

# Methoden zur Reduktion der Rechenzeit linearer Optimierungsmodelle in der Energiewirtschaft – Eine Performance-Analyse

Karl-Kiên CAO\*<sup>1</sup>, Ambros GLEIXNER<sup>2</sup>, Matthias MILTENBERGER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Technische Thermodynamik  
Wankelstr. 5, 70563 Stuttgart, +49 711 6862-459, karl-kien.cao@dlr.de, www.dlr.de/tt

<sup>2</sup>Zuse Institut Berlin,  
Takustraße 7, 14195 Berlin, +49 308 4185-169, gleixner@zib.de, www.zib.de

**Kurzfassung:** Dieser Beitrag stellt mögliche Ansätze zur Reduktion der Rechenzeit von linearen Optimierungsproblemen mit energiewirtschaftlichem Anwendungshintergrund vor. Diese Ansätze bilden im Allgemeinen die Grundlage für konzeptionelle Strategien zur Beschleunigung von Energiesystemmodellen. Zu den einfachsten Beschleunigungsstrategien zählt die Verkleinerung der Modelldimensionen, was beispielsweise durch Ändern der zeitlichen, räumlichen oder technologischen Auflösung eines Energiesystemmodells erreicht werden kann. Diese Strategien sind zwar häufig ein Teil der Methodik in der Energiesystemanalyse, systematische Benchmarks zur Bewertung ihrer Effektivität werden jedoch meist nicht durchgeführt. Die vorliegende Arbeit adressiert genau diesen Sachverhalt. Hierzu werden Modellinstanzen des Modells REMix in verschiedenen Größenordnungen mittels einer Performance-Benchmark-Analyse untersucht. Die Ergebnisse legen zum einen den Schluss nahe, dass verkürzte Betrachtungszeiträume das größte Potential unter den hier analysierten Strategien zur Reduktion von Rechenzeit bieten. Zum anderen empfiehlt sich die Verwendung des Barrier-Lösungsverfahrens mit multiplen Threads unter Vernachlässigung des Cross-Over.

**Keywords:** Energiesystemmodellierung, lineare Optimierung, Benchmarking, Rechenzeit

## 1 Motivation

Liberalisierung und zunehmende Dezentralisierung in der Energiewirtschaft führen dazu, dass Energieversorgungssysteme stetig komplexer werden. Vor dem Hintergrund der angestrebten Schaffung gemeinsamer Energiebinnenmärkte und der fortschreitenden Transformation des Energiesystems hin zu einer verstärkten Sektor-Kopplung und hohen Stromversorgungsanteilen aus dezentralen Erzeugungsanlagen kann von einer Fortführung dieses Trends ausgegangen werden. In diesem Zusammenhang stehende, neue energiewirtschaftliche und energiepolitische Fragestellungen werden häufig mit Hilfe von Optimierungsmodellen untersucht. Die zunehmende Komplexität des zu modellierenden Systems führt allerdings dazu, dass heutige Energiesystemmodelle an ihre Grenzen in Bezug auf die vertretbare Rechenzeit<sup>1</sup> stoßen. Denn die sich ergebenden linearen Optimierungsprobleme (OPs) erreichen Größenordnungen, die zum Zeitpunkt der Entwicklung der verwendeten Lösungsverfahren keine anwendungsnahe Relevanz hatten. Die bestehenden und insbesondere zukünftigen Problemstellungen der Energiesystemanalyse können somit nur noch bedingt adressiert werden.

In inhaltlichen Studien im Bereich der Energiesystemanalyse wird dieser Herausforderung mit unterschiedlichen Strategien begegnet. Dabei steht allerdings oft der Implementierungs-

---

<sup>1</sup> Mit „Rechenzeit“ wird hier die Zeitdauer bezeichnet, welche eine Löser-Software zum Lösen eines Optimierungsproblems benötigt.

aufwand und nicht die Effektivität bei der Auswahl einer Beschleunigungsstrategie im Vordergrund. Zudem führt die Heterogenität dieser Strategien dazu, dass die Vergleichbarkeit der modellbasierten Forschungsergebnisse erschwert wird und das tatsächliche Verhältnis von Implementierungsaufwand zu erzielbarer Performancesteigerung in der Regel unbekannt ist. Da sich die eingesetzten Modelle in wesentlichen Charakteristika (z.B. hinsichtlich grundlegender Formulierung der OPs oder verwendeter Löser-Softwarepakete) ähnlich sind, kann allerdings davon ausgegangen werden, dass effektive Beschleunigungsstrategien für Energiesystemmodelle prinzipiell untereinander übertragbar sind.

Im Folgenden wird daher ein erster Schritt zu einer systematischen Bewertung von solchen Strategien aufgezeigt. Auf die Charakterisierung von Optimierungsmodellen, welche unter dem Sammelbegriff „Optimierende Energiesystemmodelle (OESM)“ zusammengefasst werden, folgen eine Kategorisierung und eine qualitative Beschreibung bekannter Ansätze zur Verkürzung der Rechenzeit in OESM. Für eine Auswahl der erläuterten Beschleunigungsstrategien zeigen Kapitel 3 und 4 die methodische Vorgehensweise und Ergebnisse eines durchgeführten Performance-Benchmarks auf. Kapitel 5 gibt abschließend einen Ausblick auf weiterführende Möglichkeiten zur Senkung der Rechenzeit in OESM.

## 2 Charakteristika mathematischer Optimierungsprobleme der Energiesystemanalyse

Die Energiesystemanalyse umfasst ein breites Spektrum von Fragestellungen, welche mit Optimierungsproblemen zur Entscheidungsfindung adressiert werden. Hierzu zählt unter anderem das Unit Commitment- bzw. Economic Dispatch-Problem, welches sowohl in der Einsatzplanung von Kraftwerksbetreibern [1], aber auch in Fundamentalanalysen von Strommärkten [2] oder bei der Validierung normativer Energieszenarien Anwendung [3] findet. In Kombination mit unterschiedlichen Varianten der Lastflussberechnung für das Stromübertragungsnetz finden sich weitere Anwendungen zur Optimierung des Netzbetriebs - Optimal Power Flow-Problem – [4] oder auch in der Kraftwerks- und Netzausbauplanung [5]. Aufgrund der zunehmenden Relevanz erneuerbarer Energieträger im Energiesystem werden auch häufig Szenarioanalysen für die Politikberatung, welche Strategien wie den Einsatz von Stromspeichern zur Integration fluktuierender Stromerzeugungstechnologien in das Versorgungssystem bewerten, als OPs formuliert [6], [7].

