

# Schemi Avanzati di Controllo per Robot

Claudio Melchiorri

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Università di Bologna

email: [claudio.melchiorri@unibo.it](mailto:claudio.melchiorri@unibo.it)

# Sommario

- 1 **Introduzione**
  - Controllo in presenza di incertezze
- 2 **Controllo robusto**
  - Controllo a Struttura Variabile
  - Controllo robusto di robot
- 3 **Controllo adattativo**
  - Controllo adattativo

Sono stati analizzati schemi di controllo:

- decentralizzati (PID e varianti)

- in cascata
- ad azione in avanti

- centralizzati

- a dinamica inversa
- PD con compensazione di gravità

$$(\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$$

$$(\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}})$$

Come visto, questi ultimi sono potenzialmente in grado di far ottenere prestazioni migliori dai robot, ma per la loro implementazione è necessaria una “perfetta” conoscenza del modello dinamico del manipolatore.

In particolare, si presuppone per schemi di controllo di questo tipo:

- una modellazione precisa di *tutti* i fenomeni che intervengono sulla dinamica (attriti, forze esterne, ...);
- una conoscenza *perfetta* dei parametri del modello dinamico del robot;
- assenza di disturbi applicati dall'ambiente (carichi, interazioni, ...).

Queste ipotesi sono (molto spesso) non realistiche, e la presenza di grandi errori di modello o di disturbi esterni può far degradare in modo non accettabile le prestazioni del robot. È quindi necessario fare ricorso a tecniche di controllo che siano in grado di 'compensare' questi fenomeni indesiderati.

- **CONTROLLO ROBUSTO**: cerca di compensare direttamente eventuali errori derivanti sia da imprecisioni di modello che da disturbi esterni.
- **CONTROLLO ADATTATIVO**: cerca di modificare i parametri del controllo in modo di adattarsi a mutate condizioni di lavoro (o di diversi valori dei parametri del modello).
- **CONTROLLO AD APPRENDIMENTO**: nei casi (peraltro frequenti nella pratica) in cui il manipolatore debba eseguire ripetitivamente cicli di lavoro, può essere opportuno ricorrere a schemi di controllo in grado di *imparare* le azioni di controllo più indicate per ottimizzare opportuni indici.

# Controllo robusto

## I parte: Controllo Robusto

# Controllo robusto

Le tecniche di controllo “classiche” garantiscono il rispetto delle specifiche assegnate con una certa insensibilità a disturbi esterni, ma ammettono limitate variazioni parametriche.

Le tecniche di **controllo robusto** hanno la finalità di compensare direttamente eventuali errori derivanti da:

- imprecisioni sulla conoscenza del modello cinematico e/o dinamico (parametri cinematici, masse, carichi, attriti, ...)
- disturbi esterni non noti a priori (variazioni del carico, forze applicate, ...)

Queste tecniche di controllo ‘tollerano’ incertezze relativamente ampie, ma di **campo noto a priori**.

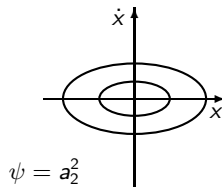
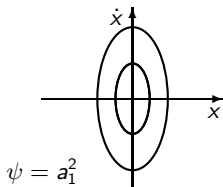
Tra le varie tecniche disponibili, verrà analizzata in particolare la tecnica di controllo a **Struttura Variabile** a causa della (relativamente) semplice facilità di implementazione.

## Sistemi a struttura variabile

**Esempio.** Sia dato un sistema dinamico del secondo ordine con due diverse strutture:

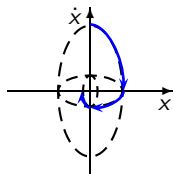
$$\ddot{x} = -\psi x \quad \text{con} \quad \psi \in \{a_1^2, a_2^2\}, \quad (a_1^2 > 1 > a_2^2)$$

Le due strutture, considerate *singolarmente*, sono semplicemente stabili:



Utilizzando la legge di commutazione:

$$\psi = \begin{cases} a_1^2 & \text{se } x\dot{x} > 0 \\ a_2^2 & \text{se } x\dot{x} < 0 \end{cases}$$



si ottiene un sistema complessivo globalmente asintoticamente stabile. ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍 ↺

## Sistemi a struttura variabile

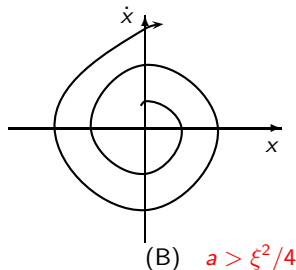
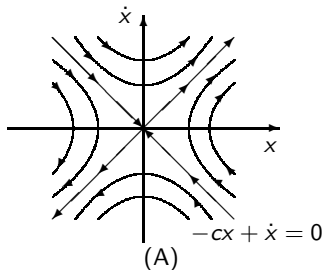
**Esempio.** Sia dato il sistema

$$\ddot{x} - \xi \dot{x} + \psi x = 0 \quad \xi > 0$$

con il termine  $\psi x$  che agisce come 'controllo' e

$$\psi = \begin{cases} -a & (A) \\ a & (B) \end{cases}$$

due strutture instabili ( $a > 0$ )



Nel caso (A) vi sono due autovalori reali, dati da  $\lambda_{1,2} = \frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + a}$ : uno è stabile (segno '-') ed uno instabile (segno '+'). Nel caso (B) si hanno autovalori complessi a parte reale positiva.

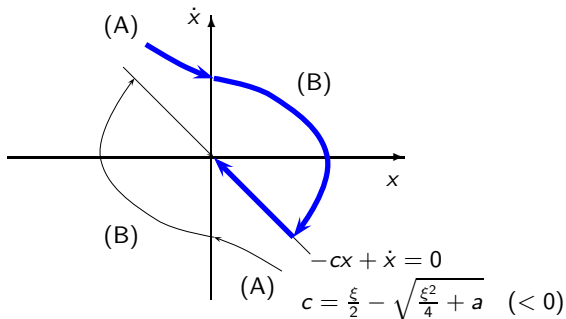


# Sistemi a struttura variabile

Scegliendo

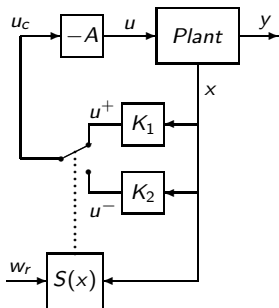
$$\psi = \begin{cases} -a & \text{per } xs < 0 \\ a & \text{per } xs > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (A) \\ (B) \end{matrix} \quad s = -cx + \dot{x}$$

il sistema risultante risulta asintoticamente stabile.



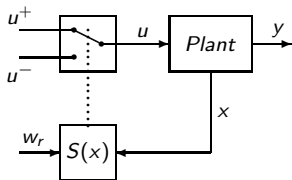
## Sistemi a struttura variabile

Quanto visto prima è generalizzabile. Si utilizzano due diverse leggi di controllo:



$$u_c = \begin{cases} K_1(x) & \text{se } S(x) > 0 \\ K_2(x) & \text{se } S(x) < 0 \end{cases}$$

Legge di controllo semplificata:



$$u = \begin{cases} u^+ & \text{se } S(x) > 0 \\ u^- & \text{se } S(x) < 0 \end{cases}$$

Sliding Surface:  $S(x) = 0$

## Controllo a struttura variabile

Sia dato il sistema:

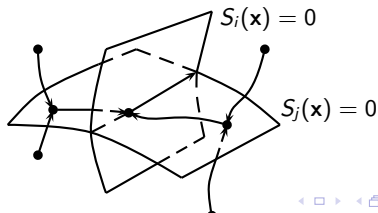
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)$$

dove  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  rappresenta lo stato,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  il controllo e  $\boldsymbol{\psi}(t)$  un disturbo esterno agente sul sistema.

Se si ha incertezza sui parametri di  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , un semplice regolatore lineare non è in grado di garantire le prestazioni dinamiche desiderate, specialmente in presenza di disturbi esterni non noti.

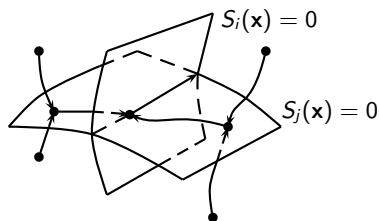
L'idea base di un regolatore a *struttura variabile* è quella di forzare lo stato  $\mathbf{x}$  del sistema a rimanere in una opportuna regione  $S(\mathbf{x})$  dello spazio degli stati: *superficie di scivolamento* o *superficie di sliding*.

Nel caso di più ingressi,  $m > 1$ ,  $S(\mathbf{x})$  è spesso individuata come l'intersezione di  $m$  superfici  $S_i(\mathbf{x}) = 0$ .



## Controllo a struttura variabile

Nel caso multivariabile le traiettorie del sistema controllato sono:



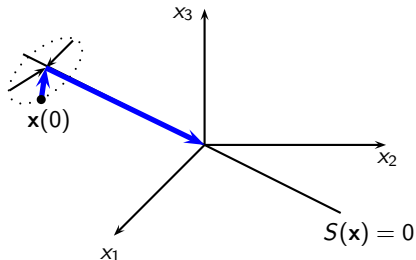
Ogni volta che lo stato raggiunge una superficie di sliding si muove su di essa in direzione dello spazio intersezione.

