 - 2c_k \hat{f}_k + c_k^2) \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (\hat{f}_k - c_k)^2
 \end{aligned}$$

Sono quantità positive, quindi questo equivale alla tesi del teorema. \square

Teorema 1.1.2. *La disuguaglianza di Bessel dice subito che se $f \in L^2((-\pi, \pi))$ e f 2π -periodica, allora vale:*

$$(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$$

dove $l^2 = \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 < \infty\}$

Definizione 1.4. Si definisce il nucleo di Dirichelet di grado n il seguente polinomio trigonometrico

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

Il nucleo di Dirichelet gode delle seguenti proprietà:

1. D_n è pari
2. $\int_0^\pi D_n(t) dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt) dt = \frac{\pi}{2}$
3. $D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$ per $0 < t < \pi$

La terza proprietà si dimostra in questo modo per $0 < t < \pi$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{t}{2}\right)D_n(t) &= \sin\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\sin\left(kt + \frac{t}{2}\right) + \sin\left(kt - \frac{t}{2}\right) \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sum_{k=1}^n \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t \right) \\
&= \frac{1}{2} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)
\end{aligned}$$

Lemma 1.1.3. *Sia f 2π -periodica e $f \in L((-\pi, \pi))$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha*

- $f \in L((a - \pi, a + \pi))$
- $\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

La dimostrazione si può trovare in [2].

Proposizione 1.1.4. *Sia $f \in L((-\pi, \pi))$ 2π -periodica, allora $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere il polinomio di Fourier di f nel modo seguente:*

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds \right) \cos(kt) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds \right) \sin(kt) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(ks) \cos(kt) + \sin(ks) \sin(kt)) \right) f(s) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s-t) f(s) ds \quad [s = t + \tau, \quad ds = d\tau] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} D_n(\tau) f(t + \tau) d\tau \quad (\text{lemma 1.1.3}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) f(t + \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(\tau) f(t + \tau) d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(\tau) f(t + \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) f(t + s) ds - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(-s) f(t - s) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) f(t + s) ds + \int_0^{\pi} D_n(s) f(t + s) ds \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t + s) + f(t - s)}{2} D_n(s) ds
\end{aligned}$$

□

1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile in $(-\pi, \pi)$ allora sono equivalenti :

1. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) D_n(s) ds = 0$

Ora introduciamo il lemma di Riemann-Lebesgue che ci permetterà poi di dimostrare il teorema di localizzazione di Riemann

Lemma 1.2.1. *Sia $g : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $g \in L((a, b))$, allora vale la seguente condizione:*

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \int_a^b g(s) \sin(Ms) ds = 0$$

(la medesima cosa vale anche per il coseno)

Dimostrazione. Per la densità di $C_0^\infty(a, b)$ in $L(a, b)$ vale :

$\forall \epsilon > 0, \exists \varphi \in C_0^\infty((a, b))$, $\text{supp } \varphi \subset (a, b)$ tale che $\int_a^b |g - \varphi| < \epsilon$

Ora

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(s) \sin(Ms) ds \right| &= \left| \int_a^b (g(s) - \varphi(s)) \sin(Ms) ds + \int_a^b \varphi(s) \sin(Ms) ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |g(s) - \varphi(s)| ds + \left| \int_a^b \varphi(s) \sin(Ms) ds \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b \varphi(s) \sin(Ms) ds \right| \end{aligned}$$

Nel secondo termine φ è C_0^∞ , e quindi possiamo trattarlo per parti:

$$\left| \int_a^b \varphi(s) \sin(Ms) ds \right| = \left[\frac{-\varphi(s) \cos(Ms)}{M} \right]_a^b + \int_a^b \frac{\varphi'(s) \cos(Ms)}{M} ds$$

dove la prima parte si cancella poichè $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$ dato che è a supporto compatto in (a, b) . Quindi

$$\left| \int_a^b \varphi(s) \sin(Ms) ds \right| \leq \frac{1}{|M|} \int_a^b |\varphi'(s)| ds \rightarrow 0, \text{ per } M \rightarrow +\infty \quad \square$$

Teorema 1.2.2 (Teorema di localizzazione di Riemann). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in L((-\pi, \pi))$, f 2π -periodica e sia $t \in \mathbb{R}$, allora se*

$$\exists c \in (0, \pi) \text{ tale che } \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{s} ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

allora

$$S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R}$$

(spostiamo il problema vicino allo zero, da questo il nome)

Dimostrazione.

$$S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^\pi g(t, s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin(\frac{s}{2})} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

dove $g(t,s) := \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda$.

Abbiamo che $s \rightarrow \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \in L((c, \pi))$, $c > 0$

ora

$$\int_0^\pi \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds = \int_0^c \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds + \int_c^\pi \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds$$

dove $\int_c^\pi \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds \rightarrow 0$ per il lemma di Riemann-Lebesgue

$$\Leftrightarrow \exists c > 0 : \int_0^c \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{g(t,s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \sin(n + \frac{1}{2})s ds &= \int_0^c g(t,s) \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right) \sin(n + \frac{1}{2})s ds + \\ &+ \int_0^c g(t,s) \frac{1}{s} \sin(n + \frac{1}{2})s ds. \end{aligned}$$

Vogliamo fare uso nuovamente del lemma di Riemann Lebesgue sul primo addendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} &= \frac{s - 2 \sin \frac{s}{2}}{2s \sin \frac{s}{2}} = \frac{s - 2(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{3!8} + O(s^5))}{2s(\frac{s}{2} + O(s^3))} \\ &= \frac{\frac{s^3}{3!4} + O(s^5)}{s^2 + O(s^4)} = \frac{\frac{s}{4!} + O(s^3)}{1 + O(s^2)}, \quad s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

questo mi dice che la funzione è sommabile su $]0,c[$ e limitata. Abbiamo risolto la questione nell'intorno di 0.