Eine wesentliche Gemeinsamkeit von komplexen OESM ist in der Regel die Verwendung einer kostenbasierten Zielfunktion (1) mit einer Leistungsbilanzgleichung (2) als Nebenbedingung. Deren linke Seite wird, wie bei einer Vielzahl weiterer, problemspezifischer Ungleichungen, von zeit-, raum- und technologieabhängigen Variablen bestimmt.

$$\text{Zielfunktion:} \quad \text{Minimiere:} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{t,n} p_{t,n,m} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Leistungsbilanzgleichung:} \quad & \sum_{m \in M} (p_{t,n,m} + q_{t,n,m}) = d_{t,n} \quad \text{für alle } t, n \\ & p_{t,n,m} \geq 0 \\ & q_{t,n,m} \geq 0 \\ & n = 1 \dots N; t = 1 \dots T; m = 1 \dots M \end{aligned} \quad (2)$$

wobei:

c:	Spezifische Kosten
p:	Entscheidungsvariable der Leistungsbereitstellung
q:	Entscheidungsvariable des Leistungsbezugs
d:	Leistungsnachfrage
m:	Technologieindex
n:	Modellknotenindex <sup>2</sup>
t:	Zeitindex

Durch die Formulierung als ein integriertes OP werden somit die drei Dimensionen Zeit, Raum und Technologie miteinander gekoppelt. Eine Möglichkeit zur Charakterisierung von OESM lässt sich folgerichtig, wie in Tabelle 1 dargestellt, anhand der Unterscheidung dieser drei Dimensionen vornehmen.

Je nach Untersuchungsschwerpunkt sind diese drei Dimensionen in der Energiesystemanalyse unterschiedlich stark ausgeprägt bzw. aufgelöst. So sind beispielsweise auf der einen Seite OESM mit dem Ziel einer kostenoptimalen Netzausbauplanung stark räumlich differenziert, während die zeitliche Dimension durch die Auswahl weniger Worst-Case-Szenarien (z.B. in Form von Snapshots) eine untergeordnete Rolle spielt. Aufgrund festzulegender Planungshorizonte oder technologischer Entwicklungsperspektiven kann sie aber dennoch nicht vollständig vernachlässigt werden [8]. Auf der anderen Seite gewinnt die zeitliche Auflösung an Bedeutung, sobald Untersuchungen zur Bestimmung des Flexibilitätsbedarfs im zukünftigen Energiesystem im Fokus stehen. Unter anderem systemanalytisch motivierte Modelle (vgl. Beispiel in Tabelle 1) streben hier die Berücksichtigung einer großen Bandbreite an Technologien an, um beispielsweise die Auswirkung einer verstärkten Kopplung des Strom- und Wärmesektors zu eruieren.

Dimension	Ausprägung	Beispiel
<b>Zeit</b>	Zeitliche Auflösung	jede Stunde innerhalb eines Jahres
	Zeithorizont	2020 bis 2030
<b>Raum</b>	Geographische Auflösung	Nationalstaaten
	Räumliche Abgrenzung	Europäische Union
<b>Technologie</b>	Technologisches Detail	Berücksichtigung von Wirkungsgraden und maximalen Erzeugungskapazitäten
	Technologisches Spektrum	Strom- und Wärmeerzeugungstechnologien, Batteriespeicher, Pumpspeicher, Warmwasserspeicher, Stromtransportnetz

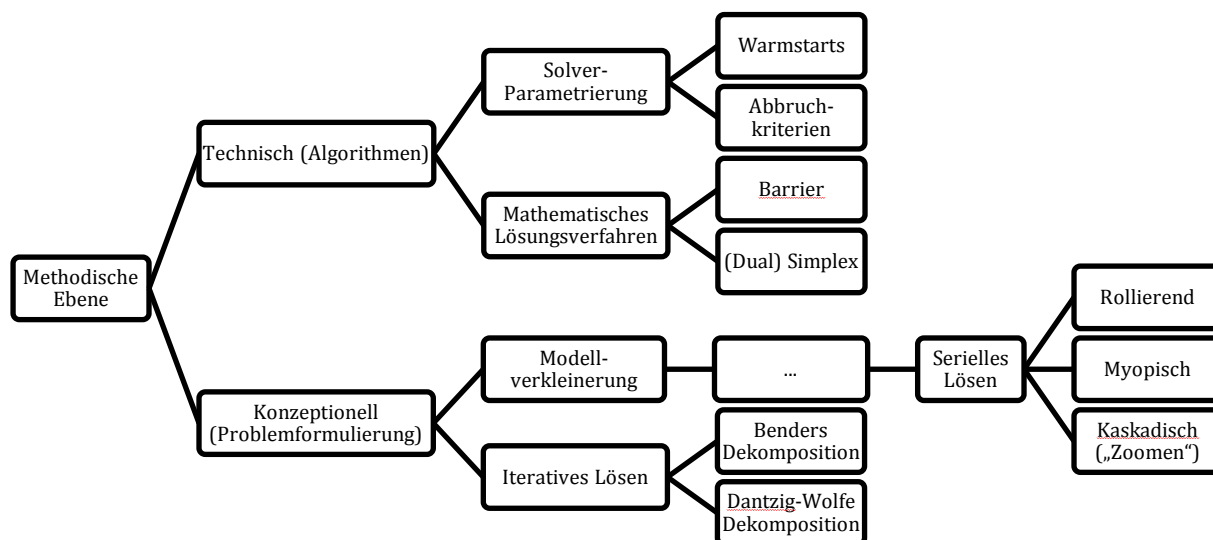
**Tabelle 1:** Charakterisierung optimierender Energiesystemmodelle.

