

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Astronomia

Ottica geometrica e ondulatoria,  
e applicazioni astrofisiche

elaborato finale

Relatore:  
Prof. Daniele Dallacasa

Candidato:  
Francesco Sinisi

---

Sessione II Invernale  
Anno Accademico 2013/2014



*“Per poter comprendere questa materia al meglio,  
è necessario entrare nell’OTTICA ...”*



# Introduzione

L'*ottica* è rivolta allo studio delle proprietà della luce e della sua propagazione attraverso i mezzi materiali. Le applicazioni tradizionali dell'ottica includono le lenti correttive per la vista e la formazione delle immagini nei telescopi e nei microscopi. Le applicazioni moderne comprendono l'immagazzinamento ed il recupero delle informazioni, come nei riproduttori di compact disc, nei lettori di codici a barre in uso nelle casse dei supermercati, o nella trasmissione di segnali attraverso cavi a fibre ottiche, che possono trasportare una maggior quantità di informazioni dei fili in rame.

Nel primo capitolo si considereranno casi nei quali la luce viaggia in linea retta e incontra ostacoli la cui dimensione è molto maggiore della lunghezza d'onda della luce. Questo è il dominio dell'*ottica geometrica*, che include lo studio delle proprietà degli specchi e delle lenti.

Il passaggio della luce attraverso fessure molto sottili o attorno a barriere molto strette, le cui dimensioni siano confrontabili con la lunghezza d'onda della luce (a conferma della natura ondulatoria della luce) fa parte dell'*ottica fisica* o anche detta *ottica ondulatoria*, di cui si parlerà nel secondo capitolo.

Nel terzo capitolo, infine, verranno trattati due metodi che sono stati adoperati nel passato per misurare la maggior peculiarità che possiede la “particella” principe dell'ottica: la velocità della luce.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Ottica Geometrica</b>	<b>1</b>
1.1 Le leggi dell'ottica geometrica . . . . .	1
1.1.1 Principio di Huygens . . . . .	2
1.1.2 Principio di Fermat . . . . .	4
1.2 Riflessione e rifrazione su superfici scabre . . . . .	5
1.3 Rifrazione atmosferica . . . . .	6
<b>2 Ottica ondulatoria</b>	<b>7</b>
2.1 Interferenza. L'esperienza di Young . . . . .	7
2.2 Diffrazione da singola fenditura . . . . .	8
2.3 Diffrazione da un foro circolare . . . . .	9
<b>3 Misura della velocità della luce</b>	<b>12</b>
3.1 Metodo di Rømer . . . . .	12
3.2 Metodo di Bradley . . . . .	14
<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>



# Capitolo 1

## Ottica Geometrica

### 1.1 Le leggi dell'ottica geometrica

Le leggi che formano la base dell'*ottica geometrica* sono:

- legge della *propagazione rettilinea*;
- legge della *riflessione*;
- legge della *rifrazione*.

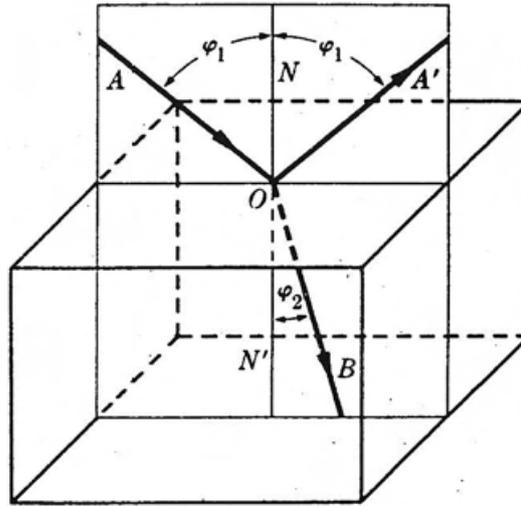
La legge della propagazione rettilinea stabilisce, come il nome stesso dice, che in un *mezzo omogeneo*, la luce segue percorsi rettilinei. Perciò un oggetto opaco  $A$ , posto tra una *sorgente puntiforme* di luce  $S$  ed uno schermo  $\Sigma$ , proietterà un'ombra con i contorni perfettamente definiti: la linea di contorno è l'intersezione dello schermo con la superficie conica tangente alla superficie dell'ostacolo e che ha il vertice sulla sorgente. Una sorgente puntiforme, tuttavia, è solo un'astrazione matematica; effettivamente una sorgente di luce reale ha sempre dimensioni finite, di conseguenza la transizione da una regione totalmente in ombra ad una regione totalmente illuminata non è definita nettamente: tra le due vi è una regione parzialmente in ombra, la regione di *penombra*, che riceve luce solo da una parte della sorgente.

Per formulare le leggi della riflessione e rifrazione, consideriamo un raggio di luce incidente su di una superficie piana di separazione tra due sostanze *omogenee ed isotrope*. Osserviamo, in generale, che il raggio di luce incidente si divide in due raggi: un raggio *riflesso*, che ritorna nel mezzo da cui proveniva il raggio incidente, ed un raggio *rifratto* che penetra nell'altro mezzo (Figura 1.2). Osserviamo che:

1. il raggio incidente, il raggio riflesso e quello rifratto giacciono in un piano perpendicolare alla superficie di separazione tra i due mezzi, chiamato *piano di incidenza*;



**Figura 1.1:** L'ombra di una bicicletta.



**Figura 1.2:** Riflessione e rifrazione di un raggio luminoso sulla superficie di separazione tra due mezzi diversi.

2. il raggio incidente e il raggio riflesso formano angoli uguali con la normale alla superficie di separazione;
3. se  $\varphi_1$  è l'angolo tra il raggio incidente e la normale (angolo di incidenza) e  $\varphi_2$  è l'angolo tra la stessa e il raggio rifratto (angolo di rifrazione), il rapporto  $\sin \varphi_1 / \sin \varphi_2$  è indipendente dall'angolo di incidenza  $\varphi_1$  ed è perciò una costante caratteristica dei due mezzi.

