UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA
DIPARTIMENTO
DI SCIENZE
STATISTICHE

Benchmarking di serie storiche economiche. Nota tecnica ed estensioni

T. Di Fonzo

2003.10

Abstract
In questo lavoro vengono presentate una serie di varianti, note e non, della classica procedura di aggiustamento di Denton. Tra i vari risultati presentati, vanno citati la soluzione approssimata e rapidamente implementabile al problema di benchmarking conservando i tassi di variazione e l'estensione multivariata a sistemi di serie storiche con o senza vincolo di aggregazione contemporanea stringente.

Keywords: benchmarking, preservation of rates of change, system of time series

Dipartimento di Scienze Statistiche
Università degli Studi
Via C. Battisti 241-243
35121 Padova

Maggio 2003

Benchmarking di serie storiche economiche. Nota tecnica ed estensioni

Tommaso Di Fonzo
Dipartimento di Scienze Statistiche
Università di Padova
difonzo@stat.unipd.it

Indice

1. Formulazione classica del problema di benchmarking (variante additiva, Denton, 1971, Cholette, 1984)

Funzione obiettivo da minimizzare (variante AFD):

$$\sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_t-p_t\right)-\left(y_{t-1}-p_{t-1}\right)\right]^2 \text{ col vincolo } \mathbf{Jy}=\mathbf{y}_0,$$

dove $\mathbf{J}$ è una matrice di aggregazione temporale (Nxn), $\mathbf{y}$ è il vettore che si desidera stimare di dimensioni (nx1) e $\mathbf{y}_0$ è un vettore (Nx1) di valori (noti) aggregati temporalmente.

Denton (1971) considera anche un'altra funzione obiettivo (*variante ASD*):

$$\sum_{t=3}^{n}\left\{\left[\left(y_t-p_t\right)-\left(y_{t-1}-p_{t-1}\right)\right]-\left[\left(y_{t-1}-p_{t-1}\right)-\left(y_{t-2}-p_{t-2}\right)\right]\right\}^2 \text{ col vincolo } \mathbf{Jy}=\mathbf{y}_0.$$

In generale, usando la notazione matriciale la funzione obiettivo può essere scritta come

$$\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)'\mathbf{M}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)=\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}-2\mathbf{p}'\mathbf{M}\mathbf{y}+\mathbf{p}'\mathbf{M}\mathbf{p}$$

con $\mathbf{p}$ vettore (nx1) di dati preliminari da aggiustare e $\mathbf{M}$ matrice (nxn) simmetrica e positiva semidefinita.

2. La variante proporzionale

Una variante classica presa spesso in considerazione è quella 'proporzionale'. Essa consiste nel considerare come criterio obiettivo da minimizzare una funzione quadratica delle differenze proporzionali $\dfrac{y_t-p_t}{p_t}$. Indicata con $\hat{\mathbf{p}}$ la matrice (nxn) contenente sulla diagonale principale il vettore dei dati preliminari,

$$\hat{\mathbf{p}}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix},$$

il vettore delle differenze proporzionali è dato da $\hat{\mathbf{p}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)$. Possiamo allora scrivere la funzione obiettivo come

$$\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)'\mathbf{Q}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right),$$

con $\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{M}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$ e

La funzione lagrangiana

NB: il riferimento è alla matrice $\mathbf{M}$ della variante additiva, per la variante moltiplicativa è sufficiente sostituire $\mathbf{M}$ con $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{M}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$ nelle espressioni che seguono.

$$L = \mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y} - 2\mathbf{p}'\mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{p}'\mathbf{M}\mathbf{p} + 2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$$

La ricerca del minimo passa attraverso la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathbf{M}\mathbf{y} - 2\mathbf{M}\mathbf{p} + 2\mathbf{J}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{p} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$$

Soluzione generale (valida anche per $\mathbf{M}$ non di pieno rango):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{p} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$$

Soluzione semplificata (se $\mathbf{M}$ è di pieno rango):

sfruttando un noto lemma di inversione di matrice partizionata si ha

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} & \vdots & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1} \\ \cdots & & \cdots \\ \left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} & \vdots & -\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= \left[\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\right]\mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{y}_0 \\ &= \mathbf{p} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{p} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\mathbf{y}_0 \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{J}\mathbf{p}) \end{aligned}$$

3. Il benchmarking come problema di previsione vincolata in un modello di regressione lineare

La soluzione semplificata appena vista si può ottenere anche impostando il benchmarking come un problema di previsione a partire dal modello di lineare

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{e} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$$

con $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ per la variante additiva e $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{p}}$ per quella moltiplicativa, mentre $\mathbf{e}$ è un vettore casuale (nx1) di media nulla e matrice di covarianza $E(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \mathbf{M}^{-1}$. Pertanto il vettore casuale $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{e}$ ha anch'esso media nulla e matrice di covarianza $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$. Nel caso della variante proporzionale si ha dunque $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbf{Q}^{-1}$.

