4 Funzioni Caratteristiche e Funzioni Generatrici di Probabilità

La *Funzione Caratteristica* (FC) di una distribuzione di probabilità si ottiene tramite un operazione simile all'anti-trasformata di Fourier (differisce di fatto per il fattore $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}$):

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixt} dx, & \text{per le pdf continue} \\ \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i e^{ix_i t}, & \text{per le distribuzioni discrete, con } p_i \text{ la probabilità di } x_i \end{cases}$$

Da notare, nel caso delle distribuzioni discrete, la somma si estende da 0 ad ∞ solo nel caso in cui il regime di variabilità della variabile aleatoria x_i lo permetta. Ad esempio, come vedremo più avanti nella sezione 4.1, se $x_i = i$, con i il numero di successi di un gruppo di N tentativi, allora la somma dovrà variare da 0 ad N.

Da notare infine che la FC altro non è che il valore di aspettazione della funzione e^{itx}:

$$\Phi_x(t) = E\left[e^{itx}\right]. \tag{4.1}$$

Se si pone $Z = e^{it}$ allora si dice *Funzione Generatrice di Probabilità* (FG)

$$G(Z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Z^x dx, & \text{per le pdf continue} \\ \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i Z_i^x, & \text{per le distribuzioni discrete, con } p_i \text{ la probabilità di } x_i \end{cases}$$

Le proprietà delle FC sono le seguenti:

1. $\Phi_x(0) = 1$.
2. $|\Phi_x(t)| \leq 1$.
3. $\exists \forall t$.
4. $\Phi_{ax+b}(t) = e^{ibt}\Phi_x(at)$.
5. $\Phi_{x+y} = \Phi_x \times \Phi_y$

L'utilizzo delle FC o delle FG permette di ottenere con più facilità i momenti delle distribuzioni di probabilità o delle p.d.f. :

$$\mu'_r = \frac{1}{i^r}\left(\frac{d}{dt}\right)^r \Phi_x(t) \quad \text{momenti di grado } r \tag{4.2}$$

$$\mu_r = \frac{1}{i^r}\left(\frac{d}{dt}\right)^r \Phi_{x-\mu}(t) \quad \text{momenti centrali di grado } r \tag{4.3}$$

4.1 Funzione Generatrici di Probabilità di una distribuzione Binomiale

La distribuzione Binomiale $B(p,k,N)$ descrive la probabilità che facendo $N tentativi$ si abbiano k successi quando la probabilità di successo di un singolo tentativo vale p.

$$\begin{aligned} B(p,k,N) &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Troviamone la FG:

$$\begin{aligned} G_B(Z) &= \sum_{r=0}^{N} p_r Z^r \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} Z^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} (pZ)^k (1-p)^{N-k} \\ \text{valendo che:} & \quad (a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} a^k b^{N-k} \\ &= \left[pZ + (1-p)\right]^N \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 Funzione Generatrici di Probabilità di una distribuzione Poissoniana

Similmente a quanto fatto prima

$$\begin{aligned} G_P(Z) &= \sum_{r=0}^{\infty} p_r Z^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} Z^k \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} Z^k \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu Z)^k}{k!} \\ &= e^{-\mu} e^{\mu Z} \\ &= e^{\mu(Z-1)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\Phi_G(t) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{ixt} dx$$

ricordando che $dx = d(x-\mu)$ e moltiplicando e dividendo per $\sigma\sqrt{2}$ si scrive

$$= \quad \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+\mu-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x-\mu)\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2}}$$

chiamando $y = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ ed osservando che gli estremi di integrazione non cambiano, si va avanti scrivendo:

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sigma\sqrt{2}y} e^{-y^2} dy$$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sigma\sqrt{2}y-y^2} dy$$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y^2-it\sigma\sqrt{2}y)} dy$$

L'esponente dentro l'integrale può essere visto come derivante da un quadrato di un binomio, nella misura in cui, dato $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$, si ha che $a^2-2ab = (a-b)^2-b^2$. Identificando quindi $a = y$ e $2ab = it\sigma\sqrt{2} \rightarrow b = \frac{it\sigma}{\sqrt{2}}$, possiamo scrivere che

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(y-\frac{it\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{t^2\sigma^2}{2}\right]} dy$$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(y-\frac{it\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{t^2\sigma^2}{2}\right]} d\left(y-\frac{it\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(y-\frac{it\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} d\left(y-\frac{it\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$

chiamando $\omega = y - \frac{it\sigma}{\sqrt{2}}$

$$= \quad \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega$$

Infine, ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi}$

$$\Phi_G(t) \quad = \quad e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{4.7}$$

