Università di Bologna – Campus di Rimini – Corso di laurea in Farmacia e CQPS

Esame MATEMATICA 13/04/2015 – Docente: Stefano Bordoni

STUDENTE: ___________________________; CORSO di LAUREA: ____________

MATRICOLA: ________; N° documento: _____________; FIRMA: ____________

1. Calcolare: $\log_k(\sqrt[2]{k}\,/\,k^2)$, $\qquad \dfrac{(n+1)!-(n-1)!}{n!}$ [2]

2. Risolvere:

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-x+1} \geq \dfrac{9}{25}$; $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-8) > -2$; $\left|7x-3x^2\right| \leq 0$; $\sqrt[2]{2-x^2} \geq 1$; $\sqrt[3]{6-x} < -1$.

[7]

3. Calcolare $D'^{r}_{4;2}$, $D_{4;2}$ e $C_{6;2}-C_{6;4}$ [2]

4. Determinare dominio, grafico e codominio (studio globale) della funzione

$$y = f(x) = e^{-x} - 1\,.$$

Determinare la funzione derivata $f'(x)$ e una funzione primitiva $\Phi(x)$ della funzione $f(x)$. Calcolare inoltre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. [7]

∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

5. Eseguire lo studio analitico completo della funzione $y = \ln(x^2-1)$. [7]

6. Dopo aver determinato un intervallo sul quale la funzione $y = f(x) = x^2 - 1$ è invertibile, determinare la funzione inversa, inclusi dominio, grafico e codominio. [3]

7. In una popolazione di cavie, la probabilità che nasca un maschio è 8/15. Qual è la probabilità che nascano 4 maschi su 6 figli? [2]

<u>PER LA LODE</u>: Dimostrare che $\sqrt{11}$ non è un numero razionale.

VOTO: _______

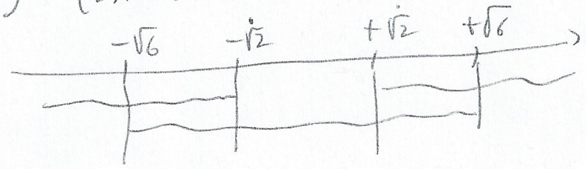
Esame Matematica 13/04/2015

1. ⊛ $K^y = \frac{\sqrt{K}}{K^2}$ $\quad K^y = \frac{K^{1/2}}{K^2}$ $\quad K^y = K^{-3/2}$ $\quad y = -\frac{3}{2}$

⊛ $\frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!-(n-1)!}{n\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\,(n^2+n-1)}{n\cdot(n-1)!} = \frac{n^2+n-1}{n}$

2. ⊛ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\quad -x+1 \leq 2$ $\quad -x \leq +1$ $\quad x \geq -1$

⊛ $\begin{cases} 2x^2-8>\emptyset \\ 2x^2-8<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2>4 \\ 2x^2<8+4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]+2;+\infty[\\ x^2<6 \rightarrow x\in\,]-\sqrt{6};+\sqrt{6}[\end{cases}$

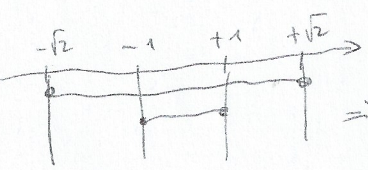


$\Rightarrow x\in\,]-\sqrt{6};-2[\,\cup\,]+2;+\sqrt{6}[$

⊛ $|7x-3x|^2$ non può essere $<\emptyset$ ma solo $=\emptyset$

$\Rightarrow 7x-3x^2=\emptyset$ $\quad x(7-3x)=\emptyset$ $\quad x_1=\emptyset$ vel $x_2=7/3$

⊛ $\begin{cases} 2-x^2\geq\emptyset \\ 2-x^2\geq 1^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2\leq\emptyset \\ x^2\leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in[-\sqrt{2};+\sqrt{2}] \\ x\in[-1;+1] \end{cases}$



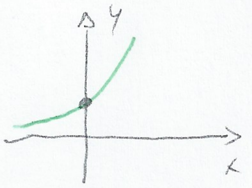
$\Rightarrow x\in[-1;+1]$

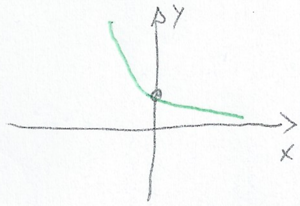
⊛ $6-x<(-1)^3$ $\quad 6-x<-1$ $\quad x>7$

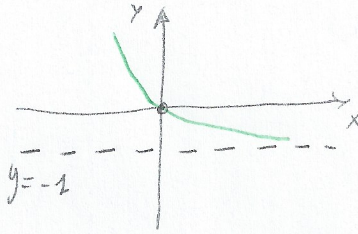
3. $D^r_{4;2}=4^2=16$; $D_{4;2}=\frac{4!}{2!}=\frac{4\cdot3\cdot2!}{2!}=12$; $C_{6;2}-C_{6;4}=\frac{6!}{4!\cdot2!}-\frac{6!}{2!\cdot4!}=\emptyset$

4. $y = e^{x} \xrightarrow{S_y} y = e^{-x} \xrightarrow{T_y} y+1 = e^{-x}$

$y = e^{-x} - 1$







D: $\mathbb{R}$

C: $]-1; +\infty[$

$y = f'(x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$

$\Phi(x) = -e^{-x} - x + cost$

$\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} - 1) = e^{\infty} - 1 = +\infty$