L'ultima affermazione, chiamata *legge di Snell*, si formula analiticamente come segue:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2. \quad (1.1)$$

Qui  $n_1$  e  $n_2$  sono costanti adimensionali chiamate *indici di rifrazione* del mezzo 1 e del mezzo 2. L'indice di rifrazione  $n$  di un mezzo è il rapporto tra la velocità della luce  $c$  nel vuoto e la velocità della luce  $v$  in quel mezzo:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Se la sorgente si trova nel mezzo con indice di rifrazione maggiore notiamo che c'è un angolo limite di incidenza ( $\vartheta_l$ ) per il quale il raggio di luce esce tangente alla superficie di separazione; continuando ad aumentare  $\vartheta_l$  non si ha alcun raggio rifratto e ha origine il fenomeno chiamato *riflessione totale*. Dalla (1.1) si ha, ponendo  $\varphi_1 = 90^\circ$ :

$$\vartheta_l = \arcsin \frac{n_1}{n_2} \quad \text{con } n_2 > n_1.$$

La legge della riflessione e della rifrazione può essere ottenuta in vari modi. Di seguito ne verranno presentati due.

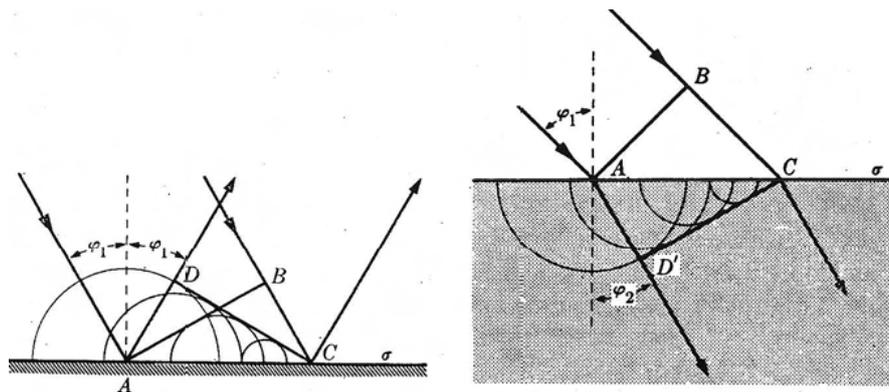
### 1.1.1 Principio di Huygens

Il fisico olandese Christian Huygens sviluppò nel 1678 una semplice teoria, la quale assumeva che la luce fosse un'onda (senza pronunciarsi circa la natura di quest'onda). La

teoria di Huygens è basata su una costruzione geometrica che permette di prevedere dove si troverà ad ogni istante un fronte d'onda del quale si conosce la posizione ad un dato istante. Il principio si può pronunciare così:

*Tutti i punti di un fronte d'onda possono essere considerati come sorgenti puntiformi di onde sferiche secondarie. Dopo un tempo  $t$  la nuova posizione del fronte d'onda sarà la superficie di involuppo di queste onde secondarie.*

Illustriamo ora come le leggi della riflessione e rifrazione possono essere ricavate tramite la costruzione di Huygens. Dapprima ci proponiamo di esaminare l'onda riflessa. Sia  $AB$



**Figura 1.3:** Legge della riflessione e rifrazione dedotte con la costruzione di Huygens.

(Figura 1.3) un fronte d'onda che si propaga verso la superficie riflettente  $\sigma$  e fissiamo il tempo nell'istante in cui si interseca con essa in  $A$ . In questo momento la distanza tra il punto  $C$  e  $\sigma$  è  $\overline{BC}$ ; quando il fronte d'onda raggiunge  $C$ , l'onda che ha avuto origine in  $A$  avrà raggio pari a  $\overline{BC}$ . Le onde aventi origine dai punti intermedi, situati tra  $A$  e  $C$ , avranno raggi proporzionali alla loro distanza da  $C$ . L'involuppo di tutte queste onde secondarie è l'onda riflessa. Osserviamo che i due triangoli  $ABC$  e  $CDA$  sono simili ed avendo il lato  $\overline{AC}$  in comune essi sono anche uguali. Notando che  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{DCA}$  sono, rispettivamente, l'angolo di incidenza e di riflessione e che il raggio incidente e riflesso giacciono in un piano perpendicolare alla superficie riflettente, concludiamo che la legge della riflessione segue dal principio di Huygens.

Per interpretare il fenomeno della rifrazione, consideriamo ancora un'onda piana  $AB$  incidente sulla superficie  $\sigma$  di separazione tra due mezzi, nei quali la luce ha velocità differente (sia  $v_1$  la velocità nel primo mezzo e  $v_2$  la velocità nel secondo), e costruiamo le onde secondarie che si propagano dai punti di  $\sigma$  nel secondo mezzo. Nel momento in cui il fronte d'onda raggiunge la superficie rifrangente in  $A$  è ancora a distanza  $\overline{BC}$  dal punto  $C$ ; mentre l'onda incidente copre questa distanza, il punto  $A$  da origine ad onde secondarie il cui raggio  $\overline{AD'}$  sta a  $\overline{BC}$  come  $v_2$  sta a  $v_1$ :

$$\frac{\overline{AD'}}{\overline{BC}} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (1.2)$$

Come prima, le onde secondarie, che hanno origine nei punti intermedi tra  $A$  e  $C$ , hanno raggi proporzionali alla loro distanza da  $C$ . Così l'involuppo delle onde secondarie è la superficie piana  $CD'$  e osserviamo anche che il raggio incidente e rifratto sono complanari

e giacciono in un piano perpendicolare alla superficie rifrangente  $\sigma$ . Notiamo, inoltre, che l'angolo di incidenza  $\varphi_1$  eguaglia l'angolo  $B\hat{A}C$ , e che l'angolo di rifrazione  $\varphi_2$  è pari a  $A\hat{C}D'$ , ovvero:

$$\overline{BC} = \overline{AC} \sin \varphi_1 \quad \overline{AD'} = \overline{AC} \sin \varphi_2. \quad (1.3)$$

Unendo la (1.2) e la (1.3) riotteniamo la legge di Snell.

### 1.1.2 Principio di Fermat

Nel 1650 Pierre Fermat scoprì un importante principio del quale viene riportato l'enunciato:

*Un raggio di luce, propagandosi da un punto fisso ad un altro, segue un percorso tale che il tempo impiegato a percorrerlo, confrontato con quello dei percorsi vicini, è un minimo o è stazionario.*

Segue la dimostrazione della legge della rifrazione (per la riflessione il procedimento è analogo) partendo dal principio appena enunciato. Consideriamo nella figura 1.4 i punti  $A$  e  $B$ , che si trovano in mezzi differenti, e il raggio  $APB$  che li collega.

