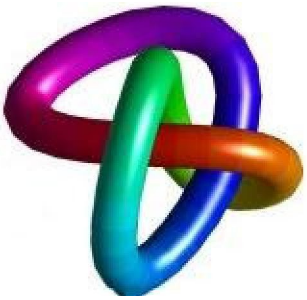
ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA FORMAZIONE

C.d.L. "Scienze della Formazione Primaria"

Corso di *Geometria e Matematica di base*

A. Gimigliano

Soluzione di alcune prove di esame



Soluzioni a cura di **Silvia Agnorelli**

INDICE:

Soluzione prova scritta del 08/09/2014 1

Soluzione prova scritta del 05/12/2014 9

Soluzione prova scritta del 12/01/2015 16

Soluzione prova scritta del 14/07/2015 24

Soluzione prova scritta del 08/09/2014

Gli esercizi sono stati svolti considerando $a = 5$ e $b = 3$

Algebra

Esercizio 1 Risolvere la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{1}{5} - 0.21\right) - \frac{7}{20} + 1.36\right]^5 + \left[\frac{(b+2)}{3} \times 1.2\right] - 1 =$$

Per prima cosa trasformiamo i numeri scritti in forma decimale in frazioni e sostituiamo il valore alla lettera b:

$$\left[\left(\frac{1}{5} - \frac{21}{100}\right) - \frac{7}{20} + \frac{136}{100}\right]^5 + \left[\frac{(3+2)}{3} \times \frac{12}{10}\right] - 1 =$$

Togliamo le parentesi dove possibile:

$$\left[\frac{1}{5} - \frac{21}{100} - \frac{7}{20} + \frac{136}{100}\right]^5 + \left[\frac{5}{3} \times \frac{12}{10}\right] - 1 =$$

Risolviamo le operazioni all'interno delle parentesi quadre. Nella prima parentesi c'è una somma tra frazioni è quindi necessario trovare il minimo comune multiplo tra le frazioni. In questo caso il mcm tra 5,100 e 20 è proprio 100. Nella seconda parentesi c'è un prodotto tra frazioni, moltiplichiamo i numeratori ed i denominatori.

$$\left[\frac{20 - 21 - 35 + 136}{100}\right]^5 + \left[\frac{5 \times 12}{3 \times 10}\right] - 1 =$$

$$\left[\frac{100}{100}\right]^5 + \left[\frac{60}{30}\right] - 1 =$$

Semplifichiamo dove possibile il numeratore con il proprio denominatore:

$$\left[\frac{\cancel{100}^1}{\cancel{100}^1}\right]^5 + \left[\frac{\cancel{60}^2}{\cancel{30}^1}\right] - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} | x + 1 \text{ è } dispari\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 3x < 2b + 13\}$. Determinare $A \cap B$

Sostituiamo i valori di a e b e proviamo a scrivere in maniera estesa gli elementi che appartengono a ciascun insieme.

- A è l'insieme dei numeri naturali (indicati con x) tali che il numero successivo *(x+1)* è dispari, quindi $A = \{0, 2, 4, 6, 8...\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} | 3x < 6 + 13\}$
  $B = \{x \in \mathbb{N} | 3x < 19\}$.
  B è l'insieme dei numeri naturali che moltiplicati per 3 sono minori di 19, quindi:
  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'intersezione di A e B è data dagli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè : $A \cap B = \{0, 2, 4, 6\}$

Esercizio 3 La sora Pina fa questo gioco con la sora Lella: lancia un dado rosso ed uno blu e vince se il risultato del dado rosso è pari alla metà di quello del dado blu oppure se i due dadi danno lo stesso risultato. Qual è la probabilità che la sora Pina vinca?

La probabilità di un evento è data dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili.

I casi possibili in questo caso sono $6 \times 6 = 36$, cioè:

dado rosso	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	...
dado blu	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	...

Analizziamo i casi favorevoli alla vincita della sora Pina.

- Evento A: “Il risultato del dado rosso è pari alla metà di quello del dado blu”.

  I casi vincenti sono:

dado rosso	dado blu
1	2
2	4
3	6

  In questo caso la probabilità di vincita è $P = \frac{3}{36}$

- Evento B: “I dadi danno lo stesso risultato”.

  I casi vincenti sono:

dado rosso	1	2	3	4	5	6
dado blu	1	2	3	4	5	6

  In questo caso la probabilità di vincita è $P = \frac{6}{36}$.

A questo punto dobbiamo mettere insieme questi risultati. La sora Pina vince al realizzarsi di entrambe o di una delle due situazioni sopra analizzate.
Osserviamo che $A \cap B = \oslash$, quindi :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 4 Genoveffa ed Almasunta hanno passato un week end insieme, stabilendo di dividere alla pari le spese. Genoveffa ha pagato la benzina 40 euro, la cena 70 euro e l'autostrada 20 euro, mentre Almasunta ha pagato l'hotel 90 euro, il pranzo $(b+1) \times 10$ euro ed i biglietti del teatro 60 euro. Quanto deve Genoveffa ad Almasunta?
Iniziamo sommando gli importi che ciascuna delle due ha pagato durante la vacanza:

- Genoveffa ha pagato 40 euro per la benzina, 70 euro per la cena e 20 euro per l'autostrada. per un totale di $40 + 70 + 20 = 130$ euro.

- Almasunta ha speso 90 euro per l'hotel, $(b+1)$x10 euro per il pranzo, che in questo caso sono 40 euro e 60 euro per il teatro. In totale ha quindi speso $90 + 40 + 60 = 190$ euro.

La spesa totale del viaggio è data dalla somma delle cifre spese sia da Genoveffa che da Almasunta, vale a dire $130 + 190 = 320$ euro. Per spendere la stessa cifra dobbiamo dividere questa spesa totale in due parti uguali: $320 \div 2 = 160$ euro. Almasunta ha speso più di 160 euro, ne ha spesi 190. Deve riavere da Genoveffa 30 euro, poiché $190 - 160 = 30$.

Esercizio 5 Trovare il MCD tra $(7654321, (a+3)^2)$

Ricordiamo che per trovare il Massimo Comun Divisore tra due numeri dobbiamo prendere i fattori primi comuni ai due numeri, presi col minimo esponente con cui appaiono nelle due fattorizzazioni. Se non ci sono fattori comuni il MCD è pari ad 1.

Per prima cosa sostituiamo il valore ad a, dobbiamo quindi trovare il MCD tra $(7654321, 64)$. La cosa più conveniente da fare è controllare se il numero più grande è divisibile per quello più piccolo, in questo caso il numero più piccolo sarà il MCD che stiamo cercando. Altrimenti dobbiamo fattorizzare il numero più piccolo tra i due, in questo caso 64, e vedere successivamente se l'altro numero ha divisori in comune.

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Il numero 7654321 non è divisibile per 2.

Concludiamo quindi che $MCD(7654321, 64) = 1$.

Esercizio 6 E' di più il 25% del 20% di $1000(a+1)$, o i $\frac{3}{61}$ di $1000(a+1)$?

Calcoliamo le percentuali richieste:

- Il 25 % del 20% di $1000(a+1)$. Nel nostro caso $1000(a+1) = 6000$. Ricordando che il 20 % è equivalente a $\frac{20}{100}$, calcoliamo il 20% di 6000:
  $\frac{20}{100} \times 6000 = 1200$.
  Calcoliamo ora il 25% di 1200: $\frac{25}{100} \times 1200 = 300$.

– I $\frac{3}{61}$ di $1000(a+1) = 6000$.

$\frac{3}{61} \times 6000 = \frac{18000}{61}$.

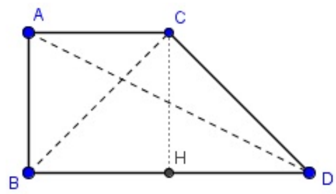
Osserviamo che $\frac{18000}{60} = 300$, in questo caso al denominatore abbiamo un valore più grande di 60, cioè 61. Otteniamo quindi un valore della frazione più piccolo di 300. Possiamo allora concludere che il 25 % del 20% di 6000 è maggiore dell'altro valore.

Geometria

Esercizio 7 Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo la cui altezza AB sia uguale alla base minore AC. Sia $\overline{AC} = 6(a+1)cm$, mentre $\overline{BD} = 14a + 14cm$. Determinare il perimetro di $ABCD$ e l'area dei triangoli ABD, BCD e ACD.