Se la regione  $S(\mathbf{x})$  e le superfici  $S_i(\mathbf{x})$  vengono scelte correttamente, al termine di un transitorio iniziale lo stato  $\mathbf{x}$  del sistema si troverà confinato alla regione finale di sliding  $S(\mathbf{x})$  senza possibilità di uscirne anche in presenza di disturbi.

La dinamica del sistema controllato definita da  $S(\mathbf{x})$  dovrà essere scelta stabile e tale da garantire un rapido decadimento a zero dei transitori.

## Controllo a struttura variabile

Nel caso multivariabile, un approccio alternativo consiste nell'individuare un *vettore*  $z$  che definisce la 'distanza' dalla superficie di scivolamento  $S(\mathbf{x})$ .



Si definisce poi il controllo come

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$$

In questo caso, lo stato del sistema tende 'direttamente' al sottospazio  $S(\mathbf{x})$  (e non componente per componente), ed una volta giuntovi evolve in modo che  $S(\mathbf{x}) = 0$ .

## Controllo a struttura variabile

Una delle caratteristiche essenziali del controllo VS è la scomposizione del problema della sintesi del regolatore in due parti:

- a) scelta della regione di sliding  $S(\mathbf{x})$  in modo da garantire che il sistema controllato abbia un comportamento dinamico che soddisfi le specifiche;
- b) scelta del controllo  $u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) in modo da forzare lo stato del sistema sulla superficie  $S_i(\mathbf{x})$  anche in presenza di variazioni parametriche o disturbi esterni.

## Controllo a struttura variabile

**Esempio.** Sia dato il sistema del 2° ordine:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \psi(t) + u(t) \quad \left( G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} \right)$$

ove  $u(t)$  è il controllo e  $\psi(t)$  è un disturbo esterno limitato con derivata limitata

$$|\psi(t)| < \Delta_0, \quad |\dot{\psi}(t)| < \Delta_1$$

Stabilizzazione: superficie di sliding:

$$S(x) = \dot{y} + cy = 0 \quad \text{dove} \quad x = (y, \dot{y})$$

Quando lo stato  $x = (y, \dot{y}) \in S(x) = 0$ :

- la dinamica del sistema controllato è asintoticamente stabile con decadimento esponenziale

$$\dot{y} = -cy \quad \implies \quad y(t) = y(0)e^{-ct}, \quad c > 0$$

- la velocità con cui l'uscita  $y(t)$  tende a zero dipende unicamente dal parametro  $c$  (cioè dalla scelta della superficie di sliding)
- le prestazioni del sistema controllato risultano *indipendenti* sia dal disturbo esterno  $\psi(t)$  che dalla variazione dei parametri  $a$  e  $b$  (robustezza).

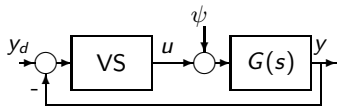
Scelta del controllo: È possibile dimostrare che il controllo discontinuo

$$u(t) = -K \operatorname{sgn} S(x) \quad (1)$$

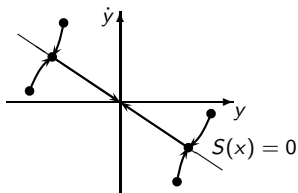
è in grado di forzare lo stato del sistema verso la superficie di sliding  $S(x) = 0$ .

# Controllo a struttura variabile

## Controllo ( $y_d \neq 0$ )



## Andamento delle traiettorie



NB: se  $y_d \neq 0$ , allora  $x = (e, \dot{e})$ , con  $e = y_d - y$ .

Reiezione totale dei disturbi (esterni e parametrici) sse:

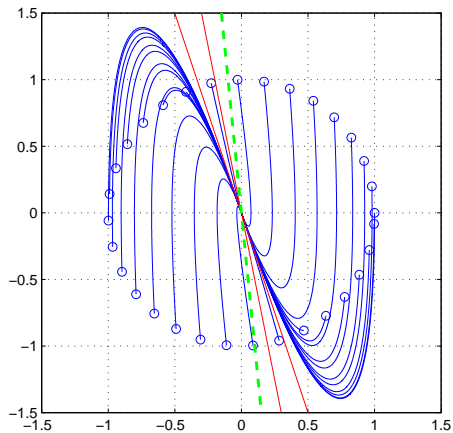
$$K > \Delta_0 > |\psi(t)|_{max} \quad (2)$$



## Controllo a struttura variabile - Esempio

Siano  $a = 8$ ,  $b = 15$ ,  $c = 10$ .

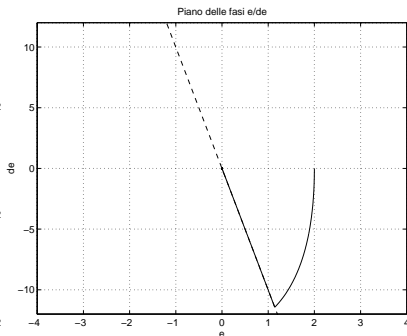
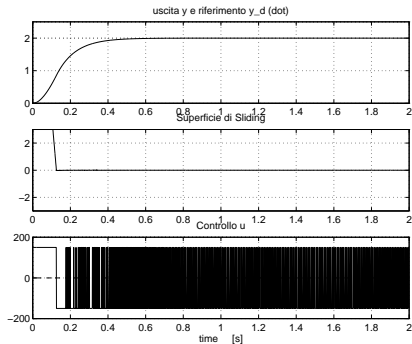
Evoluzione del sistema con  $u = 0$  per diverse condizioni iniziali



## Controllo a struttura variabile - Esempio

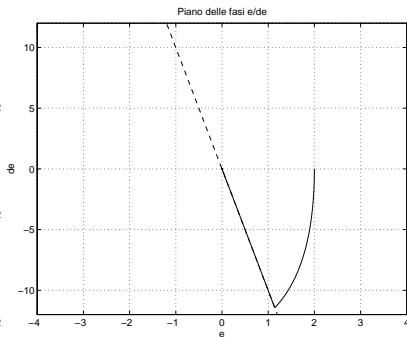
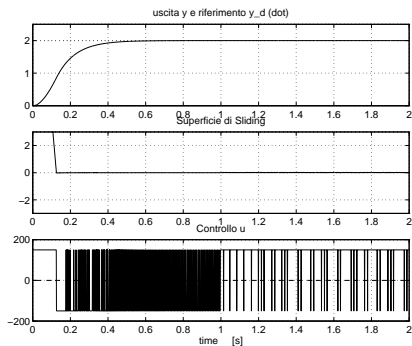
Siano  $a = 8$ ,  $b = 15$ ,  $c = 10$ . Sia  $e = y_d - y$ ,  $y_d = 2$ ,  $x = (e, \dot{e})$ .

VS senza disturbo ( $K = 150$ )



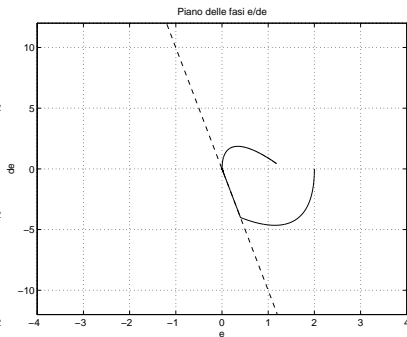
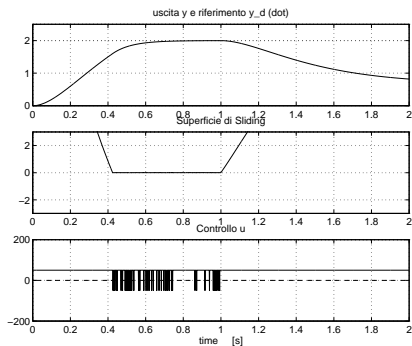
# Controllo a struttura variabile - Esempio

VS con disturbo  $\psi = -40$ ,  $t = 1s$ , ( $K = 150$ )



# Controllo a struttura variabile - Esempio

VS con disturbo  $\psi = -40$ ,  $t = 1s$ , ( $K = 50$ )



## Controllo a struttura variabile

### Caso tempo continuo:

Quando lo stato  $\mathbf{x}$  si trova sulla superficie di sliding  $S(\mathbf{x}) = 0$ , si verifica il fenomeno dello *sliding mode ideale*:

- il controllo  $\mathbf{u}(t)$  commuta a frequenza *infinita*,
- l'oscillazione indotta sulla variabile di uscita  $y(t)$  ha *ampiezza nulla*.

### Caso tempo discreto:

Realizzando con sistema digitale il controllo VS (1) si ha:

- una frequenza di commutazione finita;
- un'oscillazione residua sulla variabile di uscita  $y(t)$  (**chattering**).