Il tempo di percorrenza  $t$ , necessario per andare da  $A$  a  $B$ , è dato da

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}$$

e facendo uso della relazione  $n = c/v$  può essere riscritto come

$$t = \frac{n_1 L_1 + n_2 L_2}{c} = \frac{L}{c} \quad (1.4)$$

ove  $L$  rappresenta il *cammino ottico*<sup>1</sup> ( $L = n_1 L_1 + n_2 L_2$ ), il quale non va confuso col *cammino geometrico* che è  $L_1 + L_2$  per il raggio in figura 1.4. Per il principio di Fermat, il tempo  $t$  necessario alla luce per percorrere il tratto  $APB$  dev'essere minimo (o massimo o costante) e ciò richiede che  $x$  sia scelto in modo tale che  $dt/dx = 0$ . La lunghezza del cammino ottico nella figura 1.4 è

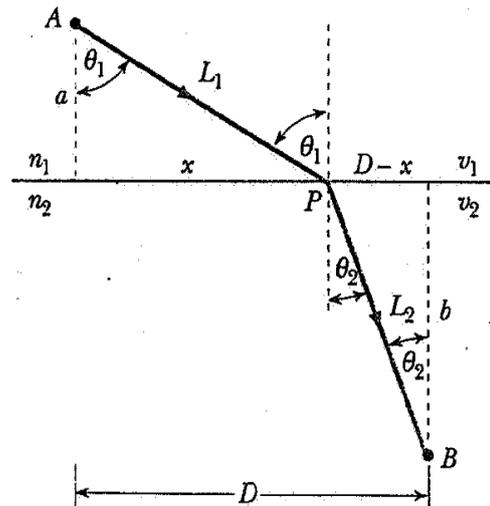
$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (D-x)^2}.$$

Sostituendo il risultato nell'equazione (1.4) e derivando si ottiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \frac{dL}{dx} = \frac{n_1}{2c} (a^2 + x^2)^{-1/2} (2x) + \frac{n_2}{2c} [b^2 + (D-x)^2]^{-1/2} (2)(D-x)(-1) \implies$$

<sup>1</sup>L'espressione matematica del cammino ottico per mezzi non omogenei è

$$L = \int_A^B n ds$$

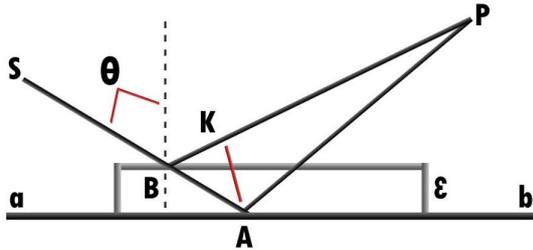


**Figura 1.4:** Rifrazione di un'onda piana in corrispondenza di un'interfaccia piana analizzata facendo uso del principio di Fermat. Un raggio si propaga dal punto  $A$  al punto  $B$  subendo rifrazione in  $P$ .

$$\implies n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{D - x}{\sqrt{b^2 + (D - x)^2}}.$$

Dalla figura 1.4 si vede che i termini che moltiplicano gli indici di rifrazione altri non sono che i seni degli angoli del raggio incidente e rifratto rispetto alla normale: la legge di Snell (eq. (1.1)).

## 1.2 Riflessione e rifrazione su superfici scabre



**Figura 1.5:** Superficie con una sovranelevazione di altezza  $\epsilon$ .

Secondo il principio di Huygens, l'onda riflessa da una superficie levigata deve considerarsi come la risultante di infinite onde elementari, aventi il centro sulla superficie stessa. Quando la superficie presenta delle asperità, queste sorgenti fittizie non si trovano più nel medesimo piano, né conservano quelle medesime relazioni di fase che possedevano nel caso della superficie levigata. Le onde elementari quindi daranno, per interferenza, non più un'onda piana (se tale era l'onda incidente), ma un'onda più o meno irregolare; ossia, invece

della riflessione, si avrà la *diffusione*. Vogliamo ora renderci conto dell'ordine di grandezza che debbono avere le asperità della superficie per impedire la riflessione regolare della luce.

Sia  $S$  (Figura 1.5) la sorgente luminosa,  $P$  un punto nel quale giunge la luce di  $S$  riflessa dalla superficie  $ab$ . Supponiamo che questa presenti una sovranelevazione di altezza  $\epsilon$ . Le onde secondarie che partono dai punti di questa sovranelevazione giungono in  $P$  in anticipo di fase rispetto a quelle onde che, se la superficie fosse stata perfettamente liscia, sarebbero partite dai corrispondenti punti della stessa. È chiaro che l'effetto della irregolarità della superficie sarà insensibile quando questa differenza di fase è abbastanza piccola, ossia quando la differenza fra i due cammini ottici  $SAP$  e  $SBP$  è piccola rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione che si considera. Si trova in pratica che la riflessione regolare sussiste finché tale differenza di cammino non supera  $\frac{\lambda}{4}$ .

Per l'incidenza normale, la differenza di cammino  $\Delta$  tra i due raggi  $SAP$  e  $SBP$  è evidentemente uguale a  $2\epsilon$ . Per incidenza obliqua tale differenza è minore. Infatti, chiamando  $\vartheta$  l'angolo di incidenza, si ha

$$\overline{SB} = \overline{SA} - \frac{\epsilon}{\cos \vartheta}.$$

Indicando poi con  $K$  il piede della perpendicolare condotta da  $A$  su  $\overline{PB}$ , il triangolo  $APK$  risulta quasi isoscele in modo tale da permetterci di scrivere

$$\overline{BP} = \overline{AP} + \overline{BK} = \overline{AP} + \overline{AB} \cos(\pi - 2\vartheta) = \overline{AP} - \frac{\epsilon}{\cos \vartheta} \cos 2\vartheta$$

$$\Delta = (\overline{SA} + \overline{AP}) - (\overline{SB} + \overline{BP}) = \frac{\epsilon}{\cos \vartheta} (\cos 2\vartheta + 1)$$

ossia essendo  $\cos 2\vartheta + 1 = 2 \cos^2 \vartheta$

$$\Delta = 2\epsilon \cos \vartheta.$$

Poiché la differenza di cammino diminuisce al crescere dell'angolo di incidenza, la riflessione risulterà tanto più regolare quanto più l'incidenza è obliqua.