### 3 Beschleunigungsstrategien

Im Folgenden werden zwei methodische Ebenen zur Reduktion der Rechenzeit in linearen, optimierenden Energiesystemmodellen unterschieden (Abbildung 1). Dies ist zum einen die technische Ebene, welche vornehmlich im Bereich der Lösungs-Algorithmen angesiedelt ist. Sie umfasst sowohl den Bereich der Solver-Parametrierung, als auch das Verfahren zur Bestimmung des Optimums. Zum anderen bezieht sich die konzeptionelle Ebene auf die Möglichkeiten alternativer mathematischer Problemformulierung oder Parametrierungen des ursprünglichen linearen Optimierungsproblems (LPs). Da vorwiegend diese beiden Faktoren ein LP als Energiesystemmodell charakterisieren, beschreiben die folgenden Kapitel vor allem konzeptionelle Beschleunigungsstrategien.

---

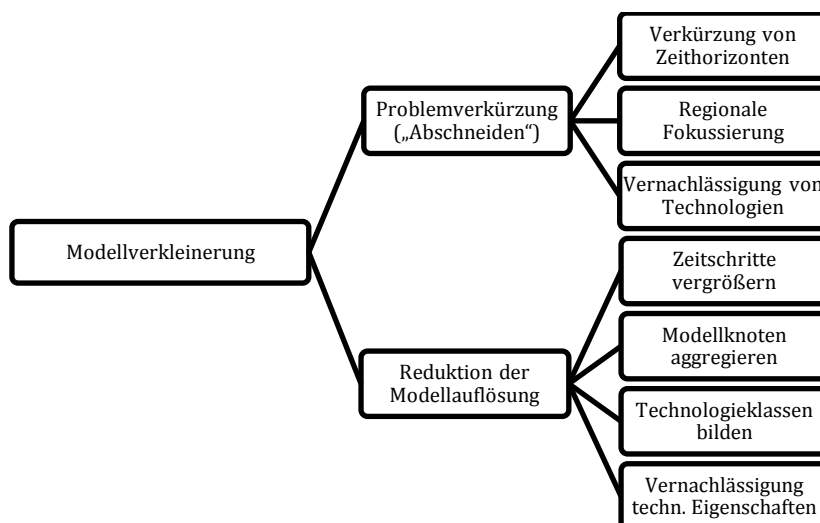
<sup>2</sup> Als Modellknoten werden hier diskrete räumliche Punkte bezeichnet. Sie unterscheiden sich dadurch, dass sie die Eigenschaften (z.B. Energiebedarf und installierte Erzeugungleistung) unterschiedlicher geographischer Regionen aggregiert im Modell abbilden.



**Abbildung 1:** Übersicht möglicher technischer und konzeptioneller Beschleunigungsstrategien für Energiesystemmodelle. Eine detailliertere Darstellung der hier aufgeführten Modellverkleinerungsstrategien zeigt Abbildung 2.

### 3.1 Modellverkleinerung

Die Modellverkleinerung stellt eine vergleichsweise aufwandsarme Beschleunigungsstrategie dar. Sie ist im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet, dass lediglich die Datenmenge und die damit verbundene Komplexität des Optimierungsmodells reduziert werden. Dies wird dadurch erreicht, dass eine oder mehrere der drei Dimensionen (Zeit, Raum, Technologie) verkleinert werden. In Abbildung 2 ist eine detaillierte Auflistung dieser Möglichkeiten zur Modellverkleinerung darstellt. Dabei werden entweder die Modellgrenzen verändert („Abschneiden“) und die Modellgenauigkeit bleibt konstant oder im umgekehrten Fall wird die Modellauflösung reduziert. Zu letzterem zählen unter anderem die Aggregation von Modellknoten, das bilden von Technologieklassen oder die Vergrößerung von Zeitschritten.



**Abbildung 2:** Auf Modellverkleinerung basierende Beschleunigungsstrategien zur Anwendung in Energiesystemmodellen.

Die sieben grundlegenden Beschleunigungsansätze aus Abbildung 2 sind nahezu beliebig miteinander kombinierbar. Wie zudem aus Abbildung 1 ersichtlich ist, können davon auch „Serielle Lösungskonzepte“ abgeleitet werden. Deren Kennzeichen ist, dass sie anstelle ei-

nes einzelnen LPs nacheinander mehrere verkleinerte LPs lösen, wobei Teile des Ergebnisses eines gelösten LPs als Eingabedaten für das jeweilig nachfolgende LP verwendet werden. Zwar bieten diese heuristischen Verfahren eine Möglichkeit die in der Realität begrenzte Daten- und Informationslage besser widerzuspiegeln (z.B. im Gegensatz zur Annahme eines „Perfect Foresight“). Das Auffinden einer optimalen Lösung garantieren sie jedoch nicht. Typische Vertreter sind rollierende Verfahren für die Einsatz- und Ausbauplanung [9], [10].

