

BIBLIOTECA DI SCIENZE STATISTICHE

SERVIZIO BIBLIOTECARIO NAZIONALE

BID PUV0912957 BID DONO
ACQ. 266 / '03 INV. 832,26
COLL. 5-COLL. WP. 5/2003

**Can we forecast music? The
case of J.S. Bach last fugue**

C. Pizzi, S. Rigatti Luchini

2003.5

**Dipartimento di Scienze Statistiche
Università degli Studi
Via C. Battisti 241-243
35121 Padova**

Aprile 2003

BIBLIOTECA DI SCIENZE NATURALI
CORSO VENEZIA 1200
30134 PADOVA
COLLEZIONE DI SCIENZE NATURALI

Con un fascicolo in più
con il Dr. Hoch...

Ministero di Scienze e Università
Via Cavour 141-143
30131 Padova

1978

CAN WE FORECAST MUSIC? THE CASE OF J.S. BACH LAST FUGUE

Claudio Pizzi

Dipartimento di Statistica, Università Cà Foscari di Venezia, pizzic@unive.it

Silio Rigatti Luchini

Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova, rigatti@stat.unipd.it

Abstract

Questo lavoro si ripropone di studiare dal punto di vista statistico una partitura musicale. La successione delle note viene tradotta in una serie storica e a questa vengono applicati strumenti statistici non parametrici ad hoc per poter cogliere dalla successione delle informazioni la struttura matematica sottostante. La costruzione di un modello in tale contesto può rivelarsi utile al fine di prevedere “parti mancanti” o la conclusione di opere incompiute. L’approccio suggerito nel lavoro è applicato ad una famosa opera incompiuta di J.S.Bach.

Introduzione

L’analisi delle serie storiche, dopo i pionieristici lavori di Box e Jenkins, si è articolata seguendo diverse strade: da un lato sono stati proposti innumerevoli modelli alternativi a quelli lineari, con l’obiettivo di cogliere le strutture più complesse dei processi generatori dei dati, dall’altro si è diversificato l’ambito della sua applicazione: dall’economia, alla fisica, dalla meteorologia, all’idrologia, solo per citarne alcuni.

Questo breve lavoro si propone di studiare una tipologia di serie storiche raramente trattate in letteratura con modelli per serie temporali: le serie storiche musicali. L’idea è di tradurre una partitura musicale in una successione di numeri, con lo scopo di poter effettuare delle analisi statistiche sui dati così ottenuti. In particolare, potrebbe essere interessante calcolare la distanza tra due serie storiche musicali, al fine di ottenere una “misura” della somiglianza tra due composizioni e rendere possibile in modo più oggettivo l’attribuzione dell’opera ad un autore piuttosto che ad un altro, oppure poter stimare un modello atto a ricostruire la serie storica stimando i valori di alcune note mancanti o andate disperse o prevederne la conclusione qualora l’opera sia rimasta incompiuta..

In quest’analisi si è naturalmente consapevoli che le opere “rimaste” alla memoria hanno in loro una originalità difficilmente prevedibile e in questo senso le aspettative di risultati “eccezionali” ottenibili dall’analisi statistica vanno ridimensionate.

In questo senso l’analisi statistica dovrà essere accompagnata da altre conoscenze: il modello dovrà in qualche modo essere arricchito di altre informazioni. Si pensi ad esempio all’importanza della tonalità in cui viene scritto un brano musicale che implica l’utilizzo di alcune note e di massima sconsiglia l’utilizzo di altre. Ciò potrebbe costituire, da un punto di vista statistico, un vincolo all’ammissibilità di alcune soluzioni.

Il lavoro è così articolato: nel prossimo paragrafo verranno presentati i problemi connessi alla traduzione delle note in numeri, presentando diverse alternative ed enucleando una nuova proposta. Il paragrafo 3 presenta in modo non formale alcuni richiami a strumenti statistici utilizzabili per modellare le serie storiche oggetto del presente lavoro. Nella sezione successiva si presenta l’applicazione delle proposte a dati reali più precisamente al Contrapunctus XIV dall’arte della fuga di J.S.Bach. Infine il lavoro si conclude con alcune considerazioni finali che riassumono i risultati ottenuti e i possibili sviluppi futuri.

Dalle note ai numeri

Lo studio di un brano musicale con strumenti quantitativi, richiede inanzitutto la “traduzione” delle note in numeri. Si tratta di passare infatti da una rappresentazione ideografica come quella riportata in fig. 1 dove sono riportate le prime 20 battute del Contrapunctus XIV dall’Arte della Fuga di J.S.Bach ad una numerica. Weigend (1993) suggerisce tre diverse rappresentazioni per effettuare tale trasformazione: la *x-representation*, la *difference representation* e la *run length representation*.

Contrapunctus XIV

The image displays the first 20 measures of the Contrapunctus XIV from J.S. Bach's 'The Art of Fugue'. The score is organized into four systems of staves:

- System 1 (Measures 1-5):** Tenore (Tenor) and Basso (Bass) staves. Measure 5 is marked with a '5' above the Tenore staff.
- System 2 (Measures 6-10):** Alto (Alto), Tenore, and Basso staves. Measure 10 is marked with a '10' above the Alto staff.
- System 3 (Measures 11-20):** Soprano (Soprano), Alto, Tenore, and Basso staves. Measure 15 is marked with a '15' above the Soprano staff, and measure 20 is marked with a '20' above the Soprano staff.

Fig.1 Prime 20 battute del Contrapunctus XIV dall’Arte della Fuga di J.S.Bach

La *x-representation* permette di tradurre un brano musicale (inteso eventualmente come singola voce nei casi di composizioni polifoniche) in un’unica serie storica condensando l’informazione relativa all’altezza del suono e quello della sua durata. L’altezza del suono viene tradotta in un valore corrispondente alla “distanza” in numero di semitoni da una nota di riferimento. Ad esempio nel suo articolo, Weigend (1993) assegna al *la centrale* (seconda nota della voce Alto di fig.1) il numero 61, la nota successiva, la terza, è un sol ed essendo due semitoni più basso del *la centrale* il valore che gli verrà assegnato sarà 59. Per tener conto delle diverse durate delle note, la *x-representation*, suggerisce di scegliere un’adeguata durata di riferimento (che corrisponderà alla durata della nota più breve nell’intero brano). Ogni nota sarà così misurabile in termini di unità di riferimento e il valore indicante l’altezza della nota sarà ripetuto un numero di

volte pari alla durata in termini di unità di riferimento. Ad esempio se la durata di riferimento fosse 1/16 allora il la centrale dell'esempio precedente, che vale sulla partitura $\frac{3}{4}$, verrà rappresentato con il numero 61 ripetuto 12 volte (12 sono infatti i sedicesimi necessari per formare $\frac{3}{4}$). Il vantaggio principale di tale rappresentazione è che un'unica serie storica condensa in sé sia l'altezza che la durata della nota. Inoltre rende possibile mediante serie storiche multivariate la rappresentazione anche di brani polifonici. Un'inconveniente di tale rappresentazione è che due diverse successioni di note musicali possono dare origine alla stessa notazione in termini di serie storica. Infatti due note di ugual altezza vengono trascritte nello stesso modo in cui verrebbe trascritta un'unica nota di durata pari alla somma delle due note. In altre parole una volta "tradotto" il brano da notazione a numerazione il processo inverso non è univoco. Ciò significa che se l'analisi del brano è condotta con il fine della previsione potremmo dire che non siamo in grado di prevedere in senso stretto cioè senza interventi puramente soggettivi di attribuzione delle durate alle diverse note.

