

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**Arrangiamenti di sfere:  
stime per il “kissing number”**

Tesi di Laurea in Geometria

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
LUCA MIGLIORINI

**Presentata da:**  
REBECCA BONINSEGNA

**Sessione III**  
**Anno Accademico 2012/2013**

*A Costi.*

# Indice

# Introduzione

Gli Arrangiamenti di sfere o Sphere Packing sono uno degli oggetti più vari e discussi nella storia della matematica. La teoria ha interazioni importanti con l'aritmetica, la combinatoria, la teoria dei gruppi e la teoria dei codici. Il voluminoso testo [?] contiene una panoramica sui risultati e metodi usati per il loro studio. Già Keplero si occupò di essi studiandone la densità e formulando la sua famosa congettura. Dopo di lui Gregory e Newton discussero un altro aspetto: il kissing number. Questa tesi si inserisce in questo ambito particolare degli arrangiamenti di sfere. L'intento è quello di ripercorrere i passi fondamentali fatti dai matematici riguardo alla stima del limite superiore per il kissing number, passando per il teorema di Rankin, sino alla congettura di Coxeter e il teorema di Böröczky e Coxeter.

Nel primo capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali e le nozioni preliminari necessarie per affrontare gli argomenti che verranno trattati nel corso della tesi. In questo capitolo viene anche presentato il problema di Gregory-Newton che dette origine al problema della stima del kissing number, oggetto della tesi.

Nel secondo capitolo verrà trattato il teorema di Rankin con il quale viene dato un primo limite superiore alla stima del kissing number.

Nel terzo capitolo, infine, affronteremo le dimostrazioni della Congettura di Coxeter dalla quale deriva poi il teorema di Böröczky e Coxeter che fornisce una seconda e più precisa stima del numero.

Il problema proposto, per quanto di semplice esposizione, è risultato nel corso della storia piuttosto complesso da studiare: una dimostrazione esauriente del caso tridimensionale, oggetto della controversia tra Gregory e Newton, verrà infatti da-

ta solo nel 1953 da parte di Schütte e Waerden. La tesi ha dunque lo scopo di iniziare, in quanto non lo esaurisce completamente, a riordinare il percorso fatto nella stima del kissing number.

# Capitolo 1

## Nozioni Preliminari

In questo capitolo introduciamo gli strumenti fondamentali che ci permetteranno di affrontare lo studio della stima del kissing number.

**Definizione 1.0.1.** Consideriamo un insieme  $K$  di punti in  $\mathbb{R}^n$ , diciamo che  $K$  è un *corpo convesso* se per ogni coppia di punti  $x, y \in K$  il segmento che li unisce è contenuto in  $K$ , cioè se

$$\{\lambda x + \mu y \quad : \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad e \quad \lambda + \mu = 1\} \subset K$$

**Definizione 1.0.2.** Sia  $K$  un corpo convesso di  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $K$  è un *corpo con simmetria centrale* se esiste un punto  $p$  tale che  $2p - x \in K, \forall x \in K$  cioè se per ogni punto di  $K$  esiste in  $K$  il suo simmetrico rispetto a  $p$  che sarà quindi il centro di simmetria.

*Esempio 1.* Un esempio di corpo convesso con simmetria centrale, avente come centro di simmetria l'origine, è la palla  $\mathbb{B}^n$  che definiamo come

$$\mathbb{B}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Indicheremo con

$$\mathbb{S}^{n-1} = Fr(\mathbb{B}^n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

la sua frontiera, la sfera  $n - 1$ -dimensionale. Indichiamo, infine, il volume della palla e la superficie della sfera rispettivamente con

$$v(\mathbb{B}^n) = \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad (1.1)$$

$$s(\mathbb{S}^{n-1}) = n\omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}; \quad (1.2)$$

dove  $\Gamma$  è la funzione di Eulero che definiremo nel Paragrafo ??.

Un altro esempio di corpo convesso con simmetria centrale rispetto all'origine è

$$I_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

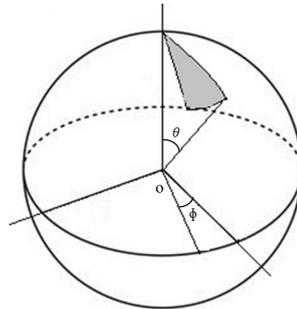


Figura 1.1: Porzione di superficie sferica

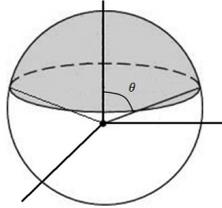
*Osservazione 1.* Vediamo come calcolare la superficie di una porzione di  $\mathbb{S}^2$ . Per esempio supponiamo di voler calcolare la superficie evidenziata nella Figura 1.1. Dovremo risolvere l'integrale per  $0 \leq \theta \leq \alpha$  e  $0 \leq \phi \leq \beta$

$$\int_0^\alpha \int_0^\beta |\operatorname{sen}\theta| d\phi d\theta. \quad (1.3)$$

Nel caso della sfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  l'elemento di superficie  $n - 1$  dimensionale ha la forma

$$ds_{\mathbb{S}^{n-1}} = |\sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2})| d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\phi$$

dove  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi$  sono coordinate sferiche.



*Esempio 2.* Calcoliamo l'area della calotta sferica di  $\mathbb{S}^2$  evidenziata nella figura a fianco. In questo caso avremo che  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , otteniamo quindi

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\operatorname{sen}\theta| d\phi d\theta = 2\pi(1 - \cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi.$$

**Definizione 1.0.3.** Dati  $n$  vettori linearmente indipendenti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  di  $\mathbb{R}^n$  che indichiamo con  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , chiamiamo *reticolo* l'insieme

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n z_i a_i : z_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

vale a dire il sottogruppo abeliano di  $\mathbb{R}^n$  da essi generato.

*Osservazione 2.* Nelle ipotesi date un reticolo è un sottoinsieme discreto di  $\mathbb{R}^n$ . Chiaramente se abbiamo meno di  $n$  vettori, sempre linearmente indipendenti, questi saranno un reticolo nel sottospazio da essi generato. Se invece consideriamo più di  $n$  vettori in  $\mathbb{R}^n$  e consideriamo il sottogruppo abeliano da essi generato, possono accadere due differenti cose a seconda che i vettori scelti siano linearmente dipendenti in  $\mathbb{Z}$  o meno. Prendiamo per esempio in  $\mathbb{R}^2$  i vettori  $a_1 = (1/2, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1/3)$  e  $a_3 = (1, 1)$ , avremo allora che il nostro reticolo  $\Lambda'$  formato dai 3 vettori risulterà riconducibile al reticolo formato da  $a_1$  e  $a_2$ . Ciò è possibile in quanto i vettori risultano linearmente dipendenti in  $\mathbb{Z}$ , infatti  $2(1/2, 0) + 3(0, 1/3) - (1, 1) = 0$ .

Nel caso in cui i vettori scelti non risultassero linearmente dipendenti in  $\mathbb{Z}$  allora il reticolo che otterremmo non sarebbe riconducibile ad alcuno avente coefficienti in  $\mathbb{Z}$  e come risultato avremmo un reticolo denso nel sottospazio vettoriale da essi generato. Una situazione di questo genere non risulta di alcun interesse per l'argomento che affronteremo. Per uno studio approfondito di questi problemi con applicazioni aritmetiche si veda il classico testo [?].