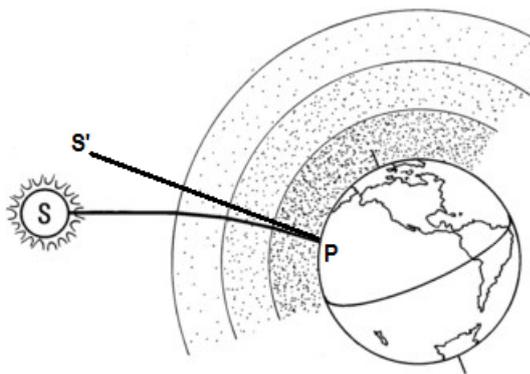
Nel caso della rifrazione, un'asperità di altezza  $\epsilon$  varia il cammino ottico di un raggio, che attraversi normalmente la superficie di separazione dei due mezzi, di una quantità

$$\Delta = |n - n'| \epsilon$$

dove  $n$  ed  $n'$  sono gli indici di rifrazione dei due mezzi considerati. Tale differenza, contrariamente a quanto avveniva nel caso della riflessione, aumenta all'aumentare dell'angolo di incidenza.

Ipotizziamo, per incidenza normale, che il primo mezzo sia aria ( $n = 1$ ) e il secondo vetro ( $n' = 1.5$ ) e otteniamo  $\Delta = 0.5\epsilon$  per la riflessione e  $\Delta = 2\epsilon$  per la rifrazione. Supposto  $\lambda = 6000\text{\AA}$  (luce gialla) si ha  $\frac{\lambda}{4} = 1500\text{\AA}$  e quindi  $\epsilon$  non deve superare  $3000\text{\AA}$  per la rifrazione e  $750\text{\AA}$  per la riflessione.

### 1.3 Rifrazione atmosferica



**Figura 1.6:** Rifrazione atmosferica sulla sorgente  $S$ .

La densità dell'aria, come è noto, va diminuendo con l'altezza e con essa il suo indice di rifrazione. I raggi luminosi che ci provengono dagli astri attraversano dunque, nell'ultima parte del loro cammino, un mezzo otticamente non omogeneo, il che fa sì, che tali raggi, anziché essere rettilinei, siano curvi, con la concavità rivolta dalla parte delle  $n$  crescenti, cioè verso il basso. Dunque la direzione nella quale noi riceviamo un raggio (cioè la tangente  $PS'$  ad esso nel punto  $P$  di arrivo) non è la direzione nella quale si trova l'astro, ma è più elevata, rispetto a quella vera, di un angolo  $\delta$  (Figura 1.6). Tale effetto prende il nome di *rifrazione atmosferica* (o *astronomica*). La rifrazione astronomica

è naturalmente nulla per un astro che si trovi allo zenit, perché, in tal caso, i raggi attraversano l'aria perpendicolarmente gli strati atmosferici; al contrario, essa è tanto maggiore quanto più l'astro è vicino all'orizzonte (raggiungendo un valore massimo di circa  $36'$ ). Ciò significa che nell'istante in cui l'orlo del sole tocca l'orizzonte, in realtà, esso si trova  $36'$  al di sotto. L'effetto della rifrazione astronomica è perciò quello di ritardare, apparentemente, il tramonto di un astro, e di anticiparne la levata.

Come si comprende, è assai importante per gli astronomi conoscere il valore dell'angolo  $\delta$ , per poter dedurre, dalla posizione apparente dell'astro, la sua posizione vera. Questo angolo è funzione non solo dell'altezza dell'astro sull'orizzonte, ma anche dell'indice di rifrazione dell'aria, il quale dipende dalle condizioni meteorologiche. L'angolo  $\delta$ , però, non dipende dai valori dell'indice di rifrazione lungo tutto il cammino del raggio, ma solo dai valori estremi, e poiché uno degli estremi del raggio è fuori dall'atmosfera (dove  $n = 1$ ),  $\delta$  dipende, in definitiva, solo dal valore di  $n$  nel punto di osservazione  $P$ . Questo valore si può calcolare, dopo aver misurato gli elementi da cui dipende, che sono: temperatura, pressione e umidità dell'aria. Apposite tabelle (dette *tavole di rifrazione*) danno il valore della correzione  $\delta$  in funzione di queste tre variabili, e dell'altezza dell'astro.

# Capitolo 2

## Ottica ondulatoria

### 2.1 Interferenza. L'esperienza di Young

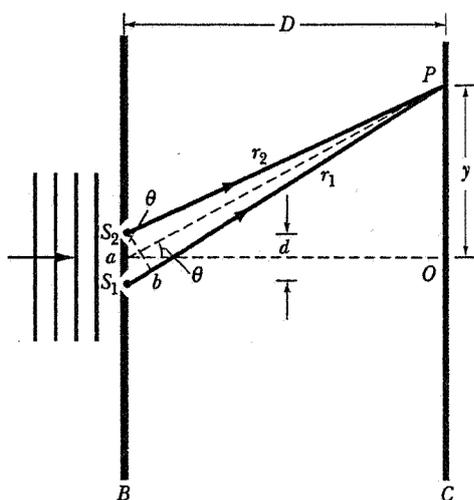


Figura 2.1: Esperienza di Young.

Quando due onde identiche, provenienti da due diverse sorgenti, si sovrappongono in un punto dello spazio, l'intensità dell'onda combinata in quel punto può risultare maggiore o minore dell'intensità di ogni singola onda. Questo effetto è chiamato *interferenza*; essa può essere *costruttiva* o *distruttiva* se, rispettivamente, l'intensità netta risultante è maggiore o minore della singola intensità originaria. Per quanto, in linea di principio, possano interferire quante onde si vogliano, consideriamo qui solo l'interferenza tra due ed assumiamo che entrambe le sorgenti emettano radiazione di una sola lunghezza d'onda. Poniamo anche che la relazione tra le fasi delle due onde non cambi nel tempo. Tali onde si dicono *coerenti*. Quando interferiscono onde coerenti l'intensità dell'onda, combinata in qualsiasi punto dello spazio, non varia nel tempo: questa condizione

è necessaria affinché si manifesti l'interferenza.

Per analizzare le figure d'interferenza, consideriamo le onde provenienti dalle due fenditure che si combinano in un punto arbitrario  $P$  sullo schermo  $C$  di figura 2.1. Il punto  $P$  è situato alle distanze  $r_1$  ed  $r_2$  dalle fenditure  $S_1$  ed  $S_2$  rispettivamente. Si tracci il segmento  $\overline{S_2b}$  in modo che risultino uguali  $\overline{PS_2}$  e  $\overline{Pb}$ . Se  $d$ , il passo tra le fenditure, è molto minore della distanza  $D$ , che divide lo schermo dalle fenditure,  $\overline{S_2b}$  è di conseguenza quasi perpendicolare sia ad  $r_1$  che a  $r_2$ . Ciò significa che l'angolo  $S_1\hat{S}_2b$  è quasi uguale all'angolo  $P\hat{a}o$ . Poiché i cammini ottici dei due raggi sono differenti, in  $P$  essi risulteranno sfasati. La natura dell'interferenza nel punto  $P$  è determinata dal numero di lunghezze d'onda contenute nel tratto  $\overline{S_1b}$ : la differenza tra i cammini dei due raggi.