5. * D: $x^2 - 1 > \phi \qquad x \in]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$

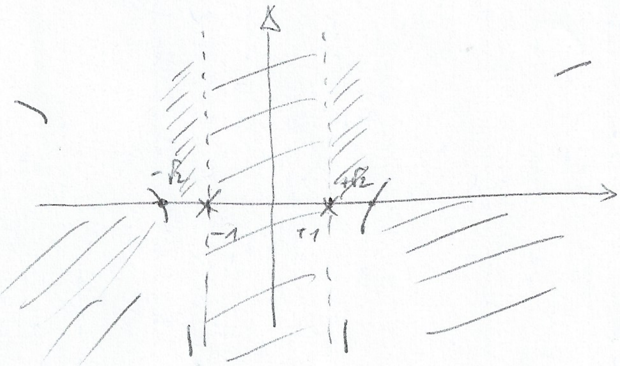
* Funzione pari $\quad \ln[(-x)^2 - 1] = \ln(x^2 - 1)$

* $\ln(x^2-1) \geq \phi \qquad x^2 - 1 \geq e^{\phi} \qquad x^2 - 1 \geq 1 \qquad x^2 \geq 2 \qquad x \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]+\sqrt{2}; +\infty[$

* $\lim_{x \to -\infty} [\ln(x^2-1)] = \ln(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} [\ln(x^2-1)] = \ln[(-1^-)^2 - 1] =$

$= \ln(1^+ - 1) = \ln \phi^+ = -\infty$

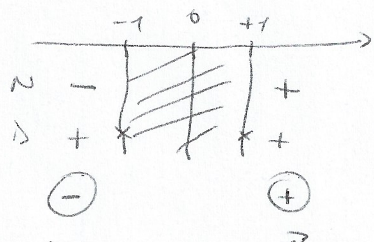


Per simmetria $\lim_{x \to +1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1} \qquad y' \geq \phi$ se $\dfrac{2x}{x^2-1} \geq \phi$ $\to N \geq \phi$ se $x \geq \phi$

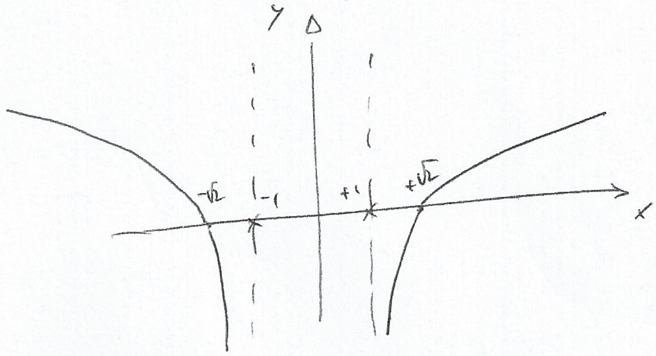
$\to D > 0 \quad \forall x \in$ dominio



La funzione non possiede né max né min. locali

$y'' = \dfrac{2 \cdot (x^2-1) - 2x(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2} = -2\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \qquad y'' < \phi \quad \forall x \in$ dominio

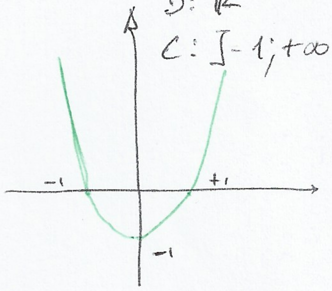
Concavità verso il basso ovunque



6. $y = x^2 - 1$ non è iniettiva $\longrightarrow$ $y = x^2 - 1$ è iniettiva

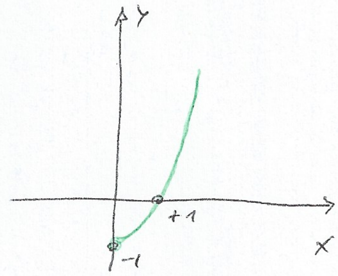
D: $\mathbb{R}$

C: $[-1; +\infty[$



D: $\mathbb{R}^+_0$

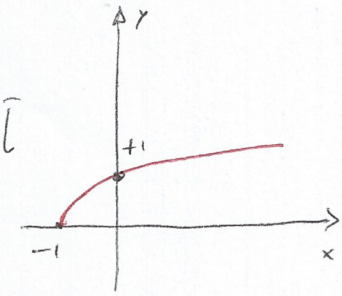
C: $[-1; +\infty[$



Funzione inversa: $x = y^2 - 1 \longrightarrow y = \pm\sqrt{x+1} \longrightarrow y = +\sqrt{x+1}$

D: $[-1; +\infty[$

C: $\mathbb{R}^+_0$



7. $p = \frac{8}{15} \longrightarrow 1 - p = \frac{7}{15}$

$$p(4\text{ su }6) = \binom{6}{4} p^4 \cdot (1-p)^{6-4} = \frac{6!}{4!\,2!}\left(\frac{8}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5}{2}\,\frac{8^4 \cdot 7^2}{15^6}$$

$$= 15\,\frac{8^4 \cdot 7^2}{15^6} = \frac{8^4 \cdot 7^2}{15^5}$$