Dunque $\int_0^c g(t,s) \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right) \sin(n + \frac{1}{2})s ds \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ per il lemma di Riemann-Lebesgue. \square

Teorema 1.2.3 (Teorema di Dini). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in L((-\pi, \pi))$, f 2π -periodica, se

$$\exists f^*(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \quad \text{finito}$$

e se $\exists c \in (0, \pi)$ tale che

$$s \rightarrow \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) s^{-1} \in L(0, c)$$

allora $S_n(f)(t) \rightarrow f^*(t)$ per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Usiamo il teorema di localizzazione con $\lambda = f^*(t)$ e passiamo al limite con Riemann Lebesgue. \square

Teorema 1.2.4 (*Teorema di Hölder*). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in L((-\pi, \pi))$, f 2π -periodica e sia $t \in \mathbb{R}$. Se $\exists M, \delta > 0$ e $\alpha \in]0, 1]$ tali che

$$|f(s) - f(\sigma)| \leq M|s - \sigma|^\alpha \quad \forall s, \sigma \in (t, t + \delta) \quad e \quad \forall s, \sigma \in (t - \delta, t)$$

Allora la serie di Fourier di f converge in t .

Dimostrazione. Per dimostrare la seguente proposizione basta verificare la validità delle ipotesi del teorema di Dini. Poniamo $f(t^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t + s)$ e $f(t^-) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t - s)$.

Ora procediamo con il secondo punto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \left(\frac{f(t+s) - f(t^+)}{2} + \frac{f(t-s) - f(t^-)}{2} \right) \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{f(t+s) - f(t^+)}{2} \right| + \left| \frac{f(t-s) - f(t^-)}{2} \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} 2Ms^\alpha = Ms^\alpha \end{aligned}$$

e $\frac{M|s|^\alpha}{|s|} = \frac{M}{|s|^{1-\alpha}}$ è sommabile in $(0, c)$ perchè $1 - \alpha < 1$. \square

Definizione 1.5. Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione limitata in (a, b) quando l'insieme numerico descritto dalle somme

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

è limitato al variare del numero naturale n e dei punti x tali che $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$.

Prima di dimostrare il teorema di *Jordan*, abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 1.2.5. Sia h monotona (per esempio \nearrow) su $[a, b]$ e $g \in C([a, b])$, allora $\exists \alpha \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b g(t)h(t)dt = h(a) \int_a^\alpha g(t)dt + \int_\alpha^b g(t)dt$$

La dimostrazione si può trovare in [2].

Teorema 1.2.6 (*Teorema di Jordan*). Sia f 2π -periodica e supponiamo che f sia a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$ (cioè $f = g - h$ con $g, h \nearrow$).

Allora

$$S_n(f)(t) \rightarrow f^*(t), \quad n \rightarrow +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx < +\infty$ secondo *Riemann*, allora

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \int_m^n \frac{\sin(x)}{x} dx < \epsilon, \quad \forall m, n \geq \bar{n}$$

Per ipotesi $f = g - h$ con $g, h \nearrow$, quindi è sufficiente dimostrare il teorema per $f \nearrow$.

Considero

$$\begin{aligned} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} &= \frac{1}{2}(f(t+s) - f(t^+) + f(t-s) - f(t^-)) \\ &= \varphi(s) + \psi(s) \end{aligned}$$

dove $\varphi(s) = \frac{1}{2}(f(t+s) - f(t^+))$ e $\psi(s) = \frac{1}{2}(f(t-s) - f(t^-))$

Se $f \nearrow$ allora

- $\varphi \nearrow$ e $\varphi \geq 0$ e $\varphi(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0^+$
- $\psi \searrow$ e $\psi \geq 0$ e $\psi(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0^+$

Dobbiamo dimostrare che

$$\exists c > 0 : \int_0^c \varphi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad (1.1)$$

Ne verrà che se vale (1.1), allora vale la tesi per il teorema di localizzazione di Riemann.

Dimostriamo 1.1

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{sia } \bar{n} \in \mathbb{N} : \left| \int_m^n \frac{\sin(x)}{x} dx \right| < \epsilon \quad \forall m, n \geq \bar{n}$$

Ora posto $\sigma = (n + \frac{1}{2})s$

$$\begin{aligned} \int_0^c \varphi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds &= \int_0^{(n + \frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n + \frac{1}{2}} d\sigma \\ &= \int_0^{\bar{n}} \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma + \int_{\bar{n}}^{(n + \frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Dobbiamo stimare I_1 e I_2

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^{\bar{n}} \varphi\left(\frac{\sigma}{n+\frac{1}{2}}\right) \left|\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}\right| d\sigma \quad (\varphi \nearrow) \\ &\leq \varphi\left(\frac{\bar{n}}{n+\frac{1}{2}}\right) \int_0^{\bar{n}} \left|\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}\right| d\sigma \\ &\leq \varphi\left(\frac{\bar{n}}{n+\frac{1}{2}}\right) M\bar{n} \longrightarrow 0M\bar{n} = 0, \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\bar{n}}^{(n+\frac{1}{2})c} \underbrace{\varphi\left(\frac{\sigma}{n+\frac{1}{2}}\right)}_{=h} \underbrace{\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}}_{=g} d\sigma \quad (\text{per il lemma 1.2.5 } \exists \alpha \in [\bar{n}, (n+\frac{1}{2})c]) \\ &= \varphi\left(\frac{\bar{n}}{n+\frac{1}{2}}\right) \int_{\bar{n}}^{\alpha} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma + \varphi\left(\frac{(n+\frac{1}{2})c}{n+\frac{1}{2}}\right) \int_{\alpha}^{(n+\frac{1}{2})c} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \varphi\left(\frac{\bar{n}}{n+\frac{1}{2}}\right) \underbrace{\left|\int_{\bar{n}}^{\alpha} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma\right|}_{<\epsilon} + \varphi(c) \underbrace{\left|\int_{\alpha}^{(n+\frac{1}{2})c} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma\right|}_{<\epsilon} \\ &\leq \epsilon \left(\varphi\left(\frac{\bar{n}}{n+\frac{1}{2}}\right) + \varphi(c) \right) \\ &\leq \epsilon M \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Quindi $I_2 \longrightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