Come è evidente, si tratta di un modello di regressione con un vincolo a priori sull'unico coefficiente di regressione (quello relativo al vettore **p**, fissato pari a 1). Il nostro obiettivo è trovare un vettore $\tilde{\mathbf{y}}$ che, nel rispetto del criterio dei minimi quadrati generalizzati, $\min(\mathbf{y}-\mathbf{p})'\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{p})'$,soddisfi il vincolo di aggregazione temporale $\mathbf{J}\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{y}_0$. Premoltiplicando il modello per la matrice **J**, si ottiene il modello osservato

$$\mathbf{y}_0=\mathbf{Jp}+\mathbf{JCe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}_0=\mathbf{Jp}+\mathbf{u}_0$$

con $\mathbf{u}_0$ vettore casuale di media nulla e matrice di covarianza $E\left(\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0^{'}\right)=\mathbf{\Omega}_0=\mathbf{JCM}^{-1}\mathbf{CJ}'$. Tale modello può essere utilizzato per stimare, se necessario, i parametri di $\mathbf{M}^{-1}$, ad esempio minimizzando la somma ponderata dei quadrati $SSR=\mathbf{u}_0^{'}\mathbf{\Omega}_0^{-1}\mathbf{u}_0$.

Avendo fissato pari a 1 il coefficiente dell'unica variabile indipendente del modello di regressione espresso alla cadenza temporale più elevata, il problema di minimo a cui Chow e Lin (1971) hanno fornito una soluzione nel caso generale di un modello di regressione senza vincoli sui parametri, si riduce a quello già visto in precedenza, ossia

$$\min_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}-\mathbf{p})'\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{p}) \text{ col vincolo } \mathbf{Jy}=\mathbf{y}_0,$$

la cui soluzione è

$$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{p}+\mathbf{\Omega J}'\mathbf{\Omega}_0^{-1}(\mathbf{y}_0-\mathbf{Jp}).$$

4. Il benchmarking come problema di estrazione del segnale in un modello a componenti non osservate

In questo caso il modello di riferimento che lega le variabili a cadenza temporale alta è

$$\mathbf{p}=\mathbf{y}+\mathbf{u},$$

dove i simboli sono stati precedentemente definiti. Assumendo che il vettore aggregato temporalmente non sia affetto da errori (vincoli stringenti, *binding*), ed ipotizzando una matrice di covarianza dei disturbi di rango pieno, il problema di estrazione del segnale $\tilde{\mathbf{y}}$ consiste ancora una volta nel determinare un vettore $\tilde{\mathbf{y}}$ tale da minimizzare $(\mathbf{p}-\mathbf{y})'\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{y})$ col vincolo $\mathbf{Jy}=\mathbf{y}_0$.

5. Varianti note e non: com'è fatta la matrice M

1. Additive First Differences

Criterio

$$\sum_{t=2}^{n}\left[(y_t-p_t)-(y_{t-1}-p_{t-1})\right]^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_1 \qquad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice } ((n\text{-}1)\text{x}n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è singolare}$$

Soluzione approssimata (assumendo $y_0 - p_0 = 0$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}'\mathbf{D} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice } (n\text{x}n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è non singolare}$$

2. Additive Second Differences

Criterio

$$\sum_{t=3}^{n} \left\{ \left[(y_t - p_t) - (y_{t-1} - p_{t-1}) \right] - \left[(y_{t-1} - p_{t-1}) - (y_{t-2} - p_{t-2}) \right] \right\}^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice } ((n\text{-}2)\text{x}(n\text{-}1)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è singolare}$$

Soluzione approssimata (assumendo $y_0 - p_0 = y_{-1} - p_{-1} = 0$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}'\mathbf{D}'\mathbf{D}\mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è non singolare}$$

3. Proportional First Differences

Criterio

$$\sum_{t=2}^{n} \left(\frac{y_t - p_t}{p_t} - \frac{y_{t-1} - p_{t-1}}{p_{t-1}} \right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n} \left(\frac{y_t}{p_t} - \frac{y_{t-1}}{p_{t-1}} \right)^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1 \qquad \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1} \qquad \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \text{ matrice } (n\text{x}n) \;\Rightarrow\; \mathbf{Q} \text{ è singolare}$$

Si noti che in questo caso conviene scrivere la matrice del sistema lineare da risolvere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Qp} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, poiché $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$, l'espressione precedente può ulteriormente essere semplificata nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione approssimata (assumendo $\frac{y_0}{p_0} = 1$)

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q} \text{ è non singolare}$$

4. Proportional Second Differences

Criterio

$$\sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t - p_t}{p_t} - \frac{y_{t-1} - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) - \left(\frac{y_{t-1} - p_{t-1}}{p_{t-1}} - \frac{y_{t-2} - p_{t-2}}{p_{t-2}}\right)\right]^2 \equiv \sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t}{p_t} - \frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}\right) - \left(\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}} - \frac{y_{t-2}}{p_{t-2}}\right)\right]^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q} \text{ è singolare}$$

Anche in questo caso conviene scrivere la matrice del sistema lineare da risolvere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix},$$

da cui si ricava:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Qp} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$, l'espressione precedente può ulteriormente essere semplificata nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{'}\mathbf{D}_2^{'}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione approssimata (assumendo $\dfrac{y_0}{p_0} = \dfrac{y_{-1}}{p_{-1}} = 1$)

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{D}'\mathbf{D}\mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q} \text{ è non singolare}$$

5. Additive AR(1)

Criterio

$$\sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_t - \rho y_{t-1}\right) - \left(p_t - \rho p_{t-1}\right)\right]^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_t - p_t\right) - \rho\left(y_{t-1} - p_{t-1}\right)\right]^2, \; 0 < \rho < 1$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1 \qquad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice } ((n\text{-}1)\text{x}n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è singolare}$$