4.4 Passaggio dalla Binomiale alla distribuzione di Poisson

Dimostriamo che sotto opportune particolari ipotesi sui parametri di una distribuzione Binomiale (N e p) possiamo ricavare la $G_P(Z)$ mostrata in (4.6) a partire dalla $G_B(Z)$, mostrata in (4.5). Scriviamo quindi:

$$\begin{aligned} G_B(Z) &= \left[pZ + (1-p)\right]^N \\ &= \left[pZ\frac{N}{N} + (1 - p\frac{N}{N})\right]^N \end{aligned}$$

imponiamo che il valore di aspettazione $\mu = Np$ rimanga costante per $N \to \infty$, cosa che puo' avvenire solo per $p \to 0$. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\mu Z}{N} + (1 - \frac{\mu}{N})\right]^N \\ &= \left[\frac{\mu}{N}(Z-1) + 1\right]^N \end{aligned}$$

svolgendo la potenza N-esima del binomio

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!}\left[\frac{\mu(Z-1)}{N}\right]^k$$

Prima di procedere, osserviamo che parte del coefficiente di Newton può esplicitarsi nel seguente modo:

$$\frac{N!}{(N-k)!} = N(N-1)...(N-k+1)\frac{(N-k)!}{(N-k)!} = N(N-1)...(N-k+1)$$

Mandando $N \to \infty$ vale quindi che

$$\frac{N!}{k!(N-k)!} \to N^k$$

Riprendendo il conto lasciato in sospeso

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{N^k}{k!}\left[\frac{\mu(Z-1)}{N}\right]^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{\left[\mu(Z-1)\right]^k}{k!} \\ &= e^{\mu(Z-1)} \end{aligned}$$

risultato da confrontare con la (4.6).

4.5 PASSAGGIO DALLA DISTRIBUZIONE DI POISSON ALLA DISTRIBUZIONE DI GAUSS

Prendiamo come punto di partenza quello di arrivo della sotto-sezione precedente.

$$G_P(Z) = e^{\mu(Z-1)}$$

Ricordiamo che una distribuzione di Poisson ha μ come valore di aspettazione, mentre abbiamo indicato con k il valore misurato. Sappiamo anche che $\sqrt{\mu}$ rappresenta la deviazione standard per una misura. Consideriamo quindi la grandezza $x = \frac{k-\mu}{\sqrt{\mu}}$, che quantifica il valore della discrepanza tra la misura e l'aspettazione in termini di quante deviazioni standard. Il Passaggio da una distribuzione di Poisson ad una Gaussiana regge quando il valore di aspettazione Poissoniano $\mu \to \infty$, e conseguentemente il valore k è grande. In questo caso, allora x può essere ritenuta continua, almeno se la si considera su domini di integrazione >>1 (cioè vale sostanzialmente che $k+1 \sim k$).

La funzione caratteristica di x si trova cercando il valore di aspettazione e^{itx}, dove t è una variabile continua. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} E\left[e^{itx}\right] &= E\left[e^{it\frac{k-\mu}{\sqrt{\mu}}}\right] \\ &= E\left[e^{it\frac{k}{\sqrt{\mu}}-it\frac{\mu}{\sqrt{\mu}}}\right] \\ &= E\left[e^{it\frac{k}{\sqrt{\mu}}-it\sqrt{\mu}}\right] \\ &= e^{-it\sqrt{\mu}}E\left[e^{it\frac{k}{\sqrt{\mu}}}\right] \\ &= e^{-it\sqrt{\mu}}\Phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{\mu}}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'ultimo passaggio si capisce richiamando la definizione di FC data dalla (4.1): il fattore di destra della (4.8) altro non è che la distribuzione di Poisson, con variabile della trasformata $\frac{t}{\sqrt{\mu}}$. Per questo, richiamando la (4.6), ed identificando $Z = e^{\frac{it}{\sqrt{\mu}}}$, possiamo continuare a scrivere:

$$\begin{aligned} &= e^{-it\sqrt{\mu}}e^{\mu\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\mu}}}-1\right)} \\ &= \exp\left[-it\sqrt{\mu}+\mu e^{i\frac{t}{\sqrt{\mu}}}-\mu\right] \end{aligned}$$

La condizione $\mu \to \infty$ può essere vista come $\frac{t}{\sqrt{\mu}} \to 0$, e quindi possiamo sviluppare l'esponenziale interno in serie fino al secondo ordine:

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[-i\,t\sqrt{\mu} + \mu\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\mu}\right) - \mu\right] \\
&= \exp\left[-i\,t\sqrt{\mu} + i\mu\frac{t}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2}t^2\right] \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Confrontando la (4.9) con la (4.7), si nota che abbiamo appena calcolato una FC di una Gaussiana con valore di aspettazione = 0 e con la deviazione standard gaussiana $\sigma_g = 1$. Questo non deve stupire, in quanto la variabile x che abbiamo tirato in ballo all'inizio non è altro che una variabile centrata attorno a 0, in quanto ottenuta sostanzialmente come differenza tra la misura k ed il valore di aspettazione μ. Per esattezza, tale differenza è normalizzata alla deviazione standard $\sqrt{\mu}$, e questo provoca il risultato di $\sigma_g = 1$.

Ma confrontando la (4.9) con la (4.8) e utilizzando la proprietà 4. delle FC, si ottiene l'identificazione della FC della Poissoniana con la formula della FC di una Gaussiana espressa dalla (4.7).