

ALMA Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Meccanismi di produzione dell'energia in
astrofisica

Elaborato Finale

Candidato:

Marco Canducci

Relatore:

Prof. Daniele
Dallacasa



Sessione II° 2 Seduta Invernale
Anno Accademico 2013/2014

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Caratterizzazione di un gas	1
1.2	Leggi di conservazione e Onde sonore	2
2	Onde d'urto	5
2.1	L'onda d'urto in un gas politropico	8
2.2	Onda d'urto sferica implodente	10
3	Supernovae	12
3.1	Classificazione	13
3.2	Supernovae di tipo Ia	13
3.3	Esplosione	14

1 Introduzione

Prima di fornire una formulazione esaustiva dell'onda d'urto, è d'uopo definire il gas come oggetto fisico e le sue principali caratteristiche. Quanto si farà nei paragrafi seguenti quindi, sarà tentare di formalizzare il sistema gassoso dal punto di vista fisico e matematico. Sarà necessario introdurre un modello del sistema (par.1.1) che ci permetta di lavorare a livello statistico sull'insieme di particelle che lo compongono per caratterizzare le funzioni termodinamiche classiche come medie temporali. Tramite queste considerazioni si stabilirà quali sono le quantità che si conservano nel moto di un fluido e si vedrà che tali leggi di conservazione formano un sistema di 5 equazioni differenziali parziali in 6 incognite. Tramite la linearizzazione di questo sistema si individueranno delle soluzioni chiamate *onde sonore* che danno un'indicazione sul modo in cui si propagano delle perturbazioni all'interno di un fluido; in particolar modo saranno utili per la determinazione del *numero di Mach* che rende possibile la distinzione tra due regimi: subsonico e supersonico (par.1.2). Sarà possibile, a questo punto, indagare il fenomeno dell'onda d'urto (par.2) e, nel dettaglio, due casi particolarmente utili in contesto astrofisico quali: l'onda d'urto per un gas politropico (par.2.1), un'onda d'urto sferica che avanza verso il suo centro (par.2.2). Lo scopo di questa trattazione è indagare, o se non altro tentare, quanto avviene in un'esplosione di Supernova (par.3). Relativamente a questo fenomeno, ne viene data una classificazione sommaria (par.3.1), mentre particolare attenzione sarà rivolta alle Supernovae di tipo **Ia** (par.3.2) che grazie alla loro luminosità standard costituiscono un punto di riferimento nell'Universo visibile.

1.1 Caratterizzazione di un gas

La *Teoria cinetica dei gas* permette di definire in maniera esaustiva la struttura del sistema in considerazione. Essa si basa su sei assunzioni:

- Le molecole componenti il gas sono considerate come punti materiali e sono distribuite uniformemente nello spazio in cui sono confinate. Gli urti tra queste e le pareti sono perfettamente elastici;
- Il numero delle molecole è grande, quindi possono essere usati metodi statistici per la determinazione delle quantità macroscopiche;
- Il volume totale delle molecole del gas è trascurabile rispetto al volume del contenitore;
- L'interazione tra le molecole è trascurabile ad eccezione degli urti che avvengono in maniera impulsiva;
- Le molecole sono perfettamente sferiche;
- Gli effetti relativistici e quantistici sono trascurabili.

Sotto queste ipotesi quindi, essendo un gas di "sfere dure" un sistema ergodico¹, vale il *II teorema di Liouville*:

¹Ossia un sistema le cui particelle occupano, in un tempo sufficientemente lungo, tutto lo s.d.f. in cui sono vincolate.

Se $\langle F \rangle_t$ è indipendente da $\vec{z}(0)$, allora

$$\langle F \rangle_t = \frac{1}{\mu(\Sigma(E))} \int d_\sigma \vec{z} F(\vec{z}) = F(T, V) \quad (1.1)$$

Con

- $\vec{z} = (\vec{p}, \vec{q})$: punto dello spazio delle fasi (s.d.f.);
- $\Sigma(E) = \{\vec{z}; H(\vec{z}) = E\}$: superficie equi-energetica nello s.d.f. (H è l'Hamiltoniana del sistema);
- $\mu(\Sigma(E))$: misura integrale della superficie equi-potenziale;
- $\int d_\sigma \vec{z} F(\vec{z})$: integrale di superficie.

e

$$\langle F \rangle_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(\vec{z}(t')) dt: \text{media temporale della misura termodinamica.}$$

Come si può notare da questo teorema le funzioni termodinamiche macroscopiche sono in realtà determinate da medie temporali delle proprietà dinamiche dei singoli elementi costituenti il sistema complessivo. Ovviamente il limite non rappresenta un tempo realmente infinito, bensì un tempo sufficientemente lungo rispetto alla durata delle interazioni tra le singole particelle. Per cui un gas può essere visto come un sistema microcanonico (ovvero isolato) composto da N sistemi canonici distinguibili. L'ergodicità di tale sistema è garantita dallo scambio di calore attraverso gli urti, come ipotizzò L. Boltzmann, fondatore della termodinamica statistica.

Per poter procedere con l'indagine è essenziale distinguere tra due possibili approcci alla fluidodinamica: Lagrangiano ed Euleriano. Il primo guarda al fluido seguendone i singoli elementi durante il moto. Il secondo invece considera una regione di controllo ed osserva gli elementi del fluido al loro passaggio attraverso tale regione. Prevedibilmente i due approcci raggiungono le stesse conclusioni, per cui l'indagine attraverso l'uno o l'altro è equivalente. In questo contesto si userà una trattazione Euleriana.

1.2 Leggi di conservazione e Onde sonore

Se si considera un volume finito dello spazio, in cui sia contenuto un fluido come descritto nel paragrafo 1.1, si noterà che al variare delle condizioni del sistema, alcune quantità rimangono costanti. Esistono quindi delle leggi di conservazione che danno la dipendenza delle quantità termodinamiche dalle coordinate spaziali e temporali. Ciò permette di seguire le variazioni che il sistema subisce e di conseguenza come evolve nel tempo e nello spazio. Ovviamente, non in tutti i casi è possibile trattare un fluido con esattezza e quindi si ricorre ad approssimazioni e semplificazioni che, pur non rappresentando fedelmente il sistema indagato, possono fornire informazioni preziose. Le leggi di conservazione per un fluido sono 3 e precisamente:

1. *Equazione di continuità della massa:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

2. *Equazione di Navier-Stokes:*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \phi + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (1.3)$$

3. *Equazione per l'energia*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] \quad (1.4)$$

Dove \vec{v} è la velocità dell'elemento di fluido; $\frac{\eta}{\rho}$ viene spesso indicata con ν (*viscosità cinematica*) e tiene conto degli effetti dovuti alla frizione (qualora sia presente); P è la pressione, $\vec{\nabla} P$ dà le forze agenti sulla superficie; $-\vec{\nabla} \phi = \frac{\vec{f}}{\rho}$ fornisce invece le forze esterne al sistema termodinamico ed agenti sul volume; w è l'entalpia per unità di massa ed è tale che: $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho} = \varepsilon + PV$.