Soluzione approssimata (assumendo $y_0 - p_0 = 0$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{P'P} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice } (n\text{x}n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è non singolare}$$

6. Proportional AR(1)

Criterio

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t - p_t}{p_t} - \rho\frac{y_{t-1} - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\left(\frac{y_t}{p_t} - \rho\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}\right) - 1 + \rho\right]^2, \; 0 < \rho < 1$$

N.B. questo criterio non è equivalente a quello, che viene talvolta erroneamente riportato, dato da

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t}{p_t} - \rho\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}\right)^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} \text{ è singolare}$$

Scriviamo la matrice del sistema lineare da risolvere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{p} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}' \\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}\mathbf{p} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$$

In questo caso, però, a differenza di quanto accade nelle altre varianti proporzionali, $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{P}_1^{'}\mathbf{P}_1\mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}$.

Soluzione approssimata (assumendo $\frac{y_0}{p_0} = 1$)

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{P}\hat{\mathbf{p}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è non singolare}$$

7. Additive ARIMA(1,1,0)

Criterio

$$\sum_{t=3}^{n}\left\{\left[(y_t - y_{t-1}) - \gamma(y_{t-1} - y_{t-2})\right] - \left[(p_t - p_{t-1}) - \gamma(p_{t-1} - p_{t-2})\right]\right\}^2 \equiv$$
$$\sum_{t=3}^{n}\left\{\left[(y_t - p_t) - (y_{t-1} - p_{t-1})\right] - \gamma\left[(y_{t-1} - p_{t-1}) - (y_{t-2} - p_{t-2})\right]\right\}^2, \quad 0 < \gamma < 1$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_1^{'}\boldsymbol{\Gamma}_2^{'}\boldsymbol{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 \qquad \boldsymbol{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{matrice } ((n\text{-}2) \text{ x } (n\text{-}1)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è singolare}$$

Soluzione approssimata (assumendo $y_0 - p_0 = y_{-1} - p_{-1} = 0$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}'\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{D} \qquad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{matrice } (n \text{ x } n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ è non singolare}$$

8. Proportional ARIMA(1,1,0)

Criterio

$$\sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t-p_t}{p_t}-\gamma\frac{y_{t-1}-p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)-\left(\frac{y_{t-1}-p_{t-1}}{p_{t-1}}-\gamma\frac{y_{t-2}-p_{t-2}}{p_{t-2}}\right)\right]^2,\quad 0<\gamma<1$$

ossia

$$\sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t}{p_t}-\gamma\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}-1+\gamma\right)-\left(\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}-\gamma\frac{y_{t-2}}{p_{t-2}}-1+\gamma\right)\right]^2\equiv\sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t}{p_t}-\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}\right)-\gamma\left(\frac{y_{t-1}}{p_{t-1}}-\frac{y_{t-2}}{p_{t-2}}\right)\right]^2$$

Soluzione esatta

$$\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1}\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{Q}\text{ è singolare}$$

Scriviamo la matrice del sistema lineare da risolvere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{J}'\\ \mathbf{J} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}'\\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{J}'\\ \mathbf{J} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}'\\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{y}}^*\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}'\\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Qp}\\ \mathbf{y}_0\end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{y}}^*\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}'\\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Qp}\\ \mathbf{y}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1 & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}'\\ \mathbf{J}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{y}_0\end{bmatrix}$$

poiché $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Qp}=\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{p}=\mathbf{D}_1'\mathbf{\Gamma}_2'\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{D}_1\mathbf{1}_n=\mathbf{0}$.

Soluzione approssimata (assumendo $\frac{y_0}{p_0}=\frac{y_{-1}}{p_{-1}}=0$)

$$\mathbf{M}=\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}^{-1}\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{M}\text{ è non singolare}$$

6. Il principio di conservazione del movimento di Denton espresso con riferimento al saggio di variazione: formulazioni esatte ed approssimate

In numerose situazioni concrete può risultare appropriato riferirsi ad un principio di conservazione del movimento espresso in termini di saggio di variazione piuttosto che di differenza prima. Si punta, cioè, ad ottenere stime aggiustate che alterino il meno possibile i saggi di variazione della serie preliminare piuttosto che i suoi livelli. In questo caso, piuttosto che considerare le differenze nei livelli (assolute o in proporzione alla serie preliminare), l'attenzione va concentrata sulle discrepanze tra i saggi di variazione della serie da stimare e quelli della serie preliminare (essendo il saggio di variazione un numero puro, che può ovviamente assumere anche valori negativi, non ha senso far riferimento alle differenze proporzionali). Un criterio naturale a cui far riferimento sembra dunque essere la somma dei quadrati degli scarti tra saggi di variazione stimati e preliminari, ossia:

$$\sum_{t=2}^{n}\left[\left(\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right)-\left(\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)\right]^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}-\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)^2 .$$

Secondo Bloem *et al.* (2001), tale criterio (indicato, seguendo Sjöberg (1982), con la sigla D3 a pag. 99 del volume edito dall'International Monetary Fund) è stato proposto da Helfand, Monsour e Trager (1977), i quali hanno considerato anche una versione logaritmica del criterio, indicata con la sigla D2, ossia

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\ln\frac{y_t}{y_{t-1}}-\ln\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\left(\ln y_t - \ln y_{t-1}\right)-\left(\ln p_t - \ln p_{t-1}\right)\right]^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\left(\ln y_t - \ln p_t\right)-\left(\ln y_{t-1} - \ln p_{t-1}\right)\right]^2 .$$

Ovviamente, tenuto conto delle ben note relazioni, valide per $y_{t-1} \neq 0$ e $p_{t-1} \neq 0$,

$$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \simeq \ln\frac{y_t}{y_{t-1}} = \ln y_t - \ln y_{t-1} \qquad \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \simeq \ln\frac{p_t}{p_{t-1}} = \ln p_t - \ln p_{t-1},$$

il criterio D2 può essere visto come un'approssimazione del principio di conservazione del movimento espresso dal criterio D3.