**Definizione 1.0.4.** Sia  $X$  un insieme discreto di punti di  $\mathbb{R}^n$ , chiamiamo  $K + X$  *packing di traslazione* di  $K$  se  $(\text{int}(K) + x_1) \cap (\text{int}(K) + x_2) = \emptyset$ , dove  $x_1$  e  $x_2$  sono punti distinti di  $X$ .

In particolare se  $\Lambda$  è un reticolo, chiamiamo  $K + \Lambda$  *packing reticolare di traslazione* di  $K$ .

**Definizione 1.0.5.** Supponiamo che  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  sia un insieme discreto di punti di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni punto  $x_i \in X$  definiamo la *cella di Dirichlet-Voronoi* associata a  $x_i$  come

$$D(x_i) = \{x : \|x, x_i\| \leq \|x, x_j\| \forall x_j \in X\},$$

dove con  $\|x, y\|$  indichiamo la distanza euclidea tra i punti  $x$  e  $y$ .

*Osservazione 3.* Scelto un insieme discreto di punti dello spazio, che corrisponderanno ai centri delle celle, ogni altro punto dello spazio apparterrà a una o l'altra cella di D-V a seconda che la sua distanza dal centro di una di essa sia minore della distanza dal centro dell'altra. I bordi delle celle saranno formati da quei punti di  $\mathbb{R}^n$  la cui minima distanza è realizzata da due o più punti di  $X$ . Risulta quindi evidente che le celle di Dirichlet-Voronoi formano un ricoprimento di  $\mathbb{R}^n$  senza sovrapposizioni, vale a dire

- $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x_i \in X} D(x_i)$
- $\text{int}(D(x_j)) \cap \text{int}(D(x_k)) = \emptyset$  per ogni  $x_j, x_k$  distinti.

*Esempio 3.* Prendiamo per esempio l'insieme  $X = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^3$  e vediamo le relative celle di D-V. La costruzione di queste celle è stata fatta considerando gli assi di simmetria dei lati del triangolo che si ottiene congiungendo i tre vertici. Come possiamo vedere nella Figura 1.2 le celle hanno in comune tra loro il vertice  $A$  e inoltre a due a due condividono l'insieme dei punti delle facce  $s, r$  e  $t$ . Da questo esempio risulta inoltre evidente che le tre celle sono una partizione di  $\mathbb{R}^3$ .

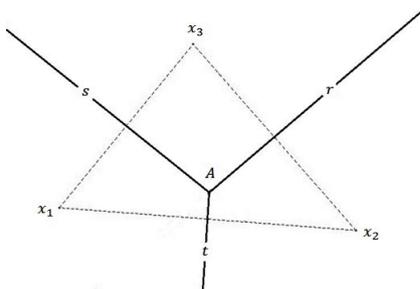


Figura 1.2: Celle di D-V in  $\mathbb{R}^2$

*Osservazione 4.* Sia  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un insieme discreto di punti tali che  $X + \mathbb{B}^n$  sia un packing di traslazione della palla  $\mathbb{B}^n$  centrata nell'origine. Se consideriamo la cella di D-V  $D(x_i)$  associata a  $\mathbb{B}^n + x_i$  si può dimostrare che

$$\mathbb{B}^n + x_i \subset D(x_i)$$

per ogni  $x_i \in X$ .

La dimostrazione risulta immediata considerando le Definizioni ?? e ?? e procedendo per assurdo. Supponiamo infatti che esista un  $i$  per cui  $\mathbb{B}^n + x_i \subset (D(x_i) \cup D(x_j))$  per  $i \neq j$  e consideriamo  $y \in \mathbb{B}^n + x_i$  tale che  $y \in \text{int}(D(x_j))$ . Abbiamo per definizione di cella di D-V che

$$\|x, x_j\| < \|x, x_i\|,$$

ma  $y \in \mathbb{B}^n + x_i$  e quindi abbiamo per definizione di packing di traslazione che

$$\|x, x_i\| \leq \|x, x_j\|$$

ottenendo così un assurdo.

Si ha inoltre che  $\mathbb{B}^n + x_i$  è sempre diverso da  $D(x_i)$  infatti, poiché le celle di D-V sono dei politopi convessi la loro frontiera consta cioè di porzioni di iperpiani, mentre questo non accade sicuramente per la frontiera di una palla.

**Definizione 1.0.6.** Chiamiamo *kissing number di traslazione* di  $K$ , e lo indichiamo con  $k(K)$ , il massimo numero realizzabile di traslati di  $K$  non sovrapposti e tangenti a  $K$ . Se  $\Lambda$  è un reticolo definiamo il *kissing number di traslazione reticolare* di  $K$  allo stesso modo, con l'unica eccezione che le traslazioni devono appartenere a  $K + \Lambda$ , e lo indichiamo con  $k^*(K)$ .

*Osservazione 5.* Se  $K$  è un corpo convesso si vede facilmente che  $k^*(K) \leq k(K)$ . Infatti l'insieme  $\mathcal{R}$  dei packing reticolari di traslazione è un sottoinsieme dell'insieme  $\mathcal{T}$  dei più generali packing di traslazione. Pensiamo ora di ordinare gli elementi di questi insiemi rispetto al numero di traslazioni di  $K$  da cui sono composti, avremo che  $k(K)$  e  $k^*(K)$  non sono altro che il massimo rispettivamente di  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{R}$ . poiché, come già detto,  $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$  possiamo concludere che

$$k^*(K) = \max_{R \in \mathcal{R}} R \leq \max_{T \in \mathcal{T}} T = k(K) \quad (1.4)$$

*Esempio 4.* Sia  $\Lambda_2$  il reticolo bidimensionale avente per base  $\{(2, 0), (1, \sqrt{3})\}$ . Sia

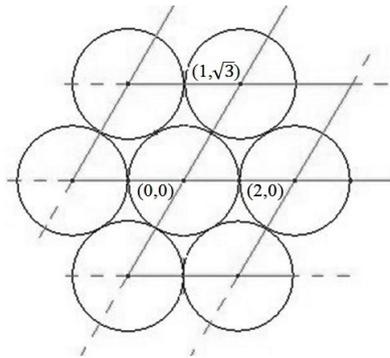


Figura 1.3: Packing reticolare di traslazione di  $\mathbb{B}^2$

poi  $\mathbb{B}^2 + \Lambda_2$  il packing reticolare di traslazione di  $\mathbb{B}^2$ . Dalla Figura 1.3 possiamo facilmente dedurre che

$$k^*(\mathbb{B}^2) \geq 6.$$

D'altra parte se pensiamo di dividere la misura dell'angolo giro per la misura dell'angolo formato dai vettori della base del reticolo, otteniamo

$$\frac{2\pi}{\arccos 1/2} = 6.$$

Questo risulterà il numero massimo di palle  $\mathbb{B}^2$  posizionabili intorno a quella centrale. Dalla (??) deduciamo che

$$k^*(\mathbb{B}^2) = k(\mathbb{B}^2) = 6.$$

**Definizione 1.0.7.** Sia  $l$  un numero positivo e sia  $m(K, l)$  il massimo numero di traslati  $K + x$  di  $K$  che possono essere arrangiati all'interno di  $lI_n$  senza che le parti interne si sovrappongano. Definiamo

$$\delta(K) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{m(K, l)v(K)}{v(lI_n)},$$

la *massima densità del packing di traslazione* di  $K$  in  $\mathbb{R}^n$ . Allo stesso modo definiamo  $\delta^*(K)$  la *massima densità del packing reticolare di traslazione* di  $K$ , con la restrizione che i vettori traslati appartengano a un reticolo. Si avrà quindi:

$$\delta^*(K) = \sup_{\Lambda} \frac{v(K)}{\det(\Lambda)},$$

dove il sup è calcolato sui reticoli  $\Lambda$  tali che  $K + \Lambda$  è un packing reticolare di traslazione di  $K$ .