## 3.2 Modellzerlegung

### 3.2.1 Herausforderungen

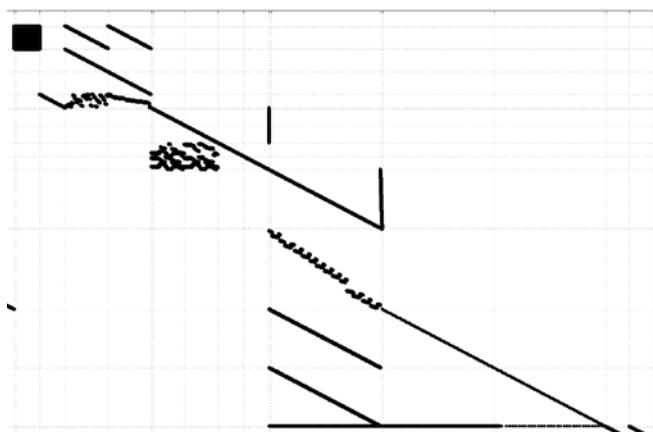
Ohne Änderungen an der Problemformulierung bzw. am Lösungsverfahren vornehmen zu müssen, kann die Rechenzeit von Optimierungsproblemen im einfachsten Fall durch den Einsatz schnellerer Hardware gesenkt werden. Allerdings können momentan keine signifikanten Rechenzeitreduktionen mittels schnellerer Einzelprozessoren in der Zukunft erwartet werden [11]. Vielmehr erfordern selbst hardware-orientierte Strategien zur Senkung von Rechenzeiten eine massive Parallelisierung. Diese kann einerseits auf technischer Ebene (wie beispielsweise beim Barrier-Verfahren) oder auf konzeptioneller Ebene angestrebt werden.

Im Hinblick auf letzteres ergibt sich daher die Forderung an die Energiesystemmodellierung nach einer Zerlegung des integrierten LPs in Teilprobleme, welche größtenteils unabhängig voneinander prozessiert werden können. Eine Herausforderung dabei ist, dass neben der Kopplung der drei Dimensionen Zeit, Raum und Technologie in einem OESM, auch die Elemente innerhalb dieser Dimensionen nicht voneinander unabhängig sind. Kopplungen von Zeitschritten untereinander ergeben sich beispielsweise durch maximal zulässige Gradienten der Stromerzeugung eines Kraftwerks oder die zeitliche Verschiebung von Stromerzeugung und –verbrauch durch den Einsatz von Speichern. Ebenso bewirkt die Berücksichtigung von Netzen, dass einzelne Modellknoten durch die Möglichkeit des Importierens und Exportierens von elektrischer Leistung voneinander abhängig sind.

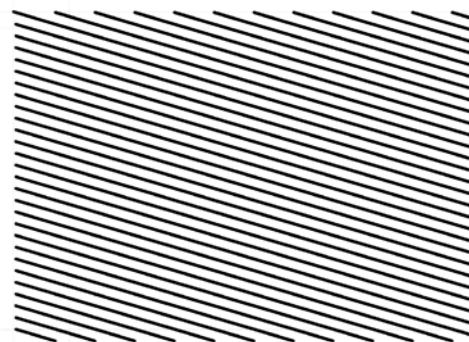
Mathematisch gekennzeichnet sind diese Kopplungen durch so genannte komplizierte Variablen, welche in einer Vielzahl von Nebenbedingungen auftreten bzw. komplizierte Nebenbedingungen welche eine Vielzahl von Variablen miteinander verknüpfen. Beides führt dazu, dass eine unabhängige, parallelisierte Lösung des LPs erschwert wird. Abbildung 3 zeigt die Matrixstruktur eines LPs, in der die Nicht-Null-Elemente jeweils von einem schwarzen Pixel repräsentiert werden. Die gedachte x-Achse spannt den Raum aller Variablen, die gedachte y-Achse den Raum aller Nebenbedingungen des LPs auf. Komplizierte Variablen bzw. Nebenbedingungen lassen sich darin grafisch identifizieren, insofern entlang der Waagerechten oder Senkrechten mehrere Pixel schwarz eingefärbt sind. Eine quasi durchgezogene horizontale Linie repräsentiert folglich eine starke Kopplung mehrerer (in der Darstellung benachbarter) Variablen durch eine Nebenbedingung.

Ferner ist in Abbildung 4 ein höher aufgelöster, besonders dicht besetzter Ausschnitt der Matrixstruktur aus Abbildung 3 zu sehen. Bei den hier zugrunde liegenden Variablen und Nebenbedingungen handelt es sich um jene, die durch die DC-Approximation [12] entstehen, welche zur Modellierung von Drehstromübertragungsnetzen in einer Vielzahl von OESM eingesetzt wird.

Für ein parallelisiertes Prozessieren der LPs in der Energiesystemmodellierung müssen folglich Methoden zum Umgang mit solchen Strukturen gefunden werden.



**Abbildung 3:** Ausschnitt der Matrixstruktur eines linearen Optimierungsproblems (LP) mit komplizierten Variablen und Nebenbedingungen.



**Abbildung 4:** Höher aufgelöster Ausschnitt des dicht besetzten Bereichs in der in Abbildung 3 dargestellten Matrixstruktur.

### 3.2.2 Dekompositionsansätze

Ein bekanntes Instrument zur Verringerung der Rechenzeit in OPs sind Dekompositionsansätze. Dabei wird ein OP in ein Master- und Subprobleme zerlegt. Hinsichtlich der Matrixstruktur des OP bedeutet dies eine Zerlegung in einzelne Blöcke. Im Idealfall können dadurch Blockstrukturen mit komplizierten Variablen oder Nebenbedingungen (wie in Abbildung 4) aus den Subproblemen isoliert werden, wodurch diese gegebenenfalls unabhängig voneinander, also parallel, lösbar werden. Allerdings erfordert dies ein iteratives Lösen des Masters und der Subprobleme.

In der Energiesystemmodellierung ist vor allem die Benders Dekomposition [13] eine häufig verwendete Methodik. Dabei findet in der Regel eine Trennung des ursprünglichen OPs in ein gemischt ganzzahliges Optimierungsproblem (MIP) und ein LP statt. Während ersteres ein Modell zur Ausbauplanung darstellt, wird mit letzterem der Systembetrieb modelliert [14]. Bezogen auf das Optimal Power Flow Problem findet die Benders Dekomposition Anwendung, indem Kraftwerkseinsatz und Lastflussberechnung voneinander getrennt werden [15].

## 4 Methodik

Die hier vorgestellte Methodik basiert auf zwei Schritten. Dies ist einerseits die Definition von Modellinstanzen, welche so skaliert werden, dass ein Großteil der in 3.1 vorgestellten konzeptionellen Beschleunigungsstrategien damit abgedeckt wird. Andererseits werden diese Modellinstanzen im zweiten Schritt gelöst (Performance-Benchmarking), wobei zusätzlich die Auswirkung von drei technischen Beschleunigungsstrategien auf die Rechenzeit bewertet wird.