Un altro criterio riconducibile alla salvaguardia del profilo dinamico fornito dai saggi di variazione della serie preliminare è il seguente:

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t/y_{t-1}}{p_t/p_{t-1}}-1\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t/p_t}{y_{t-1}/p_{t-1}}-1\right)^2 .$$

Secondo Bloem *et al.* (2001, pp. 99-100), tale criterio è stato proposto da Skjæveland (1985) e indicato da Sjöberg (1982) con la sigla D5. Bozik e Otto (1988) fanno invece risalire la proposta della procedura a Laniel (1986). In ogni caso, il criterio D5 minimizza le differenze relative nei tassi di crescita delle due serie, aggiustata e preliminare. Più precisamente, il criterio D5 minimizza la somma dei quadrati degli scarti da 1 dei rapporti $\frac{y_t/y_{t-1}}{p_t/p_{t-1}}$, usati come misure elementari delle discrepanze tra la dinamica delle due serie (si tratta della correzione moltiplicativa apportata dai saggi di variazione della serie aggiustata ai saggi di variazione della serie preliminare). A rigore, infatti, la differenza relativa tra i saggi di variazione della serie aggiustata e preliminare è data da

$$\frac{(y_t - y_{t-1})/y_{t-1} - (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}}{(p_t - p_{t-1})/p_{t-1}} = \frac{(y_t - y_{t-1})/y_{t-1}}{(p_t - p_{t-1})/p_{t-1}} - 1,$$

e di conseguenza

$$\frac{y_t/y_{t-1} - p_t/p_{t-1}}{(p_t - p_{t-1})/p_{t-1}} \neq \frac{y_t/y_{t-1}}{p_t/p_{t-1}} - 1 = \frac{y_t/y_{t-1} - p_t/p_{t-1}}{p_t/p_{t-1}}$$

oppure

$$\frac{y_t/y_{t-1} - 1}{p_t/p_{t-1} - 1} \neq \frac{y_t/y_{t-1}}{p_t/p_{t-1}} - 1.$$

Tuttavia, partendo dalle differenze relative dei saggi di variazione avremmo a che fare con un criterio del tipo

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{(y_t - y_{t-1})/y_{t-1} - (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}}{(p_t - p_{t-1})/p_{t-1}}\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t/y_{t-1} - p_t/p_{t-1}}{p_t/p_{t-1} - 1}\right)^2,$$

una cui ovvia approssimazione, in virtù di quanto si è visto in precedenza, è la seguente:

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{\ln y_t/y_{t-1} - \ln p_t/p_{t-1}}{\ln p_t/p_{t-1}}\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\frac{(\ln y_t - \ln p_t) - (\ln y_{t-1} - \ln p_{t-1})}{\ln p_t - \ln p_{t-1}}\right]^2,$$

ovvero

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{\ln y_t/y_{t-1} - \ln p_t/p_{t-1}}{\ln p_t/p_{t-1}}\right)^2 \equiv \sum_{t=2}^{n}\left[\frac{\ln y_t/y_{t-1}}{\ln p_t/p_{t-1}} - 1\right]^2.$$

Tuttavia le quantità a denominatore dei criteri in questione (tanto nella versione originale quanto in quella approssimata tramite logaritmi) possono assumere valori nulli o molto vicini allo zero, nel qual caso il criterio rischia di 'esplodere' e/o di dare luogo a soluzioni poco accurate.

Di questi problemi non soffre invece il criterio D5, una cui naturale approssimazione tramite logaritmi (diciamolo criterio D6) è la seguente:

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_t/y_{t-1}}{p_t/p_{t-1}} - 1\right)^2 \simeq \sum_{t=2}^{n}\left[\frac{(\ln y_t - \ln p_t) - (\ln y_{t-1} - \ln p_{t-1})}{\ln p_t - \ln p_{t-1} + 1}\right]^2.$$

Bloem *et al.* (2001, p. 100) affermano

> *"The D2, D3, and D5 formulas are very similar. They are all formulated as an explicit preservation of the period-to-period rate of change in the indicator series, which is the ideal objective formulation, according to several authors (e.g., Helfand, Monsour, and Trager 1977). Although the three formulas in most practical circumstances will give approximately the same estimates for the back series, the D2 formula seems slightly preferable over the other two. In contrast to D2, the D3 formula will adjust small rates of change relatively more than large rates of changes, which is not an appealing property. Compared to D5, the D2 formula treats*

large and small rates of change symmetrically and thus will result in a smoother series of relative adjustments to growth rates"

Tenuto conto di quello che si è esposto fin qui, l'affermazione or ora citata va meglio precisata e, almeno in un caso, corretta. In effetti, si è mostrato che i criteri D2 e D3 rispondono alla stessa logica (minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti tra i saggi di variazione 'aggiustati' e preliminari), le sole differenze essendo imputabili all'approssimazione dei saggi di variazione tramite la trasformazione logaritmica. Quanto al criterio D5, una sua ragionevole approssimazione è data dal criterio D6 che, come vedremo, ha il pregio di dare luogo a soluzioni esprimibili in forma esplicita.