*Osservazione 6.* Anche in questo caso per  $K$  convesso notiamo che, per la stessa ragione,

$$\delta^*(K) \leq \delta(K) \leq 1.$$

## 1.1 Il problema di Gregory-Newton

*Esempio 5.* Sia  $\Lambda_3$  il reticolo generato dalla base  $a_1 = (2, 0, 0)$ ,  $a_2 = (1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $a_3 = (1, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$ .

$\mathbb{B}^3 + \Lambda_3$  è un packing reticolare di traslazione di  $\mathbb{B}^3$ , in cui la sfera centrale (come ogni altra) tocca altre 12 sfere. Possiamo allora facilmente dedurre che  $k^*(\mathbb{B}^3) \geq 12$ .

Nel 1694, D.Gregory e I.Newton discussero il seguente problema:

***Può una sfera toccare 13 sfere della sua stessa dimensione?***

Mentre Newton sosteneva che il numero massimo di sfere potesse essere 12, Gregory era convinto che fosse possibile posizionarne una tredicesima, in quanto si nota che è possibile posizionare le prime 12 sfere in modo che rimanga spazio libero tra esse: esistono molti modi non equivalenti di posizionare 12 sfere tangenti

ad una data.

Ciò non permise di escludere facilmente l'ipotesi di Gregory di poter aggiungere una tredicesima sfera, e fornire una dimostrazione rigorosa risulta piuttosto complesso.

*Esempio 6.* Consideriamo  $\mathbb{B}^3 + x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, k(\mathbb{B}^3)$  sfere non sovrapposte, tangenti a  $\mathbb{B}^3$ , indico con  $\Omega_i(x_i, \phi)$  per  $i = 1, 2, \dots, k(\mathbb{B}^3)$  le calotte sferiche centrate in  $x_i$  e di raggio  $\phi$ , congruenti, che formano un packing di  $\mathbb{B}^3$ . Cominciamo con l'osservare che, per non sovrapporsi e quindi formare un packing, le calotte dovranno avere un raggio di lunghezza massima pari a  $\pi/6$  la quale, per la definizione di radianti, sarà anche l'ampiezza dell'angolo al centro della sfera sotteso a tale raggio. Consideriamo quindi la calotta sferica  $\Omega_i(x, \frac{\pi}{6})$  e calcoliamone la superficie applicando la Formula ??

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\alpha| d\theta d\alpha = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Calcoliamo ora la superficie di  $\mathbb{S}^2$  utilizzando la Formula ??

$$s(\mathbb{S}^2) = \frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} - 1)} = 4\pi.$$

Confrontando la superficie di  $\mathbb{S}^2$  con quella di  $\Omega_i$  e ricordandoci dell'Esempio ?? otteniamo che

$$12 \leq k(\mathbb{B}^3) \leq \frac{s(\mathbb{S}^2)}{s(\Omega_i)} = \frac{2}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 14.9282 \dots$$

L'esempio è un'ulteriore conferma di quanto l'idea di Gregory fosse del tutto lecita, abbiamo infatti visto che l'intervallo in cui può variare il kissing number di  $\mathbb{B}_3$  è, a una prima analisi, [12; 14.9282].

Solo nel 1953, quasi 300 anni dopo, Schütte e Waerden [?], utilizzando argomentazioni provenienti dalla teoria dei grafi, risolveranno la controversia a favore di Newton.

La determinazione del kissing number per arrangiamenti di sfere in dimensione superiore è complessa e affascinante. Sorprendentemente si conosce il valore del kissing number in dimensione 4, dove è uguale a 24, in dimensione 8, dove è

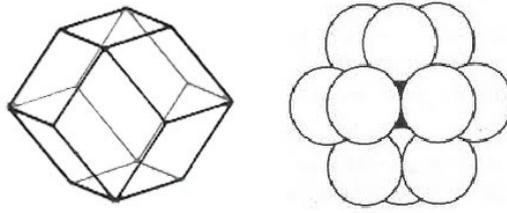


Figura 1.4: Dodecaedro rombico: configurazione ottimale delle palle in  $\mathbb{B}^3$

uguale a 240, e in dimensione 24 dove è uguale a 196560. Nei capitoli seguenti esamineremo alcune stime per questo numero. Nel caso di arrangiamenti reticolari sono note più informazioni. Una discussione approfondita del problema e delle sue applicazioni e interazioni con altri campi si trova nel testo [?].

Per quanto riguarda invece la massimizzazione della densità delle sfere nello spazio, fu dimostrato solo recentemente, nel 1998 da Thomas Hales [?] che nel caso tridimensionale, la configurazione ottimale si ottiene posizionando le palle al posto dei vertici del dodecaedro rombico circoscritto alla palla centrale. La dimostrazione fa inoltre un uso intensivo del computer per esaminare un grande numero di casi.

# Capitolo 2

## Limite superiore per il kissing number

In questo capitolo dimostriamo il Teorema di Rankin il quale confrontando la superficie di  $\mathbb{S}^{n-1}$  con la somma delle superfici occupate dalle calotte sferiche in essa teorizza il primo limite superiore per il kissing number.

### 2.1 La funzione Gamma di Eulero $\Gamma(\alpha)$

**Definizione 2.1.1.** Sia  $\alpha > 0$  definiamo la *funzione Gamma di Eulero* come

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Osserviamo che tale integrale improprio converge per  $\alpha > 0$ . Elenchiamo ora, senza fornire dimostrazioni, alcune delle principali proprietà di questa funzione:

1.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ;
2. se  $\alpha = n$  allora  $\Gamma(\alpha) = \Gamma(n) = (n - 1)!$ ;
3. *Formula ricorsiva:*

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

## 2.2 La distanza geodetica

**Definizione 2.2.1.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *metrica Riemanniana* è il dato di un prodotto scalare  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  su ogni spazio tangente  $T_p M$  alla varietà nel punto  $p$ , che dipende in modo differenziabile dal punto  $p$ .

*Esempio 7.* Nel caso della sfera  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , lo spazio tangente nel punto  $p$  si identifica naturalmente con lo spazio ortogonale al punto  $p$ , e la nostra  $g_p$  non sarà altro che la restrizione a questo sottospazio del prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$g_p : T_p \mathbb{S}^{n-1} \times T_p \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

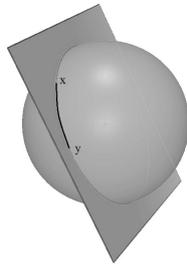
$$(x, y) \mapsto g_p(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Il dato di una metrica Riemanniana permette di definire la lunghezza  $l(\gamma)$  di una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , che supponiamo differenziabile, mediante

$$l(\gamma) = \int_a^b (g(\gamma'(t), \gamma'(t)))^{1/2} dt.$$

**Definizione 2.2.2.** Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $g$  una metrica di Riemann, e  $p, q \in M$ . Possiamo allora definire la *distanza geodetica*  $d_g$  tra  $p$  e  $q$  come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve in  $M$ , che connettono  $p$  e  $q$ . Vale che:

- $d_g(x, y) \geq 0$  e  $d_g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- $d_g(x, y) = d_g(y, x)$ ;
- $d_g(x, y) \leq d_g(x, z) + d_g(z, y)$ .