Si è ottenuto quindi, un sistema di 5 equazioni in 6 incognite. Perchè il sistema sia risolvibile completamente bisogna assumere un'equazione di stato. Spesso, in prima approssimazione, si utilizza come relazione aggiuntiva l'equazione di stato dei gas perfetti, tuttavia non sempre tale scelta risulta adeguata. La viscosità cinematica ν di un gas è dell'ordine di grandezza del prodotto tra il libero cammino medio delle particelle l e la loro velocità media dovuta al moto termico, $\nu \sim c_s l$; inoltre tale velocità media è dell'ordine della velocità del suono del gas. Esiste un parametro che mette in relazione gli effetti dovuti all'inerzia e quelli dovuti alla viscosità ed è tale da aumentare al diminuire della viscosità. Il *Numero di Reynolds* rappresenta a tutti gli effetti lo stato di turbolenza del sistema e può essere scritto, in prima approssimazione, come $R \sim \frac{Lu}{\nu}$ e quindi:

$$R \sim \frac{Lu}{c_s l}$$

Nella dinamica dei gas, i numeri di Reynolds sono generalmente molto elevati, il che vuol dire che i sistemi studiati sono maggiormente sistemi con bassa viscosità (e quindi alta turbolenza), infatti se u (velocità caratteristica) è dell'ordine della velocità del suono c_s , allora il numero di Reynolds dipenderà principalmente dal solo rapporto $\frac{L}{l}$, che generalmente è molto alto. Ciò vuol dire che nel contesto della dinamica dei gas la viscosità risulta essere trascurabile e il gas può essere trattato come un *fluido ideale*; inoltre l'equazione di Navier-Stokes può essere sostituita dalla più semplice e maneggevole *equazione di Eulero*, anche detta di *conservazione del momento*:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (1.5)$$

È noto che, matematicamente, tutti i sistemi lineari sono risolvibili; quello costruito fino ad ora, tuttavia, non è lineare, per cui la determinazione di soluzioni non è così semplice come si potrebbe pensare. È possibile però linearizzarlo, e renderlo risolvibile. Si consideri un fluido compressibile inizialmente a riposo in cui le forze esterne siano trascurabili. Se ad un dato istante viene generata una piccola perturbazione delle condizioni iniziali (ρ_0, P_0) allora è possibile linearizzare le equazioni del sistema trovato e precisamente:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0; \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P' = \vec{0} \quad (1.6)$$

Dove: $P = P_0 + P'$ $\rho = \rho_0 + \rho'$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}'$.

Considerando che i fluidi ideali, in prima approssimazione, possono essere trattati come adiabatici, possiamo imporre la condizione di adiabaticità conoscendo la relazione tra pressione e volume (o tra pressione e densità): $PV^\gamma = \text{cost.}$ ² $\rightarrow P \propto \rho^\gamma$ e quindi

$$P' = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho'$$

Sostituendo nell'equazione di continuità linearizzata si ottiene:

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad (1.7)$$

Ponendo ora $\vec{v}' = \vec{\nabla} \phi$ ³ si ricava $P' = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Inoltre, considerando il caso unidimensionale, e sostituendo in (1.6) si ricava l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

che altro non è che un'equazione delle onde la cui soluzione è un'onda piana che si propaga con velocità c_s (detta *velocità del suono*) pari a:

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^{\frac{1}{2}}$$

Quanto detto vale per velocità, pressione e densità. Le onde soluzioni dell'equazione suddetta sono nella forma:

$$\phi = f_1(x - c_s t) + f_2(x + c_s t)$$

in cui il membro con indice 1 rappresenta un'onda piana che si propaga lungo x crescente, mentre quello con indice 2 lungo x decrescente. Da notare come la velocità del suono vari a seconda del tipo di perturbazione e di gas che si sta considerando. Ad esempio, per un gas politropico, se la perturbazione è adiabatica, si avrà una velocità del suono data da $c_s = \gamma \frac{kT}{\mu m_H}$; se invece si considera una perturbazione isoterma c_s varrà $\frac{kT}{\mu m_H}$. In sostanza quindi la velocità del suono ci dà un limite di variabilità del sistema se attraversato da perturbazioni. Si consideri una regione di gas di dimensione lineare L; se in tale regione si crea una perturbazione della pressione istantanea, allora le altre regioni del sistema non sentiranno la perturbazione prima di un tempo dato da: L/c_s chiamato *sound crossing time*. Per un moto supersonico, ad esempio, con $|\vec{v}'| > c_s$ si avrà:

$$\frac{L}{|\vec{v}'|} < \frac{L}{c_s}$$

² $\gamma = c_p/c_v$ viene chiamato *indice politropico* e varia a seconda della composizione del gas: per un gas monoatomico ha il valore 5/3, per un gas biatomico invece 7/5, ecc.

³Infatti, come conseguenza del *Teorema di Kelvin*, in un fluido ideale la vorticità $\vec{\omega}$ si conserva e avendola posta uguale a zero all'istante iniziale (il sistema è inizialmente a riposo) si ottiene che quest'ultima rimane tale in ogni istante. Essendo per definizione $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ si ha che \vec{v} è un campo irrotazionale e quindi esiste una funzione scalare ϕ tale che $\vec{v} = \nabla \phi$.

Quindi il gradiente di pressione avrà uno scarso effetto sul moto del fluido. Nei fluidi le onde sonore sono onde longitudinali, nel senso che le perturbazioni si propagano lungo una sola direzione. È utile a questo punto definire il numero di Mach come:

$$M^2 = \frac{v^2}{c_s^2}$$

A seconda del valore del numero di Mach, il moto del fluido può essere definito in due modi differenti:

- Per $M > 1$ supersonico;
- Per $M < 1$ subsonico.