7. Soluzione del problema di benchmarking nel caso di trasformazioni logaritmiche

Concentriamo ora l'attenzione sul criterio D2 che, come si è detto, rappresenta un'approssimazione del criterio D3. Per quest'ultimo, volto alla minimizzazione della somma del quadrato degli scarti tra i saggi di variazione della serie aggiustata e della serie preliminare, il sistema delle condizioni di primo ordine non è lineare, per cui non è possibile ricavare in maniera semplice (ed esplicita) la soluzione cercata. Ovviamente anche il criterio D2 soffre dello stesso problema. In questo caso, tuttavia, è possibile ricorrere ad una approssimazione che rende il problema trattabile e le soluzioni molto semplici da derivare.

Quanto segue riprende essenzialmente risultati presentati in Di Fonzo (2003) nel contesto dei metodi di disaggregazione temporale mediante indicatori di riferimento. Per semplicità, faremo riferimento al caso di benchmarking di una variabile di flusso, gli altri casi essendo facilmente ottenibili adattando il ragionamento.

Indichiamo con $y_{t,h}$, $t=1,\dots,T$, $h=1,\dots,s$, l'ignota serie da stimare a cadenza alta, ed indichiamo con $y_{0,t}=\sum_{h=1}^{s} y_{t,u}$ il valore aggregato temporalmente disponibile per la variabile di interesse.

Consideriamo l'espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine di $\ln y_{t,h}$ intorno al valore medio riferito al periodo a cadenza bassa, $\bar{y}_{0,t}=\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} y_{t,h}=\frac{y_t}{s}$:

$$\ln y_{t,h}=z_{t,h}\simeq \ln \bar{y}_{0,t}+\frac{1}{\bar{y}_{0,t}}\left(y_{t,h}-\bar{y}_{0,t}\right)=\ln y_{0,t}-\ln s+\frac{s y_{t,h}}{y_{0,t}}-1 .$$

Sommando per $h=1,\dots,s$ si ha

$$\sum_{h=1}^{s} z_{t,h}\simeq s\ln y_{0,t}-s\ln s+\frac{s\sum_{h=1}^{s} y_{t,h}}{y_{0,t}}-s=s\ln y_{0,t}-s\ln s .$$

Indichiamo ora $w_{t,h}=\ln p_{t,h}$ e consideriamo la seguente relazione:

$$\sum_{t=2}^{n}\left[\left(\frac{y_t-y_{t-1}}{y_{t-1}}\right)-\left(\frac{p_t-p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)\right]^2\simeq\sum_{t=2}^{n}\left[\left(\ln y_t-\ln p_t\right)-\left(\ln y_{t-1}-\ln p_{t-1}\right)\right]^2\simeq\sum_{t=2}^{n}\left[\left(z_t-w_t\right)-\left(z_{t-1}-w_{t-1}\right)\right]^2 .$$

Ci siamo dunque ricondotti ad un problema standard di benchmarking secondo la variante additiva di Denton, in cui il vincolo di aggregazione temporale è dato da

$$\sum_{h=1}^{s} z_{t,h} = z_{0,t} = s \ln y_{0,t} - s \ln s .$$

Di conseguenza, usando la variante additiva del metodo di Denton, possiamo stimare agevolmente valori disaggregati $\tilde{z}_{t,h}$ tali che

$$\sum_{h=1}^{s} \tilde{z}_{t,h} = z_{0.t} = s \ln y_{0,t} - s \ln s , \qquad t = 1,\ldots,T ,$$

ossia $\mathbf{J}\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_0$. Più precisamente si ha:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Mw} \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix},$$

con $\mathbf{M} = \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1$. Una stima 'naturale' per $\mathbf{y}$ è dunque data da

$$\breve{y}_{t,h} = \exp\left(\tilde{z}_{t,h}\right), \qquad t = 1,\ldots,T; \quad u = 1,\ldots,s .$$

Va comunque tenuto presente che, a causa dagli errori indotti dalle diverse approssimazioni via via considerate,

$$\sum_{h=1}^{s} \breve{y}_{t,h} \neq y_{0,t} \quad \Leftrightarrow \quad y_{0,t} - \sum_{h=1}^{s} \breve{y}_{t,h} = r_{0,t} \neq 0 , \qquad t = 1,\ldots,T .$$

In generale, tale discrepanza è molto contenuta, e può essere trascurata. Tuttavia, volendo disporre di serie aggiustate che soddisfino pienamente il vincolo di aggregazione temporale, la soluzione più semplice consiste nel ripartire la discrepanza registrata a cadenza temporale bassa, $r_{0,t}$, usando una procedura di benchmarking a scelta (poiché la dimensione delle discrepanze sono in genere molto contenute, la serie aggiustata finale è di fatto insensibile alla scelta del metodo di benchmarking usato per ripartire tali discrepanze).