Per prima cosa sostituiamo i valori di a e b nei dati del problema: $\overline{AC} = 6(a+1) = 36cm$, $\overline{BD} = 14a + 14 = 84cm$.

Per calcolare il perimetro del trapezio abbiamo bisogno delle misure di tutti e



quattro i lati. Dobbiamo quindi trovare il lato $\overline{CD}$, poiché $\overline{AB}$ è uguale al lato $\overline{AC}$. Per trovare $\overline{CD}$ possiamo utilizzare il teorema di Pitagora, applicato al triangolo CHD, come si vede in figura. Si ottiene quindi:

$\overline{BH} = \overline{AC}$

$\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} = 84 - 36 = 48cm$

Osserviamo che $\overline{CH} = \overline{AB}$. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHD:

$$\overline{CD} = \sqrt{(CH)^2 + (HD)^2} = \sqrt{(36)^2 + (48)^2} = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = 60cm$$

Il perimetro del trapezio misura quindi:

$$P = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{AC} = 36 + 84 + 60 + 36 = 216cm$$

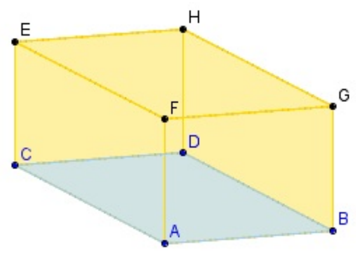
Passiamo ora al calcolo delle aree:

- Area del triangolo ABD: $A_{ABD} = \frac{BD \times AB}{2} = \frac{84 \times 36}{2} = 1512 cm^2$
- Per calcolare l'area del triangolo BCD possiamo sommare le due aree dei triangoli rettangoli BCH e CHD.
  $A_{BCH} = \frac{BH \times CH}{2} = \frac{36 \times 36}{2} = 648 cm^2$
  $A_{CHD} = \frac{HD \times CH}{2} = \frac{48 \times 36}{2} = 864 cm^2$
  $A_{BCD} = A_{BCH} + A_{CHD} = 648 + 864 = 1512 cm^2$
- Per calcolare l'area del triangolo ACD possiamo calcolare l'area dell'intero trapezio $ABCD$ e poi sottrarre da questa l'area del triangolo ABD che abbiamo già calcolato.
  $A_{ABCD} = \frac{(\overline{BD} + \overline{AC}) \times \overline{AB}}{2} = \frac{(86+36) \times 36}{2} = 2160 cm^2$
  $A_{ACD} = A_{ABCD} - A_{ABD} = 2160 - 1512 = 648 cm^2$

Esercizio 8 Considerare un silo a forma di prisma a base quadrata, avente il lato di base di misura $(2a+2)m$ e altezza $5m$. Ne dobbiamo tinteggiare l'interno(escluso ovviamente il pavimento) con una tinta che costa 5 euro al litro e ha una resa di $10m^2$ per litro; quanto spendiamo?

Per prima cosa sostituiamo il valore di a. Il prisma ha quindi lato di base che misura $(2a + 2) = 12m$ ed altezza di $5m$.

Vogliamo conoscere quanta vernice è necessaria per tinteggiare l'interno, cioè di quanta vernice abbiamo bisogno per ricoprire tutta la superficie del silo. Troviamo quindi l'area totale del prisma, dalla quale sottraiamo in seguito l'area di base, poiché il pavimento del silo non deve essere ricoperto con la vernice. L'area totale



del prisma è data da $A_{tot} = 2 \times A_{base} + A_{laterale}$.

In questo caso dobbiamo sottrarre l'area del pavimento del silo, cioè l'area di base.

Calcoliamo l'area di base, ricordando che il poligono di base è un quadrato:

$A_{base} = 12 \times 12 = 144m^2$.

L'area laterale è data da $A_{lat} = Perimetro_{base} \times altezza$.

$Perimetro_{base} = 4 \times lato = 4 \times 12 = 48m$.

$A_{lat} = 48 \times 5 = 240m^2$.

Quindi l'area del prisma che deve essere tinteggiata misura $A_{tot} = A_{lat} + A_{base} = 240 + 144 = 384m^2$.

La vernice che vogliamo usare ha una resa di $10m^2$ per litro, vale a dire che con un litro di vernice, che costa 5 euro, possiamo tinteggiare $10m^2$ di superficie.

Calcoliamo i litri di vernice di cui abbiamo bisogno: $A_{tot}/10 = 38.4l$.

In totale dovremo spendere quindi $38.4 \times 5 = 192euro$, per tinteggiare il silo.

Esercizio 9 Considerare, nel piano cartesiano, la retta r di equazione: $(a+3)x+(10-b)y-8 = 0$.

- Determinare se il punto P di coordinate $(1, -1)$ appartenga ad r.
- La retta $(b + 3)x + (10 - a)y + 6 = 0$ è parallela ad r?

Sostituiamo i valori di a e b. L'equazione della retta diventa quindi: $8x+7y-8 = 0$.

- Per determinare se un punto appartiene ad una retta dobbiamo vedere se le sue coordinate soddisfano l'equazione di una retta, cioè dobbiamo verificare che, sostituendo le coordinate del punto all'equazione della retta, questa si annulli.

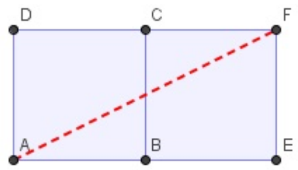
$$8 \times (1) + 7 \times (-1) - 8 = 8 - 7 - 8 \neq 0$$

  L'equazione della retta non è soddisfatta quindi il punto $P(1, -1)$ non appartiene alla retta.

- Ricordiamo che se due rette sono parallele hanno lo stesso coefficiente angolare m. Scriviamo le due rette in forma esplicita, cioè nella forma $y = mx + q$:
  $r : y = -\frac{8}{7}x + \frac{8}{7} \Rightarrow m_r = -\frac{8}{7}$
  $s : y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5} \Rightarrow m_s = -\frac{6}{5}$
  I due coefficienti angolari sono diversi pertanto le rette non sono parallele.

Esercizio 10 Abbiamo un quadrato che ha lato di $10(a + 2)cm$. Lo uniamo con un altro avente uguale lato, congiungendo due lati uguali e formando un rettangolo. Quanto sarà l'area del quadrato avente lato pari alla diagonale del rettangolo ottenuto? Tale area è più o meno di $1m^2$?

Sostituiamo il valore di a. Il lato del quadrato misura $70cm$.
Uniamo due quadrati uguali di lato 70 cm e troviamo la lunghezza della diagonale del rettangolo ottenuto.



$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{140^2 + 70^2} = \sqrt{24500}cm$$

Calcoliamo l'area del quadrato che ha la diagonale come lato:

$$A_{quad} = \overline{AF}^2 = (\sqrt{24500})^2 = 24500cm^2$$

Dobbiamo confrontare quest'area con $1m^2$, quindi facciamo la trasformazione da cm^2 a m^2, ricordando che $1m^2 = 10000cm^2$. Si ottiene che $24500cm^2 = 2,45m^2$. L'area del quadrato è quindi maggiore di $1m^2$.

Soluzione prova scritta del 05/12/2014

Gli esercizi sono stati svolti considerando $a = 1$ e $b = 2$

Algebra

Esercizio 1 Risolvere la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{2}{5}+0.1\right)-\frac{1}{2}\right]^7+\left[\frac{a+1}{7}\times 0.21\right]-\frac{1}{5}=$$

Per prima cosa trasformiamo i numeri scritti in forma decimale in frazioni e sostituiamo il valore alla lettera a:

$$\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{2}\right]^7+\left[\frac{2}{7}\times\frac{21}{100}\right]-\frac{1}{5}=$$

Risolviamo le operazioni all'interno delle parentesi quadre. Nella prima parentesi c'è una somma tra frazioni è quindi necessario trovare il minimo comune multiplo tra le frazioni. In questo caso il mcm tra 5,10 e 2 è proprio 10. Nella seconda parentesi c'è un prodotto tra frazioni, moltiplichiamo i numeratori ed i denominatori.

$$\left[\frac{4+1-5}{10}\right]^7+\left[\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{7}^1}\times\frac{\cancel{21}^3}{\cancel{100}^{50}}\right]-\frac{1}{5}=\left[\frac{0}{10}\right]^7+\frac{3}{50}-\frac{1}{5}=0+\frac{3}{50}-\frac{1}{5}=\frac{3-10}{50}=-\frac{7}{50}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ è } multiplo\ di\ 3\ e\ 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | x < 3b + 9\}$. Determinare $A \cap B$.