Si consideri allora un'onda sonora propagantesi lungo x crescente: $\phi = f(x - c_s t)$. Essendo l'onda longitudinale avremo che $\vec{v}' = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} = f'$ e $P' = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = c_s\frac{\rho'}{\rho}$. Ora, essendo $P' = c_s^2\rho$ si ottiene:

$$\frac{\rho'}{\rho} \simeq \frac{v'}{c_s} = M$$

Un fluido può essere considerato incompressibile solo se $\frac{\rho'}{\rho} \ll 1$, ma ciò riconduce direttamente alla condizione che il moto del fluido stesso sia subsonico:

$$\frac{\rho'}{\rho} \simeq M \ll 1$$

2 Onde d'urto

Tramite la formulazione esposta nei capitoli precedenti, è possibile finalmente introdurre il concetto di onda d'urto ed indagare quali sono le conseguenze di tale fenomeno in un fluido, per poi poter applicare quanto trovato in un contesto astrofisico. Citando il professor R. Fanti:

Un'onda d'urto è una discontinuità irreversibile dello stato termodinamico di un mezzo che si propaga attraverso di esso.

Si consideri a titolo esemplificativo il caso unidimensionale. Come può crearsi tale discontinuità all'interno di un fluido in quiete? Si pensi ad un pistone che all'istante $t = 0$ comincia a spingere il gas davanti a se' con velocità u . Le condizioni di quiete iniziali del gas quindi, vengono perturbate. Tali perturbazioni si spostano attraverso il fluido con velocità pari alla velocità del suono. Il tempo caratteristico con cui esse vengono formate può essere considerato così piccolo da identificarle come adiabatiche. Proprio per questo motivo la velocità del suono nel gas davanti al pistone (nel senso del moto) è $c_s^{ad} \propto \rho^{(1/3)}$. Esso aumenta la sua densità a causa della compressione esercitata dal pistone stesso. Si consideri l'evoluzione del sistema in tre istanti successivi (fig. 1). Si può notare come, in tale situazione, la densità del gas aumenti all'avanzare del pistone attraverso di esso. Nel primo istante, il pistone genera la regione 1 del grafico: quella a minore densità; nell'istante successivo la regione 2 in cui il gas è più denso della regione 1; infine, nell'istante finale, viene generata la regione 3 in cui il gas ha una densità maggiore delle due regioni precedenti. In pratica lo stadio evolutivo finale è del tipo:

$$\rho(3) > \rho(2) > \rho(1)$$

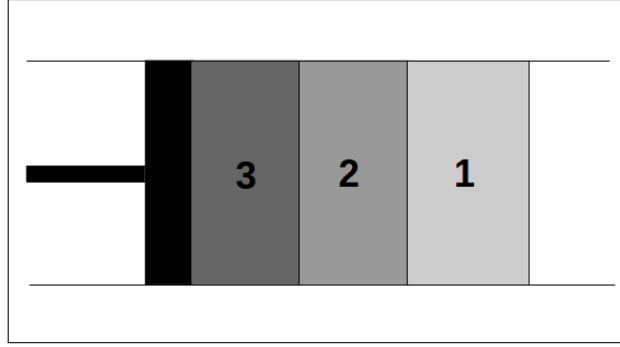


Figura 1: Variazione di densità causata dal moto di un pistone. Regioni più scure implicano zone più dense. [3]

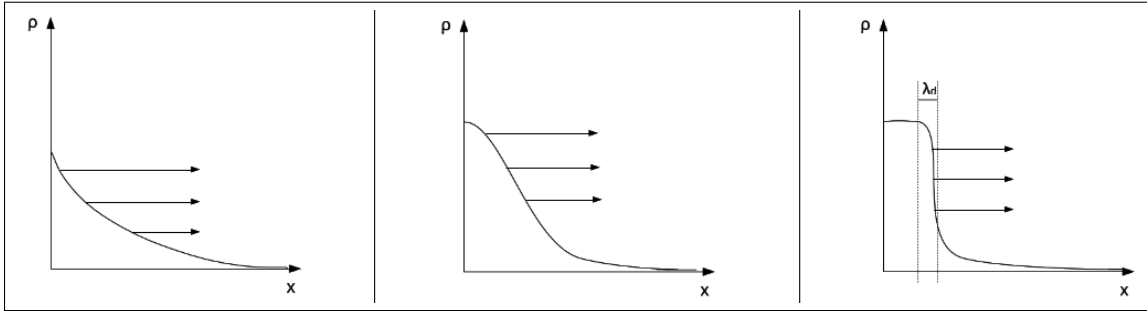


Figura 2: Variazione della densità in funzione della sola variabile spaziale. [3].

Ciò implica che anche le velocità del suono seguono un andamento di questo tipo:

$$c_s(3) > c_s(2) > c_s(1)$$

Perciò le perturbazioni create consecutivamente dal pistone si muovono a velocità sempre maggiori, di moto supersonico rispetto alle perturbazione generate precedentemente (il moto di ogni perturbazione è supersonico poichè si propaga in un ambiente con velocità del suono minore rispetto alla propria). Ma da quanto detto nel paragrafo 1.2, le perturbazioni non vengono percepite dalle regioni esterne a quelle in cui sono confinate prima di un tempo pari al *sound crossing time*. Per cui (fig. 2) il profilo di densità si deforma sempre più all'aumentare del tempo, fino a che non si genera una superficie di discontinuità (di spessore paragonabile al libero cammino medio delle particelle del gas: $\lambda_d = \frac{1}{n\sigma}$; n: densità numerica, σ : *cross section* del fenomeno). Ora si può assumere che il fluido sia in equilibrio termodinamico e che sia stazionario (nel senso che le variazioni spaziali e temporali siano così piccole da poter essere trascurabili $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$, con f una generica funzione termodinamica) ovunque tranne che sulla superficie di discontinuità, il cui spessore può essere considerato infinitesimo.