□

1.3 La convergenza uniforme

Definizione 1.6. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists f'$ derivata debole di f e che $f' \in L([a, b])$. Diciamo che f è assolutamente continua su $[a, b]$ se

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Teorema 1.3.1. Sia f 2π -periodica e assolutamente continua su $[-\pi, \pi]$. Sia poi $f' \in L^2([-\pi, \pi])$. Allora

$$S_n(f) \rightrightarrows f, \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{su } \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Se

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

allora

$$S_n(f') = \sum_{k=1}^n (-ka_k \sin(kt) + kb_k \cos(kt))$$

Poichè f è assolutamente continua, vale

$$f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^x f'(t) dt$$

Ma se $f' \in L^2$ vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^n (\hat{f}'_k)^2 \leq \|f'\|_2^2 < +\infty$$

Al limite per $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left((a_k k)^2 + (b_k k)^2 \right) < +\infty$$

Ora per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{|a_k| + |b_k|}{k} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (ka_k)^2 + (kb_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

\Rightarrow la serie di Fourier converge uniformemente, infatti:

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|a_k \cos(kt)| + |b_k \sin(kt)| \right) \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|a_k| + |b_k| \right) < +\infty$$

Quindi converge poichè è una serie a termini positivi. \square

Corollario 1.1. *Sia f 2π -periodica, $f \in C([-\pi, \pi])$ e f è C^1 a tratti su $[-\pi, \pi]$. Allora*

$$S_n(f) \rightrightarrows f \quad n \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione. Se f è C e C^1 a tratti, allora f è assolutamente continua e poi si usa il teorema precedente. \square

Capitolo 2

L'effetto Gibbs

2.1 Un esempio particolare: l'onda quadra

In questo capitolo vogliamo trattare nel dettaglio l'andamento di una funzione chiamata onda quadra. Questa è una funzione regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ e può essere estesa su tutto \mathbb{R} .

Prima diamo una definizione di una funzione regolare a tratti.

Definizione 2.1. Una funzione f è regolare a tratti in un intervallo $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:

1. esiste un numero finito di punti x_1, \dots, x_n con $a < x_1 < \dots < x_n < b$ tale che f è di classe C^1 negli intervalli $[a, x_1], [x_j, x_{j+1}]$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) e $[x_n, b]$
2. nei punti x_1, \dots, x_n esistono finite le derivate destra e sinistra
3. nei punti x_1, \dots, x_n esistono finiti i limiti destro e sinistro

La funzione può presentare, oltre a punti angolosi (quando $f(x_k - 0) = f(x_k + 0)$, ma $f'(x_k - 0) \neq f'(x_k + 0)$), anche discontinuità di prima specie (quando $f(x_k - 0) \neq f(x_k + 0)$).

Ora definiamo la funzione onda quadra

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{se } x = -\pi \end{cases}$$

La funzione q è sommabile su $[-\pi, \pi]$. Quindi ora calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier :

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt = 0$
- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \cos(kt) dt = 0$, poichè il coseno è una funzione pari e q è dispari
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) \sin(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$

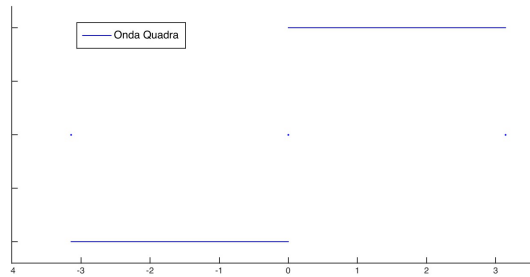


Figura 2.1: Onda quadra

Lemma 2.1.1. *Abbiamo che $\forall k$ e $\forall t \in (0, \pi)$ vale che*

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) = \frac{\sin(2nt)}{2 \sin(t)}$$

Dimostrazione. La seguente uguaglianza si dimostra utilizzando la formula di Prostaferesi

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Infatti se considero

$$\cos((2k-1)t) = \frac{\cos((2k-1)t) \sin(t)}{\sin(t)} = \frac{\sin(2kt) - \sin(2k-2)t}{2 \sin(t)}$$

sommando su k , ottengo la tesi. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) &= \frac{1}{2 \sin(t)} \sum_{k=1}^n (\sin(2kt) - \sin((2k-2)t)) \\ &= \frac{\sin(2nt)}{2 \sin(t)} \end{aligned}$$

□

Con questo lemma possiamo fornire un'espressione per $S_{2n-1}(q)(x)$, ovvero le ridotte della serie di Fourier di f , nelle seguenti forme:

$$\begin{aligned} 1. S_{2n-1}(q)(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \\ 2. S_{2n-1}(q)(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^x \cos((2k-1)t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt \end{aligned}$$

Ora verifichiamo l'andamento di questa espressione calcolandone i massimi e minimi e vedremo che potremo notare dei risultati interessanti.