La *difference representation* concentra l'attenzione sui "salti" di altezza tra una nota e quella successiva. Tale differenza viene espressa in termini di semitoni tra una nota e quella successiva. Ad esempio le battute 11-12 della voce Alto di figura 1 assumerebbe i valori 7, -2, -2: infatti tra il re (prima nota) e il la (seconda nota) ci sono 7 semitoni, tra il la e il sol ci sono 2 semitoni in calare (questo giustifica il segno negativo) e tra il sol e il fa ci sono ancora 2 semitoni in calare. Il vantaggio di tale rappresentazione sta nel fatto che se il brano contiene al suo interno esatte trasposizioni del tema, queste avranno la medesima rappresentazione numerica. Non va però dimenticato che con tale rappresentazione si perde l'altezza assoluta delle note e che risulta difficile assegnare in qualche modo una durata, dal momento che il numero fa riferimento a due note che in generale assumono durate diverse.

La *run length representation* consiste nel rappresentare ciascuna nota da una coppia di numeri il primo indicante l'altezza della nota in termini di semitoni da una nota di riferimento (in modo simile alla x-representation), il secondo indicante la durata della nota. Tale rappresentazione ben si presta all'analisi di una melodia ad una voce ma crea problemi di "allineamento verticale" nel caso di brani polifonici. Riprendendo l'esempio, le battute 11-12 della voce Alto avremmo le seguenti prime quattro coppie di valori (54, 0.5) corrispondente al re, (61, 0.75) corrispondente al la (centrale), (59, 0.25) corrispondente al sol, e infine (57, 1) corrispondente al fa.

Vi sono inoltre alcuni caratteri comuni a queste tre rappresentazioni: il trattamento delle pause che semplicemente viene risolto assegnando un valore mancante, e la linearità della relazione tra note. Questo ultimo aspetto equivale a dire che la "distanza" tra due coppie di note in termini di semitoni ad esempio tra un la e un si e tra un re e un mi è uguale, indipendentemente dall'altezza delle note. Tale rappresentazione è quindi in contrasto con ciò che avviene nel mondo della fisica dei "suoni" in cui la legge che lega due note successive è di tipo non lineare. Più precisamente se indichiamo con f_0 la frequenza del la centrale che è pari a 440.00 Hz è possibile trovare la frequenza di qualsiasi altra nota mediante la seguente formula:

$$f_n = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-n_0} f_0$$

dove la differenza $n-n_0$ indica la differenza in semitoni tra la nota di cui si cerca la frequenza e il la centrale. Quindi in termini di frequenza anche la distanza tra le varie coppie di note la e si variano al variare dell'altezza delle note. In tab.1 sono riportate le frequenze in hertz delle note.

In questo lavoro è stata utilizzata una versione modificata della rappresentazione run length. Più precisamente ogni nota è stata trasformata in due numeri: uno indicante la frequenza in Hertz e l'altro indicante la durata in unità di battute. Per quanto concerne l'assegnazione di un valore mancante alla pausa si sono considerati due modi alternativi al valore mancante. Il primo criterio in conformità alla decisione di siglare le note in Hertz consiste nell'assegnare il valore 0, cioè evidenziando la mancanza di un segnale acustico. Il secondo criterio invece consiste nell'assegnare alla pausa lo stesso valore della nota che la precede ipotizzando che la percezione della pausa sia

legato al ricordo dell'ultima nota. Dato la caratteristica di non linearità della legge fisica che lega due note successive i modelli utilizzati per la "ricostruzione" della fuga sono caratterizzati da una elevata flessibilità e da una caratterizzazione locale della struttura in grado quindi di cogliere l'aspetto non lineare della serie storica. In particolare si sono considerati modelli di regressione locale (LOESS).

Note	Base Ottava	1° ottava	2° ottava	3° ottava centrale	4° ottava	5° ottava	6° ottava	7° ottava	8° ottava
Do	32.703	65.406	130.813	261.626	523.251	1046.502	2093.005	4186.009	8372.018
Do #	34.648	69.296	138.591	277.183	554.365	1108.731	2217.461	4434.922	8869.844
Re	36.708	73.416	146.832	293.665	587.330	1174.659	2349.318	4698.636	9397.273
Re #	38.891	77.782	155.563	311.127	622.254	1244.508	2489.016	4978.032	9956.063
Mi	41.203	82.407	164.814	329.628	659.255	1318.510	2637.020	5274.041	10548.082
Fa	43.654	87.307	174.614	349.228	698.456	1396.913	2793.826	5587.652	11175.303
Fa #	46.249	92.499	184.997	369.994	739.989	1479.978	2959.955	5919.911	11839.822
Sol	48.999	97.999	195.998	391.995	783.991	1567.982	3135.963	6271.927	12543.854
Sol #	51.913	103.826	207.652	415.305	830.609	1661.219	3322.438	6644.875	13289.750
La	55.000	110.000	220.000	440.000	880.000	1760.000	3520.000	7040.000	14080.000
La#	58.270	116.541	233.082	466.164	932.328	1864.655	3729.310	7458.620	14917.240
Si	61.735	123.471	246.942	493.883	987.767	1975.533	3951.066	7902.133	15804.266

Tabella 1. frequenza in Hertz delle note.

Alcune tecniche non parametriche

Numerose sono le tecniche non parametriche proposte in letteratura per il trattamento di dati espressi sotto forma di serie storiche. In questo paragrafo vengono presentati in modo non formale alcuni modelli non parametrici utilizzati per stimare il valore atteso condizionato.

Siano (X_i, Y_i) , $i=1, \dots, N$ due variabili legate tra loro da una relazione non nota che siamo interessati a studiare. In altre parole supponiamo che $Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i$ dove ε_i indica un errore di osservazione e il nostro interesse è rivolto alla funzione $m(\cdot)$.

L'approccio non parametrico si contrappone al tradizionale approccio parametrico sotto diversi aspetti. Il primo aspetto concerne la funzione $m(\cdot)$: nell'approccio parametrico la forma funzionale è definita da un numero finito di parametri, nell'approccio non parametrico invece non viene fissata una forma funzionale a priori valida per l'intero campo di variazione delle variabili ma piuttosto la funzione viene costruita punto per punto.

Connesso a questo aspetto vi è quello che definiamo di globalità vs località: mentre l'approccio parametrico considera la globalità dei punti osservati al fine di stimare i parametri che definiscono in modo univoco l'incognita funzione $m(\cdot)$, l'approccio locale non parametrico utilizza sempre un numero limitato, costante o variabile, di punti campionari per effettuare la stima di un punto della funzione.

