

Testi d'Esame

Compito 1

Un'azienda di trasporto deve caricare m camion $\{1, \dots, m\}$ in modo da servire giornalmente un dato insieme di clienti. Nei camion possono essere caricati n pallet $\{1, \dots, n\}$, il j -esimo dei quali ha un peso w_j ed un profitto p_j . Per l' i -esimo camion il costo fisso di utilizzazione è pari a c_i e la capacità in peso pari a b_i . Si vogliono caricare alcuni dei pallet sui camion in modo da massimizzare la somma dei profitti dei pallet caricati meno la somma dei costi dei camion utilizzati.

1. Si determini un modello ILP di tipo “descrittivo” in cui vi siano, tra le altre, variabili binarie che dicano se un certo pallet è caricato su un certo camion;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del modello definito al punto 1;
3. Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile caricamento di pallet in ogni camion;
4. Per il modello del punto 3, si definisca un modello ILP per il problema della generazione di colonne per le variabili associate al generico camion i ;
5. Si discutano le semplificazioni che si avrebbero ai due punti precedenti qualora i costi e le capacità di tutti i camion fossero uguali.

Compito 2

Un rappresentante deve recarsi da una città ad un'altra massimizzando la differenza tra profitti relativi alla visita di altre città e costi relativi alla percorrenza di tratti stradali, con il vincolo che la durata complessiva del viaggio sia non superiore ad un dato tempo T . La rete stradale è descritta da un grafo orientato completo $G = (V, A)$ con n vertici $V = \{1, \dots, n\}$, dove 1 rappresenta la città di partenza ed n quella di arrivo, ed in cui, per ogni arco $(i, j) \in A$, è specificato il tempo di percorrenza $t_{(i,j)}$ ed il costo di percorrenza $c_{(i,j)}$ e, per ogni vertice $i \in V \setminus \{1, n\}$, è specificato il profitto p_i che si ottiene visitandolo.

1. Si determini un modello ILP per il problema;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del modello definito al punto 1;
3. Per il modello del punto 1, si definisca un modello ILP per il problema della separazione di eventuali vincoli il cui numero sia esponenziale in n ;
4. Si definisca un algoritmo euristico per il problema di separazione del punto 3 guidato dal rilassamento continuo del modello definito in tale punto;
5. Si consideri la variante del problema in cui si debbano determinare m viaggi, anziché uno solo, tutti dal vertice 1 al vertice n e di durata non superiore a T . Ogni vertice in $V \setminus \{1, n\}$ può essere visitato al massimo da un viaggio, ottenendo un profitto p_i . Si illustrino un modello ILP descrittivo ed un modello ILP con una variabile per ogni possibile viaggio, unitamente ad un modello ILP per la generazione di colonne per il secondo.

Compito 3

In un reparto di lavorazione occorre decidere l'assegnazione di n lavori $\{1, \dots, n\}$ ad m macchine $\{1, \dots, m\}$. In particolare, i vincoli di produzione richiedono che ogni lavoro j sia eseguito da p_j macchine ed ogni macchina i esegua al massimo q_i lavori. Supponendo noto il costo c_{ij} dell'assegnazione del lavoro i alla macchina j , si vuole determinare l'assegnazione ammissibile di costo complessivo minimo.

1. Si determini un modello ILP di tipo “descrittivo” con variabili binarie che dicano se un certo lavoro è eseguito da una certa macchina;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del modello definito al punto 1;
3. Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile assegnamento di lavori ad ogni macchina;
4. Per il modello del punto 3, si definisca un modello ILP per il problema della generazione di colonne per le variabili associate alla generica macchina i , indicando anche un semplice algoritmo per risolvere tale problema.
5. Si discutano i cambiamenti alle risposte ai punti precedenti per la variante in cui ciascun lavoro j debba essere eseguito da una sola macchina (cioè $p_j = 1$), abbia tempo di esecuzione t_{ij} su ciascuna macchina i , ed ogni macchina i , anzichè poter eseguire al massimo q_i lavori, possa lavorare per un tempo non superiore a T_i .