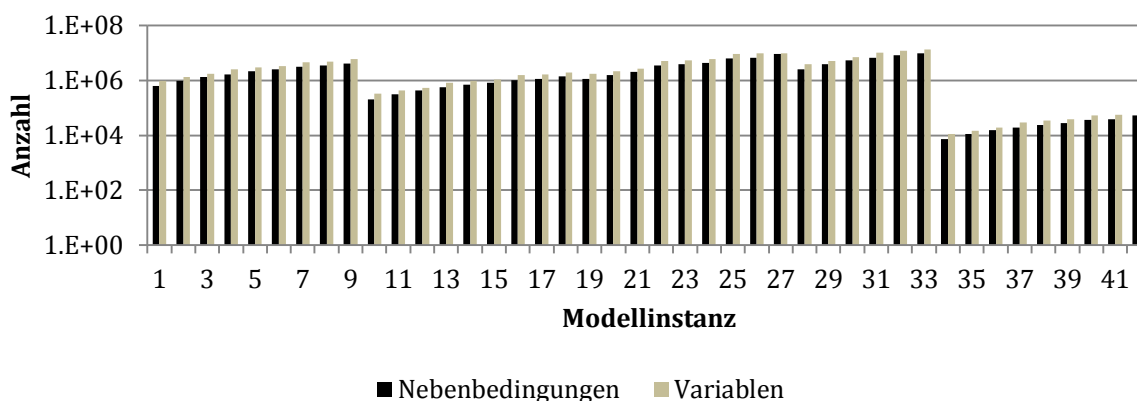
### 4.1 Modellinstanzen

Für die Erstellung der Modellinstanzen wird das in der Modellierungssprache GAMS formulierte Energiesystemmodell REMix [16] eingesetzt, mit dem basierend auf einer Modellparametrierung aus [17] eine Auswahl von LP-Instanzen verschiedener Größenordnungen generiert wird. Diese unterscheiden sich in fünf Gesichtspunkten, worunter die folgenden vier zu den in 3.1 vorgestellten konzeptionellen Beschleunigungsstrategien zählen: Variation der Anzahl der Modellknoten, Variation der Anzahl berücksichtigter Technologien, Variation der Zeitschrittlänge und Variation der Zeitspanne. Ferner wird unterschieden inwieweit die Ausbauplanung für bestimmte Technologien für die jeweiligen Instanzen zulässig ist.

Diese fünf Modelleigenschaften werden jeweils skaliert und in die Größenklassen „min“, „std“ und „max“ eingeteilt. Die konkrete Zuordnung von Modelleigenschaften und Größenklassen kann Tabelle 2 entnommen werden. Hierin bedeuten mit einem „+“ gekennzeichnete Einträge bei Technologien und Ausbauplanung, dass die aufgelisteten Einträge zusätzlich zu den Einträgen der jeweils kleineren Größenklasse hinzukommen. Durch die Kombination der Größenklassen und Modelleigenschaften wird eine Anzahl von 42 LP-Modellinstanzen erstellt, für welche in Abbildung 5 die Anzahl<sup>3</sup> der Variablen und Nebenbedingungen dargestellt ist.

Größenklasse	Zeitschritte	Zeitspanne	Modellknoten	Technologien	Ausbauplanung
<b>Min</b>	4h	1 Tag	6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konventionelle Kraftwerke</li> <li>• Erneuerbare Energien</li> <li>• Pumpspeicher</li> <li>• Speicherwasser</li> <li>• DC-Lastfluss</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gasturbinen</li> </ul>
<b>Std</b>	1h	1 Monat	6	<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Kraft-Wärme-Kopplung</li> <li>+ Wärmespeicher</li> <li>+ Elektrische Boiler und Wärmepumpen</li> <li>+ Elektrolyseure</li> <li>+ Elektro- und Wasserstoffmobilität</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Übertragungskapazitäten</li> </ul>
<b>Max</b>	1h	1 Jahr	16	<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Kraft-Wärme-Kopplung (detailliert)</li> <li>+ CSP-Kraftwerke</li> <li>+ Solarthermie</li> <li>+ Demand Side Management</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Batteriespeicher</li> <li>+ Kraft-Wärme-Kopplung</li> <li>+ Erneuerbare Energien</li> </ul>

**Tabelle 2:** Definition unterschiedlicher Größenklassen für die Modelleigenschaften Zeitschritte, Zeitspanne, Modellknoten- und Technologieanzahl sowie Grad der Ausbauplanung.



**Abbildung 5:** Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen in den 42 definierten Modellinstanzen.

## 4.2 Solver und Solverparametrierung

Für das Performance-Benchmarking werden die 42 LP-Modellinstanzen auf einer Shared-Memory Rechenumgebung<sup>4</sup> mit unterschiedlichen Solvern und Solverparametrierungen gelöst und die Zeitdauer bis zur Ausgabe einer Optimalen Lösung gemessen. Die Vorgehensweise kann dabei in drei aufeinanderfolgende Teilschritte unterschieden werden:

1. Vergleich der Lösungsalgorithmen: Dual Simplex, Barrier (mit und ohne Cross-Over)

<sup>3</sup> Hierbei handelt es sich konkret um die jeweilige Anzahl von Variablen und Nebenbedingungen, die sich nach dem Vorprozessieren durch den Solver (hier CPLEX) ergibt.