Nella parte destra di figura 3 è mostrata la situazione reale in cui il gas alla sinistra della discontinuità è perturbato e quello alla destra risulta ancora essere stazionario ($v_1 = 0$); la superficie di shock si muove attraverso il fluido con una velocità V_{shock} maggiore della velocità del suono del fluido 1 imperturbato. Di solito il moto del fluido di sinistra viene identificato come *downstream*, mentre quello di destra come *upstream*. Nella parte sinistra invece, viene mostrata la scelta del sistema di coordinate che verrà utilizzata in questo elaborato. In tale sistema la superficie di shock è fissa, inoltre, dato il suo spessore infinitesimo, la medesima superficie può essere considerata come piatta e quindi su di essa può essere definita la normale. Si pone parallelo a tale normale il vettore x . Da notare che, in un sistema di riferimento di questo tipo, il gas 1 risulta cadere sulla

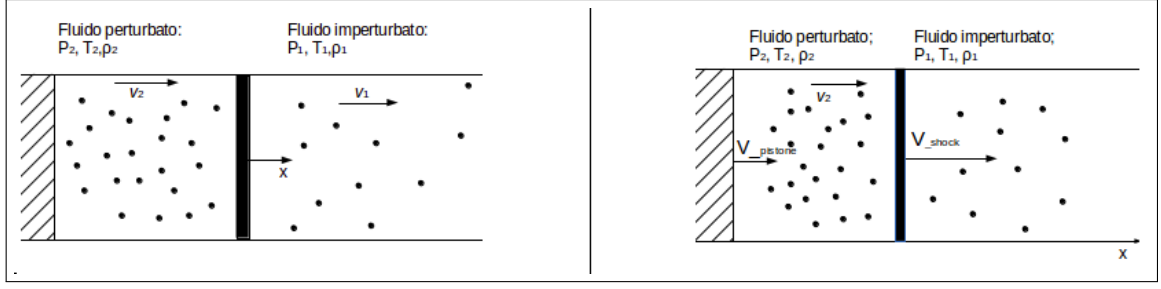


Figura 3: Nell'immagine di sinistra viene presentato il sistema di riferimento con l'asse delle x parallelo alla normale della superficie di discontinuità, mentre nell'immagine di destra è presentato il sistema reale, con la superficie di shock in movimento.

superficie in esame. Tramite le leggi di conservazione esposte nel capitolo precedente (1.2), è possibile determinare la variazione delle grandezze termodinamiche fondamentali P , ρ , T . Si adopererà la notazione $[a] = a_1 - a_2$, laddove 1 e 2 rappresentano, appunto, i fluidi imperturbato e perturbato reciprocamente. Le quantità conservate allora saranno:

- Il *flusso di massa*:

$$[\rho v_x] = 0 \quad (2.1)$$

- Il *flusso di energia*:

$$\left[\rho v_x \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] = 0 \quad (2.2)$$

- Il *flusso del momento*:

$$[P + \rho v_x^2] = 0; \quad [\rho v_x v_y] = 0; \quad [\rho v_x v_z] = 0 \quad (2.3)$$

Dove con w viene indicata l'*entalpia per unità di massa*. Queste equazioni possono dare due risultati differenti a seconda che:

1. Non ci sia flusso di massa attraverso la superficie di discontinuità;
2. Ci sia flusso di massa attraverso la superficie di discontinuità.

Non è lo scopo del presente elaborato indagare il primo caso, mentre ben più interessante risulta essere il secondo. In questo caso infatti $v_{1,x} \neq v_{2,x} \neq 0$, che implica $[v_y] = [v_z] = 0$ e quindi la velocità tangenziale è continua sulla superficie di discontinuità, mentre non lo sono ρ , P e v_x . Si possono allora riscrivere le equazioni (2.1)-(2.2)-(2.3) considerando $v = v_x$:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j; \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2; \quad w_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} v_2^2. \quad (2.4)$$

con j : *flusso di densità di massa attraverso la superficie di discontinuità* Esprimendo i Volumi specifici come $V_1 = \frac{1}{\rho_1}$ e $V_2 = \frac{1}{\rho_2}$ e inserendoli in 2.4 si ottiene:

$$v_1 = jV_1; \quad v_2 = jV_2; \quad \implies [v] = j[V]; \quad [P + j^2 V_1] = 0 \quad \implies j^2 = -\frac{[P]}{[V]} \quad (2.5)$$

e quindi, a causa della positività di j^2 (per definizione), si possono verificare due condizioni:

- $P_2 > P_1$ e simultaneamente $V_2 < V_1$ ($\rho_2 > \rho_1$);

- $P_2 < P_1$ e simultaneamente $V_2 > V_1$ ($\rho_2 < \rho_1$).

E' dimostrabile che può valere solo la prima condizione; questa implica $v_1 > v_2$, e che quindi il mezzo imperturbato, come già preannunciato, appaia avanzare verso lo shock con una velocità maggiore di quella con cui il mezzo perturbato se ne allontana. Si consideri ora l'equazione per l'entalpia di 2.4. Questa può essere riscritta come: $w_1 + \frac{1}{2}j^2V_1^2 = w_2 + \frac{1}{2}j^2V_2^2$ e quindi

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(P_2 - P_1) = 0 \quad (2.6)$$

Sapendo poi che $w = \varepsilon + PV$, con ε l'energia per unità di massa, si ottiene:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(P_1 + P_2) = 0 \quad (2.7)$$

Queste due relazioni ci permettono di determinare, per ogni P_1 e V_1 , i relativi P_2 e V_2 . La seconda equazione, in particolare, viene chiamata *Adiabatico di shock* o di *Hugoniot-Rankine* ed esprime la variazione dell' energia interna del fluido causata dal lavoro medio $P < \Delta V >$ fatto attraverso la superficie di shock. Un fatto essenziale del fenomeno dell'onda d'urto è che l'entropia del gas perturbato è maggiore di quella del gas imperturbato, infatti, come detto all'inizio del capitolo, la discontinuità generata dall'onda d'urto è irreversibile.

$$S_2 > S_1$$

Quindi generalmente, tramite l'onda d'urto viene dissipata energia.

2.1 L'onda d'urto in un gas politropico

Si consideri ora un gas politropico (tale per cui $PV^\gamma = cost.$); l'entalpia in questo caso è riscrivibile come: $w = c_p T = \frac{\gamma PV}{\gamma - 1} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1}$. Sostituendo in (2.3) si ottiene:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2}{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2} \quad (2.8)$$

In figura 4 viene mostrato l'adiabatico di shock per un γ generico.

Gli asintoti del grafico sono dati da:

$$\begin{cases} \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ \frac{P_2}{P_1} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{cases}$$

Dovendo prendere in esame solo $P_2 > P_1$ e $V_2 < V_1$ simultaneamente, si ritiene rilevante il solo braccio di iperbole a riga continua, cioè tale che: $\frac{P_2}{P_1} > 1$ e $\frac{V_2}{V_1} < 1$.