Da queste considerazioni, qualora si opti per modelli locali non parametrici, sorgono alcuni interrogativi: quanti punti dobbiamo considerare per stimare un punto della curva di regressione? Quale è l'importanza di ciascun punto campionario nel processo di stima? Come si possono sintetizzare le informazioni campionarie per stimare la funzione del valore atteso condizionato? La combinazione delle diverse risposte a queste domande hanno dato origine a diversi modelli locali che in diversa misura riescono a catturare l'andamento della curva di regressione.

Il metodo k -nearest neighbors (k -NN) proposto da Loftsgaarden e Quesenberry (1965) stima $\hat{m}_k(x)$ nel punto x calcolando la media pesata dei k punti campionari più vicini al punto x :

$$\hat{m}_k(x) = \sum_{i=1}^k W_{k,i}(x) Y_i \quad [1]$$

dove i pesi $W_{k,i} = 1/k$ se X_i è uno dei k punti più vicini al punto di stima x , altrimenti $W_{k,i} = 0$. Il parametro k gioca un ruolo chiave controllando il livello di lisciamento della curva stimata: se k è dello stesso ordine di N allora il modello perde il carattere di località e tende a degenerare al valore atteso non condizionato; viceversa se k è troppo piccolo si perde la regolarità della curva tendendo ad interpolare i singoli punti.

L'idea base dei modelli locali è che i punti più vicini a x sono più informativi circa il comportamento della funzione nell'intorno di x . Se la distanza dal punto di stima è importante, allora i pesi $W_{k,i}$ dovrebbero essere una funzione decrescente della distanza. In tal senso i pesi possono essere definiti come:

$$K_{n,i}(x) = \frac{K_h(x - X_i)}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)}$$

dove $K_h(u) = h^{-1} K(u/h)$ è definita *funzione kernel*. I pesi vengono così a dipendere dalla funzione Kernel K e dal parametro di località h detto *ampiezza di banda*. Lo stimatore Kernel è stato proposto inizialmente da Nadaraya (1964) e da Watson (1964). L'applicazione di tale stimatore al problema di stima di una curva di regressione è

$$\hat{m}_h(x) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) Y_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)}$$

In modo analogo al metodo k -NN, quando il parametro $h \rightarrow \infty$ la stima della curva di regressione degenera al valor atteso non condizionato di Y , mentre per $h \rightarrow 0$ si ottiene una interpolazione dei punti campionari.

Una possibile estensione a tale metodo consiste nel sostituire la media pesata con un polinomio, cioè si adatta ai k punti più vicini un polinomio. Il Locally Weighted Regression Smoother (LOESS) introdotto da Cleveland e Devlin (1988) e i Local Polynomial Models (LPM) proposti da Fan e Gijbels (1996) sono due modelli che utilizzano localmente l'approssimazione polinomiale, si veda Fan Gijbels (1996) per una presentazione esauriente dell'argomento. Altri sviluppi della stessa idea sono basati su approssimazioni non polinomiali locali come funzioni *spline*, ed hanno aspetti teorici e computazionali interessanti, si vedano tra tutti Deboor e Green e Silverman.

Il LOESS è simile per alcuni aspetti al modello k -NN poiché usa una frazione costante d di dati chiamata *span* e stima il modello mediante una procedura iterativa. Inizialmente i parametri dei polinomi sono stimati pesando ciascun punto campionario mediante una funzione kernel, l'adattamento del polinomio permette di calcolare per i punti campionari considerati i residui e, successivamente, i pesi sono aggiornati in modo da penalizzare i punti campionari che presentano i residui in valor assoluto maggiori.

Nel caso dei LPM i parametri del polinomio locale sono stimati utilizzando un numero variabile di punti che dipende dal valore del parametro h e dal punto in cui si stima la funzione. La stima della curva di regressione è ottenuta mediante l'adattamento locale di un polinomio i cui parametri sono stimati pesando i diversi punti campionari mediante una funzione kernel.

Lo studio del “contrapunctus XIV” da “l’Arte della Fuga” di J.S.Bach

L’opera scelta per l’analisi statistica descritta nei paragrafi precedenti è una famosa opera incompiuta di J.S.Bach: il “Contrapunctus XIV” da “l’Arte della Fuga”. Le ragioni di tale scelta sono riconducibili sia per l’interesse che questa ha sempre suscitato tra musicisti e musicologi, essendo rimasta incompiuta per la morte del compositore tedesco, sia per il fatto che essa costituisce l’unica opera, o la più importante, sulla quale in molti si sono cimentati nel tentativo di dare una propria conclusione. L’obiettivo principale dell’analisi è stato di vedere quale fosse la possibilità di prevedere un brano musicale con il fine ultimo di verificare la possibilità di giungere ad una conclusione all’opera incompiuta. L’opera si presenta composta da quattro voci, basso, contralto, soprano e tenore, che eseguono, alternandosi, il tema e le variazioni dello stesso. L’opera si interrompe improvvisamente alla battuta 239. L’analisi è stata condotta disgiuntamente sulle singole voci, quindi considerando quattro brani monofonici, e limitatamente alle altezze delle note. Per ogni voce sono state utilizzate le informazioni relative alle prime 223 battute (658, 734, 661 e 609 osservazioni rispettivamente per la voce basso, contralto, tenore e soprano) e si sono utilizzate le rimanenti (46, 77, 67, 80 osservazioni rispettivamente per la voce basso, contralto, tenore, soprano) per valutare la capacità del modello di seguire l’estro creativo del compositore.

Il diverso numero di punti campionari su cui stimare il modello e su cui fare la previsione out-of-sample dipende dal fatto che il numero di note varia da voce a voce.

In questo paragrafo, per quanto possibile, ci si limita solo alla presentazione dell’analisi prettamente statistica senza addentrarci in aspetti musicologici non “opportuni” in questo contesto, tuttavia alcune considerazioni in fase previsiva saranno indispensabili. In particolare è stata condotta una prima analisi sulle note che il compositore ha utilizzato per ogni voce nelle prime 223 battute i cui risultati sono sintetizzati in tabella 2.

Per rendere più facilmente leggibili i risultati si è proceduto ad una sintesi della tabella 2 nella tabella 3 nella quale per ogni voce sono riportati le durate espresse in battute e la percentuale della durata occupata da ciascuna nota all’interno del brano al netto delle pause. In neretto sono evidenziate le note che occupano meno del 5% del tempo totale, tali note sono il Do #, il Re #, il Fa #, il Sol # e il Si. Tali note non sono proprie della tonalità re minore in cui è scritto il brano e possono essere interpretate come delle “alterazioni di passaggio” utilizzate dal compositore nella presentazione dei vari temi.

La scelta di modelli locali non parametrici è sembrata opportuna in considerazione della struttura non lineare delle serie storiche considerate. L’applicazione di alcuni test statistici comunemente utilizzati per verificare l’ipotesi di non linearità sulle serie storiche hanno dato risultati a favore dell’ipotesi di non linearità delle serie storiche musicali che abbiamo preso in considerazione. Più precisamente sono stati applicati alle serie opportunamente filtrate da un modello lineare il BDS test (con embedding dimension 2, 3 e 4) e il White Neural Network Test (calcolato per lag da 1 a 3). I risultati di tali test sono riportati in tab. 4 e 5 rispettivamente.