Sostituiamo il valore di b e proviamo a scrivere in maniera estesa gli elementi che appartengono a ciascun insieme.

- A è l'insieme dei numeri naturali (indicati con x) che sono multipli sia di 2 che di 3, $A = \{0, 6, 12, 18, 24....\}$
- $B = \{x \in \mathbb{Z} | x < 3 \cdot 2 + 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x < 15\}$; B è l'insieme dei numeri interi minori di 15, quindi:
  $B = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 14\}$
  L'intersezione di A e B è data dagli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè : $A \cap B = \{0, 6, 12\}$

Esercizio 3 La sora Pina va al mercato con 150 uova; ne vende il 60% a 10 cent. l'una. Mette in vendita le restanti a 5 cent. l'una, ma 10 le cadono e si rompono e infine torna a casa con 15 uova invendute. Quanto ha incassato?

- Calcoliamo per prima cosa quante uova sono state vendute a 10 cent. Troviamo quindi il 60% di 150: $150 \times \frac{60}{100} = \cancel{150}^{15} \times \frac{\cancel{60}^{6}}{\cancel{100}^{1}} = 90$
  La sora Pina ha venduto 90 uova a 10 cent, guadagnando quindi :
  $$90 \times 0.10 = 90 \times \frac{10}{100} = \cancel{90}^{9} \times \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{100}^{1}} = 9 euro$$
- Dopo aver venduto 90 uova la sora Pina ha ancora $150 - 90 = 60$ uova, ma 10 le cadono e quindi le rimangono da vendere $60 - 10 = 50$ uova. Quando torna a casa ha con sé 15 uova che non è riuscita a vendere, questo vuol dire che le uova che ha venduto a 5 cent sono: $50 - 15 = 35$; guadagnando quindi:
  $$35 \times 0.05 = 35 \times \frac{5}{100} = \frac{175}{100} = 1.75 euro$$

In totale la sora Pina ha quindi incassato $9 + 1.75 = 10.75 euro$

Esercizio 4 Si estraggono due palline da un'urna che ne contiene $4 + 2a$ rosse e $6 + 3b$ nere. Qual è la probabilità che siano di colore diverso? E' più o meno del 50%?
Sostituiamo i valori di a e b. L'urna contiene $4 + 2a = 4 + 2 = 6$ palline rosse (R) e $6 + 3b = 6 + 6 = 12$ palline nere(N), per un totale di 18 palline. Estraendo 2 palline abbiamo 4 possibilità:

Rosso-Rosso	Nero-Nero	Rosso-Nero	Nero-Rosso

Siamo interessati a calcolare la probabilità dell'evento "le palline estratte sono di colore diverso", quindi i casi favorevoli al verificarsi dell'evento sono due: NR e RN. Calcoliamone le probabilità:

– RN: Calcoliamo la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa e la seconda sia nera. La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $P(R) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

  Infatti nell'urna ci sono in totale 18 palline, di cui 6 sono rosse. La probabilità dell'evento è quindi $\frac{1}{3}$ ed è data dal rapporto tra i casi favorevoli al verificarsi dell'evento e i casi possibili.

  A questo punto, supponiamo di aver preso dall'urna una pallina rossa e proseguiamo nell'estrazione della seconda pallina. Nell'urna abbiamo in totale 17 palline, di cui 5 rosse e 12 nere. La probabilità che la seconda pallina sia nera è quindi $\frac{12}{17}$. Per calcolare $P(RN)$ basta moltiplicare i valori sopra trovati:

$$P(RN) = P(primapallinaR) \times P(secondapallinaN) = \frac{1}{3} \times \frac{12}{17} = \frac{4}{17}$$

– NR: Calcoliamo la probabilità che la prima pallina estratta sia nera e la seconda sia rossa. Possiamo fare le osservazione viste sopra, ottenendo che:

$$P(NR) = P(primapallinaN) \times P(secondapallinaR) = \frac{12}{18} \times \frac{6}{17} = \frac{4}{17}$$

La probabilità di estrarre dall'urna due palline di colore diverso è quindi:

$$P(RN\ oppure\ NR) = \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = \frac{8}{17}$$

Confrontiamo questo valore con il $50\% = \frac{1}{2}$. Osserviamo che $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
Nel caso in questione al denominatore abbiamo un valore più grande di 16, cioè 17.
Otteniamo quindi un valore della frazione più piccolo di $\frac{1}{2}$.
La probabilità trovata è meno del 50%.

Esercizio 5 Determinare il $MCD(123456, (a+2)^2)$ ed il $MCD(22a+4, 14b+12)$.

Ricordiamo che per trovare il Massimo Comun Divisore tra due numeri dobbiamo prendere i fattori primi comuni ai due numeri, presi col minimo esponente con cui appaiono nelle due fattorizzazioni. Se non ci sono fattori comuni il MCD è pari ad

1.

Sostituiamo i valori di a e b .

- Calcolare $MCD(123456, (a+2)^2) \Rightarrow MCD(123456, 9)$

  La cosa più conveniente da fare è controllare se il numero più grande è divisibile per quello più piccolo, allora il numero più piccolo sarà il MCD che stiamo cercando. Altrimenti dobbiamo fattorizzare il numero più piccolo tra i due, in questo caso 9, e vedere successivamente se l'altro numero ha divisori in comune.

  In questo caso 123456 non è divisibile per 9.

  $9 = 3 \times 3$; 123456 è divisibile per 3, quindi $MCD(123456, 9) = 3$.

- Calcolare $MCD(22a + 4, 14b + 12) \Rightarrow MCD(26, 40)$

  In questo caso 40 non è divisibile per 26.

  $26 = 2 \times 13$, 40 è divisibile per 2, quindi $MCD(26, 40) = 2$

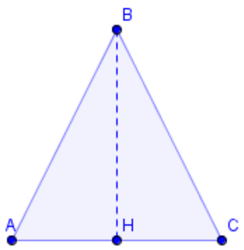
Geometria

Esercizio 6 Sia ABC un triangolo isoscele, con $AB = BC = 20a + 20cm$ ed il perimetro di $6,4(a+1)dm$. Determinare l'area di ABC.

Sostituiamo i valori di a. $\overline{AB} = \overline{BC} = 20a + 20 = 40cm$;

$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 6.4(a+1) = 12.8dm$.

Ricordando che 1 dm = 10 cm, si ottiene che $P = 128cm$. Per trovare l'area del



triangolo abbiamo bisogno dei valori di $\overline{AC}$ e $\overline{BH}$.

$\overline{AC} = P - \overline{AB} - \overline{BC} = 128 - 40 - 40 = 48cm$

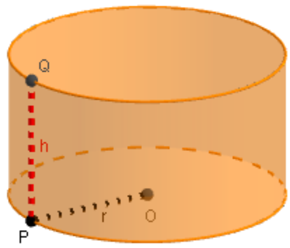
$\overline{AH} = \overline{AC}/2 = 48/2 = 24cm$

$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(40)^2 - (24)^2} = \sqrt{1600 - 576} = \sqrt{1024} = 32cm$

$Area_{ABC} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{48 \times 32}{2} = \frac{1536}{2} = 768cm^2$

Esercizio 7 Un bidone cilindrico ha altezza $h = 1,35m$ e raggio di base $r = 30cm$; se è pieno d'acqua, quanti secchi cilindrici di altezza $h' = 45cm$ e raggio di base $r' = 1dm$ si possono da esso riempire?