Inizialmente calcoliamo la derivata prima di $S_{2n-1}(q)(x)$ e otteniamo il seguente risultato:

$$S'_{2n-1}(q)(x) = \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)}$$

Possiamo notare facilmente che gli zeri della funzione in $[-\pi, \pi]$ sono rappresentati nella forma $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2n-1)$.

In particolare abbiamo che i punti x_k sono:

1. minimo relativo se $k = 2, 4, \dots, 2(n-1)$, ovvero $x_j = \frac{j}{n}\pi, j = 1, 2, \dots, n-1$
2. massimo relativo se $k = 1, 3, \dots, 2n-1$, ovvero $x_j = \frac{2j-1}{2n}\pi, j = 1, 2, \dots, n$

Ora andiamo a studiare i flessi di $S_{2n-1}(q)(x)$ andando ad analizzare la derivata seconda

$$S''_{2n-1}(q)(x) = \frac{2}{\pi} \frac{2n \cos(2nx) \sin(x) - \sin(2nx) \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

e possiamo osservare che

$$\begin{aligned} S''_{2n-1}(q)\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) &= \frac{2n \cos(2j\pi - \pi) \sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) - \sin(2j\pi - \pi) \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)} \\ &= \frac{-2n \sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)} < 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

invece

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{j}{n}\pi\right) > 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n-1$$

Prima di trarre una conclusione, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ analizziamo qualche proprietà della funzione S_{2n-1}

1. $S_{2n-1}(q)(x) = S_{2n}(q)(x)$
2. $S_{2n-1}(q)(-x) = -S_{2n-1}(q)(x) \Rightarrow$ sono funzioni dispari
3. $S_{2n-1}(q)(\pi - x) = S_{2n-1}(q)(x)$

Da qui possiamo osservare che i punti $-x_k \in [-\pi, 0]$ sono:

- di massimo relativo se $k = 1, 3, \dots, (2n-1)$
- di minimo relativo se $k = 2, 4, \dots, 2(n-1)$

Quindi, dopo tutte queste considerazioni, possiamo studiare come si comporta la nostra serie $S_{2n-1}(q)(x)$

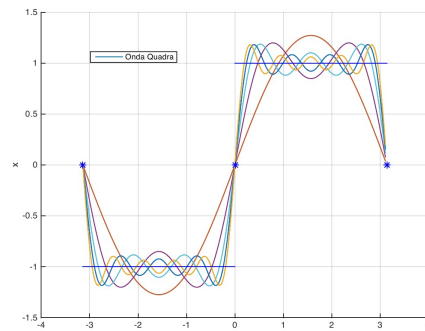


Figura 2.2: Effetto Gibbs per $n = 1, \dots, 8$

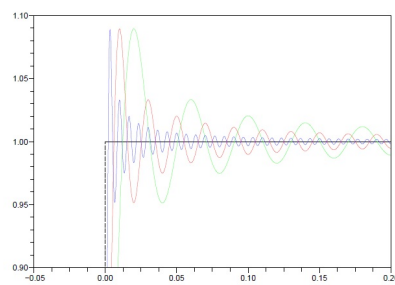


Figura 2.3: Effetto Gibbs, un particolare per $n = 50, 100, 300$

2.2 L'effetto Gibbs.

Questo strano comportamento in figura 2.2 e in figura 2.3 viene definito come effetto Gibbs, un fenomeno che si presenta nei punti di discontinuità di q ; in questi punti si ha solamente una convergenza puntuale e non uniforme; infatti ci sono intervalli in cui si verifica la seguente disuguaglianza: $|S_{2n-1}(q)(t) - q(t)| \geq c$; la convergenza puntuale ce la garantisce il fatto che la lunghezza di questi intervalli per un n abbastanza grande comincia a tendere a 0.

Ora il primo punto di massimo relativo che si incontra a destra dell'origine ha dunque ascissa e ordinata rispettivamente $x_n = \frac{\pi}{2n}$ e $y_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt$.

Calcoliamo il limite di y_n per $n \rightarrow +\infty$. Possiamo, quindi, scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(2nt) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \right) \end{aligned}$$

Ma

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(2nt) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt \leq \frac{c}{2n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

infatti la funzione $\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ è limitata vicino a zero, infatti il suo sviluppo di Taylor è

$$\frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)} = \frac{-t^3 + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0$$

Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \approx 1.178979744 > 1$$

Notiamo che questo valore è strettamente maggiore di 1. Analogamente per il minimo questo valore sarà < -1 .

Possiamo dire, quindi, che in prossimità di un punto di discontinuità i polinomi di Fourier presentano delle "sovra-oscillazioni", ovvero che la differenza tra il massimo e il minimo di tali polinomi in un intorno del punto di discontinuità si mantiene maggiore della funzione in tale punto; questo fenomeno di sovra-oscillazione al crescere di n non tende a scomparire; calcoliamo quanto può essere questo errore che si commette approssimando la funzione coi polinomi di Fourier.

Nel caso dell'onda quadra abbiamo nell'origine un salto $\Delta q(0) = 2$, dove in generale data una funzione f a valori reali e $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\Delta f(a) = f(a^+) - f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Quindi nel caso dell'onda quadra vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{2n-1}(q)(x_n) - S_{2n-1}(q)(x_k)| = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \approx 2.358 \quad , \quad \text{con } x_k = \frac{-\pi}{2n}$$

Con questa approssimazione del salto possiamo dire che quest'ultimo viene aumentato di un fattore $\frac{2}{\pi}G$, indicando con $G = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ la costante di Wilbraham-Gibbs.

Questo risultato compare, oltre che nel caso dell'onda quadra, anche nel caso di funzioni regolari a tratti che hanno punti di discontinuità di prima specie.