Il metodo utilizzato per la stima e la previsione della serie storiche è stato il LOESS. La scelta di tale modello implica la decisione su alcuni parametri che influiscono sui risultati della stima. In particolare ci si riferisce alla scelta del parametro *span*, che indica la percentuale dei dati campionari che vengono utilizzati per stimare la funzione di regressione in ogni punto, il grado del polinomio locale utilizzato per la stima e i ritardi da considerare (regressori). La scelta dello *span* e del grado del polinomio sono state effettuate in base ad un criterio di minimizzazione dell’errore quadratico medio.

I modelli selezionati considerano come regressori significativi i primi tre ritardi. Il grado del polinomio è stato di ordine 2 per la voce basso e soprano mentre per le voci contralto e tenore è stato di grado 1. Di conseguenza anche lo *span* si è differenziato tra i diversi modelli con un valore maggiore per i modelli che hanno utilizzato un polinomio di grado superiore e più precisamente uno *span* di 0.5 e 0.57 rispettivamente per le voci basso e soprano e 0.25 per le voci contralto e tenore.

Basso			Contralto			Tenore			Soprano							
altezza nota in Hertz	Nota	freq. # semitoni	altezza nota in Hertz	Nota	freq. # semitoni	altezza nota in Hertz	Nota	freq. # semitoni	altezza nota in Hertz	Nota	freq. # semitoni	altezza nota in Hertz	Nota	freq. # semitoni	durata	
Pausa		26	Pausa		16	Pausa		18	Pausa		0	Pausa		11	0	48.750
65.406	Do	1	174.614	Fa #	1	130.813	Do	6	293.665	Re	2	293.665	Re	2	54	1.750
73.416	Re	5	184.997	Fa #	1	146.832	Re	22	311.127	Re #	1	311.127	Re #	1	55	1.000
82.407	Mi	2	195.998	Sol	2	155.564	Re #	6	329.628	Mi	8	329.628	Mi	8	56	1.500
87.307	Fa	4	207.652	Sol #	3	164.814	Mi	23	349.228	Fa	10	349.228	Fa	10	57	2.875
92.499	Fa #	5	220.000	La	15	174.614	Fa	35	369.994	Fa #	8	369.994	Fa #	8	58	2.250
97.999	Sol	24	233.082	La#	6	184.997	Fa #	10	391.995	Sol	28	391.995	Sol	28	59	9.500
103.826	Sol #	3	246.942	Si	9	195.998	Sol	65	415.305	Sol #	6	415.305	Sol #	6	60	1.875
110.000	La	49	261.626	Do	22	207.652	Sol #	8	440.000	La	59	440.000	La	59	61	16.688
116.541	La#	34	277.183	Do #	8	220.000	La	105	466.164	La#	39	466.164	La#	39	62	14.188
123.471	Si	19	293.665	Re	76	233.082	La#	63	493.883	Si	36	493.883	Si	36	63	6.875
130.813	Do	56	311.127	Re #	13	246.942	Si	36	523.251	Do	67	523.251	Do	67	64	27.500
138.591	Do #	8	329.628	Mi	82	261.626	Do	65	554.365	Do #	33	554.365	Do #	33	65	9.000
146.832	Re	89	349.228	Fa	87	277.183	Do #	30	587.330	Re	104	587.330	Re	104	66	35.875
155.563	Re #	26	369.994	Fa #	28	293.665	Re	96	622.254	Re #	20	622.254	Re #	20	67	6.875
164.814	Mi	60	391.995	Sol	120	311.127	Re #	16	659.255	Mi	69	659.255	Mi	69	68	17.375
174.614	Fa	68	415.305	Sol #	10	329.628	Mi	30	698.457	Fa	48	698.457	Fa	48	69	14.250
184.997	Fa #	23	440.000	La	102	349.228	Fa	12	739.989	Fa #	5	739.989	Fa #	5	70	1.063
195.998	Sol	68	466.164	La#	37	369.994	Fa #	1	783.991	Sol	34	783.991	Sol	34	71	9.875
207.652	Sol #	14	493.883	Si	17	391.995	Sol	8	880.000	La	20	880.000	La	20	73	4.688
220.000	La	54	523.251	Do	34	415.305	Sol #	2	932.328	La #	6	932.328	La #	6	74	2.375
233.082	La#	13	554.365	Do #	6	440.000	La	1	1046.502	Do	1	1046.502	Do	1	76	0.125
246.942	Si	5	587.330	Re	25	466.164	La#	1								
261.626	Do	4	622.254	Re #	1											
277.183	Do #	1	659.255	Mi	9											
293.665	Re	1	698.457	Fa	4											
			783.991	Sol	1											

Tabella 2

	Basso		Contralto		Tenore		Soprano	
	tempo	%	tempo	%	tempo	%	tempo	%
Do	17.188	0.086	16.813	0.080	20.063	0.107	27.625	0.147
Do #	1.750	0.009	3.625	0.017	7.875	0.042	9.000	0.048
Re	31.188	0.156	32.438	0.155	37.188	0.199	37.625	0.201
Re #	9.750	0.049	5.375	0.026	4.875	0.026	7.875	0.042
Mi	13.813	0.069	22.188	0.106	14.875	0.080	18.875	0.101
Fa	24.250	0.121	26.938	0.129	14.375	0.077	17.125	0.091
Fa #	8.063	0.040	6.688	0.032	2.063	0.011	3.313	0.018
Sol	32.563	0.163	33.438	0.160	21.813	0.117	19.375	0.103
Sol #	4.875	0.024	2.813	0.013	1.563	0.008	6.563	0.035
La	38.563	0.192	37.438	0.179	34.438	0.184	16.688	0.089
La#	14.500	0.072	15.500	0.074	19.625	0.105	16.563	0.088
Si	3.875	0.019	5.750	0.028	8.000	0.043	6.875	0.037

Tabella 3 Incidenza delle diverse note sulla struttura del brano suddiviso per voci

Basso					
	ε	20.5352	41.0703	61.6055	82.1407
embedding					
	2	12.9424	9.0987	6.8062	4.2688
	3	15.0836	8.9311	6.7634	4.1305
	4	16.4361	8.9599	7.0749	4.8777
Contralto					
	ε	43.6946	87.3892	131.0839	174.7785
embedding					
	2	14.2848	11.082	11.4208	11.2435
	3	13.9459	10.1296	11.1697	11.0691
	4	12.8867	8.6168	10.0302	10.1662
Tenore					
	ε	28.7455	57.4911	86.2366	114.9821
embedding					
	2	10.6742	9.1478	7.4252	4.636
	3	9.9482	8.672	7.2131	4.2665
	4	9.075	7.8843	6.7121	3.8218
Soprano					
	ε	60.7913	121.5825	182.3738	243.1651
embedding					
	2	12.3919	8.5889	6.8486	5.4803
	3	12.8929	7.6629	6.1648	4.8134
	4	11.6089	6.2221	5.1344	4.0353