Ad esempio, riferendoci per semplicità alla variante additiva della procedura 'approssimata' di Denton, la serie aggiustata finale è data da:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \breve{\mathbf{y}} + (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{J}' \left[\mathbf{J} (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{J}' \right]^{-1} \mathbf{r},$$

ossia

$$\tilde{\mathbf{y}} = \exp\{\tilde{\mathbf{z}}\} + (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{J}' \left[\mathbf{J} (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{J}' \right]^{-1} \left(\mathbf{y}_0 - \mathbf{J} \exp\{\tilde{\mathbf{z}}\} \right).$$

Passando ora alla variante proporzionale, in notazione matriciale il criterio approssimato può essere scritto come

$$\left(\ln\mathbf{y}-\ln\mathbf{p}\right)'\mathbf{D}_1'\hat{\mathbf{q}}^{-1}\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{D}_1\left(\ln\mathbf{y}-\ln\mathbf{p}\right),$$

con

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\ln p_2-\ln p_1+1\\ \vdots\\ \ln p_n-\ln p_{n-1}+1\end{bmatrix}$$

vettore ((n-1) x 1) e $\hat{\mathbf{q}}=diag\left(\mathbf{q}\right)$ matrice ((n-1) x (n-1)). In questo caso la soluzione al problema di benchmarking è dunque data da

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{z}}\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\hat{\mathbf{q}}^{-1}\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{D}_1 & \mathbf{J}'\\ \mathbf{J} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1'\hat{\mathbf{q}}^{-1}\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{w}\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix}.$$

Volendo adoperare la matrice approssimata delle differenze prime, è necessario ipotizzare $y_0=p_0=p_1$, il che equivale a minimizzare il criterio

$$\left(\ln y_1-\ln p_1\right)^2+\sum_{t=2}^{n}\left[\frac{\left(\ln y_t-\ln p_t\right)-\left(\ln y_{t-1}-\ln p_{t-1}\right)}{\ln p_t-\ln p_{t-1}+1}\right]^2.$$

In questo caso la soluzione è data da

$$\tilde{\mathbf{z}}=\tilde{\mathbf{w}}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\left(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}'\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_0-\mathbf{J}\mathbf{w}\right),$$

con $\mathbf{M}=\left(\hat{\mathbf{q}}^*\right)^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{D}\left(\hat{\mathbf{q}}^*\right)^{-1}$, dove $\mathbf{q}^*=\left[1,\mathbf{q}'\right]'$ e $\hat{\mathbf{q}}^*=diag\left(\mathbf{q}^*\right)$ sono un vettore (n x 1) e (n x n), rispettivamente.

Possiamo infine considerare un criterio approssimante la seguente funzione obiettivo, definita per analogia a quanto si è già visto operando nei livelli:

$$\sum_{t=3}^{n}\left[\left(\frac{y_t-y_{t-1}}{y_{t-1}}-\gamma\frac{p_t-p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)-\left(\frac{y_{t-1}-y_{t-2}}{y_{t-2}}-\gamma\frac{p_{t-1}-p_{t-2}}{p_{t-2}}\right)\right]^2,\ 0<\gamma<1,$$

ossia

$$\sum_{t=3}^{n}\left\{\left[\left(\ln y_t-\ln y_{t-1}\right)-\gamma\left(\ln y_{t-1}-\ln y_{t-2}\right)\right]-\left[\left(\ln p_t-\ln p_{t-1}\right)-\gamma\left(\ln p_{t-1}-\ln p_{t-2}\right)\right]\right\}^2\equiv$$

$$\sum_{t=3}^{n}\left\{\left[\left(\ln y_t-\ln p_t\right)-\left(\ln y_{t-1}-\ln p_{t-1}\right)\right]-\gamma\left[\left(\ln y_{t-1}-\ln p_{t-1}\right)-\left(\ln y_{t-2}-\ln p_{t-2}\right)\right]\right\}^2$$

In questo caso la serie aggiustata si ottiene semplicemente applicando la procedura di benchmarking secondo la variante Additive ARIMA(1,1,0) alla serie trasformata nei logaritmi secondo quanto visto in precedenza.

8. Benchmarking di un sistema di serie storiche con vincolo di aggregazione contemporanea stringente: soluzione esatta ed approssimata

Nella variante additiva, la funzione obiettivo considerata finora (Cholette, 1988, Di Fonzo, 2002, Di Fonzo e Marini, 2003) può essere scritta nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_{it}-p_{it}\right)-\left(y_{it-1}-p_{it-1}\right)\right]^{2}\right\} \equiv \sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_{it}-y_{it-1}\right)-\left(p_{it}-p_{it-1}\right)\right]^{2}\right\}.$$

In notazione matriciale possiamo scrivere

$$(\mathbf{y}-\mathbf{p})'\left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\right)(\mathbf{y}-\mathbf{p}) = (\mathbf{y}-\mathbf{p})'\mathbf{M}(\mathbf{y}-\mathbf{p})$$

con $\mathbf{M}=\left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\right)$ e $\mathbf{D}_1$ matrice ((*n*-1) x *n*) che permette di effettuare le differenze prime. La versione approssimata di questo criterio si ha considerando $\mathbf{D}$ al posto di $\mathbf{D}_1$. Il vincolo da rispettare, formulato escludendo *N* osservazioni aggregate 'ridondanti', è dato da

$$\mathbf{H}_w\mathbf{y} = \mathbf{y}_a$$

con

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M-1}' \otimes \mathbf{I}_n & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_{M-1} \otimes \mathbf{J} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y}_{01} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{0M-1} \end{bmatrix}$$