Per i due fluidi si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 (\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2}{P_1 (\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2} \quad (2.9)$$

inoltre si ricava:

$$j^2 = \frac{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2}{2V_1} \quad (2.10)$$

che implica, per le velocità:

$$v_1^2 = \frac{1}{2}V_1[(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2] = \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{\gamma} \left[\gamma - 1 + (\gamma + 1) \frac{P_2}{P_1} \right] \quad (2.11)$$

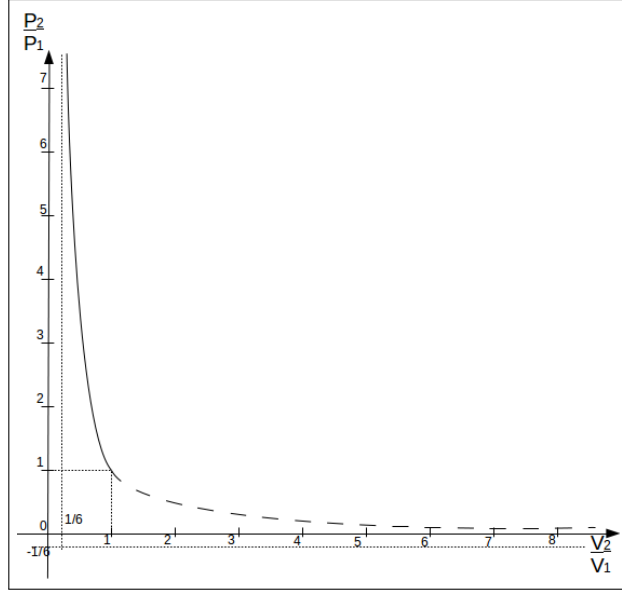


Figura 4: Adiabatico di shock per $\gamma = 7/5$. [1].

$$v_2^2 = \frac{V_1[(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2]^2}{2[(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2]} = \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{\gamma} \left[\gamma - 1 + (\gamma + 1) \frac{P_1}{P_2} \right] \quad (2.12)$$

Da queste due ultime relazioni si ottiene:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{2V_1(P_2 - P_1)}{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2}} (P_2 - P_1) \quad (2.13)$$

Ricordando ora la definizione del numero di Mach: $M = \frac{v}{c_s}$ è possibile ricavarsi le seguenti equazioni:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}, \quad (2.14a)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad (2.14b)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1}. \quad (2.14c)$$

Notare che nell'equazione (2.14a) si è posto: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$ proprio a causa della conservazione del flusso di massa attraverso la superficie di shock. Inoltre è possibile esprimere M_2 in funzione di γ e di M_1 , precisamente:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (2.15)$$

E' possibile semplificare tali relazioni se si considera un'onda d'urto molto forte, quindi tale per cui il gradiente di pressione attraverso la discontinuità è molto elevato ($(\gamma - 1)P_2 \gg (\gamma + 1)P_1$). Si ottiene allora:

$$\begin{cases} \frac{V_2}{V_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma - 1)P_2}{(\gamma + 1)P_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M^2, \\ \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 \end{cases}$$

Sotto tali condizioni quindi, il moto della superficie di shock è altamente supersonico ($M_1 \gg 1$). Lo shock, attraversando il fluido, lo comprime, lo riscalda e lo trascina dietro di sé. T_2 e P_2 possono diventare arbitrariamente grandi, mentre ρ_2 non può superare il valore limite: $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1$. Se si considera un gas monoatomico ($\gamma = \frac{5}{3}$) si può notare che

$$\rho_2 \simeq 4\rho_1$$

$$u_2 \simeq \frac{u_1}{4}$$

Riportandosi ora nel sistema originario (quello realistico mostrato in fig 3) il mezzo imperturbato risulta fermo; lo shock si propaga con velocità supersonica v_1 attraverso di esso, mentre quello perturbato segue la discontinuità con velocità $v'_2 = v_1 - v_2$, che, ad ogni modo, rimane supersonica, ma lievemente con un numero di Mach:

$$M_2 = v'_2/c_{s2} \simeq 1.3$$

2.2 Onda d'urto sferica implodente

Si consideri un sistema sferico come illustrato in figura 5 in cui un pistone, inizialmente a riposo, al raggio R_0 applica una perturbazione al gas contenuto al suo interno. Se ci poniamo in condizioni $R \ll R_0$ possiamo considerare la perturbazione indipendente dalle condizioni iniziali. Inoltre lo shock considerato viene assunto forte, e quindi tale per cui $P_2 \gg P_1$ (dove con gli indici 1 e 2 ci si riferisce, come sempre, ai fluidi imperturbato e perturbato rispettivamente). L'energia totale contenuta nella sfera di raggio $r \sim R \ll R_0$ non è costante. Le dimensioni spaziali del moto sono date dalla posizione dello shock: $R(t)$ e la velocità da $\frac{dR}{dt}$.

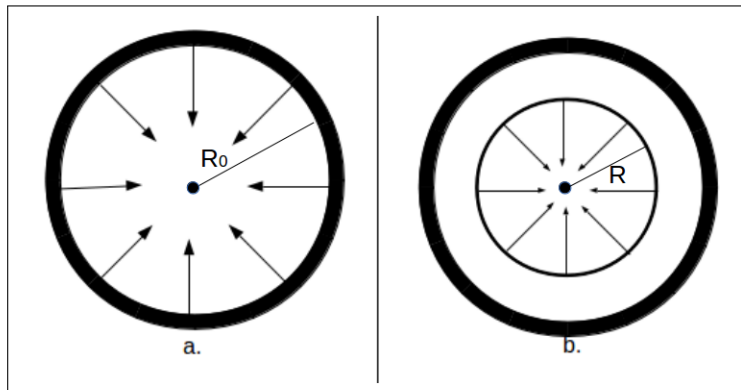


Figura 5: a.: Il pistone, all'istante t_0 nella posizione R_0 , genera una compressione del gas al suo interno; b.: Tale perturbazione si propaga nel fluido in direzione radiale verso il centro della distribuzione di densità.