Affinché in  $P$  si abbia un *massimo* di intensità, i due raggi devono giungere in fase:  $\overline{S_1b}$  deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda, ovvero

$$\overline{S_1b} = d \sin \vartheta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{massimi}). \quad (2.1)$$

Affinché in  $P$  si abbia un *minimo* è necessario che i due raggi differiscano, in fase, di un multiplo dispari di  $\pi$ , ciò equivale a far sì che  $\overline{S_1b}$  contenga un numero semi-intero di

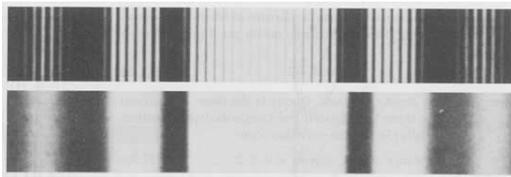
lunghezze d'onda, cioè

$$\overline{S_1 b} = d \sin \vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{minimi}). \quad (2.2)$$

Per una trattazione matematica è più semplice avere a che fare con fronti d'onda piani che però non formano immagini su di uno schermo a distanza  $D$  finita (ciò giustifica l'assunzione  $D \gg d$ ). Per ovviare a tale inconveniente si usa una lente per focalizzare i raggi paralleli emergenti dalla doppia fenditura.

Un esperimento del tipo sopra descritto fu per la prima volta condotto, nel 1801, da Thomas Young. L'esperienza di Young fornì la prima prova determinante sulla natura ondulatoria della luce e inoltre, dato che la distanza fra le frange di interferenza, come si deduce dalle equazioni (2.1) e (2.2), dipende da  $\lambda$ , offrì la prima misura diretta della lunghezza d'onda della luce.

## 2.2 Diffrazione da singola fenditura

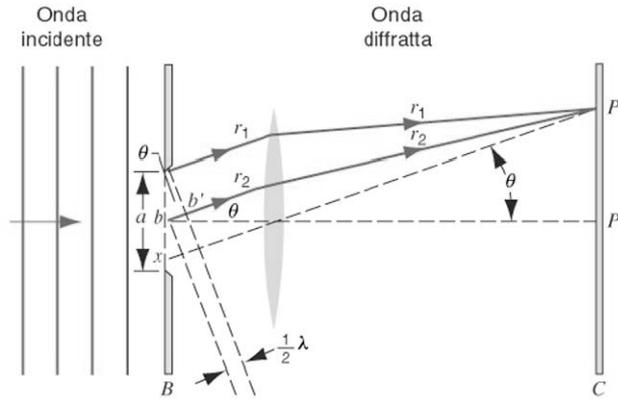


**Figura 2.2:** Frange di interferenza per un sistema a doppia fenditura (sopra). Figura di diffrazione prodotta da una singola fenditura (sotto).

Quando la luce passa attraverso una stretta fenditura (di larghezza confrontabile alla lunghezza d'onda della luce) il fascio di luce non solo risplende ben lontano dai limiti dell'ombra geometrica ma forma una serie di bande alternate, chiare e scure, che assomigliano alle frange di interferenza (Figura 2.2). Tale fenomeno, denominato *diffrazione*, è un'ulteriore conferma della natura ondulatoria della luce. Poiché il calcolo della distribuzione dell'intensità luminosa, dovuta a diffrazione, in generale è molto complesso, considereremo qui la *configurazione di Fraunhofer*,

che fa uso di fronti d'onda piani (più facili da trattare matematicamente) disponendo la sorgente e lo schermo molto distanti dalla fenditura (o utilizzando, appositamente, lenti convergenti). Consideriamo, quindi, la figura 2.3 e studiamo la posizione dei minimi e dei massimi. La figura mostra un'onda piana che investe, con incidenza normale, una stretta fenditura di larghezza  $a$ . I raggi che, paralleli all'asse centrale orizzontale, dalla fenditura vengono focalizzati in  $P_0$  sono certamente in fase e quindi interagiranno costruttivamente formando un massimo in tale punto. Consideriamo un altro punto dello schermo. I raggi luminosi che giungono in  $P_1$  escono dalla fenditura con un angolo  $\vartheta$ . Il raggio  $xP_1$  passa senza deviazioni attraverso il centro della lente e pertanto determina l'angolo  $\vartheta$ . Il raggio  $r_1$  proviene dall'estremità superiore della fenditura e il raggio  $r_2$  dal suo centro. Se  $\vartheta$  è scelto in modo che la distanza  $bb'$  sia uguale a mezza lunghezza d'onda,  $r_1$  ed  $r_2$  saranno in opposizione di fase e interferiranno in modo distruttivo in  $P_1$ . Lo stesso ragionamento si può applicare per un raggio subito sotto a  $r_1$  e per un altro subito sotto a  $r_2$ : ciascun raggio proveniente dalla metà superiore della fenditura sarà annullato da raggio proveniente dalla metà inferiore che disterà  $a/2$  dal primo. In definitiva, il punto  $P_1$ , primo minimo della figura di diffrazione, avrà intensità zero. Formalmente, la condizione che dà luogo al primo minimo si può scrivere

$$\frac{a}{2} \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \implies a \sin \vartheta = \lambda. \quad (2.3)$$



**Figura 2.3:** Formazione del primo minimo nella figura di diffrazione.

L'equazione (2.3) indica che la larghezza del massimo centrale aumenta al restringersi della fenditura; in particolare, se  $a = \lambda$  il primo minimo si ha per  $\vartheta = 90^\circ$ , cioè il massimo centrale occupa l'intero emisfero di fronte alla fenditura.