L'ampiezza dell'oscillazione residua è direttamente proporzionale al periodo di campionamento  $T$  e all'ampiezza  $K$  dell'azione di controllo

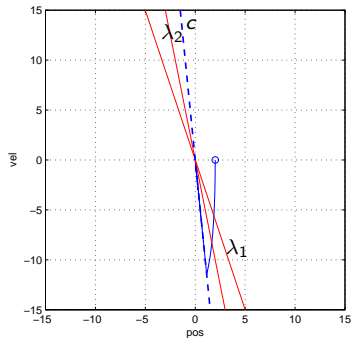
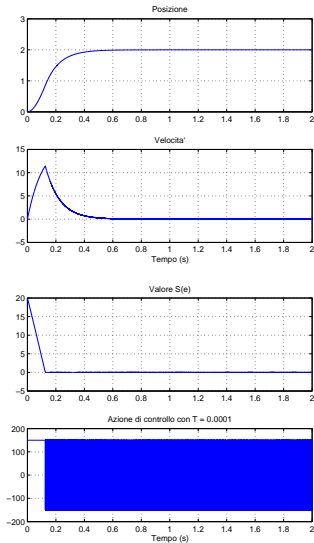
$$|y(t)| \leq K T \quad (3)$$

Quindi non è più possibile mantenere lo stato del sistema “esattamente” sulla superficie  $S(\mathbf{x}) = 0$  (sliding mode ideale), ma è possibile solamente mantenere lo stato in un “intorno sufficientemente piccolo” di tale superficie (sliding mode discreto).

Dalle relazioni (2) e (3) appare chiaro che se il disturbo  $\psi(t)$  è elevato in modulo, anche l'ampiezza  $K$  del controllo dovrà essere elevata. Di conseguenza anche il chattering sulla variabile di uscita  $y(t)$  sarà elevato.

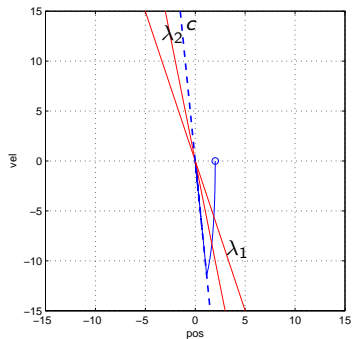
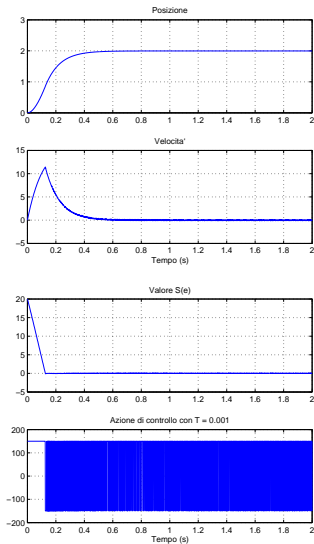
# Controllo a struttura variabile

VS senza disturbo  $K = 150$ ,  $dt = 0.0001$  s



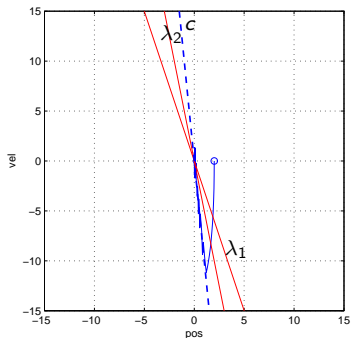
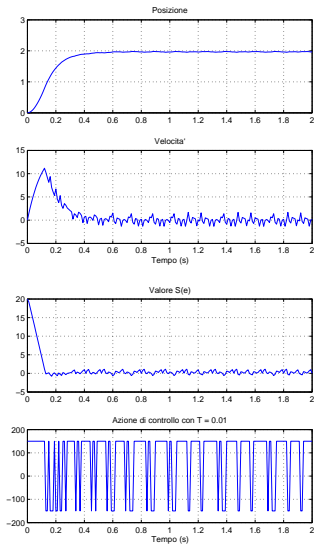
# Controllo a struttura variabile

VS senza disturbo  $K = 150$ ,  $dt = 0.001$  s



# Controllo a struttura variabile

VS senza disturbo  $K = 150$ ,  $dt = 0.01$  s

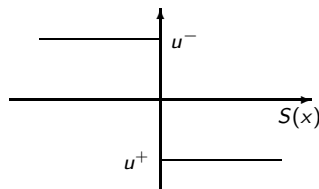
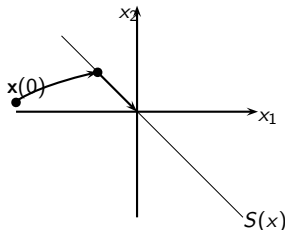




# Controllo a struttura variabile

## Problema del *chattering*

Fisicamente, in condizioni di sliding non è possibile commutare il controllo a frequenza infinita tra i valori  $u^+$ ,  $u^-$ .



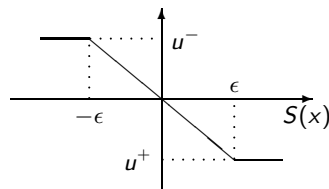
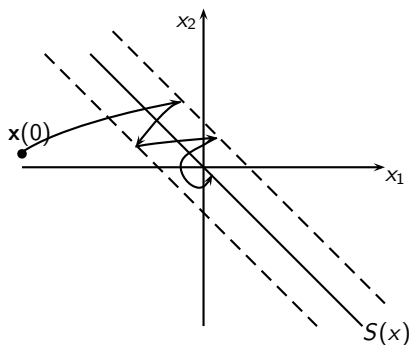
Questo provoca l'insorgenza di "oscillazioni" del sistema controllato o dell'attuatore (alle alte frequenze dello spettro nella banda utile del processo), eccitando dinamiche non modellate e causando comportamenti non desiderati. Esistono diverse tecniche per evitare questo inconveniente.

Tra le più facilmente implementabili, si hanno:

- 1 Tecnica dei 'boundary layers';
- 2 Tecnica DIC (Discrete Integral Control).

# Controllo a struttura variabile

**BOUNDARY LAYERS:** si introduce una 'zona' di larghezza opportuna attorno alla superficie di scivolamento entro la quale il controllo non commuta più, ma è proporzionale all'errore:



## Controllo a struttura variabile

### DIC (Discrete Integral Control).

Si faccia l'ipotesi che il termine di disturbo sia limitato e a derivata limitata:

$$|\psi(t)| < \Delta_0, \quad |\dot{\psi}(t)| < \Delta_1$$

Si aggiunge all'azione di controllo VS ( $-k \operatorname{sgn} S(x)$ ) un termine proporzionale  $-\lambda S(x)$  ed uno proporzionale all'integrale del segno dell'errore

$$\begin{cases} u(t) &= -\lambda S(x) - k \operatorname{sgn} S(x) - \tilde{\psi}(t) \\ \dot{\tilde{\psi}}(t) &= h \operatorname{sgn} S(x) \end{cases} \quad (4)$$

È possibile dimostrare che questo controllore gode della seguente proprietà:

**Proprietà.** *Se i parametri  $k$ ,  $h$  e  $\lambda$  del controllore (4) vengono scelti in modo da soddisfare le seguenti disuguaglianze:*

$$k > 0, \quad h > \Delta_1, \quad h \lambda k > \Delta_1^2 (1 - \ln 2)$$

*allora il sistema controllato risulta essere globalmente asintoticamente stabile e lo stato del sistema giunge in un tempo finito sulla superficie di sliding  $S(x) = 0$ .*

## Controllo a struttura variabile

### Osservazioni:

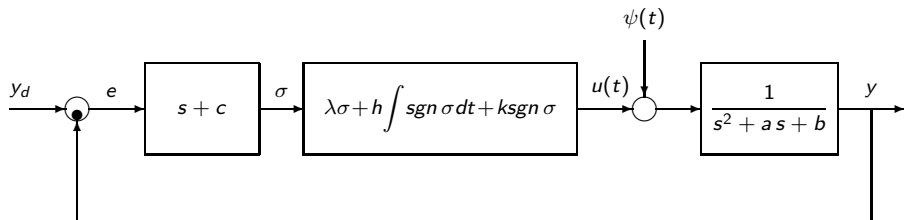
- Questa proprietà è valida solamente per disturbi  $\psi(t)$  continui, con derivata limitata che agiscono nel sottospazio di azione del controllo (**matching condition**).
- Nel caso in cui in (4) la parte proporzionale non sia presente ( $\lambda = 0$ ), l'azione di controllo è ancora in grado di stabilizzare il sistema, ma solamente se la condizione iniziale è sufficientemente piccola.

## Controllo a struttura variabile - Esempio

Controllo del sistema

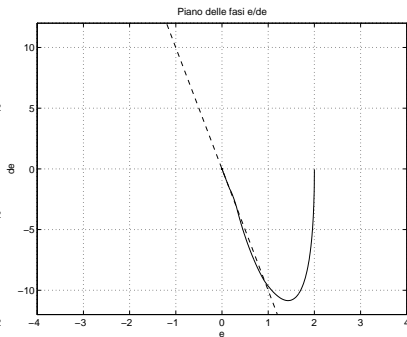
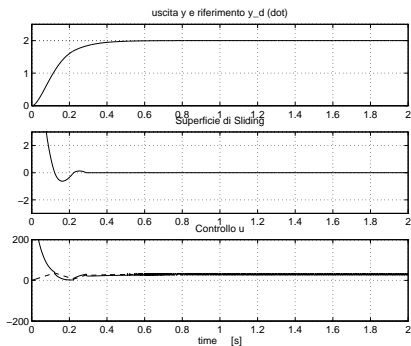
$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \psi(t) + u(t)$$

Siano  $a = 8$ ,  $b = 15$ ,  $c = 10$ . Sia  $x = y_d - y$ ,  $y_d = 2$ .