Adesso generalizziamo un caso più generale, ovvero il caso di una funzione periodica, regolare a tratti, nell'intorno di un punto con un salto. Ci sarà utile un risultato riguardante, in generale, le successioni *uniformemente convergenti* di funzioni continue.

Teorema 2.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica, che presenta nel punto x_0 una discontinuità di prima specie, con salto $\Delta f(x_0)$ definito da $\Delta f(x_0) := f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Posto $x_n := \frac{L}{2n}$, si ha:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f)(x_0 \pm x_n) = f^*(x_0) \pm \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} G$$

Inoltre si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n-1}(f)(x_0 + x_n) - S_{2n-1}(f)(x_0 - x_n)) = \Delta f(x_0) \frac{2}{\pi} G$$

Prima di dimostrare questo teorema introduciamo un lemma che ci sarà utile alla dimostrazione:

Lemma 2.2.2. *Sia (g_n) una successione di funzioni continue in $[a, b]$ che in tale intervallo converge uniformemente ad una funzione g (che quindi risulta continua). Sia c_n una successione $\subset [a, b]$ che tende a c . Allora la successione $(g_n(c_n))$ è convergente, e vale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(c_n) = g(c)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ ad arbitrio, per l'uniforme convergenza di (g_n) a g ($g_n \rightrightarrows g$) vale

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

In particolare

$$|g_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Dato che $c_n \rightarrow c$ e g è continua, $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - c| < \delta$ allora vale che $|g(x) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$

Poichè $c_n \rightarrow c$, si ha definitivamente che $|c_n - c| < \delta$, e dunque risulterà

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

□

Dimostrazione. Ridefinendo il valore di $f(x_0)$ non è limitativo supporre che f sia continua in x_0 da destra, ovvero che vale $f(x_0) = f^*(x_0)$.

Poniamo ora

$$p(x) = q\left(\frac{x - x_0}{L}\pi\right)$$

e definiamo

$$\phi(x) = f(x) - f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2}p(x)$$

Si noti intanto che φ è una funzione regolare a tratti, $2L$ - periodica e *continua* in $x = x_0$; infatti

$$\phi(x_0) = f(x_0) - f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2}p(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2}p(x) = -\frac{\Delta f(x_0)}{2} + \frac{\Delta f(x_0)}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2}p(x) = \frac{\Delta f(x_0)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2} = 0$$

Fissato un intervallo $I = [x_0 - l, x_0 + l]$ che non contiene altre discontinuità (oltre x_0) di f , ne risulta che ϕ è continua in $[x_0 - l, x_0 + l]$; quindi si ha che

$$S_n(\phi) \Rightarrow \phi \quad \text{uniformemente in } [x_0 - l, x_0 + l]$$

Inoltre si ha

$$S_{2n-1}(f)(x_0 \pm x_n) = S_{2n-1}(\phi)(x_0 \pm x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2}S_{2n-1}(q)\left(\frac{\pm x_n}{L}\pi\right)$$

per il lemma 2.2.2 e ricordando i risultati visti per $S_{2n-1}(q)$ vicino all'origine, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f)(x_0 \pm x_n) &= \phi(x_0) + f^*(x_0) \pm \frac{\Delta f(x_0)}{2} \frac{2}{\pi} G \\ &= f^*(x_0) \pm \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} G \end{aligned}$$

Come possiamo notare, abbiamo dimostrato la prima uguaglianza del teorema. Da qui ne segue immediatamente che

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n-1}(f)(x_0 + x_n) - S_{2n-1}(f)(x_0 - x_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} G - f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} G \right) \\ &= \Delta f(x_0) \frac{2}{\pi} G \end{aligned}$$

□

2.3 L'onda semitriangolare

L'onda semitriangolare è un'altro esempio in cui si verifica l'effetto Gibbs; sia $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n \\ x - 2n & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases}$$

Ora calcoliamo le costanti di Fourier di t :

- $a_0 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$
- $a_n = \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin(n\pi x)]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) \, dx = \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi x)]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$
- $b_n = \int_0^1 x \sin(n\pi x) \, dx = -\frac{1}{n\pi} [x \cos(n\pi x)]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) \, dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$

Quindi la serie di Fourier di t è data da:

$$S_n(t)(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi x)}{n}$$

Notiamo la presenza di discontinuità di prima specie

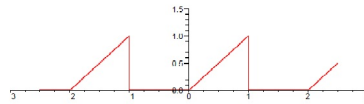
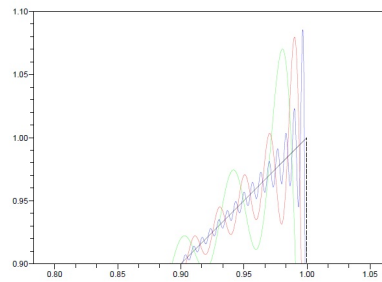


Figura 2.4: Onda semitriangolare

Figura 2.5: Onda semitriangolare, un particolare per $n = 50, 100, 300$

Capitolo 3

Le somme di Fejér

3.1 La convergenza secondo Cesàro

Definizione 3.1. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$; sia poi $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Diamo una nuova nozione di convergenza. Sia $\sigma_n := \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}$ media aritmetica delle S_n . Ora diciamo che la serie converge secondo Cesàro se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{se} \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = s \in \mathbb{R}$$

Esempio

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$ secondo Cesàro.

Più in generale studiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}, \quad z \neq 1, |z| \leq 1$$

Ora

$$S_n = \sum_{k=1}^n z^{k-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 - z^k}{1 - z} \right) = \frac{1}{n(1 - z)} \sum_{k=1}^n (1 - z^k) \\ &= \frac{1}{n(1 - z)} \left(n - z \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right) = \frac{1}{n(1 - z)} \left(- \frac{z(1 - z)^n}{1 - z} \right) \\ &= \frac{1}{1 - z} \end{aligned}$$

Per $z = -1$ viene effettivamente $\frac{1}{2}$.

