Primo appello di ANALISI MATEMATICA 2 del 12/01/2016

Corso di Laurea in Fisica

Commissione del prof. Fausto Ferrari

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova A+B: due ore. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato con gli esercizi svolti in dettaglio assieme ai fogli protocollo su cui devono essere riportate le proprie generalità e il numero di matricola. Non è consentito l'uso di appunti, testi, eserciziari, computer e cellulari. Le fasi C e D (fase orale) si svolgeranno a partire dal 18 Gennaio 2016. Per accedere alla fase orale, qualora si superino la parte A e B, è comunque obbligatoria l'iscrizione alla corrispondente lista di AlmaEsami.

....

Parte A. Attenzione, se il punteggio realizzato in questa parte è inferiore a 4 **(su 9 punti disponibili) non verrà corretta la parte B e lo studente dovrà ripetere l'esame.**

---

(1) [3 punti] Siano $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (\sin^2(3x + y^2 + \phi(x, y)) + 4z, x^3 + \phi(x, y) - z).$$

Calcolare $Jf(x_0, y_0, z_0)$ in $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. In particolare calcolare poi $Jf(0, 0, 0)$ sapendo che $\phi(0, 0) = \frac{\pi}{2}$ e $\nabla\phi(0, 0) = (1, 1)$. Determinare infine $\operatorname{Ker} df(0, 0, 0)$.

---

(2) [3 punti]

Calcolare $\int_A y dx dy$, dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y^2 - \pi; x \leq \pi + 2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} y; y \geq -\sqrt{\pi}; y \leq \frac{1}{2}x + \sqrt{\pi}\}$.

---

(3) [3 punti] Determinare, se esiste, un potenziale della seguente forma differenziale:

$$\omega = \big(y\cos(xy) + 2x - y^2 \sin(xy^2)\big)\, dx + \big(x\cos(xy) - 2xy \sin(xy^2)\big)\, dy$$

e calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove (γ, T) è la curva orientata, di supporto

$$\{x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1, \ x \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \in [1, 2], \quad x = 0\},$$

tale che $T(0, 0) = (1, 0)$.

Parte B. Attenzione, se il punteggio realizzato in questa parte è inferiore a 6 sui 10 punti disponibili non si è ammessi alla fase successiva, decade la validità della parte A e il candidato deve ripetere l'esame dall'inizio.

---

(4) [5 punti]
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2 + zx + y^2 + x^2 + x$ dove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calcolare $f(A)$.

---

(5) [5 punti]
Sia (Σ, ω), una superficie orientata con bordo dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + 1, \quad -1 \leq z \leq 3\}.$$

Calcolare $\int\int_\Sigma \langle \text{rot}F, \omega \rangle d\sigma$ sapendo che $F(x, y, z) = -\frac{1}{3}(y, z, x)$ e che $\omega(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$. Verificare poi il risultato ottenuto utilizzando il teorema di Stokes.