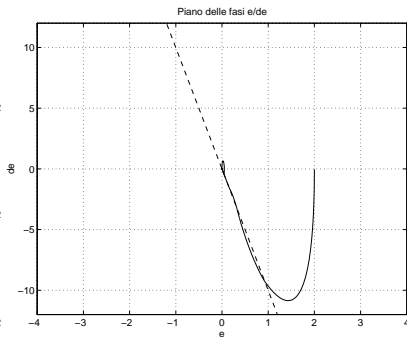
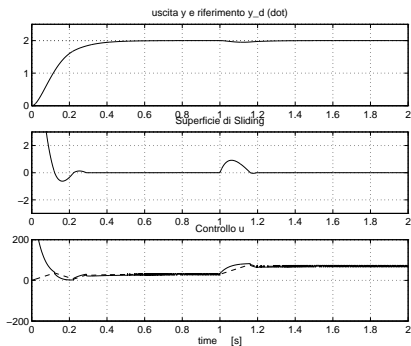
# Controllo a struttura variabile - Esempio

VS+DIC senza disturbo ( $k = 4, \lambda = 20, h = 300$ )



# Controllo a struttura variabile - Esempio

VS con disturbo  $\psi = -40$ ,  $t = 1s$ , ( $k = 4, \lambda = 20, h = 300$ )



## Controllo robusto di robot

In generale, è difficile compensare esattamente la dinamica di un manipolatore. Si ha, più realisticamente, una compensazione *imperfetta*. Si consideri in questo caso il controllo a dinamica inversa:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5)$$

ove  $\hat{\mathbf{M}}$  ed  $\hat{\mathbf{n}}$  rappresentano la parte nota del modello della dinamica. Si può esprimere in generale l'incertezza in funzione di

$$\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M} \quad \tilde{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}$$

Utilizzando la (5) si ottiene complessivamente

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}$$

Poichè la matrice  $\mathbf{M}$  è invertibile, si ha

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{y} + (\mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I})\mathbf{y} + \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

con

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}})\mathbf{y} - \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}$$

N.B. Se  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$  e  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \implies \boldsymbol{\eta} = 0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$ .



## Controllo robusto di robot

Assumendo la stessa  $\mathbf{y}$  (controllo) del caso 'ideale'

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_d - \mathbf{q})$$

si ottiene complessivamente che la dinamica dell'errore  $\tilde{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_d - \mathbf{q})$  è descritta da

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta}$$

## Controllo robusto di robot

Dalla relazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}$$

si ottiene direttamente

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}$$

da cui, definendo  $\boldsymbol{\xi} = [\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$  come vettore stato, si ha l'equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta})$$

con

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$$

Il problema di inseguimento di una traiettoria  $(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)$  è equivalente a quello di individuare una  $\mathbf{y}$  che stabilizza la dinamica dell'errore  $\boldsymbol{\xi}$ , non lineare e tempo variante (termine  $\boldsymbol{\eta}$ ).

## Controllo robusto di robot

D'altra parte, a causa delle caratteristiche delle traiettorie e per le proprietà del modello dinamico di un robot, è possibile effettuare una stima del campo di variabilità dell'incertezza  $\eta$ .

Analizzando i singoli termini, si ha che

$$\sup_{t \geq 0} \|\ddot{\mathbf{q}}_d\| < Q_M < \infty \quad \forall \ddot{\mathbf{q}}_d \quad (6)$$

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\| \leq \alpha \leq 1 \quad \forall \mathbf{q} \quad (7)$$

$$\|\tilde{\mathbf{n}}\| \leq N_M < \infty \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \quad (8)$$

# Controllo robusto di robot

- La (6) deriva dal fatto che le traiettorie dei giunti sono pianificate a priori (accelerazioni non infinite).
- La (7) deriva dal fatto che la matrice  $\mathbf{M}$  (e quindi anche la  $\mathbf{M}^{-1}$ ) è limitata inferiormente e superiormente. Si ha quindi che

$$0 \leq M_m \leq \|\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq M_M \leq \infty, \quad \forall \mathbf{q}$$

Da questa relazione, si può dimostrare che, per esempio,

$$\|\mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I}\| \leq \frac{M_M - M_m}{M_M + M_m} = \alpha \leq 1$$

avendo considerato  $\mathbf{M}^{-1} = M_M \mathbf{I}$  e

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{2}{M_M + M_m} \mathbf{I}$$

Se  $\hat{\mathbf{M}}$  è scelto in modo più accurato, il valore di  $\alpha$  risulterà minore, fino al caso limite di  $\alpha = 0$  per  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$ .

- Per quanto riguarda  $\hat{\mathbf{n}}$ , si ricordi che i termini  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  sono sempre limitati.

## Controllo robusto di robot

Per compensare la presenza del termine di incertezza  $\eta$ , si considera una legge di controllo

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{w} \quad (9)$$

in cui:

$\ddot{\mathbf{q}}_d$	$\implies$	azione in avanti
$\mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}$	$\implies$	stabilizzazione dell'errore
$\mathbf{w}$	$\implies$	per contrastare l'incertezza

La dinamica dell'errore ( $\dot{\xi} = \mathbf{H}\xi + \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \eta)$ ) diviene in questo caso

$$\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{H}}\xi + \mathbf{D}(\eta - \mathbf{w})$$

dove la matrice

$$\tilde{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix}$$

ha autovalori a parte reale negativa ( $\mathbf{K}_P$ ,  $\mathbf{K}_D$  sono definite positive).

# Controllo robusto di robot

Scegliendo opportunamente le due matrici  $\mathbf{K}_P$ ,  $\mathbf{K}_D$ , per esempio

$$\mathbf{K}_P = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \dots, \omega_{nn}^2\} \quad \mathbf{K}_D = \text{diag}\{2\delta_1\omega_{n1}, \dots, 2\delta_n\omega_{nn}\}$$

si ottiene un comportamento desiderato (e disaccoppiato) per la parte lineare della dinamica di errore.

Si noti che se  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ , allora con la scelta  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  ci si riconduce agli schemi precedenti.

Nel caso  $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ , si deve determinare un opportuno valore di  $\mathbf{w}$ .

Si procede con il metodo di Lyapunov, scegliendo la funzione candidata

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{Q}$  simmetrica e definita positiva.

# Controllo robusto di robot

Funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\xi) = \xi^T \mathbf{Q} \xi > 0 \quad \forall \xi \neq \mathbf{0}$$

Derivando, e ricordando che  $\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{H}}\xi + \mathbf{D}(\eta - \mathbf{w})$ , si ha:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\xi}^T \mathbf{Q} \xi + \xi^T \mathbf{Q} \dot{\xi} \\ &= \xi^T (\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{H}}) \xi + 2\xi^T \mathbf{Q} \mathbf{D} (\eta - \mathbf{w}) \\ &= -\xi^T \mathbf{P} \xi + 2\xi^T \mathbf{Q} \mathbf{D} (\eta - \mathbf{w}) \\ &= -\xi^T \mathbf{P} \xi + 2\mathbf{z}^T (\eta - \mathbf{w}) \end{aligned}$$

avendo posto

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \xi$$

e sfruttato il fatto che, poichè  $\tilde{\mathbf{H}} < 0$ , allora  $\forall \mathbf{P} > 0$  l'equazione

$$\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{P}$$

ha una (unica) soluzione  $\mathbf{Q}$ , simmetrica e definita positiva.

Si noti che  $\dot{V} < 0$  per

- (a)  $\xi \in \text{Null}(\mathbf{D}^T \mathbf{Q})$
- (b)  $2\mathbf{z}^T (\eta - \mathbf{w}) < 0$

# Controllo robusto di robot

Si scelga la legge di controllo

$$\mathbf{w} = \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z} \quad \rho > 0$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w}) &= \mathbf{z}^T \boldsymbol{\eta} - \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \\ &\leq \|\mathbf{z}\| \|\boldsymbol{\eta}\| - \rho \|\mathbf{z}\| \\ &= \|\mathbf{z}\| (\|\boldsymbol{\eta}\| - \rho) \end{aligned}$$

Per opportuni valori di  $\rho$  si ha quindi che  $\dot{V} < 0$ :

$$\rho \geq \|\boldsymbol{\eta}\| \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_d$$



## Controllo robusto di robot

Poichè

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}})\mathbf{y} - \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{n}} \\ \mathbf{y} &= \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{w}\end{aligned}$$

in virtù dei limiti sui singoli termini, si ha che

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\eta}\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}}\|(\|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \|\mathbf{K}\|\|\xi\| + \|\mathbf{w}\|) + \|\mathbf{M}^{-1}\|\|\tilde{\mathbf{n}}\| \\ &\leq \alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\xi\| + \alpha\rho + M_M N_M < \rho\end{aligned}$$

da cui

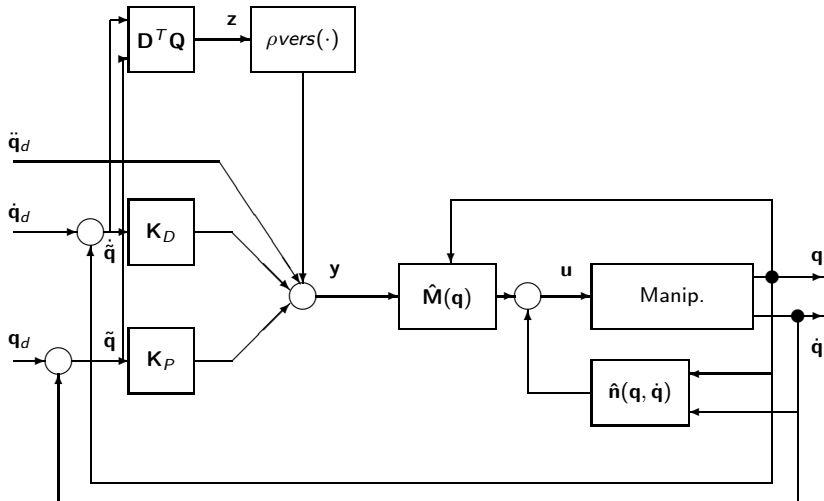
$$\rho \geq \frac{1}{1-\alpha}(\alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\xi\| + M_M N_M)$$

Con questa scelta di  $\mathbf{w}$ ,  $\rho$  si ha quindi che

$$\dot{V} = -\xi^T \mathbf{P} \xi + 2\mathbf{z}^T \left( \boldsymbol{\eta} - \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z} \right) < 0 \quad \forall \xi \neq \mathbf{0}$$

# Controllo robusto di robot

Schema di controllo complessivo.