Per prima cosa portiamo tutte le misure alla stessa unità di misura, ricordando che $1\ m = 100\ cm$, si ottiene che $h = 1.35m = 135cm$. Si deve trovare quanta acqua il cilindro può contenere, cioè dobbiamo calcolare il suo volume.



$$V_{cilindro} = A_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h = 3.14 \times (30)^2 \times 135 = 3.14 \times 900 \times 135 = 381510cm^3$$

A questo punto calcoliamo il volume del contenitore cilindrico più piccolo. Ricordando che $1\ dm = 10cm$, si ottiene che $r' = 10cm$, da cui:

$$V'_{cilindro} = A'_{base} \times h' = \pi \times r'^2 \times h' = 3.14 \times (10)^2 \times 45 = 3.14 \times 100 \times 45 = 14130cm^3$$

Il problema chiede di trovare quanti contenitori cilindrici piccoli (di volume V') è possibile riempire con l'acqua contenuta nel cilindro più grande (di volume V):

$$V \div V' = 381510 \div 14130 = 27$$

E' possibile riempire 27 cilindri.

Esercizio 8 Considerare un poligono regolare di $(a + 3)$ lati. I suoi angoli interni sono ottusi? Misurano più o meno di 120° ciascuno?

Sostituiamo il valore di a. Il poligono regolare ha $a + 3 = 4$ lati.

Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli

piatti quanti sono i lati meno due, cioè in questo caso è uguale alla somma di 2 angoli piatti, ciascuno dei quali misura 180 gradi. Quindi la somma degli angoli interni è $(4-2) \times 180 = 360$ gradi.
Inoltre il poligono ha tutti i lati e gli angoli uguali, poiché è regolare (cioè è contemporaneamente equilatero ed equiangolo). Ciascun angolo misura quindi: $360 \div 4 = 90$ gradi. Quindi in questo caso gli angoli sono retti e misurano esattamente 90 gradi ciascuno.
Osservazione: Quanto detto sopra vale per qualsiasi poligono regolare con $3, 4, 5, 6 ... n$ lati.

Esercizio 9 Nel piano cartesiano, la retta r ha equazione $(a+1)x-(b+3)y+8=0$.

- Il punto $P=(0,2)$ sta su r?
- Scrivere l'equazione di una retta r' parallela ad r .

Sostituiamo i valori di a e b.
$r:(a+1)x-(b+3)y+8=0 \Rightarrow r: 2x-5y+8=0$

- Per determinare se un punto appartiene ad una retta dobbiamo vedere se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta, cioè dobbiamo verificare che, sostituendo le coordinate del punto all'equazione della retta, questa si annulli. Il punto ha coordinate $P=(0,2)$.

  $$2(0)-5(2)+8=0-10+8 \neq 0$$

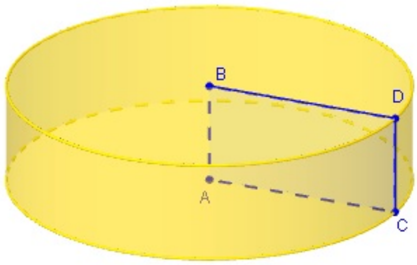
  L'equazione della retta non è soddisfatta quindi il punto $P(0,2)$ non appartiene alla retta.

- Scriviamo la retta r in forma esplicita, cioè del tipo $y=mx+q$, $r: y=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$. Affinché una retta r' sia parallela ad r è sufficiente che abbia lo stesso coefficiente angolare m, tutte le rette parallele ad r hanno equazione: $y=\frac{2}{5}x+q$, dove q è qualsiasi numero intero. L'esercizio chiede di trovare una di queste rette, scegliamo quindi un valore di q, ad esempio $q=3$, la retta cercata ha equazione $r': y=\frac{2}{5}x+3$

Esercizio 10 Sia $ABCD$ un rettangolo, con $\overline{AC} = 5(a+1)cm$ e $\overline{AB} = 3(a+1)cm$. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando $ABCD$ di $360°$ intorno al lato AB.

Sostituiamo il valore di a: $\overline{AC} = 5(a+1) = 10cm$, $\overline{AB} = 3(a+1) = 6cm$.

Ruotando di 360 gradi il rettangolo intorno al lato AB, si ottiene un cilindro che



ha $h = \overline{AB} = 6cm$, e raggio di base $r = \overline{AC} = 10cm$.

Quindi il volume del solido è :

$$V = A_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h = 3.14 \times 100 \times 6 = 1884cm^3$$

Soluzione prova scritta del 12/01/2015

Gli esercizi sono stati svolti considerando $a = 8$ e $b = 5$

Algebra

Esercizio 1 Risolvere la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{1}{4} - 0.05\right)^2 - 0.04\right]^5 + \left[\frac{(a+6)}{5} \times 0.25\right] - \frac{1}{5} =$$

Per prima cosa trasformiamo i numeri scritti in forma decimale in frazioni e sostituiamo il valore alla lettera a:

$$\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{100}^{20}}\right)^2 - \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{100}^{25}}\right]^5 + \left[\frac{(8+6)}{5} \times \frac{\cancel{25}^1}{\cancel{100}^4}\right] - \frac{1}{5} =$$

Risolviamo le operazioni all'interno delle parentesi. Nella prima parentesi c'è una somma tra frazioni è quindi necessario trovare il minimo comune multiplo tra le frazioni. Nella seconda parentesi c'è un prodotto tra frazioni, moltiplichiamo i numeratori ed i denominatori.

$$\left[\left(\frac{5-1}{20}\right)^2 - \frac{1}{25}\right]^5 + \left[\frac{14}{5} \times \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{5} = \left[\left(\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{20}^5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right]^5 + \left[\frac{\cancel{14}^7}{5} \times \frac{1}{\cancel{4}^2}\right] - \frac{1}{5} =$$

$$\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{25}\right)^5 + \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = 0^5 + \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7-2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} | 2x \leq b + 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq a^2 + 3\}$.

Determinare $A \cap B$ e $A \setminus B$.

Sostituiamo i valori di a e b e proviamo a scrivere in maniera estesa gli elementi che appartengono a ciascun insieme.

- $A = \{x \in \mathbb{N} | 2x \leq 5 + 15\}$. A è l'insieme dei numeri naturali x, tali che $2x \leq 5 + 15 \Rightarrow x \leq \frac{20}{2} \Rightarrow x \leq 10$.
  Quindi: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 8^2 + 3\}$. B è l'insieme dei numeri naturali x tali che $x \leq 67$.
  Quindi: $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 67\}$

L'intersezione di A e B è data dagli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè : $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

In questo caso l'intersezione coincide con A, poiché si ha che $A \subset B$.

$A \setminus B$ è dato dagli elementi che stanno in A ma non stanno in B:

$A \setminus B = \oslash$, proprio perché $A \subset B$.

Esercizio 3 Dire quale sia la probabilità di vincere al seguente gioco: si lanciano due dadi, uno rosso ed uno verde e si vince se quello verde segna il valore dell'altro + 1 (ad esempio se si ottiene Verde = 5, Rosso=4). La probabilità di vincere è più o meno del 15%?

La probabilità di un evento è data dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili.

I casi possibili in questo caso sono $6 \times 6 = 36$, cioè:

dado rosso	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	...
dado verde	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	...

Analizziamo i casi favorevoli al verificarsi dell'evento (E):" Il dado verde segna il valore del dado rosso +1". I casi favorevoli sono:

dado rosso	1	2	3	4	5
dado verde	2	3	4	5	6

I casi favorevoli sono 5, la probabilità dell'evento è quindi:

$$P(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{5}{36}$$

Confrontiamo questo risultato con il 15%. $15\% = 0.15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.
$\frac{5}{36} = \frac{100}{720} < \frac{108}{720} = \frac{3}{20}$.
La probabilità trovata è quindi minore del 15%.

Esercizio 4 Scrivere in ordine crescente: 3.5 ; $\frac{17}{5}$; $\sqrt{11}$; $\frac{10}{3}$.