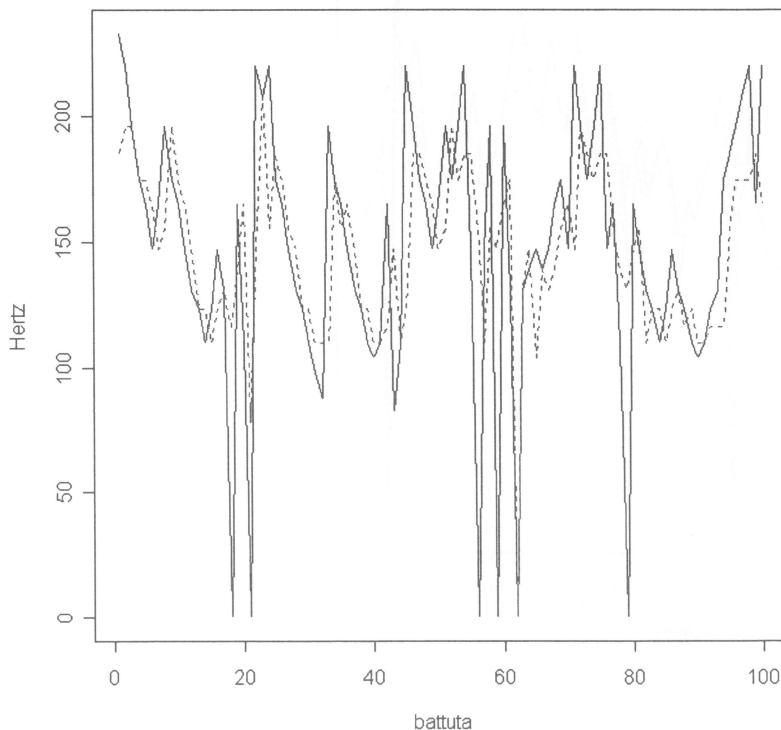
Tabella 4. Risultati test BDS

Le previsioni ottenute sono state "arrotondate" alla frequenza più vicina in modo tale da poter rappresentare una nota. In questa analisi non sono state utilizzate informazioni, per così dire extra

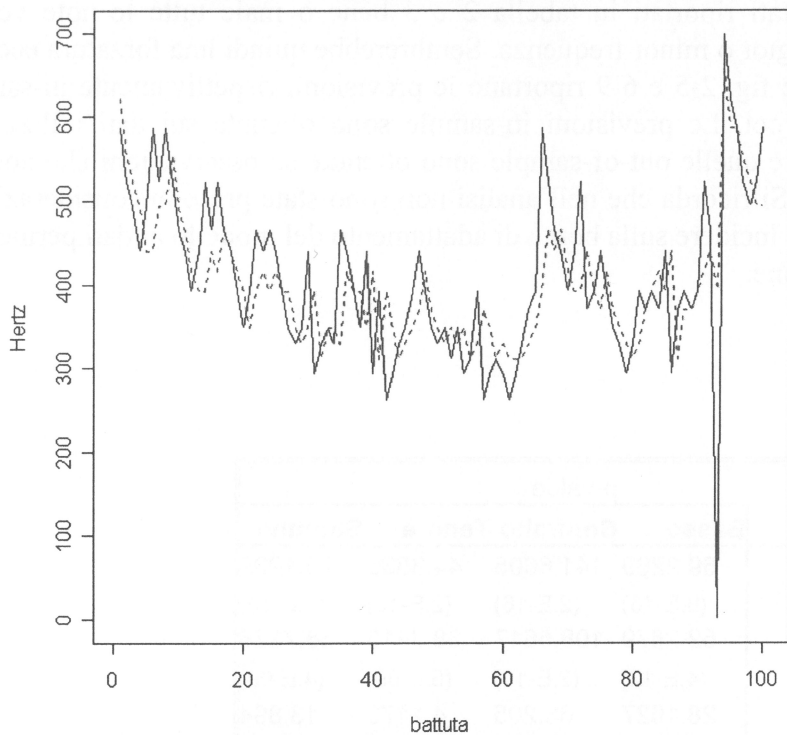
statistiche. Non sono state infatti fornite “conoscenze” relative alla tonalità del brano e ciò comporta la presenza di note “sconvenienti” da un punto di vista prettamente armonico-musicale. D’altra parte come è emerso dai risultati riportati in tabella 2 e 3 bene o male tutte le note vengono utilizzate anche se con una maggior o minor frequenza. Sembrerebbe quindi una forzatura eccessiva il voler eliminare certe note. Le fig. 2-5 e 6-9 riportano le previsioni, rispettivamente in-sample e out-of-sample, per le quattro voci. Le previsioni in-sample sono ottenute sui dati utilizzati per stimare il modello stesso, mentre quelle out-of-sample sono ottenute su osservazioni che non sono state utilizzate in fase di stima. Si ricorda che nell’analisi non sono state prese in considerazione le durate delle note che potrebbero incidere sulla bontà di adattamento del modello ai dati permettendo così anche una migliore previsione.

Lag	p-value			
	Basso	Contralto	Tenore	Soprano
1	69.2299 (9.E-16)	141.6605 (2.E-16)	44.3836 (2.E-10)	76.1209 (2.E-16)
2	52.2679 (4.E-12)	108.5617 (2.E-16)	38.3413 (5.E-09)	38.7236 (4.E-09)
3	28.1627 (8.E-07)	63.205 (2.E-14)	4.1173 (0.128)	13.894 (0.001)

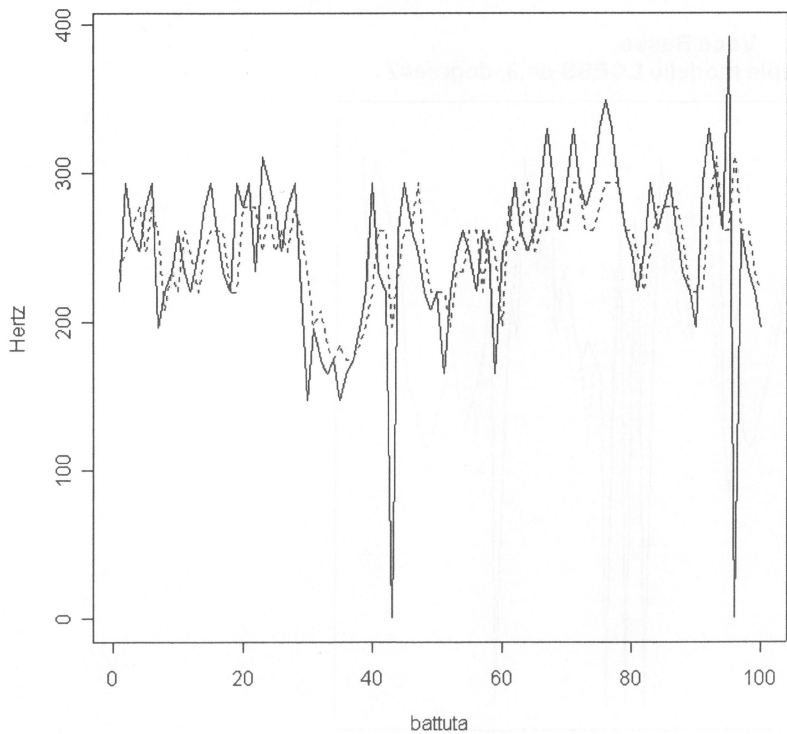
Voce Basso
previsioni in-sample modello LOESS d=.3, degree=2