# Controllo robusto di robot

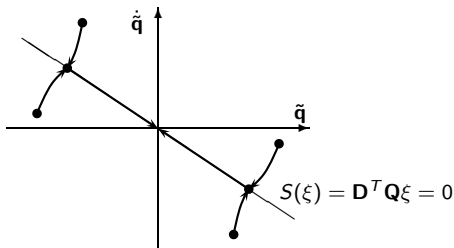
Si possono individuare tre contributi:

- 1  $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  che assicura una compensazione, se pur approssimata, degli effetti non lineari e di accoppiamento della dinamica;
- 2  $\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}}$  che stabilizza il sistema dinamico di errore; interpretabile come azione in avanti ( $\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}}$ ) ed in retroazione ( $-\mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}}$ ).
- 3  $\mathbf{w} = \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|}\mathbf{z}$  che assicura *robustezza*, contrastando l'incertezza; lo scalare  $\rho > 0$  è tanto maggiore quanto maggiore è l'incertezza.

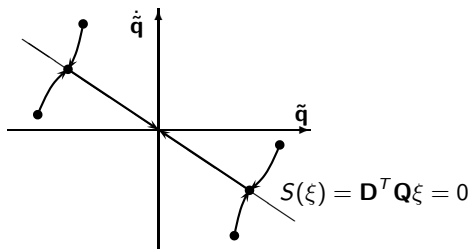
La legge è di tipo a *versore*, in quanto è rappresentata da un vettore di ampiezza  $\rho$  orientato come il versore  $\mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{D}^T\mathbf{Q}\xi$ .

La legge complessiva di controllo assicura che a regime  $\xi = \dot{\xi} = 0$  (quindi  $\tilde{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$ ). Inoltre, le traiettorie nello spazio  $\xi$  raggiungono tutte il sottospazio definito da

$$S(\xi) = \mathbf{z} = \mathbf{D}^T\mathbf{Q}\xi = 0$$



## Controllo robusto di robot



Il sottospazio di *sliding* (scivolamento o attrattivo)  $S(\xi) = \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \xi = 0$  dipende dalla scelta della matrice  $\mathbf{Q}$ .

Il problema del chattering può essere risolto con la tecnica dei 'boundary layers':

$$\mathbf{w} = \begin{cases} \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z} & \text{per } \|\mathbf{z}\| \geq \epsilon \\ \frac{\rho}{\epsilon} \mathbf{z} & \text{per } \|\mathbf{z}\| < \epsilon \end{cases}$$

# Controllo adattativo

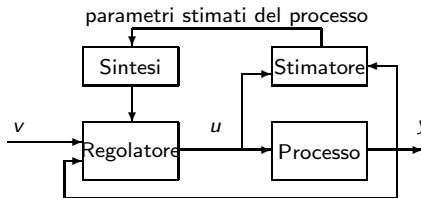
## II parte: Controllo Adattativo

# Controllo adattativo

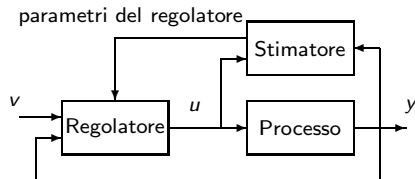
Se l'incertezza nel modello dinamico è nella conoscenza dei parametri, è possibile adottare schemi di controllo adattativo che consentono di:

- *stimare in linea* il valore dei parametri non noti,
- *adattare il valore dei parametri del controllo* sulla base di tali stime.

Schema di sistema di controllo adattativo di tipo ad autosintonizzazione (STR).

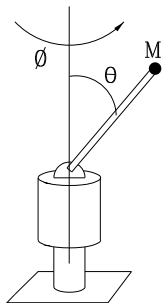


Schema di controllo ad autosintonizzazione diretto (o implicito)



## Controllo adattativo - Esempio

Controllo della velocità di rotazione  $\omega = \dot{\phi}$ , con  $\theta$  ed  $M$  variabili



Definendo:

$\tau_m$ : coppia generata dall'attuatore (giunto  $\phi$ )

$\tau_a$ : coppia necessaria per compensare l'attrito

$J$ : momento di inerzia visto dall'attuatore,  $J = J(M, \theta)$

Bilanciamento di coppie all'asse motore:

$$\frac{d}{dt} (J\dot{\phi}) = J\ddot{\phi} + \frac{dJ}{d\theta}\dot{\theta}\dot{\phi}, \quad \text{se } \dot{\theta} = 0 \implies J\ddot{\phi} = \tau_a + \tau_m$$

Si assuma che le variazioni tipiche di  $J$ , in dipendenza da  $\theta$  ed  $M$ , possano risultare dell'ordine di 1:50, ridotte dalla presenza del riduttore sull'asse motore a rapporti tipici dell'ordine di 1:5.

## Controllo adattativo - Esempio

Il momento di inerzia  $J$  visto dall'attuatore è

$$J = J_a + \frac{J_m(M, \theta)}{k_r^2}$$

con:  $k_r$  rapporto di riduzione,  $J_a$  inerzia del motore,  $J_m$  inerzia del carico (variabile).

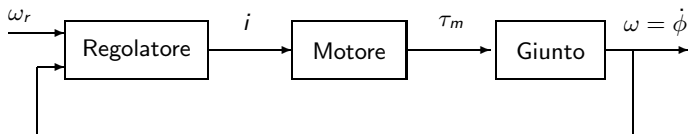
Se  $\theta$  è costante e  $\tau_a = 0$ , l'equazione di bilancio delle coppie fornisce

$$J\ddot{\phi} = \tau_m$$

La coppia  $\tau_m$  è proporzionale alla corrente  $i$  del motore

$$\tau_m = k_m i$$

Schema di controllo:





## Controllo adattativo - Esempio

Se si ipotizza di avere un regolatore di tipo PI, la corrente risulta

$$i = k \left[ (\omega_r - \omega) + \frac{1}{T_i} \int_0^t (\omega_r - \omega) dt \right]$$

Si ha quindi che

$$J \frac{d^2 \omega}{dt^2} + k_m k \frac{d \omega}{dt} + \frac{k_m k}{T_i} \omega = k_m k \frac{d \omega_r}{dt} + \frac{k_m k}{T_i} \omega_r$$

Assegnati valori desiderati  $\delta_0, \omega_0$  per coefficiente di smorzamento e pulsazione naturale, ponendo

$$k = \frac{2\delta_0 \omega_0 J}{k_m}, \quad T_i = \frac{2\delta_0}{\omega_0}$$

si ha

$$\frac{\omega(s)}{\omega_r(s)} = G_0(s) = \frac{2\delta_0 \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\delta_0 \omega_0 s + \omega_0^2}$$

## Controllo adattativo - Esempio

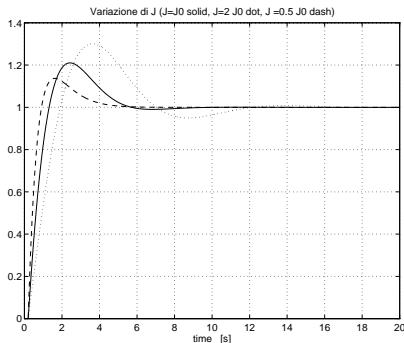
Se il regolatore è calcolato per  $J_0$  (valore nominale) e  $J \neq J_0$ , si ha

$$G'_0(s) = \frac{2\delta_0\omega_0 s J_0/J + \omega_0^2 J_0/J}{s^2 + 2\delta_0\omega_0 s J_0/J + \omega_0^2 J_0/J} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \omega_0 \sqrt{J_0/J}, \quad \delta = \delta_0 \sqrt{J_0/J}$$

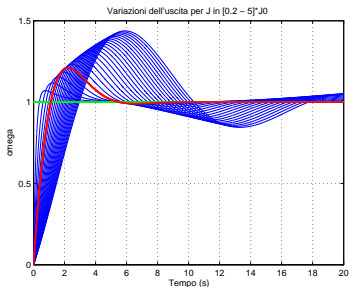
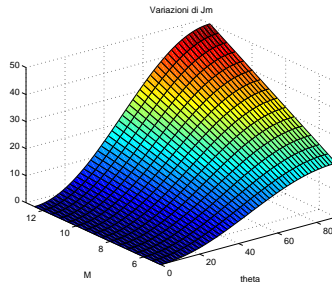
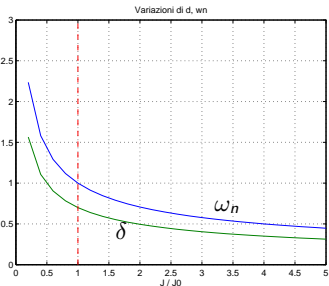
Se  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\delta_0 = 0.7$ :

$$\text{per } J = 2J_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 0.7071, \quad \delta \approx 0.5$$

$$\text{per } J = \frac{1}{2}J_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1.4142, \quad \delta \approx 1$$