Proposizione 3.1.1. *Se la serie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad $s \in \mathbb{R}$, allora converge ad s anche secondo Cesàro.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \quad \text{secondo Cesàro}$$

Dimostrazione.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \longrightarrow s, \quad n \rightarrow +\infty$$

Poniamo $t_n = S_n - s \longrightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$
cioè $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|t_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$. Ora

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k - s \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^n (S_k - s)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - s| \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\epsilon} |S_k - s| + \sum_{k=n_\epsilon+1}^n |S_k - s| \right) \\ &\leq \frac{1}{n} (n_\epsilon M + (n - n_\epsilon) \epsilon) \\ &\leq \frac{n_\epsilon}{n} M + \epsilon \longrightarrow \epsilon, \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (\text{posto } M = \max |S_k - s|) \end{aligned}$$

□

3.2 Somme e teorema di Fejér

Definizione 3.2. Sia f 2π -periodica, $f \in L((-\pi, \pi))$; noi sappiamo che

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Definiamo il polinomio di Fejér di grado n di f

$$\sigma_n(f)(t) := \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(t)}{n}$$

Diciamo che f è sviluppabile in serie di Fejér nel punto $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t) = f(t)$$

Teorema 3.2.1 (*Teorema di Fejér*). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, allora:

- $se f \in C((-\pi, \pi)) \Rightarrow \sigma_n(f) \rightrightarrows f$ per $n \rightarrow +\infty$
- $se f \in L((-\pi, \pi)) \Rightarrow \sigma_n(f)(t) \rightarrow f^*(t)$ per $n \rightarrow +\infty$

Dimostrazione.

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{2 \sin(\frac{s}{2})} ds$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

dove $F_n(s)$ viene definito come il nucleo di Fejér. Prima di continuare con la dimostrazione, ci calcoliamo il nucleo di Fejér ed osserviamo qualche sua caratteristica:

Nucleo di Fejér

$$\begin{aligned} \forall s \in (0, \pi), \quad F_n(s) &= \frac{1}{\sin(\frac{s}{2})} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})s) \\ &= \frac{1}{n \sin^2(\frac{s}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{s}{2}) \sin((k + \frac{1}{2})s) \\ &= \frac{1}{n \sin^2(\frac{s}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(ks) - \cos((k+1)s)}{2} \\ &= \frac{1}{n \sin^2(\frac{s}{2})} \left(\frac{1 - \cos(ns)}{2} \right) \\ &= \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{n \sin(\frac{s}{2})} \end{aligned}$$

Ora elenchiamo qualche proprietà del nucleo di Fejér:

- $\int_0^\pi F_n(s) ds = \pi$
- Il nucleo di Fejér è pari
- Il nucleo di Fejér è non negativo
- $\forall \delta > 0$ fissato, $F_n(f)(t) \rightarrow 0$ per $\delta \leq |t| \leq \pi$

Dimostrazione.

$$0 \leq F_n(f)(t) \leq \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{n \sin^2(\frac{s}{2})} \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2}$$

Ho utilizzato il fatto che per $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\sin(y) \geq \frac{2}{\pi}y$.

Possiamo osservare che tra i nuclei di Fejér e di Dirichelet ci sono sia analogie che differenze. Per esempio le ultime due caratteristiche del nucleo di Fejér sottolineano che le somme σ_n e S_n avranno un comportamento differente garantendo la validità del teorema di Fejér. \square

Continuiamo ora con la dimostrazione del teorema di Fejér.

Mostriamo che il nucleo di Fejér è unitario; sia $f \equiv 1$, allora

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds$$

$$S_n(1) = 1 \Rightarrow \sigma_n(f) = 1$$

$$\sigma_n(f)(t) - f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds$$

In questa situazione abbiamo il nucleo positivo. Partiamo supponendo solo $f \in L((-\pi, \pi))$

Noi abbiamo che

$$\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0^+$$

cioè $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, t)$ tale che: $\left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| < \epsilon \quad \forall s \in]0, \delta[$

Ora chiamo $g_t(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)$

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta |g_t(s)| F_n(s) ds + \int_\delta^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds \right) \end{aligned}$$

Ora:

- $\int_0^\delta |g_t(s)| F_n(s) ds \leq \epsilon \int_0^\delta F_n(s) ds \leq \epsilon \int_0^\pi F_n(s) ds = \epsilon \pi$

- $\int_0^\pi |g_t(s)| F_n(s) \, ds \leq \frac{1}{n \sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_0^\pi |g_t(s)| \, ds \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$, poichè $\int_0^\pi |g_t(s)| \, ds \in \mathbb{R}$ dato che $g_t(s) \in L((0, \pi))$

Quindi

$$|\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n(f)(t) \rightarrow f^*(t)$$

Ora manca solo da dimostrare la prima parte.

Se $f \in C((-\pi, \pi))$, allora f è uniformemente continua. Posto $\delta = \delta(\epsilon)$ si ripete la prova e

$$G(t) = \int_0^\pi |g_t(s)| \, ds \leq \int_0^\pi \max_{[-\pi, \pi]} |f| \, ds = \pi \max_{[-\pi, \pi]} |f|$$

Abbiamo eliminato la dipendenza da t e quindi abbiamo la convergenza uniforme cercata. \square

Teorema 3.2.2 (Teorema di Weierstrass). Sia $f \in C([a, b])$, allora vale che $\forall \epsilon > 0 \exists p \in \mathbb{P}_n$ con n opportuno tale che

$$\|f - p\| < \epsilon \quad \text{con} \quad \|f\| = \max_{[a, b]} |f|$$

Dimostrazione. Definiamo

$$F(t) = \begin{cases} f(a + t(\frac{b-a}{\pi})) & \text{se } t \in [0, \pi[\\ f(a + (2\pi - t)(\frac{b-a}{\pi})) & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Così sono in $[0, 2\pi]$ e prolungo F ad \mathbb{R} per periodicità. Posso quindi usare qualche risultato visto in precedenza.