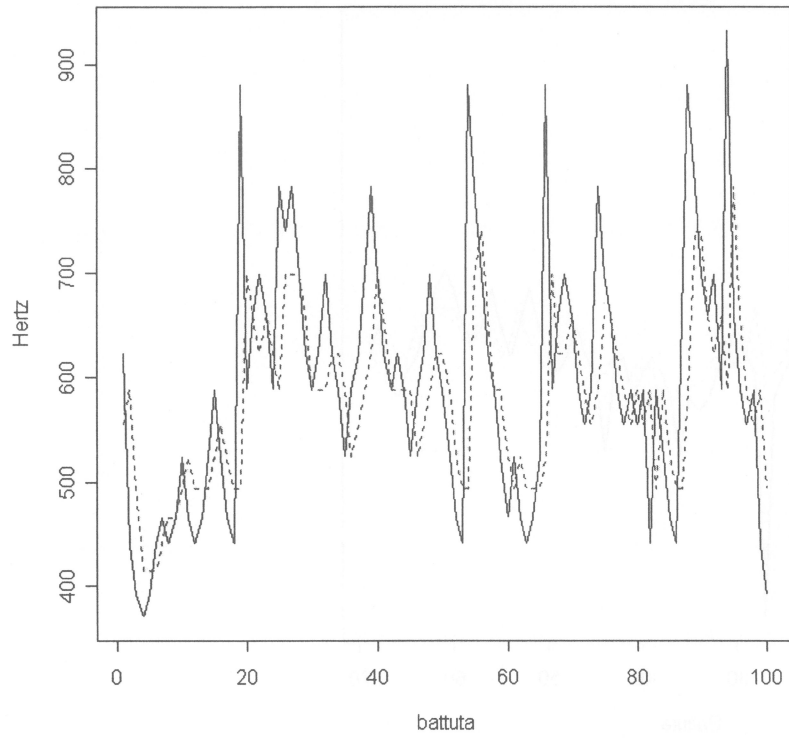
Voce Contralto
previsioni in-sample modello LOESS d=.25, degree=1



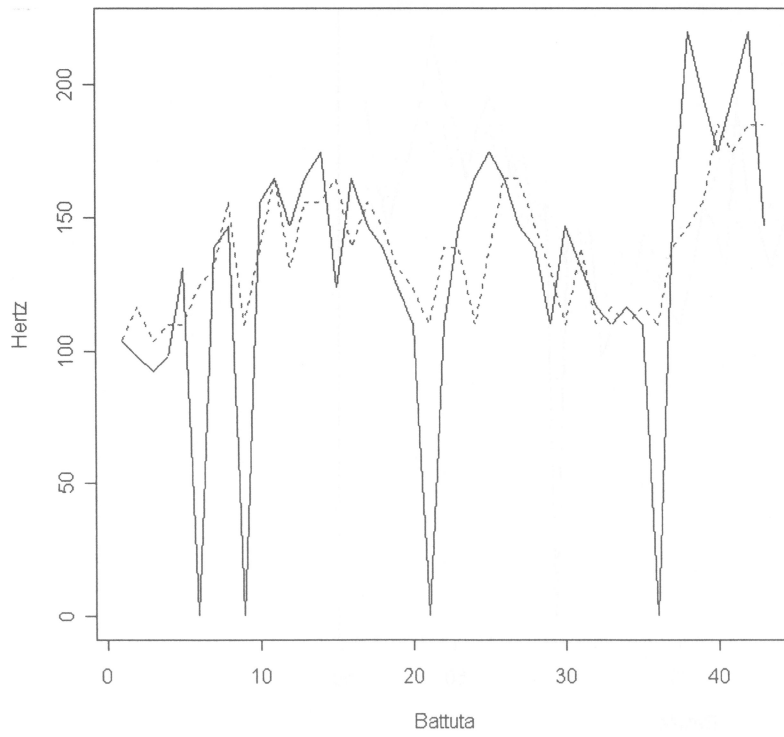
Voce Tenore
previsioni in-sample modello LOESS d=.25, degree=1



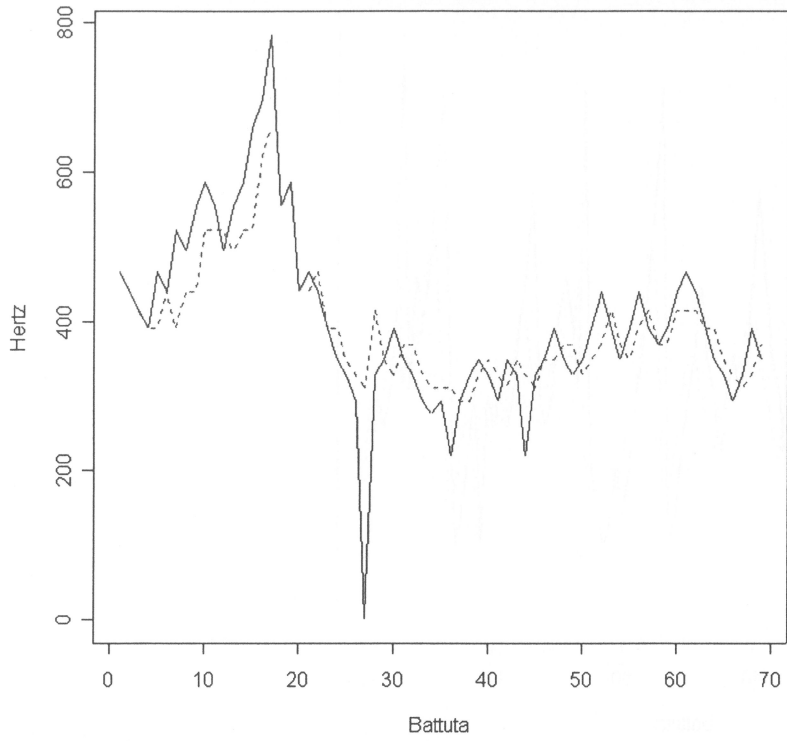
Voce Soprano
previsioni in sample modello LOESS $d=.57$, degree=2