# Controllo adattativo - Esempio



- 1. Variazione dei parametri  $\delta$  e  $\omega_n$  per  $J/J_0 \in [0.2 - 20]$
- 2. Variazione dell'inerzia  $J_m = M(L * \sin\theta)^2$  (lato carico) per  $\theta \in [0 - \pi/2]$  e  $M \in [5 - 12.5]$  ( $L = 2$ )
- 3. Uscita  $\omega$  del sistema (rosso curva ideale) per diversi valori di  $J \in [0.2 - 5]J_0$

## Controllo adattativo

Si utilizza il fatto che il modello dinamico dei robot è lineare nei parametri:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}$$

Si considera la legge di controllo (coppia precalcolata + dinamica inversa):

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_r &= \ddot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad \boldsymbol{\Lambda} \text{ matrice definita positiva (diagonale)}$$

L'azione  $\mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma}$  ( $\mathbf{K}_D$  definita positiva) equivale ad una azione PD sull'errore assumendo

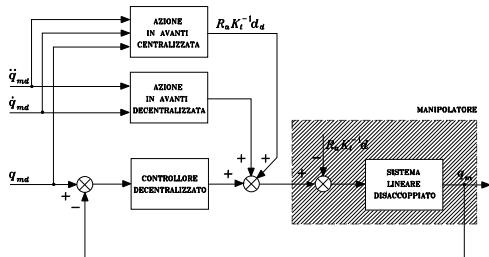
$$\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \quad [\mathbf{K}_P = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{K}_D]$$

Complessivamente, si ottiene una dinamica descritta da

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

## Controllo adattativo

## Controllo a coppia precalcolata + dinamica inversa



- Azione in avanti sulla base del modello dinamico e della traiettoria desiderata
- Controllo a dinamica inversa per disaccoppiare e linearizzare il sistema
- PD per stabilizzare il sistema complessivo

L'azione di controllo  $u$  in (10) è equivalente a

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}](\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_D \sigma \\ &= [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d + (\mathbf{C} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}}_d] + \left[ (\mathbf{M}\Lambda + \mathbf{K}_D)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{K}_D)\Lambda \tilde{\mathbf{q}} \right] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

L'azione  $u$  del controllo a dinamica inversa (vedi Robotica Industriale L-A) è:

$$u = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{M}\mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

## Controllo adattativo

Si può dimostrare la stabilità del sistema mediante il metodo di Lyapunov, scegliendo

$$V(\sigma, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sigma^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\sigma + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad \forall \sigma, \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{A}$  definita positiva. Derivando, si ha

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\sigma + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= \sigma^T \mathbf{M} [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\sigma - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\sigma - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_D\sigma] + \frac{1}{2}\sigma^T \dot{\mathbf{M}}\sigma + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\sigma - \sigma^T (\mathbf{D} + \mathbf{K}_D)\sigma + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= -\sigma^T (\mathbf{D} + \mathbf{K}_D)\sigma + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= -\sigma^T \mathbf{D}\sigma - (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{K}_D (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}}) + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} & \mathbf{A} = 2\Lambda\mathbf{K}_D \\ &= -\sigma^T \mathbf{D}\sigma - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda\mathbf{K}_D \Lambda\tilde{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Si ha che  $\dot{V} < 0$ , e che  $\dot{V} = 0$  solo per  $\tilde{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \equiv \mathbf{0}$

$\Rightarrow [\tilde{\mathbf{q}}^T, \sigma^T]^T = \mathbf{0}$  risulta *globalmente asintoticamente stabile*.

Si ha una evoluzione della dinamica del sistema su  $\sigma = 0$  senza commutazione dell'azione di controllo a frequenza infinita.

## Controllo adattativo

Sulla base di questo risultato, si consideri una legge di controllo basata su stime dei parametri del modello dinamico del robot:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_D\sigma \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}_D\sigma \end{aligned}$$

Si noti che  $\mathbf{Y}$  non dipende da  $\ddot{\mathbf{q}}$  (definizioni di  $\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r$ ). Utilizzando tale controllo, la dinamica complessiva diviene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\sigma} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\sigma + \mathbf{D}\sigma + \mathbf{K}_D\sigma &= -\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \\ &= -\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned}$$

ove

$$\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}$$

## Controllo adattativo

Per considerare il controllo basato sulle stime  $\hat{\alpha}$  dei parametri, si modifichi la funzione  $V$  come

$$V(\sigma, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\alpha}) = \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\sigma + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_D \tilde{\mathbf{q}}}_{V \text{ del caso precedente}} + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^T \mathbf{K}_\alpha \tilde{\alpha} > 0 \quad \forall \sigma, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{K}_\alpha$  simmetrica e definita positiva. Derivando tale funzione si ha:

$$\dot{V} = \underbrace{-\sigma^T \mathbf{D}\sigma - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_D \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{presente anche nel caso precedente}} + \tilde{\alpha}^T (\mathbf{K}_\alpha \dot{\tilde{\alpha}} - \underbrace{\mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\sigma}_{\text{dovuto alle incertezze}})$$



## Controllo adattativo

La funzione  $\dot{V}$  risulta negativa se si considera la legge di adattamento dei parametri ( $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha \implies \dot{\hat{\alpha}} = \dot{\tilde{\alpha}}$ )

$$\dot{\hat{\alpha}} = \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \sigma$$

Risulta infatti

$$\dot{V} = -\sigma^T \mathbf{D} \sigma - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_D \Lambda \tilde{\mathbf{q}} < 0$$

Si ha quindi che il controllo

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\alpha} + \mathbf{K}_d (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}})$$

con la legge di adattamento dei parametri

$$\dot{\hat{\alpha}} = \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \sigma$$

fa convergere la dinamica complessiva a

$$\sigma = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

e quindi  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  convergono a zero e inoltre  $\hat{\alpha}$  è limitato.

Dalla relazione

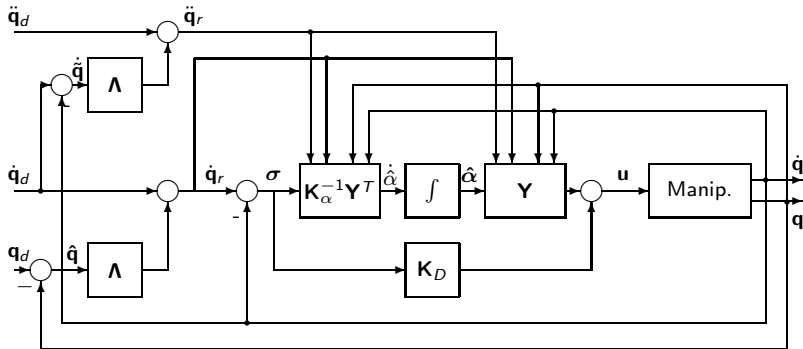
$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\sigma} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \sigma + \mathbf{D} \sigma + \mathbf{K}_D \sigma = -\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \tilde{\alpha}$$

si ha che a regime

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) (\hat{\alpha} - \alpha) = \mathbf{0} \quad \not\Rightarrow \quad \hat{\alpha} \rightarrow \alpha$$

## Controllo adattativo

Lo schema di controllo complessivo risulta:



Schema che rientra nella famiglia dei controllori adattativi *impliciti*.

Tre contributi:

- 1 termine  $\mathbf{Y}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ , riconducibile ad una azione a dinamica inversa;
- 2 termine  $\mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma}$ , azione stabilizzante di tipo PD sull'errore;
- 3 vettore stima dei parametri  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ , aggiornato secondo una tecnica *a gradiente*, la matrice  $\mathbf{K}_\alpha$  determina la velocità di convergenza della stima dei parametri.

## Traiettorie e problemi di stima

Errore di inseguimento  $\implies$  asintoticamente stabile  $\sigma \rightarrow 0$   
 Stima dei parametri  $\implies$  limitata

Per quanto riguarda i parametri, in generale si ha che devono essere verificate opportune condizioni sui segnali che si utilizzano per la stima: segnali *persistentemente eccitanti*.

Tali condizioni si riflettono su proprietà che deve avere la *matrice di regressione* (in questo caso, la matrice  $\mathbf{Y}$ ).

Si noti che  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)$ .

In sintesi, deve essere verificata una relazione del tipo:

$$a \mathbf{I}_p \leq \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) dt \leq b \mathbf{I}_p \quad \forall t_0, \quad T, a, b > 0$$

Poichè l'errore è asintoticamente stabile, si può riscrivere questa relazione come

$$a \mathbf{I}_p \leq \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) dt \leq b \mathbf{I}_p \quad \forall t_0, \quad T, a, b > 0$$

in cui si vede come le traiettorie che si impongono al manipolatore devono assicurare che la  $\mathbf{Y}$  “vari” sufficientemente nell'intervallo di tempo considerato, in modo da “riempire” tutto lo spazio  $p$ -dimensionale considerato per i parametri.