Grazie all'adimensionalità del numero di Reynolds è possibile trattare fluidi simili (dove per simili si intende appunto con numero di Reynolds uguale) nello stesso modo, indipendentemente dalle scale di grandezza utilizzate (tale principio prende il nome di "Legge di similarità"). Grazie a questo si può dire che il moto del fluido è auto-similare nella variabile indipendente: $\xi(t) \equiv \frac{r}{R(t)}$. Ponendo $t = 0$ nel punto in cui l'onda è focalizzata ($R = 0$) si definisce il tempo antecedente, e quindi quello in considerazione, negativo. Infine, per quanto detto, si impone $R(t) = A(-t)^\alpha$, con A costante e α : *indice iniziale di*

similarità da determinarsi. Per risolvere le equazioni del moto si possono utilizzare delle funzioni adimensionali dipendenti solo da ξ , determinanti le funzioni termodinamiche da trovare:

$$v = \frac{\alpha r}{t} V(\xi); \quad \rho = \rho_1 G(\xi); \quad c^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi). \quad (2.16)$$

Laddove v è la velocità radiale del fluido relativa a coordinate fisse in cui $r = R_0$ e il fluido è a riposo. Essendo il moto dello shock in direzione radiale verso il centro, r decresce all'aumentare del tempo, ciò rende negativa la velocità e quindi positiva la funzione $V(\xi)$. Estendendo la validità di v a tutto lo spazio (e quindi anche a $r > R_0$ e $t < 0$) si rende la variabile ξ tale per cui: $1 \leq \xi < \infty$. Ciò implica che si debbano dare dei valori delle funzioni V, G e Z nei punti $\xi = 1, \infty$; questo non è un problema se si considera che $\xi = 1$ significa, per definizione, porsi sulla superficie dello shock, mentre per $\xi = \infty$ si intende contemporaneamente $t = 0$ e $r \neq 0$, il che porta, data la finitezza di v, ρ e c^2 ad ogni distanza dal centro, a considerare $V(\infty) = 0$ e $Z(\infty) = 0$. Le equazioni della fluidodinamica in coordinate sferiche diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{P}{\rho^\gamma} = 0. \end{cases}$$

Sostituendo al loro interno le funzioni sopra definite, e dopo un po' di algebra, il sistema finale si presenta nel modo seguente:

$$\frac{d \ln \xi}{dV} = -\frac{Z - (1 - V)^2}{(3V - k)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)} \quad (2.17)$$

$$(1 - V) \frac{d \ln G}{d\xi} = 3V - \frac{(3V - k)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)}{Z - (1 - V)^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\frac{dZ}{d \ln \xi}}{\frac{dV}{d \ln \xi}} = \frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{1 - V} \left\{ \frac{[Z - (1 - V)^2][2/\alpha - (3\gamma - 1)V]}{(3V - k)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)} + \gamma - 1 \right\} \quad (2.19)$$

Il problema quindi si riduce alla determinazione di $Z(V)$. Nel piano V - Z la curva integrale dovrà avere inizio in $Y = (V(1), Z(1))$; La curva 1 è la parabola: $Z = (1 - V)^2$. Y è al di sopra di tale parabola. La condizione $V(\infty) = 0; Z(\infty) = 0$ dice che la soluzione del problema deve attraversare la parabola per arrivare in Y . Dalle equazioni 2.17 e 2.18 si vede che le derivate dipendono entrambe da: $Z - (1 - V)^2$ al denominatore. Quindi se $Z - (1 - V)^2$ non va a 0, nel punto di intersezione tra la curva integrale (tratteggiata in figura) e la parabola 1 deve valere: $(3V - k)Z = V(1 - V)(1/\alpha - V)$ (curva 2).

Per cui la curva integrale deve passare per il punto di intersezione tra 1 e 2 per poi procedere verso l'origine. Questo punto di intersezione, risulta essere un punto di singolarità per l'equazione 2.19. Tramite metodi generali della "teoria qualitativa delle equazioni differenziali" si riescono a determinare, per $\gamma < \gamma_1 = 1.87$, V, Z e G in funzione dei soli parametri α e ξ , che inseriti successivamente nelle definizioni iniziali di v, ρ e c danno:

$$\begin{cases} |v| \propto r^{-\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \\ \rho = \text{cost.} \\ p \propto r^{-2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \end{cases}$$

Tramite considerazioni successive, è possibile scoprire come l'energia contenuta nella regione di similarità, diminuisca all'aumentare del tempo, infatti:

$$E \propto R^{5-\frac{2}{\alpha}} \propto (-t)^{5\alpha-2}$$

e l'esponente $5\alpha - 2$ risulta essere positivo per ogni γ . Dopo aver raggiunto il centro della distribuzione di gas, si può formare un'onda d'urto riflessa che si espande con verso opposto a quella collassata, comprimendo ulteriormente il gas che sta cadendo verso il centro. Anche questo sistema si scopre essere un moto di similarità con lo stesso indice α del precedente, ma con evoluzione temporale:

$$R \propto t^\alpha$$

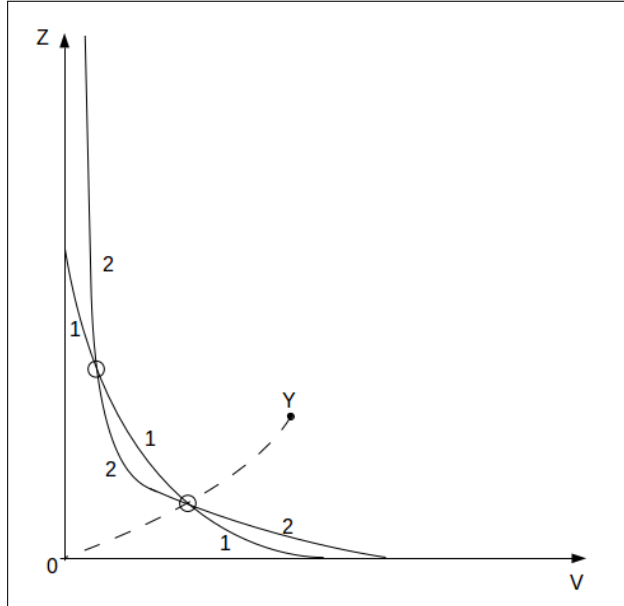


Figura 6: Rappresentazione delle tre curve in esame. Tratta da [1].

3 Supernovae

Le Supernovae sono state scoperte a causa della loro enorme luminosità in banda ottica. Esse sono dovute ad esplosioni di stelle massicce, con masse maggiori di 7 o 8 M_{\odot} . Non è semplice, ad ogni modo, assistere al verificarsi di un fenomeno di questo tipo. Infatti le esplosioni di Supernova sono eventi relativamente rari, ad esempio, all'interno di una galassia come la Via Lattea (tra le più grandi all'interno del Gruppo Locale) si produce all'incirca una SNI ogni 200 anni e una SNII ogni 100 . Per ovviare a questo problema bisogna estendere le osservazioni a più galassie contemporaneamente. Va considerato inoltre, che, generalmente, la durata di questo fenomeno è breve rispetto ai tempi cosmici a cui si è abituati. Infatti, il picco di luminosità di una SNI dura all'incirca una ventina di giorni (fig.7), mentre quello di una SNII può durare anche qualche mese. Ovviamente tale durata varia di fenomeno in fenomeno.