$F \in C([0, 2\pi])$ e 2π -periodica per definizione ($\sigma_n(F)$ polinomio di Fejér di F)

$$\sigma_n(F) \rightrightarrows F, \quad n \rightarrow +\infty$$

cioè

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \|\sigma_n(F) - F\| = \max_{\mathbb{R}} |\sigma_n(F)(t) - F(t)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

cioè

$$\exists \bar{n}_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \bar{n}_\epsilon \geq n_\epsilon : \|\sigma_{\bar{n}_\epsilon}(F) - F\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Inoltre $\sigma_{\bar{n}_\epsilon}$, in quanto polinomio trigonometrico, è analitica, per cui $\exists T_m(\sigma_{\bar{n}_\epsilon})$ (polinomio di Taylor di grado m di $\sigma_{\bar{n}_\epsilon}$) tale che

$$\|\sigma_{\bar{n}_\epsilon} - T_m(\sigma_{\bar{n}_\epsilon})\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi

$$\|F - T_m\| \leq \|F - \sigma_{\bar{n}_\epsilon}\| + \|\sigma_{\bar{n}_\epsilon} - T_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Posto $f(x) = F(\frac{\pi}{b-a}(x-a))$ allora

$$\|f(x) - T_m(\frac{\pi}{b-a}(x-a))\| < \epsilon$$

□

3.3 Eliminazione dell'effetto Gibbs.

Ora andiamo ad osservare come le somme di Fejér possano eliminare l'effetto Gibbs.

Corollario 3.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Se esistono due costanti reali A e B tali che $A \leq f(t) \leq B$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$, allora*

$$A \leq \sigma_n(f)(t) \leq B \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione. Da quanto detto precedentemente sappiamo che

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

Per ipotesi sappiamo che $A \leq f(t) \leq B$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$. Allora vale che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi A F_n(s) ds &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2A}{2} F_n(s) ds \leq \sigma_n(f)(t) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2B}{2} F_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B F_n(s) ds \end{aligned}$$

Per il teorema di Fejér la tesi è verificata. □

Ciò implica un'altra notevole caratteristica delle somme di Fejér, ovvero quella di non presentare l'effetto Gibbs.

Osservazione 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e regolare a tratti. Sia x_0 un punto di discontinuità di prima specie di f con salto $|\Delta f(x_0)|$. Considero poi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a coefficienti reali tale che $x_n \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora il fenomeno di Gibbs non si presenta e vale

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta f(x_0)|$$

Dimostrazione. Per dimostrare la seguente osservazione utilizzo il teorema 2.2.1 considerando le somme di Fejér al posto di quelle di Fourier. In questo modo otteniamo

$$\sigma_n(f)(x_0 \pm x_n) = \sigma_n(\phi)(x_0 \pm x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \sigma_n(q)\left(\frac{\pm x_n}{L} \pi\right)$$

Per il corollario precedente vale la seguente condizione

$$-1 \leq q(t) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sigma(q)(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

allora

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\phi)(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - x_0}{2} \pi\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - x_0}{2} \pi\right) \\ &\leq \phi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \\ &= f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - x_0}{2} \pi\right) \\ &\geq \phi(x_0) + f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \\ &= f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Quindi da queste due disuguaglianze si avrà

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta f(x_0)|$$

□

Grafici e confronto tra le serie di Fourier e le somme di Fejér nei punti di discontinuità. Come possiamo notare con le somme di Fejér nei punti di discontinuità di prima specie non si presentano le sovra-oscillazioni che si verificano con le serie di Fourier dovute all'effetto Gibbs. Ora mettiamo a confronto i primi n polinomi di Fourier e le prime n somme di Fejér nel caso dell'onda quadra e dell'onda semitriangolare al variare di n . Nonostante ciò, di solito, per rappresentare una funzione, si preferisce utilizzare il suo polinomio di Fourier, dato che come polinomio trigonometrico è quello che approssima meglio la funzione in norma quadratica.