<sup>4</sup> Intel Xeon CPU X5672 3.20GHz, Quad-core, 48 GB Arbeitsspeicher Ubuntu Linux 14.04.1 LTS, 64 bit

2. Testen unterschiedlicher Löser-Implementierungen: CPLEX 12.6.0, Gurobi 5.6.3, MOSEK 7.0.0.114, Xpress 26.01.04
3. Bewertung des Speed-Up mittels Vergleich der Rechenzeit beim sequentiellen Lösen gegenüber Multi-Threading mit 4 bzw. 8 Threads auf einer Teilmenge der Modellinstanzen

## 5 Ergebnisse und Ergebnisdiskussion

Beim Lösen aller LP-Instanzen zeigt sich, dass mit der verwendeten Rechenumgebung bei lediglich 33 der 42 Modellinstanzen ein Optimum gefunden werden kann. Grund dafür ist unter anderem, dass beim Lösen der größten Modellinstanzen (26-34) der Arbeitsspeicherbedarf die gegebenen 48 GB überschreitet. Außerdem zeigt die Untersuchung, dass in Einzelfällen je nach verwendeter Löser-Software und deren Parametrierung keine optimale Lösung gefunden werden kann. Dementsprechend gelten die im Folgenden dargestellten Ergebnisse jeweils nur für eine Auswahl der vordefinierten Modellinstanzen.

### 5.1 Lösungsalgorithmus

Beim Vergleich der unterschiedlichen Lösungsalgorithmen wird schnell deutlich, dass das Simplex- verfahren mit dem Barrier-Verfahren in keinem Fall frühzeitiger zu einer optimalen Lösung gelangt. Beim so genannten Cross-Over handelt es sich um eine Art sequentiellen Simplex-Algorithmus, welcher sich an das Barrier-Verfahren anschließt. Je nach eingesetzter Löser-Software erhöht sich dadurch die Rechenzeit um das 3,3 bis 8-fache. Im weiteren Vorgehen werden daher Ergebnisse für den Barrier-Algorithmus ohne Cross-Over vorgestellt.

### 5.2 Löser-Software

Der Performance-Benchmark unterschiedlicher Solver basiert auf einer Bewertung der Rechenzeit für sequentielle Rechenläufe mit CPLEX, Gurobi und XPRESS. CPLEX zeigt dabei insgesamt die stabilste und schnellste Performance. Auf einigen LP-Instanzen ergeben sich zwar mit Gurobi noch geringere Rechenzeiten, allerdings sind dort öfter leichte Verletzungen der Optimalitätsbedingungen zu beobachten. Für den nächsten Analyseschritt wird daher der CPLEX-Solver verwendet.

Für die Interpretation der Ergebnisse gilt es zu beachten, dass der durchgeführte Vergleich lediglich ein grobes Bild liefert. Zum einen da sich die Implementierungen der Löser stetig weiterentwickeln, sodass Benchmarks mit zukünftigen Software-Releases zu anderen Ergebnissen kommen können. Zum anderen bietet sich durch systematisches Parameter-Tuning die Möglichkeit die Performance jedes einzelnen Solvers zu optimieren, worauf in der vorliegenden Arbeit allerdings verzichtet ist.

### 5.3 Skalierung der Rechenzeit durch Multi-Threading

Ausgehend von den vorangegangenen Analysen zeigt Abbildung 6 die Rechenzeit für das in CPLEX implementierte Barrier-Verfahren für einen, vier und acht Threads, wobei sich ein mittlerer Beschleunigungsfaktor zwischen 2 und 3 (4 Threads) bzw. zwischen 3 und 4 (8 Threads) ergibt. Bemerkenswert ist dabei, dass gleichzeitig keine Erhöhung des Spitzen-Arbeitsspeicherbedarfs durch das Multi-Threading zu beobachten ist.



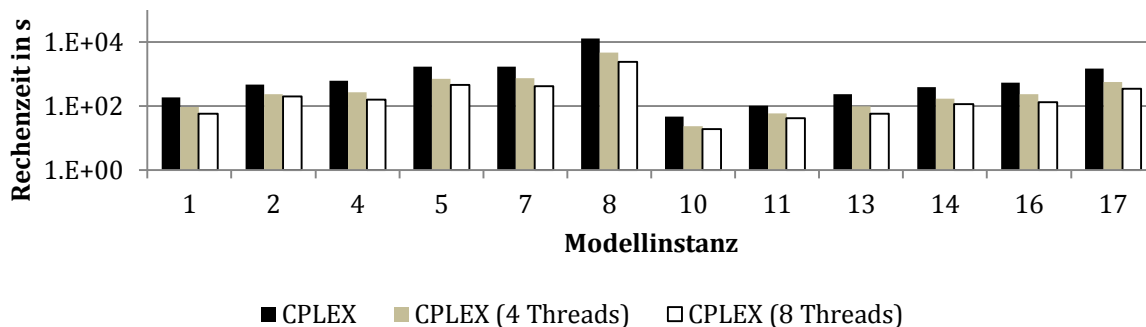


Abbildung 6: Vergleich der Rechenzeit auf einer Auswahl an Modellinstanzen mit CPLEX für 1, 4 und 8 Threads.

### 5.4 Skalierung der Modellgröße und Rechenzeit durch Modellverkleinerungsstrategien

Für diese Analyse werden jeweils Modellinstanzen miteinander verglichen, welche sich nur in einer der in Tabelle 2 aufgeführten Modelleigenschaften unterscheiden. Aufgrund der fehlenden Lösungen für die Modellinstanzen 26-34 ist dies allerdings nur für die in Abbildung 7 dargestellten Fälle möglich. Dadurch entfallen unter anderem Auswertungen für unterschiedliche räumliche Dimensionen.

Als wesentliche Indikatoren für den folgenden Vergleich dienen zum einen die Modellgröße<sup>5</sup> und zum anderen die Zeitdauer zum Lösen des Optimierungsproblems.

Die in Abbildung 7 gezeigten Box-Plots geben wieder, inwieweit die Modellgröße zwischen den jeweils miteinander verglichenen Modellinstanzen skaliert. Gleiches ist in Abbildung 8 und Abbildung 9 für die Rechenzeit zu sehen, wobei die Datengrundlage für erstere die Anwendung des Barrier-Verfahrens aus CPLEX ist, während die Daten von letzterer auf Ergebnissen des MOSEK-Lösers beruhen.