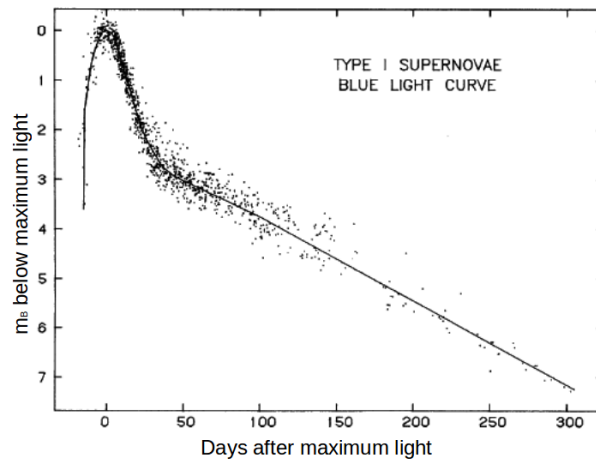


Figura 7: Curva composta di luce blu per SNI, da Dogget e Branch(1985), basata sull'articolo di Barbon, Ciatti e Rosino (1973).Tratta da [2].

Infine, bisogna comunque tener conto del fatto che i meccanismi di produzione di tale fenomeno non sono generalmente esatti, nel senso che, per spiegarli, bisogna ricorrere a modelli e semplificazioni che portano necessariamente ad una rappresentazione approssimativa dei fenomeni stessi.

3.1 Classificazione

Per motivi storici, la classificazione delle Supernovae è prettamente sperimentale, infatti ne viene data una suddivisione puramente spettrale, ossia, vengono indicate come Supernovae di tipo II (da ora in poi SNeII) quelle in cui sono presenti le righe di H della serie di Balmer, come Supernovae di tipo I (d'ora in poi SNeI) quelle in cui l'H non è presente. Di queste ultime è possibile fare un'ulteriore classificazione: se sono presenti righe di Si, allora vengono indicate con la lettera " a " (SNeIa); quelle in cui non sono presenti righe di Si ma di He, con la lettera " b " e infine con la lettera " c " quelle in cui non è presente neanche l'He. È possibile, tuttavia, individuare un senso fisico nelle distinzioni tra i vari tipi di Supernovae; queste distinzioni fondamentali sono nel tipo di fenomeno che le genera. Si possono individuare infatti due fenomeni principali: il collasso gravitazionale del nucleo della stella e l'innescio esplosivo di CO su una WD in un sistema binario. Il primo fenomeno sembrerebbe essere alla base delle supernove di tipo II, Ib e Ic, che vengono quindi spesso identificate con il termine *core collapse*. Le SNeIa invece, costituiscono una classe a se' stante, poichè la loro formazione è giustificata solo attraverso lo scambio di massa all'interno di un sistema binario. Le ultime risultano essere di enorme interesse nell'ambito della cosmologia. Infatti il loro verificarsi è dovuto al raggiungimento da parte di una delle due stelle (generalmente una nana bianca) della massa di Chandrasekhar (pari a $1.44M_{\odot}$), che costituisce un limite per il bilanciamento tra pressione degli elettroni degeneri e forza gravitazionale. Proprio per questo motivo l'indagine attorno a questo secondo tipo è stata maggiormente approfondita e quindi è possibile conoscere, con maggior chiarezza, qual'è il fenomeno da cui scaturisce. È per questa stessa ragione che i prossimi paragrafi verteranno su tale argomento.

3.2 Supernovae di tipo Ia

Come si è già detto, le Supernovae di tipo Ia sono interpretabili solo tramite l'evoluzione di un sistema binario; è possibile distinguere due diverse modalità, che vengono indicate come:

Double Degenerate Scenario (DD) : Due stelle di massa intermedia sono evolute attraverso una serie di *envelope* in comune. Questo tipo di evoluzione può portare il sistema ad una situazione in cui due nane bianche composte prevalentemente da Carbonio e Ossigeno (da ora in poi CO WD) superano complessivamente la massa limite di Chandrasekhar. È possibile, che tramite emissione di onde gravitazionali vi sia una perdita di momento angolare del sistema e quindi le due WD possono collassare l'una sull'altra, dando vita ad un oggetto la cui massa, appunto, non garantisce l'equilibrio idrostatico. Di conseguenza, la forza gravitazionale del nuovo sistema, non essendo più bilanciata dalla pressione degli elettroni degeneri, lo fa collassare.

Single Degenerate Scenario (SD) : Una CO WD si trova in un sistema binario stretto ed accresce massa dalla compagna, come è mostrato in fig. 8.

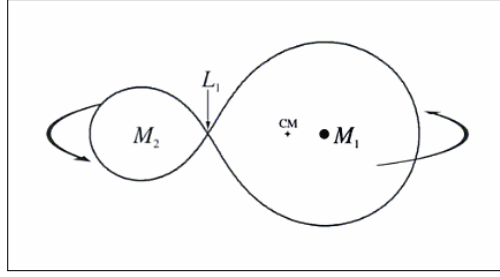


Figura 8: Sistema binario in cui il lobo di Roche della massa secondaria è completamente riempito dell'atmosfera della stella; La massa che raggiunge il punto lagrangiano L_1 fluisce nel lobo del primario accrescendone la massa. Tratta da [3]

La trattazione di un sistema di questo tipo si basa sull'interazione gravitazionale tra tre corpi e prende il nome di *Problema dei tre corpi ristretto, circolare*. Esso si basa su tre approssimazioni fondamentali:

1. La massa dei primari (M_1 e M_2) è tutta contenuta nei loro rispettivi centri;
2. I due primari si muovono su un'orbita circolare attorno al loro centro di massa;
3. La massa del terzo corpo è trascurabile rispetto a quelle dei due primari, cosicchè non introduce perturbazioni sul loro campo di gravità.