*Osservazione 7.* Se consideriamo  $\mathbb{S}^{n-1}$  la distanza geodetica tra due punti  $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$  può essere vista geometricamente come l'arco di circonferenza minima formato dall'intersezione tra la superficie della sfera e il sottospazio bidimensionale passante per  $x, y$  e il centro della sfera.

## 2.3 Teorema di Rankin per il limite superiore del kissing number

Sia  $m(n, \phi)$  il massimo numero di calotte sferiche di raggio geodetico  $\phi$  che possono essere posizionate sulla superficie di  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Per quello che abbiamo visto nell'Esempio ?? possiamo dedurre che

$$k(\mathbb{B}^n) = m(n, \pi/6). \quad (2.1)$$

Questa osservazione quindi riconduce il problema del kissing number in dimensione  $n$  a uno studio di arrangiamenti di calotte sferiche nella sfera  $n - 1$  dimensionale. Rankin ottenne il seguente limite superiore per  $k(\mathbb{B}^n)$ .

**Teorema 2.3.1.** (*Rankin*)

$$k(\mathbb{B}^n) \ll \frac{\sqrt{\pi n^3}}{2} 2^{n/2}$$

dove con  $f(x) \ll g(x)$  intendiamo  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$

*Osservazione 8.* Con l'Esempio ?? avevamo concluso che l'intervallo in cui poteva variare il valore del nostro kissing number dello spazio tridimensionale era  $[12; 14.9282]$ . Osserviamo che per  $n = 3$  abbiamo

$$\frac{\sqrt{3^3 \pi}}{2} 2^{3/2} = 13,0248$$

che, anche se si trattasse di una stima effettiva e non asintotica come infatti è, non sarebbe comunque sufficiente per escludere l'ipotesi di Gregory.

Introduciamo innanzitutto alcuni lemmi che utilizzeremo per dimostrare il Teorema ??.

**Lemma 2.3.2.** *Consideriamo  $p$  punti distinti in  $\mathbb{S}^{n-1}$   $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,p})$ , per  $j = 1, 2, \dots, p$ . Definiamo*

$$d = \min_{1 \leq j < k \leq p} \{ \|x_j, x_k\| \}$$

Abbiamo che per ogni punto  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\left( \sum_{j=1}^p d_j^2 \right)^2 - 4p \sum_{j=1}^p d_j^2 + 2p(p-1)d^2 \leq 0;$$

con  $d_j = \|x, x_j\|$ .

**Lemma 2.3.3.** Sia  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $tg\beta = o(\sqrt{n})$  per  $n$  grande, si ha che

$$\int_0^\infty (\text{sen}\theta)^{n-2} (\cos\theta - \cos\beta) d\theta \sim \frac{(\text{sen}\beta)^{n+1}}{n^2 \cos^2 \beta} \quad (2.2)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'integrale

$$\cos\beta \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} d\theta$$

sostituendo  $\theta = \arcsen(\text{sen}\beta e^{\frac{-t}{n-1}})$  e  $d\theta = \frac{-\text{sen}\beta e^{\frac{-t}{n-1}}}{(n-1)\sqrt{1-\text{sen}^2\beta e^{\frac{-2t}{n-1}}}} dt$  otteniamo

$$\cos\beta \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} d\theta = \frac{(\text{sen}\beta)^{n-1}}{n-1} \int_0^\infty \left( 1 + \left( 1 - e^{\frac{-2t}{n-1}} \right) tg^2\beta \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-t}{n-1}} dt. \quad (2.3)$$

Consideriamo lo sviluppo di Taylor  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\eta(x)x^2$  dove  $x = \left( 1 - e^{\frac{-2t}{n-1}} \right) tg^2\beta$  e  $0 \leq \eta(x) \leq 1, \forall x \geq 0$ , sostituiamolo alla (2.3), otteniamo così

$$\begin{aligned} \cos\beta \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} d\theta &= \frac{(\text{sen}\beta)^{n-1}}{n-1} \int_0^\infty e^{\frac{-t}{n-1}} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - e^{\frac{-2t}{n-1}} \right) tg^2\beta \right) dt + \\ &+ \int_0^\infty e^{\frac{-t}{n-1}} \left( \frac{3}{8}\eta(t) \left( 1 - e^{\frac{-2t}{n-1}} \right)^2 tg^4\beta \right) dt. \end{aligned}$$

Applicando nuovamente lo sviluppo di Taylor e risolvendo l'integrale, considerando che  $tg\beta = o(\sqrt{n})$ , risulta

$$\begin{aligned} \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} (\cos\theta - \cos\beta) d\theta &= \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} \cos\theta d\theta - \cos\beta \int_0^\beta (\text{sen}\theta)^{n-2} d\theta \\ &\sim \frac{(\text{sen}\beta)^{n+1}}{n^2 \cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.3.4.** Sia  $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$  e  $\beta = 2\arcsen(\sqrt{2}\sin\phi)$ , si ha che

$$m(n, \phi) \leq \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)\text{sen}\beta\text{tg}\beta}{2\Gamma(n/2)\int_0^\beta(\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta - \cos\beta)} \quad (2.4)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\phi$  un numero reale  $0 < \phi < \pi/4$  e supponiamo che in  $\mathbb{S}^{n-1}$  vi siano  $m(n, \phi)$  calotte sferiche non sovrapposte  $\Omega_i(\phi)$  di raggio geodetico  $\phi$ . Sostituiamo ognuna delle calotte con una concentrica di raggio geodetico  $\beta = \arcsen(\sqrt{2}\text{sen}\phi)$ , infine sia  $\gamma = 2\text{sen}\frac{\beta}{2}$  il raggio euclideo di  $\Omega_i(\beta)$ . Posto  $r = \|x, x_i\| = 2\text{sen}\frac{\theta}{2}$  avremo che la densità di massa di ogni punto  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  risulterà essere

$$\sigma_i(r) = \frac{\cos\beta}{\text{sen}^2\beta}(\gamma^2 - r^2) = \frac{2\cos\beta}{\text{sen}^2\beta}(\cos\theta - \cos\beta),$$

e quindi la massa totale di  $\Omega_i(\beta)$  sarà

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\beta (n-1)\omega_{n-1}(\text{sen}\theta)^{n-2}\sigma(2\text{sen}\frac{\theta}{2})d\theta \\ &= 2(n-1)\omega_{n-1}\frac{\cos\beta}{\text{sen}^2\beta}\int_0^\beta(\text{sen}\theta)^{n-2}(\cos\theta - \cos\beta)d\theta. \end{aligned}$$

Consideriamo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , ci si aprono ora due possibilità:

- $x$  non appartiene a nessuna delle calotte sferiche  $\Omega_i(\beta)$  ed avremo allora che la massa totale in  $x$  è zero ed il Lemma risulterà quindi banalmente dimostrato.
- $x \in \Omega_i(\beta)$  per qualche  $i = 1, 2, \dots, m$  ed in questo caso la massa totale in  $x$  sarà, secondo la notazione del Lemma ??

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(d_i) = \frac{\cos\beta}{\text{sen}^2\beta} \left( m\gamma^2 - \sum_{i=1}^m d_i^2 \right),$$

dove

$$\sum_{i=1}^m d_i^2 = 4m\text{sen}^2\frac{\beta}{2} - \sigma(x)\text{sen}\beta\text{tg}\beta = 4 \left( m - \frac{\cos\beta + 1}{2\cos\beta}\sigma(x) \right) \text{sen}^2\frac{\beta}{2}.$$

Applicando il Lemma ?? e proseguendo coi calcoli otteniamo che

$$4m(1 - \sigma(x)) \geq \sigma(x)^2 tg^2 \beta,$$

deducendo così che  $\sigma(x) \leq 1$ . Possiamo quindi concludere che  $m(n, \phi)J$  è minore della superficie totale di  $\mathbb{B}^n$  e quindi

$$m(n, \phi) \leq \frac{n\omega_n}{J} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)\text{sen}\beta tg\beta}{2\Gamma(n/2) \int_0^\beta (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta - \cos\beta)}.$$

□

Procediamo ora con la dimostrazione del Teorema ?? che risulterà a questo punto immediata.