Questo garantisce che tutti i parametri possano essere stimati.

# Controllo robusto vs adattativo

In conclusione:

## Algoritmi adattativi:

- non compensano esplicitamente disturbi esterni,
- dipendenti dal modello considerato,
- considerano gli effetti cercando di variare i parametri (non compensano la causa),
- azione di controllo molto 'regolare'.

## Algoritmi robusti:

- compensazione dei disturbi,
- fenomeno di 'chattering'.

## Controlli - Esempi

### III parte: Esempi di applicazione delle tecniche di controllo

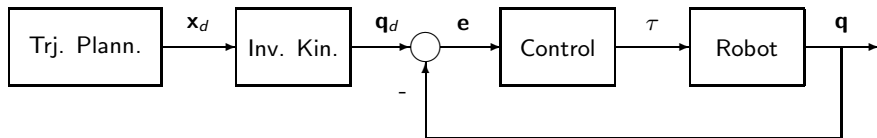
## Controlli - Esempi

Di seguito si riportano per confronto alcuni risultati ottenuti con i seguenti schemi di controllo:

- 1 Controllo adattativo;
- 2 Controllo VS;
- 3 Controllo PD + compensazione di gravità;
- 4 Controllo a dinamica inversa;

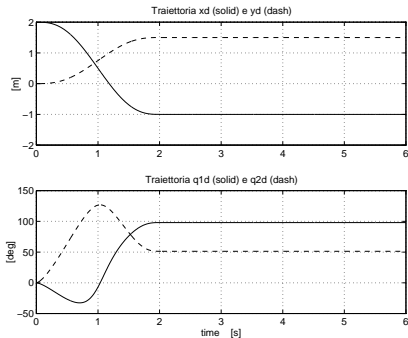
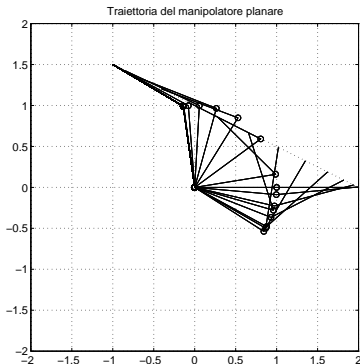
sia nel caso 'ideale' che con coppie di disturbo e/o incertezze parametriche.

Il manipolatore considerato è un manipolatore planare a due gradi di libertà, e lo schema di principio di controllo è il seguente.



## Controlli - Esempio

La traiettoria è una traiettoria definita nello spazio di lavoro, polinomiale nel tempo (polinomio del quinto ordine), di durata  $\Delta T = 2s$ ,  $\mathbf{x}_i = [2, 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_f = [-1, 1.5]^T$



## Esempio di controllo adattativo

**Linearità del modello dinamico**  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\alpha = \tau$ 

$$[m_1 a_{C1}^2 + m_2(a_1^2 + a_{C2}^2 + 2a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2(a_{C2}^2 + a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{l}_2]\ddot{\theta}_2 - m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 a_{C1} + m_2 a_1)g C_1 + m_2 g a_{C2} C_{12} = \tau_1$$

$$[m_2(a_{C2}^2 + a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{l}_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2 a_{C2}^2 + \tilde{l}_2]\ddot{\theta}_2 + m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g a_{C2} C_{12} = \tau_2$$

Per ispezione delle equazioni, si può definire il vettore dei parametri

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]^T$$

con

$$\alpha_1 = m_1 a_{C1}, \quad \alpha_2 = m_1 a_{C1}^2 + \tilde{l}_1, \quad \alpha_3 = m_2, \quad \alpha_4 = m_2 a_{C2}, \quad \alpha_5 = m_2 a_{C2}^2 + \tilde{l}_2$$



## Esempio di controllo adattativo

Inoltre:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ 0 & 0 & 0 & y_{24} & y_{25} \end{bmatrix}$$

con

$$y_{11} = gC_1$$

$$y_{12} = \ddot{\theta}_1$$

$$y_{13} = a_1^2 \ddot{\theta}_1 + a_1 g C_1$$

$$y_{14} = 2a_1 C_2 \ddot{\theta}_1 + a_1 C_2 \ddot{\theta}_2 - 2a_1 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - a_1 S_2 \dot{\theta}_1^2 + g C_{12}$$

$$y_{15} = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$$

$$y_{24} = a_1 C_2 \ddot{\theta}_1 + a_1 S_2 \dot{\theta}_1^2 + g C_{12}$$

$$y_{25} = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$$

N.B. i termini  $y_{ij}$  dipendono da  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, g$  e da  $a_1$ .

# Esempio di controllo adattativo

$$T_s = 0.002 \text{ s}$$

Parametri veri:

$$\alpha_1 = m_1 a_{C1} = 25$$

$$\alpha_2 = m_1 a_{C1}^2 + \tilde{l}_1 = 22.5$$

$$\alpha_3 = m_2 = 50$$

$$\alpha_4 = m_2 a_{C2} = 25$$

$$\alpha_5 = m_2 a_{C2}^2 + \tilde{l}_2 = 22.5$$

Valori iniziali:

$$\hat{\alpha}_1 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_2 = 20.25$$

$$\hat{\alpha}_3 = 45$$

$$\hat{\alpha}_4 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_5 = 20.25$$

Valori finali:

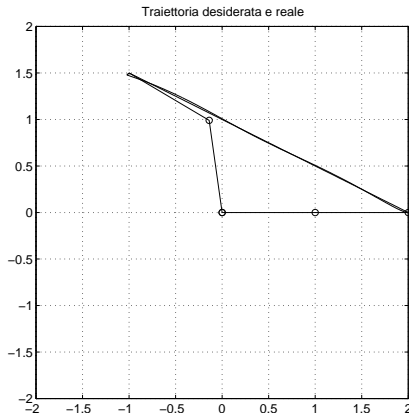
$$\hat{\alpha}_1 = 26.9997$$

$$\hat{\alpha}_2 = 21.4363$$

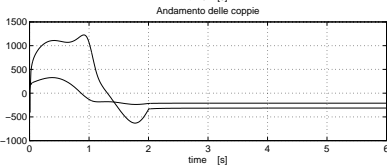
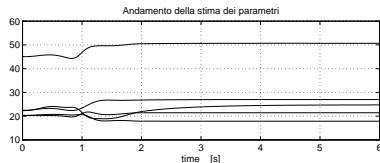
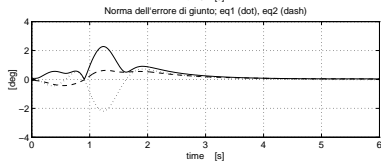
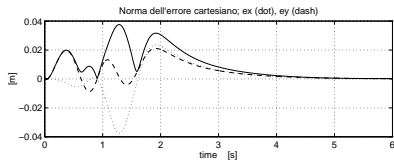
$$\hat{\alpha}_3 = 50.6860$$

$$\hat{\alpha}_4 = 24.7509$$

$$\hat{\alpha}_5 = 17.8884$$



# Esempio di controllo adattativo



## Esempio di controllo adattativo

Con coppie di disturbo  $\tau_{dis} = [80, 80]^T$ ,  $t = 3s$ ,  $T_s = 0.002 s$  :

Parametri veri:

$$\alpha_1 = m_1 a_{C1} = 25$$

$$\alpha_2 = m_1 a_{C1}^2 + \tilde{I}_1 = 22.5$$

$$\alpha_3 = m_2 = 50$$

$$\alpha_4 = m_2 a_{C2} = 25$$

$$\alpha_5 = m_2 a_{C2}^2 + \tilde{I}_2 = 22.5$$

Valori iniziali:

$$\hat{\alpha}_1 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_2 = 20.25$$

$$\hat{\alpha}_3 = 45$$

$$\hat{\alpha}_4 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_5 = 20.25$$

Valori finali:

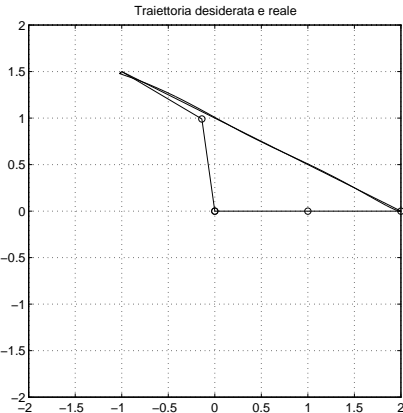
$$\hat{\alpha}_1 = 27.7443$$

$$\hat{\alpha}_2 = 21.4479$$

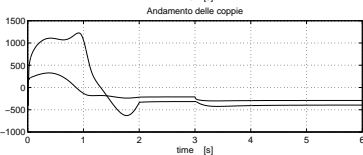
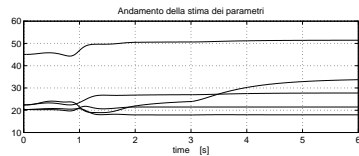
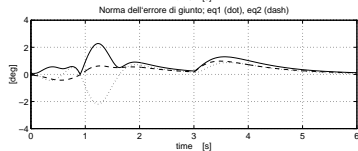
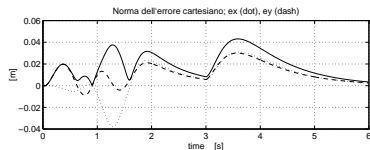
$$\hat{\alpha}_3 = 51.4422$$

$$\hat{\alpha}_4 = 33.7187$$

$$\hat{\alpha}_5 = 17.9385$$



# Esempio di controllo adattativo



## Esempio di controllo a struttura variabile

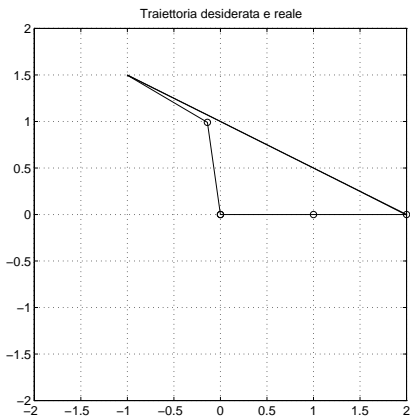
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} q_{d,1} \\ q_{d,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\mathbf{e},$$