In un sistema come quello proposto dal problema dei tre corpi ristretto, circolare, generalmente non è prevista la componente gassosa, bensì una terza massa⁴. L'innovazione apportata dal problema di Roche è proprio la considerazione di un'atmosfera⁵ che riempia il lobo di appartenenza. In un sistema di questo genere è possibile identificare un potenziale che tenga conto dell'interazione a due corpi dei primari e della forza centrifuga. Tale potenziale può essere scritto come:

$$\Phi_R(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 \quad (3.1)$$

con $\vec{\omega}$ velocità angolare rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. A questo punto il potenziale può essere introdotto nell'equazione di Eulero (1.5) ottenendo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \Phi_R(\vec{r}) - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.2)$$

3.3 Esplosione

Nel corso del tempo sono state proposte diverse teorie per spiegare l'esplosione di una Supernova di tipo Ia. Alla base di tutte in ogni caso, c'è la combustione del Carbonio in un ambiente degenerare (con densità comprese tra 10^7 g cm^{-3} e 10^9 g cm^{-3}), tuttavia, questa combustione può avvenire in svariati modi e in posizioni diverse all'interno della stella considerata, per cui non è semplice determinarne la natura. A causa dell'elevato gradiente di temperatura e della dipendenza delle reazioni nucleari da quest'ultima, il modello

⁴È possibile individuare delle superfici equipotenziali chiamate *Zero Velocity Surfaces* (ZVS) al cui interno il moto è proibito. Tramite integrazione numerica si può notare che le orbite concesse per la massa di test sembrano giacere su tali delimitazioni.

⁵In origine il matematico francese Edouard Roche si concentrò sulla possibilità di esistenza di satelliti orbitanti attorno a pianeti in sistemi binari. Ciò gli permise lo studio della distruzione, dovuta a forze mareali, subita dal satellite nel transito attraverso il punto L_1 e quindi del flusso di massa attraverso i due lobi.

prevede che vi sia una sorta di densa stratificazione del materiale in combustione; tali strati possono propagarsi in due modi differenti, a seconda che il loro moto sia subsonico o supersonico rispetto al mezzo davanti a loro (nella direzione del moto). Nel primo caso si parla di deflagrazione, mentre nel secondo di detonazione.

Per quanto riguarda la seconda, è possibile dimostrare che la velocità della *detonation wave*⁶ è sempre supersonica rispetto al materiale davanti a se', ma anche sempre minore o uguale alla velocità del suono nel mezzo perturbato (quando la velocità di propagazione dello shock uguaglia quella del suono, essa prende il nome di *Chapman-Jouguet*). Quanto succede durante una deflagrazione, è molto meno chiaro rispetto, invece, al meccanismo di detonazione. Infatti, se per la detonazione si sa che la velocità di Chapman-Jouguet, per un gas misto composto da C e O, è compresa in un intervallo di $1.1 - 1.4 \cdot 10^9 \text{ cm s}^{-1}$ (dipendente dalla densità), per la deflagrazione si sa solamente che deve essere superiore ad un determinato limite fornito dalla velocità della deflagrazione laminare: D_λ . Può tuttavia essere anche molto maggiore, grazie al fatto che, in SNe Ia la deflagrazione è un fenomeno soggetto ad instabilità di Rayleigh-Taylor, che può condurre a turbolenza.

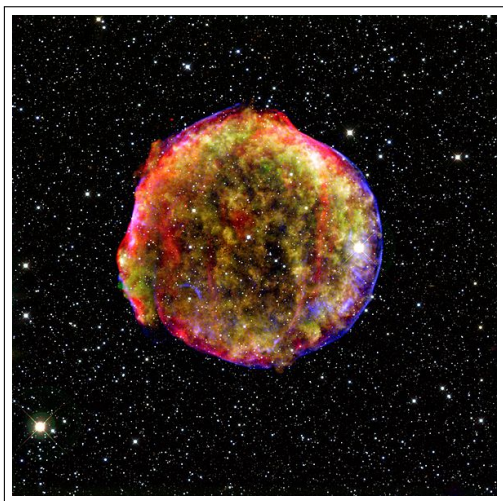


Figura 9: Supernova 1572, anche conosciuta come Supernova di Tycho, dal nome dello scopritore: Tycho Brahe.

In entrambi i casi, questi meccanismi producono una combustione esplosiva del C, che di conseguenza genera un notevole quantitativo di elementi Fe-peak, principalmente ^{56}Ni . Quest'ultimo, decadrà, in un tempo dell'ordine della decina di giorni, in ^{56}Co e, consecutivamente in ^{56}Fe per decadimento β^+ e cattura elettronica.

Cambiamenti della velocità di propagazione della combustione possono causare variazioni nella nucleosintesi, ed è anche possibile che vi sia una transizione tra deflagrazione e detonazione. Questa transizione sarebbe dovuta alla compressione generata dallo shock creatosi nell'attraversamento, da parte del fronte di combustione, di strati esterni a bassa densità. Esiste anche un altro meccanismo chiamato *delayed detonation transition* (DDT). In questo modello la velocità della deflagrazione è bassa e la transizione tra questa e

la detonazione avviene negli strati più interni della stella, ma solo dopo che essi si sono espansi fino a raggiungere densità dell'ordine di 10^7 g cm^{-3} .

Ad ogni modo, le energie sprigionate da questi tipi di fenomeni sono decisamente più elevate rispetto ad un qualsiasi altro fenomeno legato all'evoluzione stellare. L'energia sprigionata nella banda ottica raggiunge picchi di 10^{49} erg , con luminosità caratteristiche dell'ordine di $10^{43} \text{ erg s}^{-1}$, mentre l'energia cinetica liberata arriva fino a 10^{51} erg . Dopo l'esplosione di una SN Ia in genere, non rimane che la materia liberata dall'esplosione stessa: principalmente IME (intermediate mass elements) e ^{56}Fe , che va ad arricchire il mezzo interstellare. Inoltre, l'onda d'urto sprigionata da una SN può creare, nel ISM delle regioni di scarsa densità chiamate *bubbles*, sul cui bordo la materia viene fortemente ionizzata. In queste regioni è possibile osservata la riga di HII: una transizione così detta proibita, ma che in contesto astrofisico è molto importante, poichè la radiazione prodotta ha una lunghezza d'onda caratteristica pari a 21 cm.

⁶Viene indicata in questo modo la superficie di discontinuità composta dal fronte d'urto e dal materiale che, una volta perturbato, è in fase di combustione e segue lo shock nel suo moto.

Riferimenti bibliografici

- [1] L.D.Landau and E.M.Lishitz. Fluid Mechanics. Pergamon Press 1980.
- [2] Albert G. Petschek. Supernovae. Springer-Verlag 1990
- [3] Juahn Franck, Andrew King and Derek Rain. Accretion Power in Astrophysics. Cambridge University Press, 2002.
- [4] A. Khikhlov, E. Müller and P. Höflich. Light curves of Type Ia Supernova models with different explosion mechanism. Astronomy and Astrophysics Journal. 1992