Per ordinare le frazioni dalla più piccola alla più grande possiamo portare le frazioni allo stesso denominatore, il confronto si riduce così al confronto tra numeratori. Tuttavia, in questo caso abbiamo una radice quadrata; procediamo riducendo frazioni e numeri decimali in frazioni con lo stesso denominatore:

- $3.5 = \frac{35}{10} = \frac{105}{30}$
- $\frac{17}{5} = \frac{34}{10} = \frac{102}{30}$
- $\frac{10}{3} = \frac{100}{30}$

Confrontando questi numeratori si osserva che $105 > 102 > 100$.
Rimane da confrontare $\sqrt{11}$ con le frazioni appena trovate. Osserviamo che $\frac{105}{30} = \frac{35}{10} = 3.5$.
$\sqrt{11}$ è un numero compreso sicuramente tra 3 e 4, poiché $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$; ma $(3.5)^2 = 12.25 > 11$.
Possiamo fare considerazioni simili anche per $\frac{102}{30}$;

$$\frac{102}{30} = \frac{34}{10} = 3.4$$

ma

$$(3.4)^2 = 11.56 > 11$$

Infine

$$\frac{100}{30} = 3.333333...$$

ma

$$(3.3)^2 = 11.11... > 11$$

Possiamo concludere che:

$$\sqrt{11} < \frac{100}{30} < \frac{102}{30} < \frac{105}{30}$$

Esercizio 5 La sora Pina ha comprato 100 dozzine di uova , spendendo 240 euro, per venderle nel suo negozio, ma nel tragitto il 10% delle uova si rompono. La sora Pina vende le uova in confezioni da 6, a 3 euro a confezione. Riesce a vendere solo 33 confezioni e vende il resto delle uova a 0,20 euro. Quanto sarà il guadagno della sora Pina?

La sora Pina ha comprato 100 dozzine di uova, ossia $100 \times 12 = 1200$ uova ed ha speso 240 euro. Nel tragitto le si rompono il 10% delle 1200 uova, cioè la sora Pina rompe $1200 \times \frac{10}{100} = 120$ uova e quindi riesce a portare al negozio $1200 - 120 = 1080$ uova.

In seguito queste uova vengono messe in confezioni da 6 e solamente 33 confezioni vengono vendute a 3 euro a confezione. La sora Pina incassa $33 \times 3 = 99$ euro con le confezioni di uova.

A questo punto la sora Pina ha esattamente $1080 - (33 \times 6) = 882$ uova che vende a 0.20 euro ciascuna, incassando in questo modo $0.20 \times 882 = 176.4$ euro.

In totale la sora Pina ha incassato $99+176.4 = 275.4$ euro. Da questa cifra dobbiamo togliere la spesa iniziale per trovare il guadagno: $275.4 - 240 = 35.4$ euro.

Esercizio 6 Trovare $MCD(16 + 2b + 4a, 5b + 28 + 2a)$; $MCD(17453, (a + 1)^2)$

Ricordiamo che per trovare il Massimo Comun Divisore tra due numeri dobbiamo prendere i fattori primi comuni ai due numeri, presi col minimo esponente con cui appaiono nelle due fattorizzazioni. Se non ci sono fattori comuni il MCD è pari ad 1.

- $MCD(16 + 2b + 4a, 5b + 28 + 2a)$

  Sostituiamo i valori di a e b, $MCD(58, 69)$. In questo caso conviene scomporre i due numeri in fattori primi:

  $58 = 2 \times 29$; $69 = 3 \times 23$.

  I due numeri non hanno divisori comuni, quindi $MCD(58, 69) = 1$.

- $MCD(17453, (a + 1)^2)$

  Sostituiamo il valore di a: $MCD(17453, 81)$. 17453 non è divisibile per 81, quindi scomponiamo in fattori quest'ultimo numero: $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. 17453 non è divisibile per 3, quindi possiamo concludere che $MCD(17453, 81) = 1$.

Geometria

Esercizio 7 Sia ABC un triangolo rettangolo in A, di cateti $\overline{AB} = (6b + 6)cm$ e $\overline{AC} = 8(b + 1)cm$. Determinare il perimetro e l'area di ABC e la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Sostituiamo il valore di b:

$\overline{AB} = (6b + 6) = 36cm$; $\overline{AC} = 8(b + 1) = 48cm$.

- Per calcolare il perimetro del triangolo dobbiamo trovare l'ipotenusa, calcoliamola con il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC} = \sqrt{(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)} = \sqrt{(36)^2 + (48)^2} = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = 60cm$$

$$Perimetro_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 36 + 60 + 48 = 144cm$$

-

$$Area_{ABC} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{48 \times 36}{2} = 864cm^2$$

  Infine possiamo calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa con la formula inversa del calcolo dell'area, infatti:

$$Area_{triangolo} = \frac{base \times altezza}{2} \rightarrow altezza = \frac{2 \times Area}{base}$$

Dobbiamo calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa, la base che consideriamo è proprio l'ipotenusa $\overline{BC}$, quindi:

$$h_{relativaaBC} = \frac{2 \times A}{\overline{BC}} = \frac{2 \times 864}{60} = 28.8cm$$

Esercizio 8 Un bidone cilindrico ha altezza $h = 2m$ e raggio di base $r = 60cm$. Contiene più o meno acqua di un cassone cubico con il lato di $1,2m$?

Portiamo tutte le misure alla stessa unità di misura: $r = 60\ cm = 0.6m$.
Per capire quale tra i due solidi è più capiente dobbiamo confrontare i loro volumi.

$$V_{cilindro} = A_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h = 3.14 \times 0.36 \times 2 = 2.2608m^3$$

$$V_{cubo} = l^3 = (1.2)^3 = 1.728m^3$$

Il volume del cilindro è maggiore di quello del quadrato, quindi contiene più acqua.

Esercizio 9 Considerare la retta r nel piano cartesiano di equazione: $(b-3)x-(a+2)y+3 = 0$.

- determinare se il punto $(6, 1)$ appartiene ad r.
- la retta di equazione $(a-3)x + (b+2)y + 7 = 0$ è parallela ad r ?

Sostituiamo i valori di a e b.
$r : (b-3)x - (a+2)y + 3 = 0 \Rightarrow r : 2x - 10y + 3 = 0$

- Per determinare se un punto appartiene ad una retta dobbiamo vedere se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta, cioè dobbiamo verificare che, sostituendo le coordinate del punto all'equazione della retta, questa si annulli. Il punto ha coordinate $P = (6, 1)$.

$$2(6) - 10(1) + 3 = 12 - 10 + 3 \neq 0$$

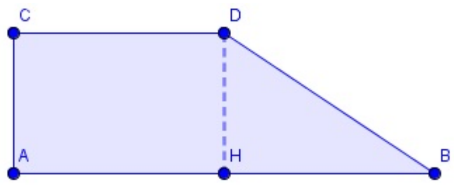
L'equazione della retta non è soddisfatta quindi il punto $P(6, 1)$ non appartiene alla retta.

- Scriviamo la retta r in forma esplicita, cioè del tipo $y = mx+q$, $r : y = \frac{2}{10}x+\frac{3}{10}$.
  Affinché la retta di equazione$(a-3)x+(b+2)y+7$ sia parallela ad r deve avere lo stesso coefficiente angolare $m = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
  Sostituiamo i valori di a e b: $5x+7y+7 = 0 \to y = -\frac{5}{7}x - 1$.
  Poiché $\frac{1}{5} \neq (-\frac{5}{7})$, possiamo concludere che le due rette non sono parallele.

Esercizio 10 Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo, con l'altezza di $6(a+1)cm$, la base maggiore AB di $1,3(a+1)dm$ e quella minore di $(5a+5)cm$. Determinarne l'area ed il perimetro.

Sostituiamo il valore di a e portiamo tutte le misure alla stessa unità di misura.

- $\overline{AC} = \overline{DH} = 6(a+1)cm = 6(8+1)cm = 54cm$
- $\overline{AB} = 1.3(a+1)dm = 1.3(8+1)dm = 11.7dm = 117cm$
- $\overline{CD} = (5a+5)cm = (40+5)cm = 45cm$



- Possiamo trovare subito l'area del trapezio:

$$A = \frac{(\overline{AB}+\overline{CD}) \times \overline{AC}}{2} = \frac{(117+45) \times 54}{2} = \frac{162 \times 54}{2} = 4374cm^2$$

- Per calcolare il perimetro dobbiamo trovare la lunghezza del lato $\overline{DB}$.
  Osserviamo che $\overline{DH} = \overline{AC} = 54cm$, $\overline{AH} = \overline{CD}$ e che $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 72cm$, quindi:

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{(72)^2 + (54)^2} = \sqrt{5184 + 2516} = \sqrt{8100} = 90cm$$

  Calcoliamo allora il perimetro:

$$P = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{AC} = 117 + 90 + 45 + 54 = 306cm$$

Esercizio 11

- *Il rettangolo è un poligono regolare*: FALSO.