Applicando il procedimento adoperato per trovare il primo minimo ( $P_1$ ) al secondo e così via otteniamo la formula generale che dà i minimi di diffrazione sullo schermo  $C$

$$a \sin \vartheta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{minimi}).$$

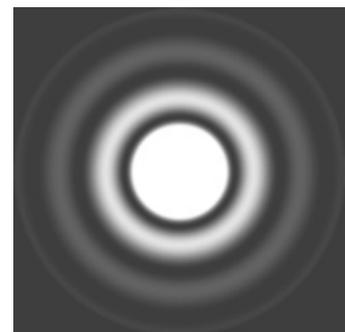
Esiste un massimo che si trova approssimativamente al centro della coppia di minimi consecutivi. L'intensità di questi massimi varia in funzione dell'angolo  $\vartheta$  secondo l'equazione

$$I_\vartheta = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{a\pi \sin \vartheta}{\lambda}$$

dove  $I_{max}$  rappresenta l'intensità massima che si ha per  $\vartheta = 90^\circ$ , ovvero nel punto  $P_0$ .

## 2.3 Diffrazione da un foro circolare

Una lente, nel focalizzare un'immagine, consente il passaggio solo alla luce che incide entro il suo perimetro circolare. Da questo punto di vista la lente si comporta come un'apertura circolare su di uno schermo opaco. Una tale apertura produce figure di diffrazione analoghe a quelle della singola fenditura. Gli effetti di diffrazione costituiscono un limite alla capacità dei telescopi, e di altri strumenti ottici, di rendere immagini nitide. L'immagine prodotta da una lente può essere distorta da altri fenomeni, quali l'aberrazione cromatica e sferica. Si possono ridurre significativamente e anche eliminare questi effetti, dando forme opportune alle superfici delle lenti oppure introducendo elementi correttivi nel sistema ottico. Cionondimeno, non esiste progetto, per quanto raffinato, che sia in grado di eliminare gli effetti della diffrazione: essa impone un limite fondamentale alla precisione degli strumenti. La figura 2.4 è l'immagine di una sorgente di luce puntiforme e distante formata su una pellicola fotografica posta nel piano focale della lente convergente di un telescopio. Essa non è esattamente puntiforme, ma forma un disco circolare (*disco di Airy*) circondato da



**Figura 2.4:** Figura di diffrazione prodotta da un'apertura circolare. Il massimo centrale è chiamato disco di Airy.

alcuni anelli secondari progressivamente meno intensi. Si può calcolare che la percentuale della potenza totale contenuta nel disco di Airy è pari a  $\approx 84\%$ .

Analizziamo il problema matematicamente. L'intensità, nel modello della diffrazione di Fraunhofer per un'apertura circolare, è data da:

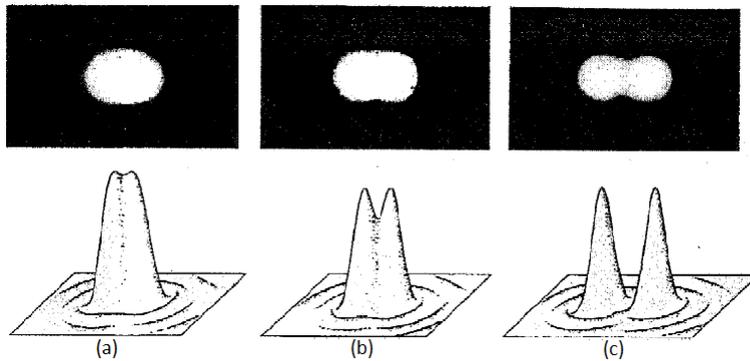
$$I(\vartheta) = I_0 \left( \frac{2J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right)^2$$

ove  $J_1$  è una *funzione di Bessel* di ordine primo<sup>1</sup>,  $a$  è il raggio dell'apertura,  $I_0$  è l'intensità al centro, e  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda. Qui  $\vartheta$  è l'angolo tra l'asse dell'apertura circolare e la linea tra il centro dell'apertura e il punto di osservazione. Gli zeri di  $J_1(x)$  sono in  $x = ka \sin \vartheta \approx 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \dots$ , quindi il primo anello scuro, nel modello della diffrazione, è individuato da un angolo, rispetto all'asse centrale, pari a

$$\sin \vartheta = \frac{3.83}{ka} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.4)$$

dove  $d$  rappresenta il diametro dell'apertura.

Il fatto che le immagini delle lenti siano figure di diffrazione è importante quando vogliamo distinguere due oggetti puntiformi lontani la cui distanza angolare è piccola. In figura 2.5 sono riportate le immagini di diffrazione, nonché le loro distribuzioni di intensità, di due oggetti puntiformi distanti (per esempio stelle) con piccola separazione angolare e con intensità centrali circa uguali. Nella figura 2.5a gli oggetti non sono risolti, cioè non



**Figura 2.5:** Immagini di sorgenti puntiformi lontane (stelle) per mezzo di lenti convergenti.

sono distinguibili come due oggetti puntiformi; nella figura 2.5b si distinguono a fatica, mentre nella figura 2.5c sono pienamente risolti. Nella figura 2.5b la distanza angolare delle due sorgenti puntiformi è tale che il massimo di diffrazione di una coincide col primo minimo dell'altra. Questa situazione corrisponde al *criterio di Rayleigh* per risolvere le immagini. Per l'equazione (2.4), due oggetti che siano appena separabili, in base a tale criterio, devono avere una distanza angolare  $\vartheta_R$  data da

$$\vartheta_R = \sin^{-1} \left( \frac{1.22\lambda}{d} \right) \cong 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Funzione di Bessel del primo ordine

$$J_1(x) = \left( \frac{x}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}}{n! \Gamma(n+2)}$$

con  $\vartheta_R$  espresso in radianti.

Quindi, due oggetti possono essere risolti se la loro distanza angolare  $\vartheta$  è maggiore di  $\vartheta_R$  ( $\vartheta > \vartheta_R$ ); in caso contrario non è possibile vederli separati.

Quando vogliamo usare una lente per distinguere oggetti di limitata distanza angolare, sarebbe desiderabile avere il disco centrale della figura di diffrazione più piccolo possibile. Ciò si può ottenere (equazione (2.5)) aumentando il diametro della lente o diminuendo la lunghezza d'onda. Una buona ragione per preferire un telescopio di largo diametro è la possibilità di ottenere immagini più nitide in modo da poter esaminare gli oggetti celesti in maggior dettaglio. Le immagini sono anche più luminose, non solo perché essa viene concentrata in un disco di diffrazione più piccolo, ma anche perché le lenti più grandi raccolgono più luce; in modo tale da poter studiare anche corpi celesti di magnitudine maggiore come, ad esempio, galassie lontane. Nei microscopi, invece, per ridurre gli effetti di diffrazione, si utilizza spesso luce ultravioletta, che, per la sua piccola lunghezza d'onda, permette di esaminare maggiori dettagli di quanto non sarebbe possibile impiegando luce visibile.