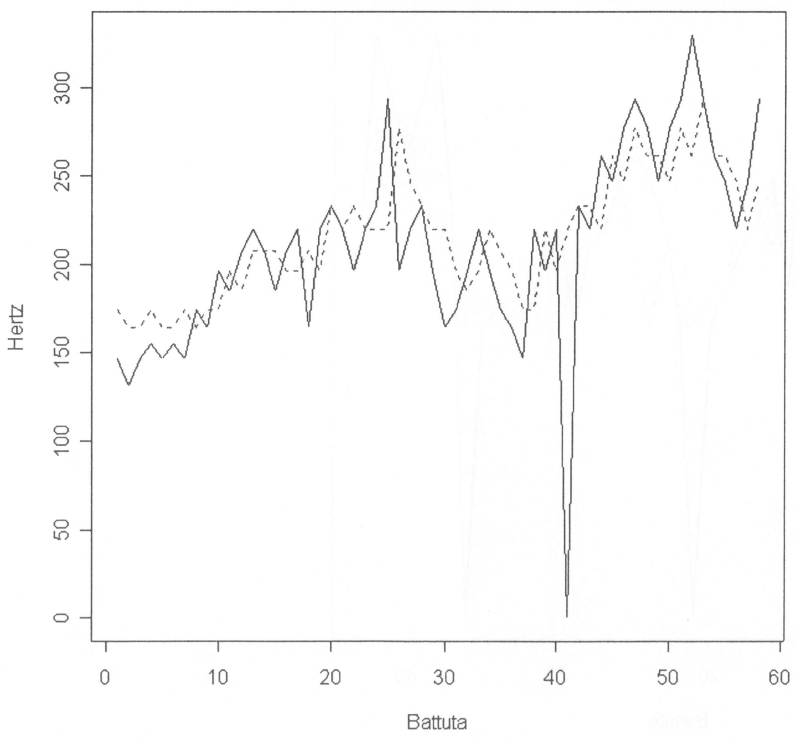
Voce Basso
previsioni out-of-sample modello LOESS $d=.3$, degree=2



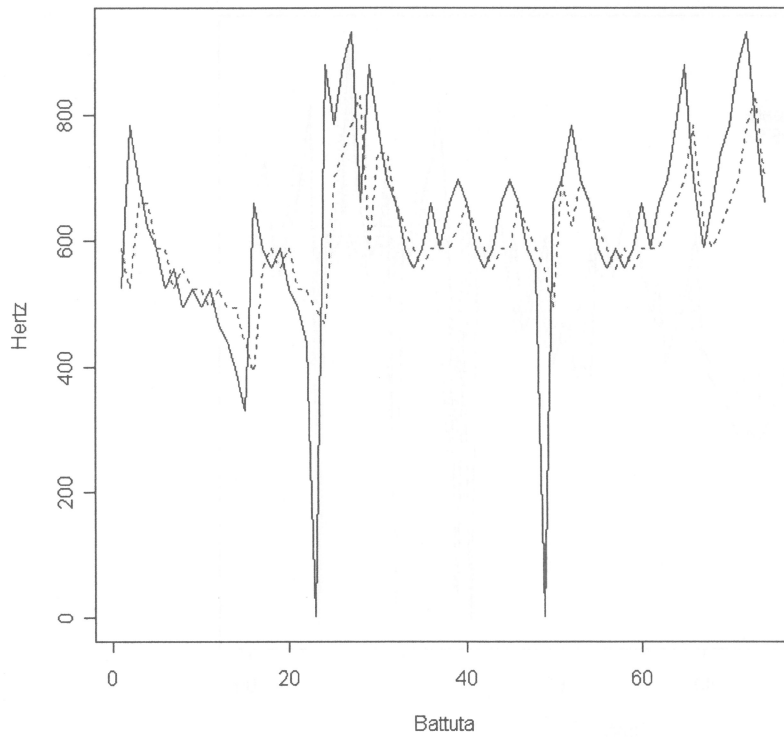
Voce Contralto
previsioni out-of-sample modello LOESS d=.25, degree=1



Voce Tenore
previsioni out-of-sample modello LOESS d=.25, degree=1

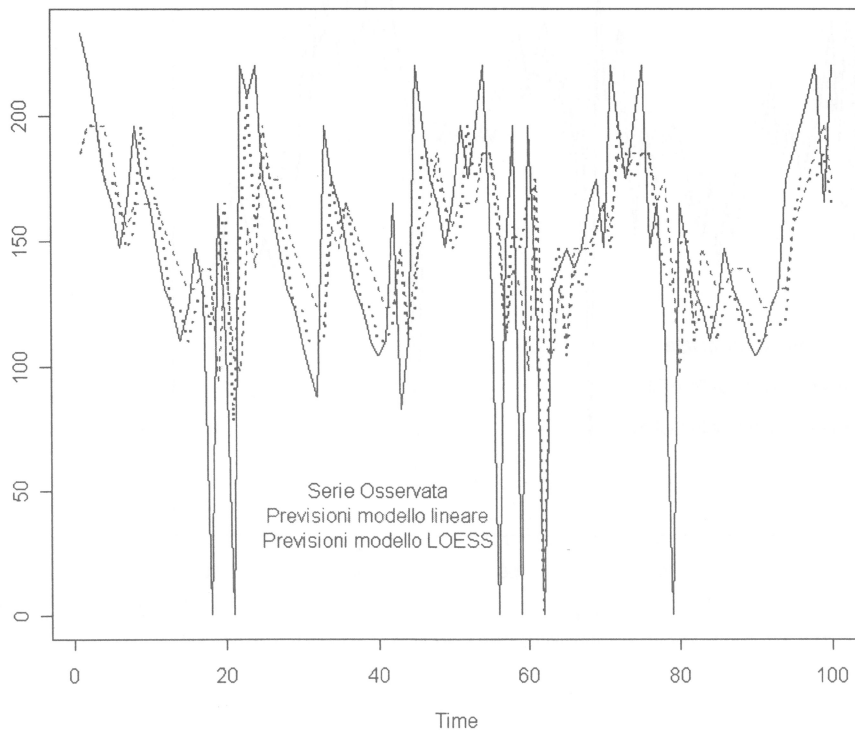


Voce Soprano
previsioni out-of-sample modello LOESS d=.57, degree=2

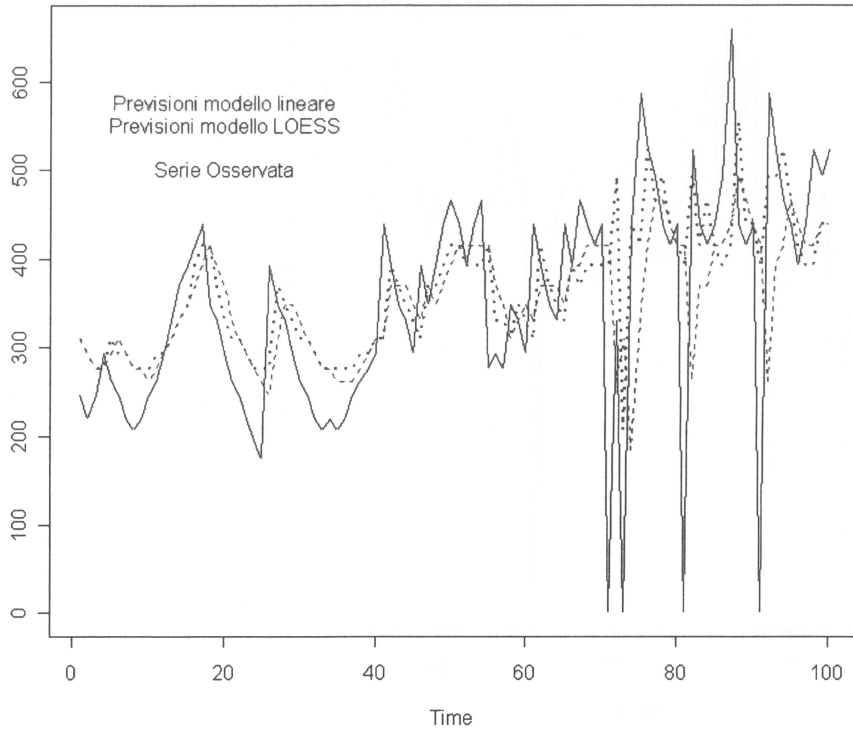


Al fine di valutare anche la capacità previsiva dei modelli locali rispetto al benchmark dei modelli lineari sono stati stimati dei modelli della classe ARIMA. I risultati sono riportati nelle figure 10-13 nelle quali vengono messi a confronto le previsioni in-sample dei due modelli. I risultati non sembrano differire molto anche se i modelli locali sembrano riuscire maggiormente seguire i picchi presenti nelle serie storiche.