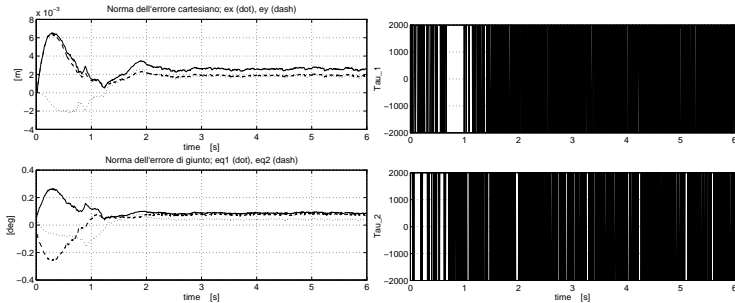
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$K = 2000$$

$$T_s = 0.001 \text{ s}$$



# Esempio di controllo a struttura variabile



## Esempio di controllo a struttura variabile

Con coppie di disturbo  $\tau_{dis} = [80, 80]^T$ ,  $t = 3s$ :

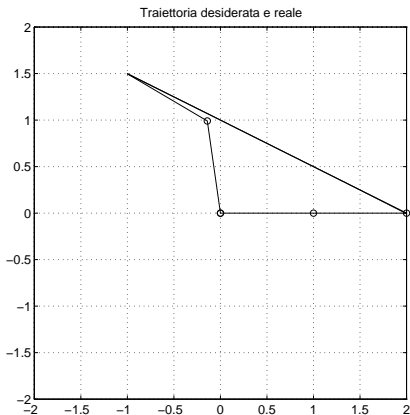
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} q_{d,1} \\ q_{d,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\mathbf{e},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

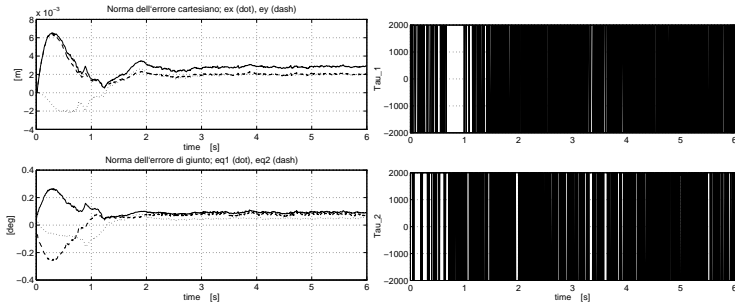
$$K = 2000$$

$$T_s = 0.001 \text{ s}$$





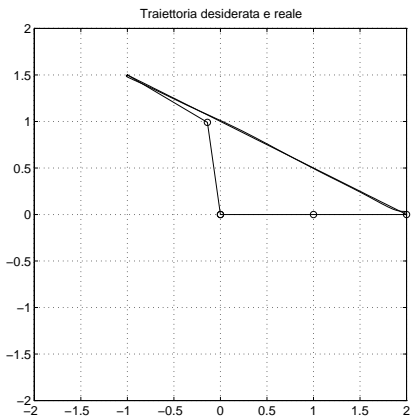
# Esempio di controllo a struttura variabile



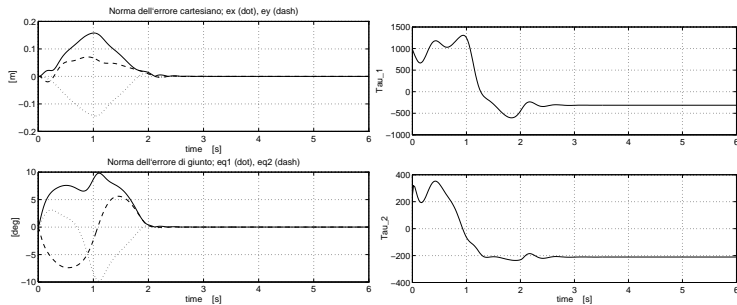
# Esempio di controllo PD + compensazione di gravità

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} q_{d,1} \\ q_{d,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$



# Esempio di controllo PD + compensazione di gravità



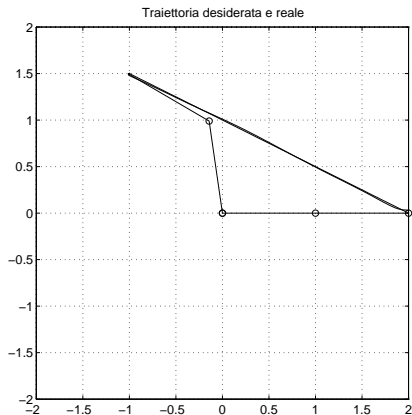
# Esempio di controllo PD + compensazione di gravità

Con coppie di disturbo  $\tau_{dis} = [80, 80]^T$ ,  $t = 3s$ :

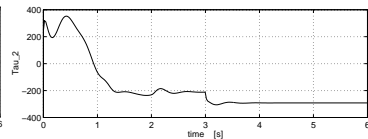
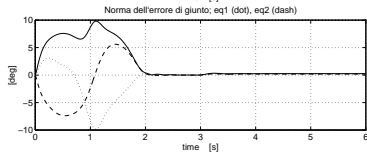
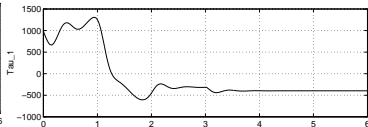
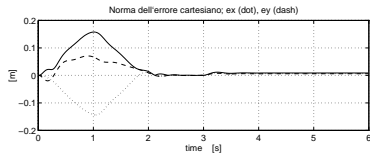
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} q_{d,1} \\ q_{d,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

errore finale  $\neq 0$



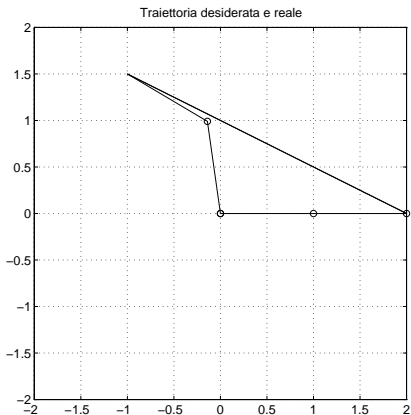
# Esempio di controllo PD + compensazione di gravità



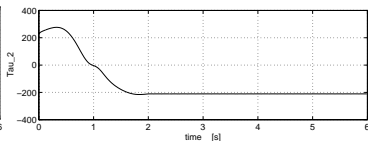
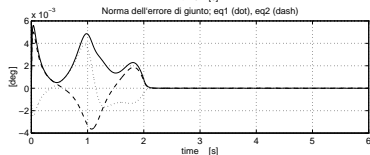
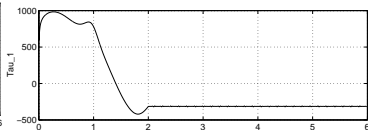
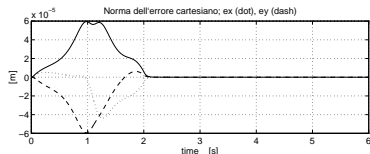
# Esempio di controllo a dinamica inversa (caso ideale)

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$



# Esempio di controllo a dinamica inversa (caso ideale)



## Esempio di controllo a dinamica inversa (inc. param.)

Parametri veri:

$$\alpha_1 = m_1 a_{C1} = 25$$

$$\alpha_2 = m_1 a_{C1}^2 + \tilde{l}_1 = 22.5$$

$$\alpha_3 = m_2 = 50$$

$$\alpha_4 = m_2 a_{C2} = 25$$

$$\alpha_5 = m_2 a_{C2}^2 + \tilde{l}_2 = 22.5$$

Valori utilizzati per i parametri:

$$\hat{\alpha}_1 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_2 = 20.25$$

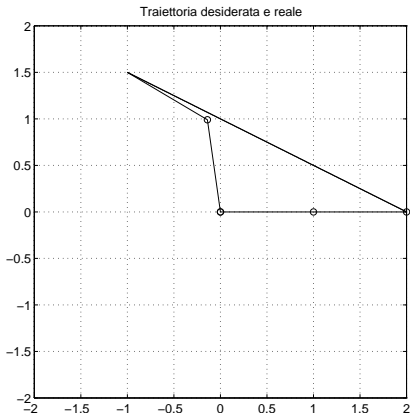
$$\hat{\alpha}_3 = 45$$

$$\hat{\alpha}_4 = 22.5$$

$$\hat{\alpha}_5 = 20.25$$

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$$





# Esempio di controllo a dinamica inversa (inc. param.)