*Dimostrazione.* (Teorema di Rankin) Consideriamo i risultati dei Lemmi ?? e ??, sostituiamo la (??) in (??), considerando che  $\frac{n^2\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n/2))} \sim 2n^{(3/2)}$  otteniamo

$$m(n, \phi) \ll \frac{\sqrt{\pi n^3} \text{sen} 2\beta}{2(\sqrt{2} \text{sen} \phi)^n}.$$

Ora per la (??) possiamo concludere

$$k(\mathbb{B}^n) = m(n, \pi/6) \ll \frac{\sqrt{\pi n^3}}{2} 2^{n/2}.$$

□

# Capitolo 3

## Limite superiore per il kissing number II

In quest'ultimo capitolo introduciamo il concetto di simpleso sferico e le sue principali proprietà al fine di dimostrare la congettura di Coxeter e il teorema di Böröczky-Coxeter.

Per  $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$  indichiamo con  $\|x, y\|_g$  la metrica indotta dalla distanza geodetica definita su  $\mathbb{S}^{n-1}$  e con  $\widehat{xy}$  il segmento sferico (vale a dire l'arco di circonferenza massima) che congiunge  $x$  e  $y$ . Quest'ultimo è univocamente determinato se  $\|x, y\|_g < \pi$ .

### 3.1 La congettura di Coxeter

**Definizione 3.1.1.** Chiamiamo *sottospazio sferico  $k$ -dimensionale* un'intersezione  $\mathbb{S}^{n-1} \cap W$  dove  $W$  è un sottospazio vettoriale  $k + 1$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.1.2.** Un *simpleso sferico* è definito come l'involuppo convesso di  $n$  punti  $v_1 \cdots v_n$  in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . In altri termini, è l'intersezione del cono positivo in  $\mathbb{R}^n$

$$C(v_1 \cdots v_n) = \left\{ \sum x_i v_i, \text{ con } x_i \geq 0 \right\},$$

generato dai vettori  $v_1 \cdots v_n$ , con la sfera. Parleremo di *simpleso sferico regolare* se gli angoli diedri, o, equivalentemente, le lunghezze dei lati, sono uguali tra loro.

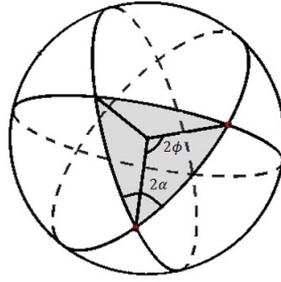


Figura 3.1: Simpleso sferico regolare di  $\mathbb{S}^2$  di angolo diedrale  $2\alpha$  e lato  $2\phi$ .

*Osservazione 9.* Come vedremo con il Teorema ??, tra gli angoli diedri  $2\alpha$  di un simpleso sferico regolare e la lunghezza  $2\phi$  dei suoi lati vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\phi} + n - 2.$$

*Osservazione 10.* In  $\mathbb{S}^2$  si ha la seguente formula per l'area di un triangolo sferico  $\Delta$  di angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\text{area}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

In particolare, se  $\Delta$  è un simpleso sferico regolare di  $\mathbb{S}^2$  di angolo  $\alpha$ , si ha

$$\text{area}(\Delta) = 3\alpha - \pi.$$

In dimensione superiore la determinazione del volume di un simpleso sferico regolare è un problema piuttosto complesso [?].

**Definizione 3.1.3.** Preso un punto  $\mathbf{p}$  sulla sfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , sia  $w_1, \dots, w_{n-1}$  una base ortonormale dello spazio perpendicolare a  $\mathbf{p}$ , e siano  $C_1, \dots, C_{n-1}$  circonferenze massime passanti per  $o$  i cui vettori tangenti in  $o$  sono  $w_1, \dots, w_{n-1}$ . Si considerino i punti  $p_1, p'_1, \dots, p_{n-1}, p'_{n-1}$  tali che

- $p_i, p'_i \in C_i$ ,
- $\|\mathbf{p}, p_i\|_g = \|\mathbf{p}, p'_i\|_g = r < \pi/2$ , costante fissata, per ogni  $i$ .

Si dice *iperottaedro sferico regolare di centro  $o$*  l'involuppo convesso dei  $2n - 2$  punti  $p_i, p'_i$ .

*Osservazione 11.* I lati di questo politopo sferico hanno tutti la stessa lunghezza, per ovvie ragioni di simmetria.

**Definizione 3.1.4.** Sia  $T_n = v_1 v_2 \cdots v_n$  un simpleso sferico  $n$ -dimensionale, regolare, di angolo diedro  $2\alpha$ , introduciamo la *Funzione di Schläfli*

$$F_n(\alpha) = \frac{2^n s(T)}{n! n \omega_n},$$

dove  $s(T)$  è l'area di  $T$ .

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $\alpha$  un numero positivo tale che  $\alpha < \pi/4$ . allora*

$$F_n(\alpha) \sim \frac{\sqrt{1+cn}}{\sqrt{2e^{1/cn}!}} \left( \frac{2e}{\pi cn} \right)^{n/2}$$

dove  $c = (\sec 2\alpha - (n-1))^{-1}$ .

**Definizione 3.1.5.** Sia  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  un sottoinsieme discreto di punti di  $\mathbb{S}^{n-1}$  tale che le calotte sferiche centrate in  $x_i$  per  $i = 1, 2, \dots, m$  formino un packing in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Definiamo allora, analogamente al caso euclideo, la *cella sferica di Dirichlet-Voronoi* come

$$D'(x_i) = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \|x, x_i\|_g \leq \|x, x_j\|_g, j = 1, 2, \dots, m\}$$

*Osservazione 12.* Analogamente a quanto abbiamo visto nel Capitolo 1 per le celle euclidee di Dirichlet-Voronoi, si ha che

$$\Omega(x_i, \phi) \subset D'(x_i).$$

In  $\mathbb{S}^{n-1}$  per  $n \geq 2$  definiamo  $g_i(\phi)$  la distanza geodetica tra il centro e i vertici del simpleso sferico  $i$ -dimensionale regolare, e sia  $g(\phi)$  la distanza geodetica tra il centro e i vertici dell'iperottaedro sferico regolare  $n$ -dimensionale. Abbiamo che

$$\phi = g_1(\phi) < g_2(\phi) < \cdots < g_{n-1}(\phi) < g(\phi)$$

**Lemma 3.1.2.** *Sia  $P_{(n-1)-i}$  la parte  $(n-1)-i$ -dimensionale che hanno in comune le prime  $i+1$  celle sferiche di Dirichlet-Voronoi e sia  $S'_{(n-1)-i}$  il sottospazio sferico*

di  $\mathbb{S}^{n-1}$  generato da  $P_{(n-1)-i}$ . Allora, preso il punto  $x \in S'_{(n-1)-i}$  che minimizza la distanza tra esso ed il centro delle celle di  $D-V$ , la misura di tale distanza è maggiore di  $g_i(\phi)$ , cioè per  $j = 1, 2, \dots, i+1$