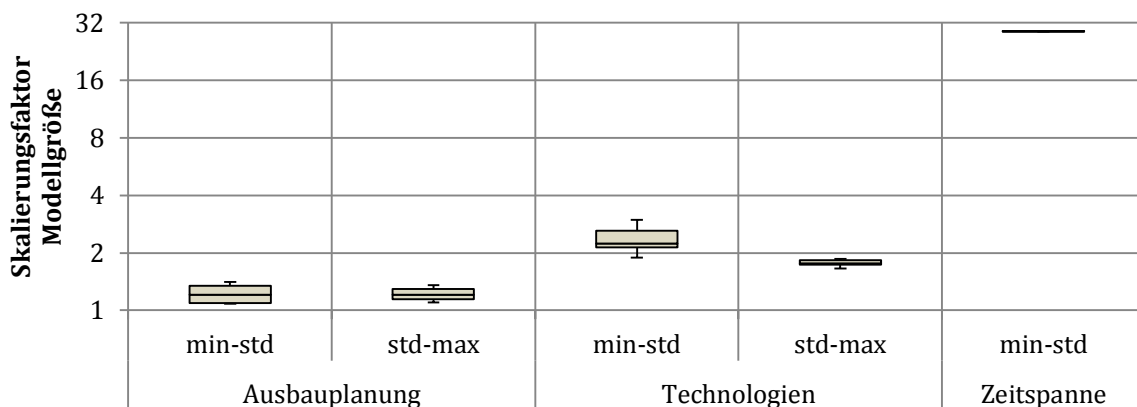
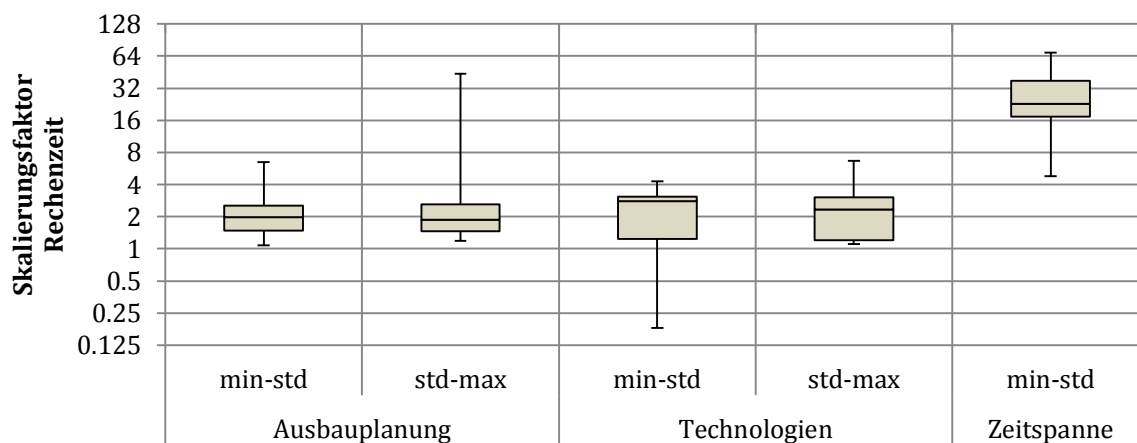


Abbildung 7: Skalierung der Modellgröße durch unterschiedliche Stufen der Ausbauplanung, eine unterschiedliche Anzahl berücksichtigter Technologien und Veränderung der betrachteten Zeitspanne.

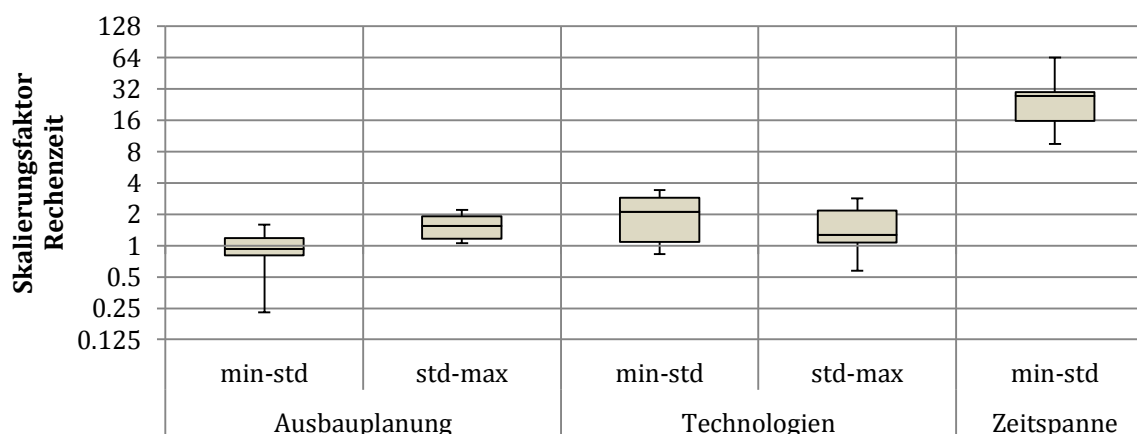
Aus den Abbildungen lässt sich einerseits ablesen, inwieweit sich beispielsweise die Modellgröße und Rechenzeit erhöhen, wenn neben der Ausbauplanung von Gasturbinen zusätzlich eine Erhöhung der Übertragungskapazitäten zulässig ist (Ausbauplanung: „min-std“). Im beschriebenen Fall lässt sich für die Ergebnisse von CPLEX schlussfolgern, dass die Rechenzeit durch diese Änderung am Modell zumeist um den Faktor 2 skaliert. Ähnliches ist andererseits zu beobachten, wenn ausgehend von Modellinstanzen, welche Ausbauplanung von Gasturbinen und Übertragungskapazitäten berücksichtigen, zusätzlich Erzeugungskapazitä-

<sup>5</sup> Diese wird anhand der summierten Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen gemessen.

ten der Kraft-Wärme-Kopplung und erneuerbaren Energien, sowie Batteriespeicherkapazitäten optimiert werden (Ausbauplanung: „std-max“). Allerdings zeigt sich hier beim CPLEX-Löser ein sehr hoher Maximalwert, was eine 43-fache Rechenzeit zur Lösung der Modellinstanz 18 (Ausbauplanung: „max“) gegenüber der Modellinstanz 17 (Ausbauplanung: „std“) bedeutet. Stellt man dieser Beobachtung allerdings die analoge Analyse mit der Löser-Software MOSEK gegenüber, zeigen sich weniger starke Abweichungen (Abbildung 9).