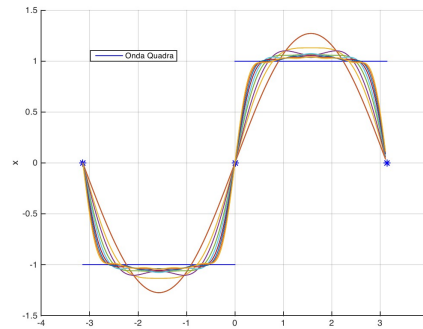


Figura 3.1: Onda quadra con le somme di Fejér per $n = 1, \dots, 10$

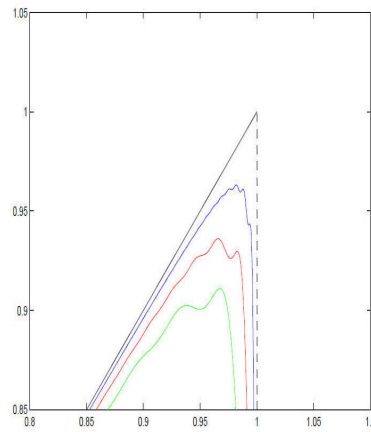
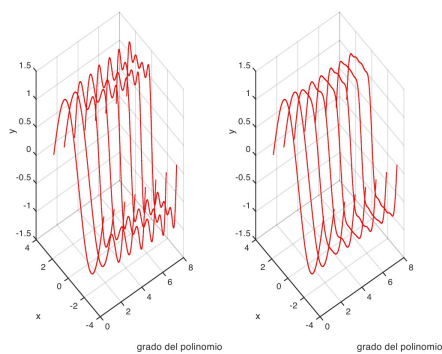
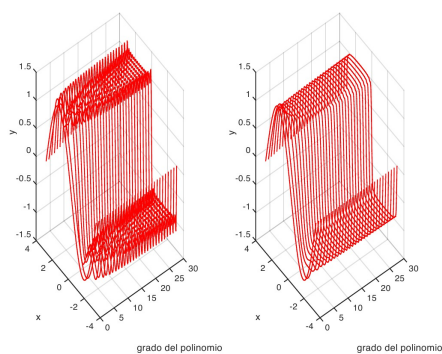
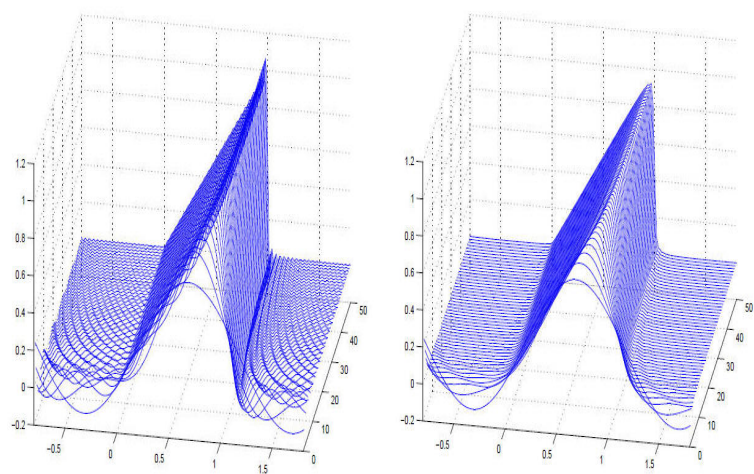


Figura 3.2: Onda semitriangolare per $n = 50, 100, 300$

Figura 3.3: Confronto onda quadra per $n = 8$ Figura 3.4: Confronto onda quadra per $n = 30$



(a) Serie di Fourier

(b) Somme di Fejér

Figura 3.5: Confronto onda semitriangolare

Onda quadra

```

function [y]= q(x,n)
y =zeros(1,length(x));
for j =1:n
if mod(j,2)==1
y = y +(4/π)*sin(j*x)/(j);
end
end
end

```

Onda semitriangolare

```

function [y]= t(x,n)
y=zeros(1,length(x));
for j =1:n
if mod(j,2)==1
y = y + (1/4 - 2/(π)2 -cos(jπx)/j - 1/π (-1)j sin(jπx)/j);
else
y =y -(1/4 - 2/(π)2 -cos(jπx)/j - 1/π (-1)j sin(jπx)/j);
end
end
end

```

Grafici 3d

```

clc
clear
close all
n = input ('scegli quale n considerare');
scelta = menu ('scegli','onda quadra','onda semitriangolare');
cont =150;
h=2*pi/cont;
for j=1:cont
ascisse(j)= -pi+(j-1)*h ;
end
for i=j:n
X(:,j)= ascisse ;
z(:,j)= j*ones(1,cont);
end
if scelta ==1;

```

```
for j=1:n
ygibbs (:,j)= q(ascisse,j);
end
else
for j=1:n
ygibbs (:,j)= t(ascisse,j);
end
end
k1=ygibbs;
k2=ygibbs;
for j=2:n
for i=1:j-1
k1(:,j)=k1(:,j)+ ygibbs (:,i);
end
k1(:,j)=k1(:,j)./j ;
end
figure (1)
subplot (1,2,1)
plot3 (z,X, ygibbs,'r','LineWidth',1);
xlabel ('grado del polinomio');
ylabel ('x');
zlabel ('y');
grid on ;
subplot (1,2,2)
plot3 (z,X,k1,'b','LineWidth',1);
xlabel ('grado del polinomio');
ylabel ('x');
zlabel ('y');
grid on ;
```

Bibliografia

- [1] Barozzi Giulio Cesare, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli, Bologna, 2004.
- [2] Lanconelli Ermanno, *Lezioni di analisi matematica 2*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
- [3] Guidi Chiara, Tesi di laurea triennale in Complementi di Analisi, *Il fenomeno di Gibbs*, I sessione a.a. 2012/2013
- [4] Pozzi Gianni, *Cenni sulle serie di Fourier*, <http://wwwdimat.unipv.it/giulio-linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007
- [5] *Appunti personali presi durante il corso di Complementi di Analisi Matematica*, tenuto dalla Prof.ssa Annamaria Montanari, A.A. 2013-2014, Università di Bologna.

Ringraziamenti

Ho deciso di dedicare la tesi a tutti coloro che mi hanno sopportato e sostenuto in questi tre magnifici anni; ringrazio la mia famiglia, che anche nei momenti più difficili ha sempre creduto in me e mi ha dato la forza per continuare. Ringrazio i miei amici e soprattutto i miei colleghi, i quali ogni volta che mi sono trovato in difficoltà, mi hanno sempre aiutato senza tirarsi indietro. Sono stati anni difficili ma soprattutto intensi e belli, anche merito dei professori che hanno saputo farci vedere e apprezzare la matematica. Un ultimo ringraziamento alla professoressa Montanari che ha reso possibile la creazione di questa tesi. Ora questo è solo l'inizio, il resto sarà tutto un mistero che voglio scoprire!