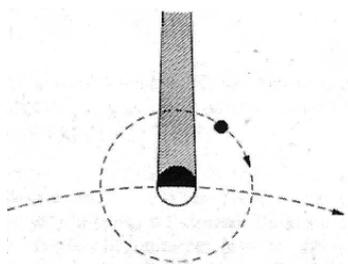
# Capitolo 3

## Misura della velocità della luce

La velocità della luce nello spazio vuoto,  $c$ , è una delle più importanti costanti naturali. Essa descrive una proprietà fondamentale dello spazio vuoto e, secondo la teoria della relatività, rappresenta un limite superiore per la velocità di qualsiasi oggetto materiale o di qualsiasi segnale che si possa avere in natura. Non c'è dunque da meravigliarsi se sono stati compiuti grandi sforzi per eseguire misure sempre più accurate del suo valore. Il problema della velocità della luce fu affrontato “sperimentalmente” per la prima volta da Galileo, il quale si proponeva anzitutto di stabilire se la propagazione della luce fosse istantanea od avvenisse con velocità finita. L'esperienza consisteva in ciò. Due persone, ciascuna munita di una lanterna, si disponevano di notte a qualche centinaio di metri di distanza, in vista l'una dell'altra. La prima doveva coprire e scoprire la sua lanterna di tanto in tanto, e la seconda fare altrettanto appena vedeva scomparire o riapparire la luce. Il primo sperimentatore avrebbe dovuto, se la luce si propagava con velocità finita, notare un certo ritardo fra il momento in cui scopriva la sua lanterna e quello in cui vedeva apparire la luce della lanterna del compagno. L'esperienza, troppo imprecisa per una velocità così grande, diede naturalmente esito negativo. Infatti il responso del fisico pisano fu:

$c = \text{“incredibilmente veloce”}$ .

### 3.1 Metodo di Rømer

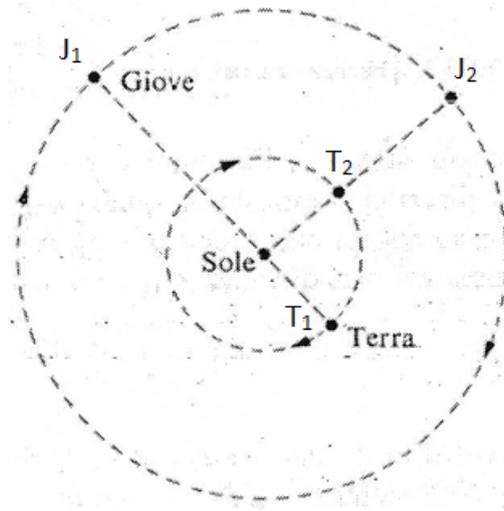


**Figura 3.1:** Eclissi del satellite di Giove.

Spetta all'astronomo danese Ole Rømer il merito di aver fatto “luce” riguardo la finita velocità di propagazione della luce ed inoltre ne diede una prima misura.

Io è un satellite di Giove (il più vicino tra quelli galileiani) che durante il suo movimento di rivoluzione si allontana poco dal piano dell'orbita del pianeta stesso, cosicché ad ogni rivoluzione esso penetra nel suo cono d'ombra divenendo invisibile (Figura 3.1). Il periodo di rivoluzione del satellite è di circa 42 ore e mezza; accurate osservazioni mostrarono però che le eclissi non si susseguivano ad intervalli di tempo esattamente uguali, ma questi intervalli sono più lunghi quando la Terra si va allontanando da Giove e più brevi quando si va avvicinando. Rømer interpretò questo fatto assegnando una grandezza finita alla velocità di propagazione della luce; è chiaro allora che il tempo che intercede fra le osservazioni

di due successive eclissi è uguale al periodo di rivoluzione del satellite aumentato (o diminuito) del tempo che impiega la luce a percorrere quel tratto di cui si sono allontanati (o avvicinati) i due pianeti, dall'istante in cui si è verificata la prima eclissi all'istante in cui si è verificata la seconda. La somma di tutti i ritardi durante il tempo in cui la Terra si allontana da Giove, dà il tempo che la luce impiega a percorrere uno spazio uguale al diametro dell'orbita terrestre (essendo appunto questa la differenza fra la massima e minima distanza tra i due corpi). Conoscendo il diametro dell'orbita terrestre e misurando i ritardi si può quindi ricavare la velocità della luce<sup>1</sup>. Consideriamo dapprima quella



**Figura 3.2:** Metodo di Rømer per misurare la velocità della luce.

posizione (Figura 3.2) in cui è massima la distanza tra i due pianeti: la Terra sia in  $T_1$  e Giove in  $J_1$ . Notiamo che l'istante  $t_1$  in cui viene osservata un'eclissi e indichiamo con  $t'$  il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tratto  $\overline{J_1T_1}$ ; l'istante in cui è effettivamente avvenuta l'eclisse è

$$t = t_1 - t'. \quad (3.1)$$

Attendiamo ora che la Terra e Giove, percorrendo le proprie orbite, si siano portati nelle posizioni  $T_2$  e  $J_2$ , in cui la loro distanza risulta minima e notiamo l'istante  $t_2$  in cui si osserva una nuova eclisse; questa in realtà avrà avuto luogo all'istante  $t_2 - t''$  (indicando con  $t''$  il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tratto  $\overline{J_2T_2}$ ). Se  $\tau$  rappresenta il periodo di rivoluzione del satellite e  $n$  il numero di rivoluzioni da esso compiute attorno a Giove fra i punti  $J_1$  e  $J_2$ , si ha

$$t + n\tau = t_2 - t''. \quad (3.2)$$

Si attenda infine che la distanza tra i due pianeti sia divenuta ancora massima (eguale quindi a  $\overline{J_1T_1}$ ) e si consideri una terza eclissi; sia  $t_3$  l'istante in cui essa viene osservata e quindi  $t_3 - t'$  il momento in cui si è verificata. Se  $N$  è il numero totale di rivoluzioni compiute da Io fra i punti  $J_3$  e  $J_1$ , si ha

$$t + N\tau = t_3 - t'. \quad (3.3)$$

Questa combinata con la (3.1) dà il vero periodo di rivoluzione del satellite

$$\tau = \frac{t_3 - t_1}{N} \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Le orbite dei pianeti vengono supposte circolari e complanari.

