1) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:

Trovare il massimo di $p(x_1,x_2,x_3)=3x_1+2x_2+2x_3$ con i vincoli $x_k \geq 0\,(1\leq k\leq 3)$ e

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 \leq 6 \\ 2x_1+x_2-x_3=8 \\ x_1-x_2+4x_3=1 \end{cases}$$

(può essere utile notare che, posto $A_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, risulta $A_3=A_1-3A_2+A_4$ e $B=3A_1+2A_2+A_4$ )

[soluzione ottimale $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,5,1,0)$]

2) Sia $f(x)=x^2\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$, $T=T_f$ la distribuzione associata a *f*. Descrivere la distribuzione $T'$.

[$T'(x)=2x\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)+2\pi^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k k^2\,\delta(x-k\pi)$]

3) Sia $f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{se } x\leq 0 \\ x^2 & \text{se } x>0 \end{cases}$, $T=T_f$ la distribuzione associata a *f*. Stabilire quale è il minimo ordine di derivazione di *T* con il quale si ottiene una distribuzione <u>non</u> di tipo funzione, e descrivere tale distribuzione.

[$T'''(x)=24x\cdot\chi_{]-\infty,0]}(x)+2\delta(x)$ cioè $\langle T''',\varphi\rangle=24\int_{-\infty}^{0}x\varphi(x)\,dx+2\varphi(0)$ ]

4) Un tizio riceve 500€ in prestito da una banca, convenendo un tasso del 10% (in regime di capitalizzazione composta, come di consueto). Dopo un anno costui versa alla banca 200€, dopo due anni altri 235€. Quale importo deve pagare alla fine del terzo anno per estinguere il suo debito?

[165€. Infatti la prima rata contiene una quota di interesse di 50€, quindi la quota capitale è 150€, e il debito residuo diventa 350€; alla fine del secondo anno l'interesse maturato è di 35€, quindi con la seconda rata il debito si riduce di 200€, e il debito residuo è di 150€; allo scadere del terzo anno il debitore dovrà versare 15€ per interesse più 150€ per estinguere del tutto il suo debito]

5) Un fotoamatore vuole comperare a rate la nuova macchina fotografica Leica SL; il negozio "a" chiede 3000€ immediatamente e due rate di 2000€, dopo un anno e dopo due anni. Il negozio "b" non chiede alcun pagamento immediato, ma tre rate di 2400€ dopo uno, due e tre anni. Supponendo che il tasso di mercato sia del 5%, da quale negozio conviene acquistare, in base al calcolo del valore attuale? (attenzione: poiché si tratta di denaro da pagare, la scelta migliore è quella con valore attuale minore!). Ripetere il calcolo se il tasso non è più 5% ma 2%

[Al tasso 5% è meglio "b", v.a.=6535,80€, contro 6718,82 per "a"; invece al 2% è meglio "a", con un v.a. di 6883,12€, contro 6921,32 di "b"]

6) Sia *I* un intervallo di $\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$ una funzione continua, $a,b\in I$ due punti di massimo relativo per *f*. Dimostrare che all'interno dell'intervallo $]a,b[$ c'è almeno un punto di minimo relativo per *f*.

7) Dimostrare che $\int_0^{\frac{4}{\pi}}\arctan\left(e^{-x}\right)dx\leq 1$. (applicare il Teorema della media integrale).

8) Verificare in base alla definizione di limite che $\lim_{x\to 1}x^2\cdot\cos(\pi x)=-1$.

[conviene scrivere $x^2\cdot\cos(\pi x)+1=x^2\cdot\cos(\pi x)-\cos(\pi x)+\cos(\pi x)+1\ldots$]

9) Due "decisioni" di natura finanziaria danno luogo ai guadagni indicati in tabella, in funzione del verificarsi di un evento $E$ o del suo complementare. Stabilire quale sia la decisione da assumere, se si adotta il criterio del valore atteso, oppure se si adotta il criterio della utilità attesa relativamente alla funzione utilità $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$. Segue la tabella dei dati.

| | $d_1$ | $d_2$ | *probabilità* |
|---|---|---|---|
| $E$ | 12 | 20 | 0,8 |
| $\bar{E}$ | 4 | –4 | 0,2 |

[Con speranza matematica: $d_2$, essendo $(E(X_1); E(X_2)) = (10{,}4\,;15{,}2)$,
con utilità: $d_1$, essendo $(E(u(X_1)); E(u(X_2))) = (0{,}625\,;0{,}593)$ ]