  Un poligono regolare ha tutti gli angoli e tutti i lati congruenti. Nel rettangolo, mentre la prima proprietà è soddisfatta, la seconda non è detto che valga, quindi in generale questa affermazione è falsa.

- *Nessun rettangolo è un poligono regolare*: FALSO.

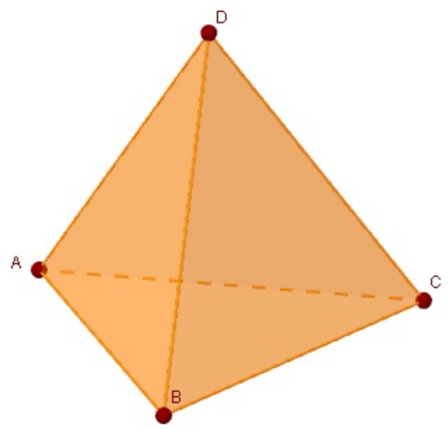
  Il quadrato è un caso particolare di rettangolo, che oltre ad avere tutti gli angoli retti ha anche tutti i lati congruenti. Quindi esiste un rettangolo che è un poligono regolare ed è proprio il quadrato.

- *La sfera è un poliedro regolare*: FALSO.

  Un poliedro è un solido che ha facce formate da poligoni. La superficie della sfera non è formata da poligoni, quindi la sfera non è un poliedro.

- *Nessuna piramide è un poliedro regolare*: FALSO.

  Un poliedro si dice regolare se tutte le sue facce sono poligoni regolari uguali fra loro e tutti i diedri e gli angoloidi sono uguali tra loro. I poliedri regolari sono cinque, conosciuti come solidi platonici. Il tetraedro è un poliedro regolare costituito da 4 triangoli equilateri ed è una piramide a base triangolare.



Soluzione prova scritta del 14/07/2015

Gli esercizi sono stati svolti considerando $a = 3$ e $b = 6$

Algebra

Esercizio 1 Risolvere la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{4}{5} - 0.3\right) - 0.4 - \frac{2}{20}\right]^7 + \left[\frac{(a+1)}{7} \times 0.14\right] - \frac{1}{5} =$$

Per prima cosa trasformiamo i numeri scritti in forma decimale in frazioni e sostituiamo il valore alla lettera a:

$$\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{10}\right) - \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{10}^5} - \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{20}^{10}}\right]^7 + \left[\frac{(3+1)}{7} \times \frac{\cancel{14}^7}{\cancel{100}^{50}}\right] - \frac{1}{5} =$$

Risolviamo le operazioni all'interno delle parentesi quadre. Nella prima parentesi c'è una somma tra frazioni è quindi necessario trovare il minimo comune multiplo tra le frazioni. In questo caso il mcm tra 5 e 10 è proprio 10. Nella seconda parentesi c'è un prodotto tra frazioni, moltiplichiamo i numeratori ed i denominatori.

$$\left[\frac{8-3-4-1}{10}\right]^7 + \left[\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{7}^1} \times \frac{\cancel{14}^2}{\cancel{100}^{25}}\right] - \frac{1}{5} = \left[\frac{0}{10}\right]^7 + \left[\frac{2}{25}\right] - \frac{1}{5} = 0 + \frac{2}{25} - \frac{1}{5} = \frac{2-5}{25} = -\frac{3}{25}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} | 5x \text{ è } dispari\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | 2x + 3 < b + 15\}$. Determinare $A \cap B$ e $B \setminus A$.

Sostituiamo il valore di b e proviamo a scrivere in maniera estesa gli elementi che appartengono a ciascun insieme.

- A è l'insieme dei numeri naturali (indicati con x) tali che il loro quintuplo è dispari, quindi $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
- B è l'insieme dei numeri interi (indicati con x) tali che:

$$2x + 3 < 6 + 15 \rightarrow 2x < 6 + 15 - 3 \rightarrow x < \frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{2}^{1}} \rightarrow x < 9$$

  Quindi: $B = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, .., 8\}$

L'intersezione di A e B è data dagli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè : $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$.
$B \setminus A$ è dato dagli elementi che stanno in B ma non stanno in A:
$B \setminus A = \{... - 4, -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

Esercizio 3 Qual è la probabilità che lanciando due dadi si ottenga come risultato un numero pari maggiore o uguale 8? Tale probabilità è maggiore o minore del 25%?

La probabilità di un evento è data dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili.
I casi possibili in questo caso sono $6 \times 6 = 36$, cioè:

dado uno	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	...
dado due	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	...

Analizziamo i casi favorevoli al verificarsi dell'evento (E): "La somma dei due dadi è un numero pari maggiore o uguale ad 8":

dado uno	2	3	4	4	5	5	6	6	6
dado due	6	5	4	6	3	5	2	4	6

I casi favorevoli sono 9, la probabilità dell'evento è quindi:

$$P(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{9}{36} = \frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{36}^{4}} = \frac{1}{4}$$

Confrontiamo questo risultato con il 25%. Questa percentuale si scrive sotto forma di frazione

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{\cancel{25}^{1}}{\cancel{100}^{4}} = \frac{1}{4}$$

La probabilità trovata è quindi uguale al 25%.

Esercizio 4 Scrivere in ordine di grandezza: $\frac{14}{25}$; 0.57 ; $\frac{27}{50}$; $\frac{57}{99}$.

Per ordinare le frazioni dalla più piccola alla più grande possiamo portare le frazioni allo stesso denominatore, il confronto si riduce così al confronto tra numeratori. Tuttavia, se osserviamo l'ultima frazione, ci accorgiamo che è abbastanza laborioso portarla ad avere denominatore uguale alle altre, poiché $mcm(50, 99) = 4950$. Quindi procediamo riducendo per ora i primi tre numeri in frazioni con lo stesso denominatore:

- $\frac{14}{25} = \frac{56}{100}$
- $0.57 = \frac{57}{100}$
- $\frac{27}{50} = \frac{54}{100}$

Confrontando questi numeratori si osserva che $57 > 56 > 54$.

Rimane da confrontare la frazione $\frac{57}{99}$. Questa frazione ha lo stesso numeratore di $\frac{57}{100}$, ma ha denominatore minore: $99 < 100$. Concludiamo quindi che $\frac{57}{99} > \frac{57}{100}$, da cui:

$$\frac{57}{99} > \frac{57}{100} > \frac{56}{100} > \frac{54}{100}$$

Esercizio 5 La sora Pina deve andare a Toronto; la PincoAir ha questa settimana in offerta speciale un volo a 720 euro perché sconta del 40% tutti i voli, mentre con la PallinoAir si paga 1080 euro. Però la Sora Pina deve andare a Toronto la prossima settimana, e non può usufruire dell'offerta PincoAir; le converrà volare con la PincoAir o con la PallinoAir?

Analizziamo il costo del volo con la PincoAir: il prezzo di 720euro è una cifra scontata del 40% rispetto al costo normale, vale a dire è il 60% del costo normale del biglietto, che indichiamo con x. Quindi:

$$720 = \frac{60}{100}x \Rightarrow x = 720\frac{100}{60} \Rightarrow x = \cancel{720}^{1}2\frac{100}{\cancel{60}^{1}} = 1200$$

Il costo del biglietto per Toronto con la PincoAir è di 1200 euro.

Il costo del volo con la PallinoAir è di 1080 euro.

Alla sora Pina conviene volare quindi con la PincoAir.

Geometria

Esercizio 6 Abbiamo tre contenitori conici uguali pieni d'acqua. Hanno altezza $h = 1,5m$ e raggio di base $r = 50cm$. Se ne estrae tutta l'acqua che viene immessa in una cisterna a forma di parallelepipedo con lati di base di $60cm$ e $1m$, e altezza $(b+1)m$. L'acqua nella cisterna traboccherà? Se non trabocca, fino a quale altezza arriverà?

Per prima cosa portiamo tutte le misure alla stessa unità di misura. $r_c = 50cm = 0.5m$, $l_1 = 60cm = 0.6m$.