$$\min_{x \in S'_{(n-1)-i}} \|x, x_j\|_g \geq g_i(\phi).$$

*Dimostrazione.* Sia  $X = x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$  un insieme discreto di punti e consideriamo  $x \in S'_{(n-1)-i}$  tale che la distanza geodetica tra esso e  $x_j$  sia minima ed uguale per tutti i  $j = 1, 2, \dots, i+1$ . Posizioniamo le calotte sferiche  $\Omega(x_j, \phi)$  di raggio  $\phi$  centrate in  $x_j$  per  $j = 1, 2, \dots, i+1$  in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sia  $S_{i+1}^*$  il sottospazio sferico generato dagli  $i+1$  punti e consideriamo l'intersezione tra esso e la calotta sferica  $\Omega(x, \|x, x_j\|_g)$ . Osserviamo la distribuzione degli  $i+1$  punti all'interno di tale intersezione, risulta che

$$\|x, x_j\|_g \geq g_i(\phi).$$

□

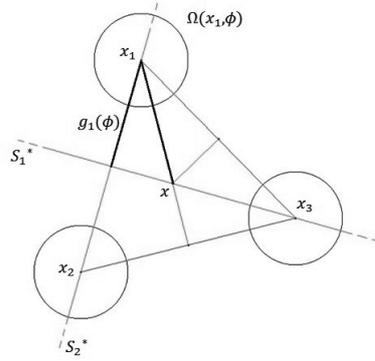


Figura 3.2: Esempio grafico relativo al Lemma ?? in  $\mathbb{S}^2$  con  $i = 1$ .

**Lemma 3.1.3.** Sia  $P_{(n-1)-i}$  la parte  $(n-1)-i$ -dimensionale che hanno in comune le prime  $i+1$  celle sferiche di Dirichlet-Voronoi e sia  $S'_{(n-1)-i}$  il sottospazio sferico di  $\mathbb{S}^{n-1}$  generato da  $P_{(n-1)-i}$ . Sia  $S^*$  il sottospazio sferico

$$\{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \|x, x_1\|_g = \|x, x_{i+2}\|_g\}.$$

Supponiamo che  $y \in S'_{(n-1)-i}$  sia tale che

$$\|x_1, y\|_g = \min_{x \in S'_{(n-1)-i}} \|x_1, x\|_g \quad e \quad \widehat{x_1 y} \cap S^* \neq \emptyset.$$

Allora abbiamo che

$$\|x_1, y\|_g \geq g(\phi).$$

*Dimostrazione.* Sia  $S_j^*$  il sottospazio sferico determinato da  $x_1, x_2, \dots, x_j$ . Per brevità chiamiamo  $\Omega = \Omega(y, \|x_1, y\|_g) \cap S_{i+2}^*$ . Si vede che gli  $i+1$  punti  $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$  stanno sulla frontiera di  $\Omega$  e, poiché abbiamo supposto che  $\widehat{x_1 y} \cap S^* \neq \emptyset$ , risulta che  $x_{i+2} \in \Omega$ . Chiamiamo  $x'_{i+2}$  il punto sulla frontiera di  $\Omega$  ottenuto dall'intersezione di essa con la retta passante per  $x_{i+2}$  ortogonale a  $S_{i+1}^*$ . Abbiamo quindi che per  $j = 1, 2, \dots, i+1$

$$\|x_j, x'_{i+2}\|_g \geq \|x_j, x_{i+2}\|_g \geq 2\phi.$$

Ora poiché gli  $i+2$  punti  $x_1, x_2, \dots, x'_{i+2}$  giacciono sulla frontiera della semicalotta sferica di  $\Omega$  individuata da  $S_{i+1}^*$ , sappiamo, dalla geometria elementare, che esistono due punti, per esempio  $x_1$  e  $x_2$ , tali che l'angolo sferico tra  $\widehat{x_1 y}$  e  $\widehat{y x_2}$  sia minore o al più uguale a  $\pi/2$ . Abbiamo quindi

$$\|x_1, y\|_g \geq g(\phi).$$

□

Sia  $T_n = v_1 v_2 \dots v_n$  il semplice sferico di lato geodetico  $2\phi$ , definiamo

$$\sigma_n(\phi) = \frac{\sum_{i=1}^n s(\Omega(v_i, \phi) \cap T)}{s(T)} = \frac{ns(\Omega(v_i, \phi) \cap T)}{s(T)}$$

come il rapporto tra la misura della superficie della parte di semplice coperta dalle calotte sferiche del nostro arrangiamento e la misura della superficie dell'intero semplice.

Nel 1961 Coxeter formulò la seguente congettura:

**Teorema 3.1.4.** (*Congettura di Coxeter*)

$$m(n, \phi) = \frac{n\omega_n \sigma_n(\phi)}{s(\Omega(v_1, \phi))} = \frac{2F_{n-1}(\alpha)}{F_n(\alpha)}, \quad (3.1)$$

dove  $F_n(\alpha)$  e  $F_{n-1}(\alpha)$  sono funzioni di Schläfli e

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\phi} + n - 2.$$

La congettura venne dimostrata da Böröczky. Nei prossimi paragrafi introdurremo alcuni strumenti fondamentali per la dimostrazione.

## 3.2 I Semplici Ortogonali e Co-ortogonali

**Definizione 3.2.1.** Diciamo che due segmenti sferici  $\widehat{xz}$  e  $\widehat{yz}$  sono *ortogonali in y* se le loro proiezioni sull'iperpiano tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}$  nel punto  $y$  sono ortogonali.

**Definizione 3.2.2.** Consideriamo  $T_n = v_1 v_2 \cdots v_n$ , un semplice sferico tale che  $\|v_1, v_i\|_g < \pi/2$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $T_n$  viene detto *ortosimplesso* se  $\widehat{v_i v_j}$  e  $\widehat{v_j v_k}$  sono a due a due ortogonali per  $1 \leq i < j < k \leq n$ .

*Osservazione 13.* In  $\mathbb{S}^{n-1}$  il numero degli angoli retti di un ortosimplesso è dato dal coefficiente binomiale  $\binom{n}{3}$ .

*Esempio 8.* Un ortosimplesso in  $\mathbb{S}^2$  è un qualsiasi triangolo sferico avente un solo angolo di  $\frac{\pi}{2}$ .

**Definizione 3.2.3.** Sia  $T_n$  un ortosimplesso sferico, definiamo *co-ortosimplesso* il semplice sferico  $T_{n,i,u} = v_1 \cdots v_{i-1} u v_{i+1} \cdots v_n$  ottenuto a partire da  $T_n$  sostituendo all' $i$ -esimo vertice un punto  $u$  preso lungo il segmento sferico  $\widehat{v_{i-1} v_i}$ .

*Osservazione 14.* Un co-ortosimplesso può essere associato a due differenti ortosimplessi, vale a dire costruito equivalentemente a partire da uno di essi.

Consideriamo il co-ortosimplesso  $T_{n,i,u}$  costruito, come da definizione, a partire dall'ortosimplesso sferico  $T_n$ . Cerchiamo quindi il secondo semplice ortogonale a cui è associato, prendendo come candidato  $T_n^* = v_n \cdots v_{i+1} u^* v_{i-1} \cdots v_1$ , dove  $u^*$  è scelto in modo che  $u \in \widehat{u^* v_{i+1}}$ . Costruiamo il co-ortosimplesso  $T_{n,i,u}^*$  sostituendo al posto del vertice  $u^*$  lo stesso punto  $u$  scelto in precedenza. Risulta evidente dalla costruzione che i co-ortosimplessi ottenuti a partire dai due ortosimplessi coincidono:

$$T_{n,i,u} = T_{n,i,u}^*.$$

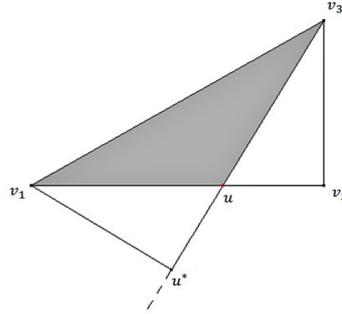


Figura 3.3: Esempio di co-ortosimplesso in  $\mathbb{S}^2$ .