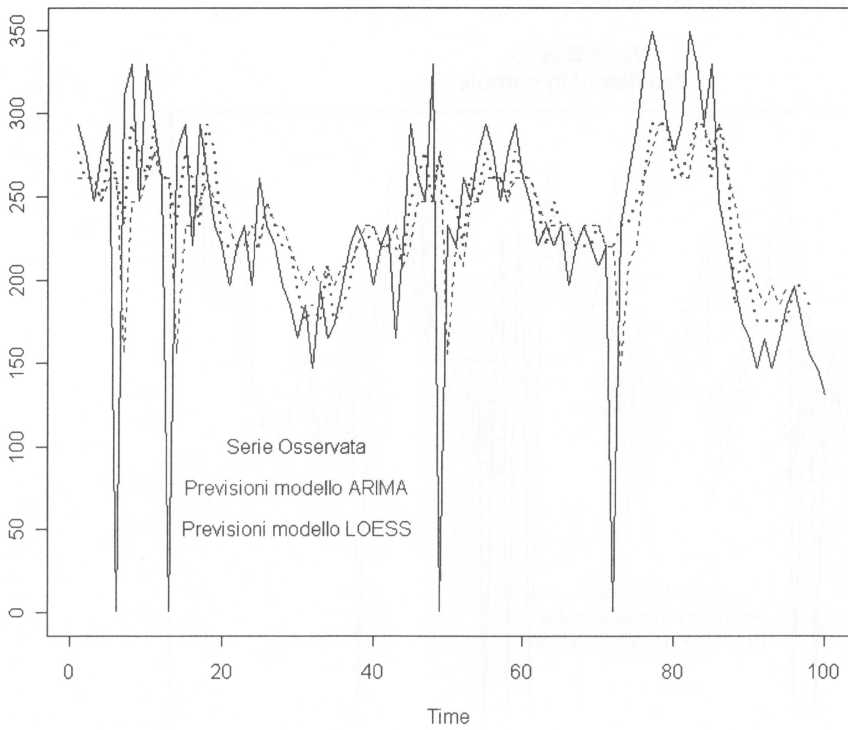
Voce Basso
Previsioni in sample



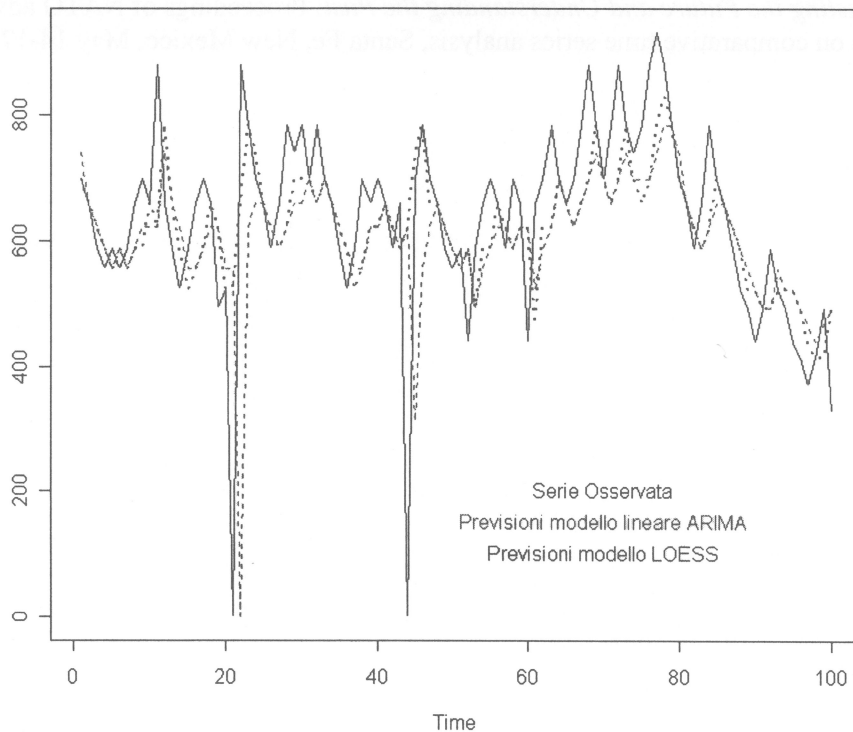
Voce Contralto
Previsioni in sample



Voce Tenore
Previsioni in sample



Voce Soprano Previsioni in sample



Conclusioni

I risultati fin qui ottenuti sembrano incoraggianti: da un lato sono state evidenziate le potenzialità del modello utilizzato, dall'altro vi sono diversi possibili miglioramenti che possono essere approntati. L'inserimento nell'analisi delle durate delle note dovrebbe migliorare consistentemente con riferimento, in particolare, alle note che sono state definite "alterazioni di passaggio". Un altro versante su cui lavorare è l'aspetto polifonico del brano. Si tratta di aggiungere all'aspetto temporale quello che in senso lato potremmo definire "spaziale". Rimane comunque la consapevolezza della difficoltà di prevedere quelle discontinuità che costituiscono al tempo stesso l'aspetto più interessante del brano e l'imprevedibilità del genio compositivo di un grande musicista.

Bibliografia

- Beran, J. and Mazzola, G. (2000). Timing Microstructure in Schumann's "Träumerei" as an Expression of Harmony, Rhythm, and Motivic Structure in Music Performance. *Computer & mathematics with applications*, **39**, 99-130
- Cleveland, W. e Devlin, S.J. (1988) *Locally Weighted Regression: an Approach to regression analysis by local fitting*. *Journal of American Statistical Society*, **83**, 596-610.
- De Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag.
- Fan, J. and Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and its application*. Chapman & Hall, London.
- Green, P. e Silverman, B. (1994). *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models: a Roughness Penalty Approach*. Chapman and Hall
- Loftsdgaarden, D. and Quesenberry, G. (1965). A nonparametric estimate of a multivariate density function. *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 1049-1051.
- Nadaraya, E. (1964). On estimating Regression. *Th. Prob. Appl.*, **9**, 141-142.

Watson G. (1964). Smooth Regression Analysis. *Sankhya*, 26, 359-372.

Weigend, A. and Dirst, M. (1993). Baroque Forecasting: On Completing J.S. Bach's Last Fugue, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*: Proceedings of NATO advanced research workshop on comparative time series analysis, Santa Fe, New Mexico, May 14-17, 1992.