La soluzione generale si ottiene risolvendo il solito sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{H}_w' \\ \mathbf{H}_w & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Mp} \\ \mathbf{y}_a \end{bmatrix},$$

ossia

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{H}_w' \\ \mathbf{H}_w & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{Mp} \\ \mathbf{y}_a \end{bmatrix}.$$

Se si usa la matrice delle differenze prime approssimata **D**, si ottiene l'espressione semplificata

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + \left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}'\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{H}_w'\mathbf{M}_w^{-1}\left(\mathbf{y}_a - \mathbf{H}_w\mathbf{p}\right)$$

dove $\mathbf{M}_w = \mathbf{H}_w \left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}'\mathbf{D}\right)^{-1} \mathbf{H}_w'$. Di Fonzo e Marini (2003) presentano espressioni semplificate che, sfruttando la particolare struttura partizionata delle matrici implicate nelle espressioni di benchmarking, semplificano notevolmente i calcoli e consentono un cospicuo risparmio nei tempi di elaborazione.

Passando ora alla variante moltiplicativa, la funzione obiettivo 'classica' è data da:

$$\sum_{i=1}^{M}\left[\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_{it}}{p_{it}}-\frac{y_{it-1}}{p_{it-1}}\right)^2\right],$$

che in notazione matriciale diventa

$$\mathbf{y}'\hat{\mathbf{p}}^{-1}\left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\right)\hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}\mathbf{y},$$

con $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\left(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{D}_1'\mathbf{D}_1\right)\hat{\mathbf{p}}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{M}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$. Il sistema da risolvere è quindi dato da

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{H}_w' \\ \mathbf{H}_w & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{y}_a\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{H}_w' \\ \mathbf{H}_w\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{y}_a\end{bmatrix}$$

da cui si ricava l'espressione semplificata

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \hat{\mathbf{p}}\mathbf{H}_w' \\ \mathbf{H}_w\hat{\mathbf{p}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{y}_a\end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso è possibile ridurre notevolmente i tempi di calcolo sfruttando la natura partizionata delle matrici in gioco (Di Fonzo e Marini, 2003).

9. Benchmarking di un sistema di serie storiche con vincolo di aggregazione contemporanea stringente: preservare i tassi di variazione delle serie preliminari in presenza di un vincolo stringente

Volendo 'preservare' il più possibile i saggi di variazione delle serie preliminari, il criterio naturale da minimizzare sarebbe

$$\sum_{i=1}^{M}\left[\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{y_{it}}{y_{it-1}}-\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^2\right],$$

ovvero la sua forma approssimata nei logaritmi

$$\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{t=2}^{n}\left[\left(\ln y_{it}-\ln y_{it-1}\right)-\left(\ln p_{it}-\ln p_{it-1}\right)\right]^2\right\}.$$

Estendendo il ragionamento sviluppato in precedenza, ed adottando la notazione $y_{i,Th}$, i=1,...,M, T=1,...,N, h=1,...,s, al posto di y_{it}, consideriamo l'espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine di $\ln y_{i,Th}$, intorno al valore medio riferito al periodo a cadenza bassa, $\overline{y}_{i,T} = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} y_{i,Th} = \frac{y_{i,T}}{s}$:

$$\ln y_{i,Th} = \tilde{g}_{i,Th} \simeq \ln \overline{y}_{i,T} + \frac{1}{\overline{y}_{i,T}}\left(y_{i,Th} - \overline{y}_{i,T}\right) = \ln y_{i,T} - \ln s + s\frac{y_{i,Th}}{y_{i,T}} - 1.$$

Sommando per h=1,...,s si ha

$$g_{i,T} = \sum_{h=1}^{s} \tilde{g}_{i,Th} = s \ln y_{i,T} - s \ln s + s\frac{\sum_{h=1}^{s} y_{i,Th}}{y_{i,T}} - s = s \ln y_{i,T} - s \ln s. \qquad (*)$$

Sommando per i=1,...,M si ha invece

$$z^{*}_{Th} = \sum_{i=1}^{M} g_{i,Th} = \sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,T} - M \ln s + s\sum_{i=1}^{M} \frac{y_{i,Th}}{y_{i,T}} - M. \qquad (**)$$

Si noti che l'espressione (**) non può essere calcolata, poiché $y_{i,Th}$ è ovviamente sconosciuto. Tuttavia, possiamo sostituire $y_{i,Th}$ con una sua stima, indicata con $\breve{y}_{i,Th}$, ottenuta mediante una qualche procedura di aggiustamento multivariato, e dunque tale che

$$\sum_{h=1}^{s} \breve{y}_{i,Th} = y_{i,T}, \qquad i=1,\ldots,M, \quad t=1,\ldots,N.$$

Pertanto, l'approssimazione che prendiamo in considerazione è la seguente:

$$\ln y_{i,Th} \simeq g_{i,Th} = \ln y_{i,T} - \ln s + s\frac{\breve{y}_{i,Th}}{y_{i,T}} - 1, \qquad i=1,\ldots,M, \quad T=1,\ldots,N, \quad h=1,\ldots,s$$

$$\ln y_{i,t} \simeq g_{i,t} = \ln \breve{y}_{i,t}, \; t < 1 \text{ e/o } t = Ns+1, Ns+1, \ldots,$$

dove la seconda espressione permette di ottenere stime aggiustate anche per quei periodi in corrispondenza dei quali mancano i valori di benchmark (si tratta di un problema di estrapolazione vincolata).