*Esempio 9.* Per esemplificare le precedenti affermazioni scegliamo come spazio di riferimento  $\mathbb{S}^2$ , osservando la Figura 3.3 vediamo in cosa consiste un co-ortosimplesso e in particolare come esso possa essere ricavato da due diversi ortosimplessi.

**Definizione 3.2.4.** Siano  $T_n$  e  $T_n^*$  i due ortosimplessi a cui è associato il co-ortosimplesso  $T_{n,i,u}$ . Chiamiamo *ortopunto inferiore* e *ortopunto superiore* del vertice  $u$  di  $T_{n,i,u}$  rispettivamente i punti  $u^*$  e  $u^{**} = v_i$ .

*Osservazione 15.* Se  $T_{n,i,u}$  è un ortosimplesso si vede che  $u^*, u^{**}$  e il vertice  $v_i$  coincidono.

Enunciamo, senza dimostrare, due proprietà dei semplici co-ortogonali.

*Osservazione 16.* Sia  $p$  un punto di  $T_{n,i,u}$  tale che  $p \in \widehat{v_{i-1}u}$ , e siano  $p^*$  e  $p^{**}$  rispettivamente l'ortopunto inferiore e superiore del vertice  $p$  del subsimplesso co-ortogonale  $v_1 \cdots v_{i-2} p v_{i+1} \cdots v_n$ . Muovendo  $p$  lungo  $\widehat{v_{i-1}u}$ , da  $v_{i-1}$  verso  $u$ , abbiamo che  $\|v_1, p^*\|_g$  e  $\|v_1, p^{**}\|_g$  crescono.

*Osservazione 17.* Siano  $T_{n,i,u_1}$  e  $T_{n,i,u_2}$  due semplici co-ortogonali di  $\mathbb{S}^{n-1}$  che giacciono dalla stessa parte rispetto al sottospazio sferico generato da  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ . Supponiamo che

$$\|v_1, u_1^*\|_g < \|v_1, u_2^*\|_g \quad \text{e} \quad \|v_1, u_1^{**}\|_g < \|v_1, u_2^{**}\|_g,$$

allora i segmenti sferici  $\widehat{u_1 v_{i+1}}$  e  $\widehat{u_2 v_{i-1}}$  si intersecano in un punto appartenente alla loro parte interna.

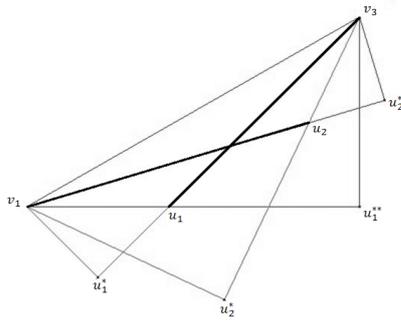


Figura 3.4: Esempio grafico relativo all'Osservazione ?? in  $\mathbb{S}^2$  per  $i = 2$ .

### 3.3 Studi di Böröczky sui semplici sferici

**Definizione 3.3.1.** Sia  $T_n = v_1v_2 \cdots v_n$  un semplice sferico di  $\mathbb{S}^{n-1}$  tale che  $s(T_n) \neq 0$ . Definiamo

$$\delta(T_n, \phi) = \frac{s(\Omega(v_1, \phi) \cap T_n)}{s(T_n)}.$$

Un semplice  $T_m$  con  $m < n$ , può essere considerato come un caso degenero di un semplice sferico  $T_n = v_1v_2 \cdots v_mv_{m+1} \cdots v_n$  dove  $v_{m+1} = \cdots = v_n = v_m$ . Definiamo la sua densità come

$$\delta(T_m, v_i, \phi) = \lim_{v_j \rightarrow v_i} \delta(T_n, \phi),$$

con  $m < j \leq n$ .

**Lemma 3.3.1.** (*Böröczky*)

Siano  $T_{m,i,u_1}$  e  $T_{m,i,u_2}$  due co-ortosimplessi di  $\mathbb{S}^{n-1}$  tali che

$$\|v_1, u_1^*\|_g < \|v_1, u_2^*\|_g \quad \text{e} \quad \|v_1, u_1^{**}\|_g < \|v_1, u_2^{**}\|_g,$$

e sia  $\phi < \pi/4$  un numero positivo tale che  $\Omega(v_1, \phi)$  intersechi il sottospazio sferico generato da  $v_2, \dots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \dots, v_m$ . Allora

$$\delta(T_{m,i,u_1}, u_1, \phi) \geq \delta(T_{m,i,u_2}, u_2, \phi).$$

In particolare, siano  $T_m = v_1v_2 \cdots v_m$  e  $T'_n = v_1v'_2 \cdots v'_n$  due ortosimplessi tali che

$$\|v_1, v_m\|_g \geq \|v_1, v'_n\|_g \quad \text{e} \quad \|v_1, v_j\|_g \geq \|v_1, v'_j\|_g,$$

per ogni  $j = 2, \dots, m - i$ . Sia  $\phi < \pi/4$  un numero positivo tale che  $\phi \leq \|v_1, v'_2\|_g$  allora,

$$\delta(T_m, v_m, \phi) \leq \delta(T'_n, \phi).$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la prima parte del Lemma per induzione su  $m$ . Per  $m = 2$  risulta banale [?]. Supponiamolo vero per  $m < k \leq n$  e procediamo a dimostrarlo per  $m = k$

Siano  $p$  e  $q$  due punti di  $\widehat{u_1 v_{i+1}}$  e  $\widehat{v_{i-1} u_2}$  rispettivamente,

- Se  $k = n$  indichiamo con  $\omega_p$  e  $\omega_q$  le aree di  $T_{n,i,p}$  e  $T_{n,i,q}$  rispettivamente.
- Se  $k < n$  indichiamo con  $\omega_p$  e  $\omega_q$  le aree dei corpi convessi ottenuti ruotando  $T_{k,i,p}$  e  $T_{k,i,q}$ , rispettivamente, attorno al sottospazio sferico  $S$  generato da  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ .

Per semplicità indichiamo con

$$f_1(\omega_p) = \delta(v_1 \cdots v_{i-1} p v_{i+2} \cdots v_k, p, \phi)$$

e con

$$f_2(\omega_q) = \delta(v_1 \cdots v_{i-2} p v_{i+1} \cdots v_k, q, \phi).$$

Dall'Osservazione ?? e dall'ipotesi induttiva segue che  $f_1$  è una funzione crescente di  $\omega(p)$  mentre  $f_2$  risulta una funzione decrescente di  $\omega(q)$ .

Senza perdita di generalità assumiamo che  $T_{k,i,p}$  e  $T_{k,i,q}$  giacciono dalla stessa parte del sottospazio generato da  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ . Dimostriamo innanzitutto per  $2 < i < k$ , i casi  $i = 2$  e  $i = k$  verranno di conseguenza. Dall'Osservazione ?? sappiamo che i due segmenti sferici si intersecano in un punto che chiamiamo  $t$ .