Per verificare se l'acqua nella cisterna a forma di parallelepipedo traboccherà si deve confrontare il suo volume con il volume dei coni.

$$V_{cono} = \frac{A_{base} \times altezza}{3} = \frac{\pi \times (0.5)^2 \times 1.5}{3} = \frac{\pi \times 0.25 \times 1.5}{3} = 0.3925m^3$$

Quindi:

$$V_{tot_{coni}} = 3 \times V_{cono} = 3 \times 0.3925 = 1.11775m^3$$

Calcoliamo il volume del parallelepipedo:

$$V_{parallelepipedo} = A_{base} \times altezza = 0.6 \times 1 \times 7 = 4.2m^3$$

Il volume del parallelepipedo è maggiore del volume dei tre coni, quindi l'acqua sicuramente non traboccherà, dobbiamo verificare allora a che altezza arriverà. Per farlo possiamo pensare ad un parallelepipedo che ha stessa base della cisterna, ma volume uguale al volume totale dei tre coni. Cioè deve valere:

$$Volume = A_{base} \times h \Rightarrow 1.11775 = 0.6 \times 1 \times h \Rightarrow h = \frac{1.11775}{0.6 \times 1} \Rightarrow \frac{1.11775}{0.6} = 1.8629m$$

L'acqua dei coni raggiunge nel parallelepipedo un'altezza $h = 1.8629m$

Esercizio 7 Considerare la retta r nel piano cartesiano di equazione: $(a+1)x + (b+2)y–6 = 0$.

- determinare se il punto $(0, a)$ appartenga ad r ;
- scrivere l'equazione di una retta che sia parallela ad r (e non coincida con r).

Sostituiamo i valori di a e b.

$r : (a + 1)x + (b + 2)y - 6 = 0 \Rightarrow r : 4x + 8y - 6 = 0$

- Per determinare se un punto appartiene ad una retta dobbiamo vedere se le sue coordinate soddisfano l'equazione di una retta, cioè dobbiamo verificare che, sostituendo le coordinate del punto all'equazione della retta, questa si annulli. Il punto ha coordinate $P = (0, a) \to P = (0, 3)$.

$$4(0) + 8(3) - 6 = 0 + 24 - 6 \neq 0$$

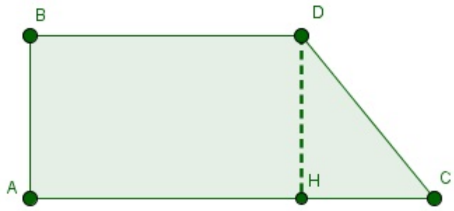
  L'equazione della retta non è soddisfatta quindi il punto $P(0, 3)$ non appartiene alla retta.

- Scriviamo la retta r in forma esplicita, cioè del tipo $y = mx+q$, $r : y = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$. Affinché una retta r' sia parallela ad r è sufficiente che abbia lo stesso coefficiente angolare m, tutte le rette parallele ad r hanno equazione: $y = -\frac{1}{2}x + q$, dove q è qualsiasi numero intero. L'esercizio chiede di trovare una retta parallela non coincidente con r, scegliamo quindi un valore di q diverso da $\frac{3}{4}$, ad esempio $q = 5$, la retta cercata ha equazione $r' : y = -\frac{1}{2}x + 5$

Esercizio 8 Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo, con l'altezza $\overline{AB} = 6(a + 1)cm$, la base minore di $10(a + 1)cm$ e quella maggiore è di $(18a + 18)cm$. Determinare il perimetro di $ABCD$.

Sostituiamo i valori di a e b.

- $\overline{AB} = 6(a + 1) = 24cm$
- $\overline{BD} = 10(a + 1) = 40cm$
- $\overline{AC} = (18a + 18) = 72cm$



Per calcolare il perimetro abbiamo bisogno del lato $\overline{CD}$. Osserviamo che $\overline{DH} = \overline{AB}$ e che $\overline{AH} = \overline{BD}$ e quindi $\overline{HC} = \overline{AC} - \overline{AH} = 32cm$.

Allora:

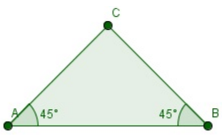
$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{(24)^2 + (32)^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40cm$$

Quindi:

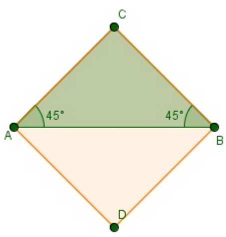
$$P = \overline{AC} + \overline{DC} + \overline{BD} + \overline{AB} = 72 + 40 + 40 + 24 = 176cm$$

Esercizio 9 Di un triangolo sappiamo che è isoscele e che uno dei suoi angoli misura 45°. Si può dire che è la metà di un quadrato?

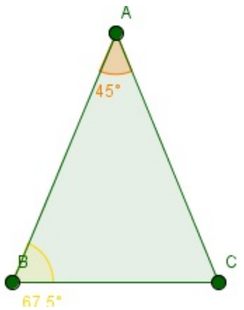
Ci sono due casi possibili:



- In questo caso entrambi gli angoli alla base misurano 45 gradi. Quindi l'angolo $\widehat{ACB} = 180 - (45 + 45) = 90$ gradi. In questo caso il triangolo è metà del quadrato.



- Se invece l'angolo di 45 gradi è l'angolo al vertice, gli angoli alla base misurano $(180 - 45)/2 = 67.5$ gradi ciascuno. In questo caso il triangolo non è metà di un quadrato.



In definitiva sapendo che un triangolo è isoscele e che un angolo misura 45 gradi non possiamo concludere che è metà di un quadrato.

Soluzione prova scritta del 11/09/2015

Gli esercizi sono stati svolti considerando $a = 4$ e $b = 7$

Algebra

Esercizio 1 Risolvere la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{3}{5} - 0.4\right)^2 + \frac{1}{10} - 0.14\right]^5 + \left[\frac{(a+1)}{3} \times 0.18\right] - \frac{1}{4} =$$

Per prima cosa trasformiamo i numeri scritti in forma decimale in frazioni e sostituiamo il valore alla lettera a:

$$\left[\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} - \frac{14}{100}\right]^5 + \left[\frac{(5)}{3} \times \frac{18}{100}\right] - \frac{1}{4} =$$

Risolviamo le operazioni all'interno delle parentesi quadre. Nella prima parentesi c'è una somma tra frazioni è quindi necessario trovare il minimo comune multiplo tra le frazioni. Nella seconda parentesi c'è un prodotto tra frazioni, moltiplichiamo i numeratori ed i denominatori.

$$\left[\left(\frac{6-4}{10}\right)^2 + \frac{10-14}{100}\right]^5 + \left[\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{3}^1} \times \frac{\cancel{\cancel{18}^6}^3}{\cancel{\cancel{100}^{20}}^{10}}\right] - \frac{1}{4} = \left[\frac{4}{100}^2 - \frac{4}{100}\right]^5 + \frac{3}{10} - \frac{1}{4} =$$

$$0 + \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ è } pari\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 < 2b + 7\}$. Determinare $A \cap B$ e $B \setminus A$.

Sostituiamo il valore di b e proviamo a scrivere in maniera estesa gli elementi che appartengono a ciascun insieme.

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8.....\}$
- B è l'insieme dei numeri naturali x tali che il loro quadrato è minore di $2b+7 = 21$, quindi: $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

L'intersezione di A e B è data dagli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè : $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.
$B \setminus A$ è dato dagli elementi che stanno in B ma non stanno in A:
$B \setminus A = \{1, 3\}$.

Esercizio 3 Qual è la probabilità che lanciando due dadi si ottenga come risultato un numero primo minore di 6? Tale probabilità è più o meno del 20%?
La probabilità di un evento è data dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili.
I casi possibili in questo caso sono $6 \times 6 = 36$, cioè:

dado uno	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	...
dado due	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	...

I casi favorelvoli alla riuscita dell'evento (E) sono:

dado uno	1	1	1	2	2	3	4
dado due	1	2	4	1	3	2	1
risultato	2	3	5	3	5	5	5

I casi possibili sono 7, quindi $P(E) = \frac{7}{36}$.
Confrontiamo questa probabilità con il $20\% = \frac{\cancel{20}^2}{\cancel{100}^{10}}$. Riduciamo le due frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{7}{36} = \frac{70}{360} < \frac{72}{360} = \frac{2}{36}.$$

La probabilità è minore del 20%.