Compito 4

Una società di servizi deve organizzare dei corsi di lingua inglese per i suoi dipendenti, identificati dall'insieme $\{1, \dots, n\}$. Dato che il livello iniziale di conoscenza della lingua dei dipendenti è molto variabile, si è deciso di suddividerli in classi, con l'obiettivo di minimizzare il numero di classi ed il vincolo che ciascuna classe contenga al più k dipendenti. Inoltre, è stata formata una lista L di coppie di dipendenti imponendo il vincolo ulteriore che, per ogni coppia nella lista, i due dipendenti corrispondenti non possono andare nella stessa classe in quanto i loro livelli di conoscenza sono significativamente diversi.

1. Si determinino uno o più modelli ILP di tipo “descrittivo” con variabili binarie che dicano se un certo impiegato è assegnato ad una certa classe, discutendo brevemente procedure di separazione qualora il numero di vincoli risultasse esponenziale in n ;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del modello definito al punto 1;
3. Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile assegnamento di impiegati ad una classe;
4. Per il modello del punto 3, si definisca un modello ILP per il problema della generazione di colonne;
5. Si discutano possibili modelli e/o metodi di soluzione della variante in cui, una volta stabilito il minimo numero di classi necessarie, si vuole minimizzare la differenza tra il numero di impiegati nella classe più numerosa e quello nella classe meno numerosa.

Compito 5

Nel progetto di un database relazionale sono note in precedenza le query (richieste) che gli utenti formuleranno al database, e si deve prendere in considerazione la costruzione di indici per velocizzare il tempo di esecuzione delle query. Si indichino con $\{1, \dots, n\}$ l'insieme degli indici che possono essere costruiti e con $\{1, \dots, m\}$ l'insieme delle query. A ciascuna query i si deve rispondere tramite un indice j scelto tra quelli costruiti, in un tempo t_{ij} . Inoltre, l'indice j , se costruito, richiede un tempo di manutenzione u_j ed occupa uno spazio su disco d_j . Si vuole decidere quale insieme di indici costruire e con quale indice rispondere ad ogni query in modo da minimizzare la somma dei tempi di risposta e manutenzione e da garantire che lo spazio occupato su disco dagli indici costruiti non superi b .

1. Si determini un modello ILP di tipo “descrittivo” contenente tra le altre variabili binarie che dicano se ad una certa query si risponde tramite un certo indice;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo di uno dei modelli definiti al punto 1;
3. Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile assegnamento di query ad ogni indice;
4. Per il modello del punto 3, si definisca un modello ILP per il problema della generazione di colonne per le variabili associate al generico indice j ;
5. Si discutano i cambiamenti ai modelli precedenti nel caso in cui ogni query i abbia anche una frequenza f_i , e la somma delle frequenze delle query associate ad un indice j non possa essere superiore a g_j .

Compito 6

Un'azienda di trasporti deve organizzare le consegne ad un insieme $\{1, \dots, n\}$ di clienti localizzati in una rete stradale, rappresentata da un grafo orientato completo orientato $G = (V, A)$, con $V = \{1, \dots, n\}$. Per motivi organizzativi, l'azienda decide di suddividere i clienti determinando un insieme di m circuiti disgiunti, ciascuno contenente esattamente k clienti (si supponga $n = m \cdot k$), in modo che ogni cliente sia contenuto in esattamente un circuito, e *senza* un deposito comune, in quanto si vogliono utilizzare m veicoli ciascuno con base presso uno dei clienti serviti. Indicando con c_{ij} il costo dell'arco (i, j) , l'obiettivo è la minimizzazione del costo complessivo dei circuiti.

1. Si determini un modello ILP per il problema tramite variabili con uno degli indici riferito al circuito di appartenenza;
2. Si definisca un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del modello definito al punto 1;
3. Per il modello del punto 1, si definisca un modello ILP per il problema della separazione di eventuali vincoli il cui numero sia esponenziale in n e relativi al generico circuito h ;
4. Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile circuito;
5. Per il modello del punto 4, si definisca un modello ILP per il problema della generazione di colonne.