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \delta(T_{k,i,u_1}, u_1, \phi) &= \frac{1}{\omega_p(u_1)} \int_0^{\omega_p(u_1)} f_1(\omega_p) d\omega_p, \\ \delta(T_{k,i,u_2}, u_2, \phi) &= \frac{1}{\omega_q(u_2)} \int_0^{\omega_q(u_2)} f_2(\omega_q) d\omega_q, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta(T_{k,i,t}, t, \phi) &= \frac{1}{\omega_p(t)} \int_0^{\omega_p(t)} f_1(\omega_p) d\omega_p \\ &= \frac{1}{\omega_q(t)} \int_0^{\omega_q(t)} f_2(\omega_q) d\omega_q. \end{aligned}$$

poiché  $f_1$  è una funzione crescente e  $f_2$  una funzione decrescente possiamo concludere che

$$\delta(T_{k,i,u_1}, u_1, \phi) \geq \delta(T_{k,i,t}, t, \phi) \geq \delta(T_{k,i,u_2}, u_2, \phi).$$

Vediamo ora la seconda parte del Lemma.

- Se  $m = n$ , scriviamo

$${}^i T_n'' = v_1 v_2'' \cdots v_i'' v_{i+1} v_n$$

un ortosimplesso tale che

$$\|v_1, v_j''\|_g = \|v_1, v_j'\|_g$$

per  $j = 2, 3, \dots, i$ . Allora per quanto dimostrato finora risulta

$$\delta(T_n, \phi) \leq \delta({}^2 T_n'', \phi) \leq \cdots \leq \delta({}^n T_n'', \phi) = \delta(T_n', \phi). \quad (3.2)$$

- Se  $m < n$ , scegliamo  $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$  vicini a  $v_m$  e applicando la (??) otteniamo

$$\delta(T_n, v_m, \phi) \leq \delta(T_n', \phi).$$

□

Enunciamo senza dimostare l'ultimo lemma di Böröczky [?].

**Lemma 3.3.2.** (*Böröczky*)

Sia  $\phi < \pi/4$  un numero positivo e sia  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{m(n,\phi)}\}$  un insieme discreto di punti di  $\mathbb{S}^{n-1}$  tale che le calotte sferiche di raggio  $\phi$ , centrate in tali punti formino un packing di  $\mathbb{B}^n$ . Allora per ogni  $x_i \in X$

$$\frac{s(\Omega(x_i, \phi))}{s(D'(x_i))} \leq \sigma_n(\phi).$$

### 3.4 Dimostrazione della congettura di Coxeter e il teorema di Böröczky-Coxeter

*Dimostrazione.* (Congettura di Coxeter) Sia  $\phi < \pi/4$  un numero positivo e sia  $X = \{x_1, x_2, \dots, v_{m(n,\phi)}\}$  un insieme discreto di punti di  $\mathbb{S}^{n-1}$  tali che le calotte sferiche  $\Omega(x_i, \phi)$  formino un packing in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Dal Lemma ?? possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} \frac{m(n, \phi) s(\Omega(x_1, \phi))}{n\omega_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{m(n,\phi)} s(\Omega(x_i, \phi))}{\sum_{i=1}^{m(n,\phi)} s(D'(x_i))} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m(n,\phi)} \frac{s(\Omega(x_i, \phi))}{s(D'(x_i))} \\ &\leq \sigma_n(\phi). \end{aligned}$$

Sia  $T_n = v_1 v_2 \cdots v_n$  un simpleso sferico regolare di lato geodetico  $2\phi$  e angolo diedro corrispondente  $2\alpha$ , si ha

$$m(n, \phi) \leq \frac{n\omega_n \sigma_n(\phi)}{s(\Omega(v_1, \phi))} = \frac{n^2 \omega_n s(T \cap \Omega(v_1, \phi))}{s(T) s(\Omega(v_1, \phi))}.$$

Dalla definizione delle funzioni di Schläfli abbiamo che

$$s(T) = \frac{n! n \omega_n}{2^n} F_n(\alpha).$$

Possiamo inoltre facilmente dedurre che proiettando  $T_n$  e  $\Omega(v_1, \phi)$  sull'iperpiano tangente a  $\mathbb{B}^n$  in  $v_1$

$$\frac{s(T \cap \Omega(v_1, \phi))}{s(\Omega(v_1, \phi))} = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} F_{n-1}(\alpha).$$

Possiamo quindi concludere che

$$m(n, \phi) \leq \frac{n\omega_n \sigma_n(\phi)}{s(\Omega(v_1, \phi))} = \frac{2F_{n-1}(\alpha)}{F_n(\alpha)}.$$

Dimostriamo ora la relazione tra gli angoli  $\alpha$  e  $\phi$ . Consideriamo un particolare simpleso sferico tale che le coordinate dei suoi vertici risultino  $v_1 = (b + d, b, \dots, b)$ ,  $v_2 = (b, b + d, b, \dots, b)$ ,  $\dots$ ,  $v_n = (b, b, \dots, b, b + d)$ . Ne segue che

$$\cos 2\phi = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2} = \frac{2bd + nb^2}{d^2 + 2bd + nb^2},$$

e quindi

$$\frac{1}{\cos 2\phi} = \frac{d^2}{2bd + nb^2} + 1.$$

D'altra parte possiamo dire che considerando l'angolo  $2\alpha$  formato da due degli  $n$  iperpiani

$$\Pi_i = \left\{ x : \langle u_i, x \rangle = (nb + d)x^i - b \sum_{j=1}^n x^j = 0 \right\},$$

dove  $u_i$  è la normale al piano generato dagli  $n-1$  vettori  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ , vale

$$\cos 2\alpha = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} = \frac{2bd + nb^2}{d^2 + (n-1)(2bd + nb^2)}.$$

Si ha allora che

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{d^2}{2bd + nb^2} + n - 1 = \frac{1}{\cos 2\phi} + n - 2.$$

□

**Teorema 3.4.1.** (*Teorema di Böröczky e Coxeter*)

$$k(\mathbb{B}^n) \ll \frac{\sqrt{\pi n^3}}{e\sqrt{2}} 2^{n/2}.$$

*Dimostrazione.* Usando le (??),(??) e il Lemma ??, considerando che  $\frac{1}{\cos 2\alpha} = n$  per  $2\phi = \pi/3$ , segue

$$k(\mathbb{B}^n) = m = \left(n, \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{2F_{n-1}(\alpha)}{F_n(\alpha)} \sim \frac{\sqrt{\pi n^3}}{e\sqrt{2}} 2^{n/2}.$$

□

# Bibliografia

- [1] K. Böröczky : Packing of Spheres in spaces of constant curvature, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 32, 1978,243-261.
- [2] J. H. Conway, N. J. A. Sloane: Sphere packings, lattices and groups. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [3] T. C. Hales, S.P. Ferguson: The Kepler Conjecture: The Hales-Ferguson Proof, Springer, New York, 2011.
- [4] T.H. Marshall: Asymptotic volume formulae and hyperbolic ball packing, vol.XXIV,Annales Academiae Scientiarum Fannicae, 1999, 31-32.
- [5] K. Schütte, B.L. van der Waerden: Das Problem der dreizehn Kugel, Math. Ann. 125 ,1953, 325–334.
- [6] C. L. Siegel: Lectures on the geometry of numbers. Notes by B. Friedman. Rewritten by Komaravolu Chandrasekharan with the assistance of Rudolf Suter. With a preface by Chandrasekharan. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] C. Zong: Sphere Packings, Springer, New York, 1999.