E' immediato verificare che anche con questa approssimazione la relazione (*) è ancora valida. Inoltre, si ha:

$$\sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,Th} \simeq \sum_{i=1}^{M} g_{iT,h} = \sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,T} - M \ln s + s\sum_{i=1}^{M} \frac{\breve{y}_{i,Th}}{y_{i,T}} - M, \qquad T=1,\ldots,N, \quad h=1,\ldots,s.$$

Abbiamo allora

$$\sum_{i=1}^{M} g_{i,T} = \sum_{i=1}^{M} \left(s \ln y_{i,T} - s \ln s \right) = s \sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,T} - sM \ln s , \qquad T=1,\ldots,N$$

e

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{i=1}^{M} g_{i,Th} = s \sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,T} - sM \ln s + s \sum_{h=1}^{s} \sum_{i=1}^{M} \frac{\breve{y}_{i,Th}}{y_{i,T}} - sM = s \sum_{i=1}^{M} \ln y_{i,T} - sM \ln s , \qquad T=1,\ldots,N.$$

In altre parole, l'approssimazione prescelta per $\ln y_{i,Th}$ è tale da soddisfare un vincolo di aggregazione temporale a cadenza bassa analogo a quello trovato nell'approccio di minimizzazione quadratico-lineare operante sui livelli.

Indichiamo ora $w_{i,Th} = \ln p_{i,Th}$ e risolviamo il problema di minimo della funzione

$$\sum_{i=1}^{M} \left\{ \sum_{t=2}^{n} \left[\left(g_{it} - g_{it-1} \right) - \left(w_{it} - w_{it-1} \right) \right]^2 \right\}$$

coi vincoli dati da $g_{i,T}$ e z^*_{Th}, quest'ultima variabile essendo ottenuta sostituendo $\breve{y}_{i,Th}$ a $y_{i,Th}$ nell'espressione vista in precedenza.

Il problema si riduce dunque ad un benchmarking multivariato con vincolo di aggregazione contemporanea stringente secondo la variante AFD. In generale, indicate con $g^*_{i,t}$ le stime di $\ln y_{i,Th}$, le stime della serie originale ottenute tramite la trasformazione inversa $\tilde{y}_{i,t} = \exp\left\{ g^*_{i,t} \right\}$ vanno poi aggiustate ulteriormente (ad esempio, applicando una procedura PFD multivariata) per soddisfare i vincoli di aggregazione operanti sulle serie espresse nei livelli.

Riferimenti bibliografici

Bloem A.M., Dippelsman R.J., e N.Ø. Mæhle (2001), *Quarterly National Accounts Manual. Concepts, Data Sources, and Compilation*, International Monetary Fund, Washington DC.

Bozik J.E. e M.C. Otto (1988), *Benchmarking: Evaluating methods that preserve month-to-month changes*, Bureau of the Census - Statistical Research Division, CENSUS/SRD/RR-88/07.

Cholette P.A. (1984), Adjusting sub-annual series to yearly benchmarks, *Survey Methodology* 10(1): 35-49.

Cholette P.A. (1988), *Benchmarking systems of socio-economic time series*, Statistics Canada, Time Series Research and Analysis Division, Working Paper No TSRA-88-017E.

Cholette P.A. e E.B. Dagum (1994), Benchmarking time series with autocorrelated survey errors, *International Statistical Review* 62(3): 365-377.

Dagum E.B., Cholette P.A. e Z.G. Chen (1998), A unified view of signal extraction, benchmarking, interpolation and extrapolation of time series, *International Statistical Review* 66(3): 245-269.

Denton F.T. (1971), Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: An approach based on quadratic minimization, *Journal of the American Statistical Association*, 66(333): 99-102.

Di Fonzo T. (2002), Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova, Working paper n. 2002.xx.

Di Fonzo T. e M. Marini (2003), *Benchmarking systems of seasonally adjusted time series according to Denton's movement preservation principle*, Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova, Working paper n. 2003.9.

Durbin J. e B. Quenneville B. (1997), Benchmarking by state space models, *International Statistical Review* 65(1): 23-48.

Eurostat (1999), *Handbook of quarterly national accounts*, Luxembourg, European Commission.

Helfand S.D., Monsour N.J. e M.L. Trager (1977), Historical revision of current business survey estimates, *American Statistical Association, Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*: 246-250.

Hillmer S.C. e A. Trabelsi (1987), Benchmarking of economic time series, *Journal of the American Statistical Association*, 82(400): 1064-1071.

Laniel N. (1986),

Laniel N. and K. Fyfe (1989), Benchmarking of economic time series, *American Statistical Association, Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*: 462-466.

Sjöberg L. (1982), Jämförelse av Uppräkningsmetoder för Nationalräkenskapsdata (Comparison of Adjustment Methods for National Accounts Data), Memorandum (Stockolm: Statistics Sweden), citato da Bloem *et al.* (2001).

Skjæveland A. (1985), *Avstemming av Kvartalsvise Nasjonalregnskapsdata mot Årlige Nasjonalregnskap* (Reconciliation of Quarterly National Accounts Data Against Annual National Accounts), Interne notater 85/22 (Oslo: Statistics Norway), citato da Bloem *et al.* (2001).