Esercizio 4 Se ho un numero reale x è vero che vale sempre che $x^2 > x$? E che $x^2 \geq x$?

Facciamo un esempio:

- Prendiamo il numero razionale $\frac{1}{3}$. In questo caso si ha che $\frac{1}{3}^2 = \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$.

Quindi in $\mathbb{R}$ non vale nessuna delle due proprietà scritte sopra.

Osserviamo però che:

- Se prendiamo un qualsiasi numero naturale, per esempio 7, si ha che $7^2 = 49 > 7$.
- Se prendiamo un qualsiasi numero negativo, per esempio -6, si ha che $36 = (-6)^2 > -6$.
- Se prendiamo il numero 0, si ha che $0^2 = 0$

Concludiamo che in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ la proprietà $x^2 > x$ non vale, mentre vale che $x^2 \geq x$.

Esercizio 5 La sora Pina ha fatto un viaggio con la sora Lella. Hanno deciso di dividere le spese a metà; la sora Pina ha comprato i biglietti del treno ($8(a+1)euro$), ha pagato la cena ($90euro$) e l'aperitivo ($10euro$). La sora Lella ha pagato l'albergo ($120euro$); i biglietti del museo ($2(a+1)euro$) e la metropolitana ($4euro$). Chi delle due deve rimborsare l'altra e di quanto?

- La sora Pina ha speso in totale: $8(a+1) = 40$ euro per il treno, 90 euro per la cena e 10 euro per l'aperitivo; in totale $40 + 90 + 10 = 140$ euro.
- La sora Lella ha pagato 120 euro per l'albergo, $2(a+1) = 2(4+1) = 10$ euro per la metropolitana; in totale $10 + 120 = 130$ euro.

Per il viaggio la spesa totale è stata di $140 + 130 = 270$ euro. Se vogliono dividere equamente le spese entrambe devono pagare $270/2 = 135$ euro, quindi la sora Lella deve dare 5 euro a Pina.

Esercizio 6 E' più grande il 20% di $\frac{15}{18}$, o il 40% di $\frac{5}{14}$?

Calcoliamo:

- Il 20% di $\frac{15}{18}$. Ricordando che il 20% è equivalente a $\frac{20}{100}$, calcoliamo:

  $\frac{20}{100} \times \frac{15}{18} = \frac{\cancel{20}^1}{\cancel{100}^1} \times \frac{\cancel{15}^1}{\cancel{18}^6} = \frac{1}{6}$.

- Il 40% di $\frac{5}{14}$.

  Ricordando che il 40% è equivalente a $\frac{40}{100}$, calcoliamo:

  $\frac{40}{100} \times \frac{3}{61} = \frac{\cancel{20}^1}{\cancel{100}^1} \times \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{14}^7} = \frac{1}{7}$.

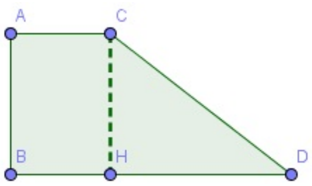
Confrontiamo le due frazioni trovate, riducendole allo stesso denominatore:
$\frac{1}{6} = \frac{7}{42}$.
$\frac{1}{7} = \frac{6}{42}$.
$\frac{7}{42} > \frac{6}{42}$, quindi il 20% di $\frac{15}{18}$ è maggiore del 40% di $\frac{5}{14}$

Geometria

Esercizio 7 Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo in B, con altezza $\overline{AB} = (8a + 8)cm$ e basi $\overline{AC} = (10a + 10)cm$, $\overline{BD} = 16(a + 1)cm$. Determinare il perimetro di $ABCD$.

Sostituiamo il valore di a.

- $\overline{AB} = (8a + 8) = 40cm$
- $\overline{AC} = (10a + 10) = 50cm$
- $\overline{BD} = 16(a + 1) = 80cm$



Per trovare il perimetro abbiamo bisogno di trovare il lato $\overline{CD}$. Osserviamo che $\overline{CH} = \overline{AB}$ e che $\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} = 80 - 50 = 30cm$.

Allora:

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{(40)^2 + (30)^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50cm$$

Quindi:

$$P = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{AC} = 40 + 80 + 50 + 50 = 220cm$$

Esercizio 8 Un bidone cilindrico ha altezza $h = 1,5m$ e raggio di base $r = 2(b+1)cm$. Contiene più o meno acqua di un cono di pari altezza e raggio di base di $3(b+1)cm$?

Per sapere quale dei due solidi contiene più acqua dobbiamo confrontare i loro volumi.

- Calcoliamo il volume del cilindro, osservando che $h = 1.5m = 150cm$ e $r = 2(b+1) = 16cm$.

$$V_{cilindro} = A_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h = 3.14 \times 256 \times 150 = 120576cm^3$$

- Calcoliamo il volume del cono, osservando che $r = 3(b+1) = 24cm$.

$$V_{cono} = \frac{A_{base} \times h}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{3.14 \times 576 \times 150}{3} = 90432cm^3$$

Il volume del cilindro è maggiore, quindi contiene più acqua.

Esercizio 9 Considerare la retta r nel piano cartesiano di equazione: $(a+3)x + (2b+1)y–7 = 0$.

- determinare se il punto (12,-1) appartiene ad r ;
- scrivere l'equazione della retta parallela ad r passante per l'origine.

Sostituiamo i valori di a e b.

$r : (a + 3)x + (2b + 1)y - 7 = 0 \Rightarrow r : 7x + 15y - 7 = 0$

- Per determinare se un punto appartiene ad una retta dobbiamo vedere se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta, cioè dobbiamo verificare che, sostituendo le coordinate del punto all'equazione della retta, questa si annulli. Il punto ha coordinate $P = (12, -1)$.

$$7(12) + 15(-1) - 7 = 84 - 15 - 7 \neq 0$$

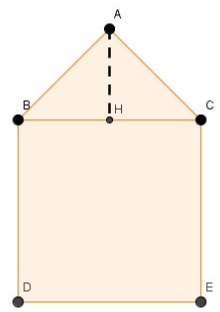
L'equazione della retta non è soddisfatta quindi il punto $P(12, -1)$ non appartiene alla retta.

- Scriviamo la retta r in forma esplicita, $r : y = -\frac{7}{15}x + \frac{7}{15}$ Affinché una retta sia parallela ad r è sufficiente che abbia lo stesso coefficiente angolare m, tutte le rette parallele ad r hanno equazione: $y = -\frac{7}{15}x + q$. Dobbiamo determinare q, in modo da determinare la retta che oltre ad essere parallela ad r passa anche per $O = (0, 0)$. Tutte le rette che passano per l'origine hanno la forma $y = mx$, allora basta porre $q = 0$ nell'equazione precedentemente trovata. La retta cercata ha equazione: $y = -\frac{7}{15}x$.

Esercizio 10 Considerare la figura seguente, che mostra un pentagono (non regolare) composto da un quadrato sormontato da un triangolo isoscele rettangolo. Se il lato del quadrato misura $10(a + 1)cm$, qual è l'area della figura?

Sostituiamo il valore di a, il lato del quadrato misura: $l = 10(a + 1) = 50cm$.

Per calcolare l'area del poligono dobbiamo calcolare le aree delle due figure che lo compongono.



- L'area del quadrato è $A_q = 50 \times 50 = 2500cm^2$
- Per calcolare l'area del triangolo rettangolo abbiamo due possibilità:
  1) possiamo osservare che i triangoli ABH e AHC sono uguali e quindi l'altezza AH è metà della base BC.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{50}{2} = 25cm$$
$$A_t = \frac{\overline{BC} \times \overline{AH}}{2} = \frac{50 \times 25}{2} = 625cm^2$$

2) possiamo trovare il valore dei due cateti e possiamo farlo con il teorema di Pitagora. $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 2 \times \overline{AB}^2$

$$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{2} \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\frac{\overline{BC}^2}{2}} \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\frac{2500}{2}} = \sqrt{1250}cm$$

Possiamo quindi trovare l'area del triangolo:

$$A_t = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{2} = \frac{1250}{2} = 625cm^2$$

L'area del pentagono misura allora $A_q + A_t = 2500 + 625 = 3125cm^2$