mentre dalle (3.1) e (3.2) si ricava

$$|t'' - t'| = t_2 - t_1 - n\tau$$

da cui, per la (3.4)

$$|t'' - t'| = t_2 - t_1 - \frac{n}{N}(t_3 - t_1)$$

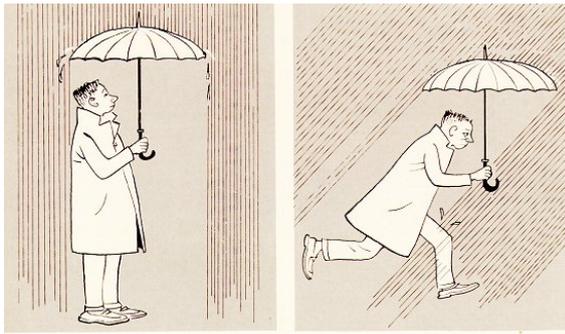
ove  $t'' - t'$  rappresenta il tempo impiegato dalla luce a percorrere lo spazio  $\overline{J_1T_1} - \overline{J_2T_2}$  (ovvero il diametro dell'orbita terrestre). Rømer trovò

$$|t'' - t'| = 1320s$$

e poiché la distanza Terra-Sole è di  $1.49 \cdot 10^{13}cm$ , si ricava per la velocità della luce

$$c = 2.258 \cdot 10^{10}cm/s.$$

## 3.2 Metodo di Bradley



**Figura 3.3:** “Aberrazione” della pioggia.

Un secondo metodo astronomico, che è stato utile per determinare la velocità della luce, è quello che si fonda sul fenomeno dell'*aberrazione*. Questo processo fu scoperto nel XVIII secolo dall'astronomo inglese Bradley e consiste nella variazione della posizione apparente delle stelle per effetto della velocità con cui si sposta l'osservatore, trascinato dal movimento diurno ed annuale della Terra.

Per comprendere meglio la situazione, riferiamoci ad un episodio di osservazione comune. Ciascuno, trovandosi a camminare in strada durante un acquazzone, avrà notato che le

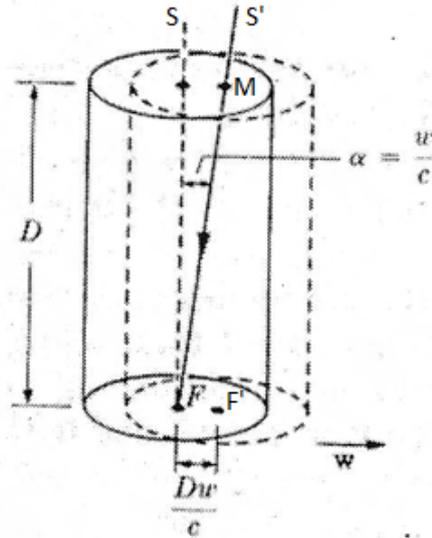
gocce d'acqua appaiono cadere in direzione obliqua anche quando, in realtà, per l'assenza del vento, cadono verticalmente sulla superficie del suolo (Figura 3.3).

Supponiamo di osservare una stella attraverso un telescopio che, naturalmente, partecipa al moto della Terra e perciò viaggia attraverso lo spazio con una certa velocità  $w$  rispetto alle stelle fisse. Sia  $SF$  la direzione dei raggi stellari e  $S'F$  la loro direzione apparente, chiamiamo  $\beta$  l'angolo tra  $S'F$  e la direzione del moto della Terra e  $\alpha = \widehat{SF'S'}$  (Figura 3.4). La luce che passa attraverso l'obiettivo del telescopio in  $M$  viene focalizzata in un punto  $F$ , sul piano focale della lente, invece di cadere nel centro del reticolo dello strumento, ovvero nel punto  $F + \Delta x$  (dove  $\Delta x$  è la variazione spaziale di tutti i punti del telescopio mentre la luce percorre la distanza  $D$ ). Si deduce dalla figura 3.4 che i tratti  $\overline{MF'}$  e  $\overline{FF'}$  debbono stare tra loro come la velocità della luce sta alla velocità dell'osservatore  $w$

$$\frac{\overline{MF'}}{\overline{FF'}} = \frac{c}{w} \quad (3.5)$$

e dal teorema dei seni applicato al triangolo  $MF'F'$  si ha

$$\frac{\overline{MF'}}{\overline{FF'}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \quad (3.6)$$



**Figura 3.4:** Aberrazione della luce.

Combinando la (3.5) colla (3.6) si ottiene

$$\alpha = \arcsin \frac{v}{c} \sin \beta \implies \alpha \cong \frac{v}{c} \sin \beta \quad \text{con } \alpha \text{ piccolo.}$$

Il valore massimo di  $\alpha$  si raggiunge quando il moto dell'osservatore è perpendicolare alla direzione della stella, questo valore massimo

$$\alpha_{max} = \frac{w}{c}$$

si chiama *costante di aberrazione*.

Per effetto dell'aberrazione, la posizione apparente delle stelle sulla sfera celeste subisce, dunque, uno spostamento, dato dall'angolo  $\alpha$ , secondo l'arco di cerchio massimo che congiunge la posizione reale dell'astro col punto del cielo verso il quale è diretto il moto dell'osservatore<sup>2</sup>. Si vede allora che nel corso di un anno una stella che si trovi al polo dell'eclittica appare descrivere una piccola circonferenza di diametro angolare  $2\alpha_{max}$  (trascurando l'eccentricità dell'eclittica); una stella che si trovi nel piano dell'eclittica oscilla, invece, nel piano stesso, lungo un segmento che sottende un angolo  $2\alpha_{max}$ ; infine, le stelle che si trovano in posizioni intermedie appaiono descrivere ellissi (tanto più schiacciate quanto più la stella è vicina all'eclittica) i cui assi maggiori sono paralleli al piano di questa ed hanno una lunghezza eguale a  $2\alpha_{max}$ .

Le osservazioni astronomiche diedero

$$\alpha_{max} = 20''.5$$

da cui si dedusse, essendo nota la velocità della Terra ( $3 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$ )

$$c = 2.982 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$$

<sup>2</sup>In questo paragrafo è stata trascurata la componente della velocità che dipende dalla rotazione diurna della Terra di fronte a quella che dipende dalla rivoluzione annuale.



# Bibliografia

- [1] B. Rossi (1977), *Ottica*, Masson Italia Editori, Milano.
- [2] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane (2006), *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
- [3] E. Hecht (1977), *Ottica*, Etas Libri S.p.A., Milano.
- [4] E. Persico (1979), *Ottica*, Zanichelli, Bologna.