Fondamenti di Ricerca Operativa TA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Esercizi Modellazione

Esercizio 1

In un supermercato si vuole disporre un insieme $\{1,\dots,n\}$ di prodotti su m scaffali. Ogni prodotto j ha un'altezza a_j ed un profitto p_{ij} qualora venga posto sullo scaffale i. Ogni scaffale i ha un risparmio r_i qualora non venga utilizzato (ovverosia non vi sia disposto alcun prodotto) e un'altezza A. Infine, per ogni prodotto j è nota una lista $C_j \subseteq \{1,\dots,n\}\setminus j$ di prodotti che devono essere disposti assieme a j su di uno stesso scaffale. Si vogliono disporre tutti i prodotti, uno sopra l'altro, sugli scaffali in modo che i vincoli imposti dai sottoinsiemi C_j siano rispettati e, per ogni scaffale utilizzato, la somma delle altezze dei prodotti posti sullo scaffale sia al massimo A. L'obiettivo è massimizzare la somma dei profitti dati dalla disposizione dei prodotti sugli scaffali e dei risparmi per gli scaffali non utilizzati.
Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto } j \text{ viene assegnato allo scaffale } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n;$$

$$y_i := \begin{cases} 1 & \text{se lo scaffale } i \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,m;$$

$$\max \sum_{i=1}^{m} r_i(1-y_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \tag{1a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le A y_i \qquad \forall i = 1,\dots,m \tag{1b}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1,\dots,n \tag{1c}$$

$$\sum_{h\in C_j} x_{ih} = |C_j| x_{ij} \qquad \forall i = 1,\dots,m \quad \forall j = 1,\dots,n \tag{1d}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,\dots,m \tag{1e}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,\dots,m \quad \forall j = 1,\dots,n \tag{1f}$$

Esercizio 2

Un'azienda vuole confezionare regali natalizi per i suoi clienti partendo da un insieme di oggetti $\{1,\ldots,n\}$. Ogni oggetto j ha un valore v_j, ed ogni regalo deve contenere oggetti per un valore complessivo non inferiore a V. Inoltre, l'insieme degli oggetti è partizionato nei sottoinsiemi $S_1,\ldots,S_p$ (cioè $S_1 \cup \ldots \cup S_p = \{1,\ldots,n\}$ e $S_h \cap S_k = \emptyset$ per $h \neq k$), ciascuno contenente oggetti simili, ed ogni regalo non può contenere due (o più) oggetti appartenenti allo stesso sottoinsieme. L'obiettivo dell'azienda è confezionare il massimo numero di regali che soddisfino i vincoli sopra. Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene assegnato al regalo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n;$$

$$y_i := \begin{cases} 1 & \text{se il regalo } i \text{ viene impacchettato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\ldots,n;$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} \geq V y_i \qquad \forall i=1,\ldots,m \tag{2b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j=1,\ldots,n \tag{2c}$$

$$\sum_{j \in S_h} x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i=1,\ldots,m \quad \forall h=1,\ldots,p \tag{2d}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i=1,\ldots,m \tag{2e}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i=1,\ldots,m \quad \forall j=1,\ldots,n \tag{2f}$$

Esercizio 3

Una compagnia aerea deve pianificare l'impiego dei k aeroplani che costituiscono la sua flotta. La compagnia offre ai propri clienti un insieme V di voli, ciascun volo i è caratterizzato dall'istante di partenza e da quello di arrivo (a_i, b_i). Un aeroplano può effettuare più voli durante il periodo di pianificazione ma allo stesso veicolo non possono essere assegnati due voli che hanno un intervallo di esecuzione conflittuale (l'istante di partenza di un volo non può avvenire durante l'esecuzione di un altro volo eseguito dallo stesso aeroplano). È noto il grafo G=(V, E) in cui il generico lato e_{ih} rappresenta la conflittualità delle finestre temporali di due voli. È inoltre noto che ciascun volo in base alla propria destinazione può essere eseguito solamente da un sottoinsieme degli aeroplani disponibili. Si definisca l'insieme N_i come l'insieme di aeroplani che possono eseguire il volo i-esimo. L'obiettivo dei pianificatori è minimizzare il numero di aeroplani utilizzati al fine di coprire tutti i voli. Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se il volo } i \text{ viene eseguito da aeromobile } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, |V|; j = 1, \ldots, k;$$

$$y_j := \begin{cases} 1 & \text{se aeromobile } j \text{ viene utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, k;$$

$$\min \sum_{j=1}^{k} y_j \tag{3a}$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, |V| \tag{3b}$$

$$x_{ij} + x_{hj} \leq y_j \qquad \forall j = 1, \ldots, k \quad \forall (i, h) \in A \tag{3c}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, k \tag{3d}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, |V| \quad \forall j = 1, \ldots, k \tag{3e}$$

Esercizio 4

Un'azienda deve definire la schedulazione delle attività di produzione di un insieme di n prodotti chimici su m turni. La società è dotata di un numero di macchine tali da poter lavorare P prodotti in ogni turno $i \in \{1 \dots m\}$. Un sottoinsieme degli m turni è supervisionato da un team di esperti che garantiscono la possibilità di eseguire lavorazioni su prodotti altamente rischiosi. Si definisce $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ il sottoinsieme di turni in cui è garantita la supervisione del team di massima sicurezza. I prodotti da lavorare hanno lo stesso tempo di produzione, ma alcuni di essi devono essere eseguiti in turni ad alta sicurezza. È noto un sottoinsieme $D \subseteq \{1, \dots, n\}$ tale per cui tutti i prodotti $j \in D$ devono essere eseguiti in un turno supervisionato dal team di massima sicurezza. Tutti gli altri prodotti $j \notin D$ (cioè $j \in \{1, \dots, n\} \setminus D$) possono invece essere eseguiti in un qualsiasi turno (supervisionato e non).

Infine alcuni prodotti non possono essere lavorati nello stesso turno a causa delle potenziali reazioni innescabili in seguito ad un incidente. È noto il grafo G=(V, E) in cui il generico lato $(j, h) \in E$ definisce l'incompatibilità di lavorazione dei prodotti j e h durante lo stesso turno. L'obiettivo dell'azienda è eseguire tutti i prodotti durante i turni al fine di minimizzare il numero complessivo di turni utilizzati rispettando i vincoli di capacità, sicurezza ed incompatibilità.

Relativamente al problema descritto, si determini un modello di programmazione lineare intera.