**Abbildung 8:** Skalierung der Rechenzeit durch unterschiedliche Stufen der Ausbauplanung, eine unterschiedliche Anzahl berücksichtigter Technologien und Veränderung der betrachteten Zeitspanne (CPLEX, 4 Threads).



**Abbildung 9:** Skalierung der Rechenzeit durch unterschiedliche Stufen der Ausbauplanung, eine unterschiedliche Anzahl berücksichtigter Technologien und Veränderung der betrachteten Zeitspanne (MOSEK, 4 Threads).

Es fällt grundsätzlich auf, dass MOSEK im Vergleich zu CPLEX bei dieser Untersuchung mehrfach geringere Schwankungen in der Rechenzeitskalierung aufweist. Mit Ausnahme der Darstellung für die Variation der Zeitspanne liegen ebenfalls die Mittelwerte der Skalierungsfaktoren für MOSEK unter jenen der CPLEX Löser-Software. Allerdings ergibt die Untersuchung auch, dass von MOSEK häufiger Zulässigkeitstoleranzen verletzt werden.

Weiterhin skalieren sowohl Modellgröße als auch Rechenzeit in den dargestellten Untersuchungen ähnlich, wobei die Modellgröße ein kleineres Spektrum an Skalierungsfaktoren aufweist. Vor allem sticht dabei ihre eindeutige Skalierung durch Änderung der betrachteten Zeitspanne heraus. Denn konkret bedeutet diese Änderung eine Verlängerung des modellierten Zeithorizonts von einem Tag („min“) auf 30 Tage („std“), was mit einer quasi Verdreifachung der Modellgröße einhergeht. Dies gilt im Mittel zwar weitestgehend auch für die Dauer zum Lösen des LPs, diese variiert allerdings stärker. Je nach Modellkonfiguration skaliert sie um das 5- bis 70-fache. Im Gegensatz dazu weisen die Verkleinerung der technologischen Dimension oder Einschränkungen in der Ausbauplanung in den hier betrachteten

Fällen größtenteils eine Skalierung der Rechenzeit mit Faktoren zwischen 1 und 3 auf. Dementsprechend bietet die zeitliche Dimension eines OESM das größte Potential zur Reduzierung der Rechenzeit anhand einer Modellverkleinerung. Dies trifft umso mehr vor dem Hintergrund zu, dass typische energiewirtschaftliche Anwendungen nicht nur wenige Tage, sondern ganze Jahreszeiträume betrachten. Folgerichtig findet deshalb auch vermehrt die Methode der rollierenden Einsatz- bzw. Ausbauplanung in der Praxis Anwendung.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Der hier vorgestellte Beitrag zeigte mögliche Ansätze zur Reduktion der Rechenzeit von LPs mit energiewirtschaftlichem Anwendungshintergrund auf, wobei eine Unterteilung in technische und konzeptionelle Strategien zur Beschleunigung von optimierenden Energiesystemmodellen (OESM) vorgenommen wurde. Dabei wurden besonders die Herausforderungen beschrieben, welche sich beim Anstreben von verstärkt parallelisierten Verfahren zur Lösung von OPs stellen.

Für die Kategorie einfacher konzeptioneller Beschleunigungsstrategien, welche häufig auf eine Vereinfachung des zu Grunde liegenden OPs durch dessen Verkleinerung abzielen, wurde ferner eine Performance-Benchmark-Analyse mit 42 LP-Modellinstanzen durchgeführt. Die Untersuchungsergebnisse führten zu dem Schluss, dass sich im Vergleich der Lösungsalgorithmen im Allgemeinen die Verwendung des Barrier-Lösungsverfahrens ohne anschließenden Crossover empfiehlt. Bei der Gegenüberstellung unterschiedlicher Löser-Implementierungen zeigte CPLEX im Falle des sequentiellen Lösens der Modellinstanzen die beste Performance, wobei mit dem Löser von MOSEK ein stabileres Skalieren der Rechenzeit beobachtet wurde. Die gezeigten Ergebnisse legten zudem den Schluss nahe, dass verkürzte Betrachtungszeiträume ein größeres Potential zur Rechenzeitreduktion bieten, als z.B. unterschiedliche Stufen der Ausbauplanung. Beschleunigungen im Bereich von letzterer konnten auch durch Multithreading mit 4 bzw. 8 Threads erreicht werden.

Die hier durchgeführte Benchmark-Analyse bietet damit Anknüpfungspunkte in dreierlei Hinsicht. Zum einen erfordert eine vollständige Bewertung von Beschleunigungsstrategien eine Validierung der Ergebnisse. Im einfachsten Fall kann dies mit dem Ergebnis des integrierten Optimierungsproblems bewerkstelligt werden. Zweitens wurde eine Grundlage für einen vollständigen Vergleich von Beschleunigungsstrategien gelegt, welche auf die Verkleinerung der drei grundlegenden Dimensionen (Zeit, Raum und Technologie) eines OESM abzielen. Aufbauend auf den hier nicht lösbar LP-Instanzen unterschiedlicher Größenordnungen können zukünftig vor allem Vergleiche für unterschiedliche räumliche Auslösungen von Interesse sein, wobei gleichzeitig die in der Energiesystemanalyse typischen 8760 Zeitschritte für alle Stunden eines Jahres berücksichtigt werden sollten.

Drittens drängt sich eine Ausdehnung der zu vergleichenden konzeptionellen Beschleunigungsstrategien auf die seriellen Lösungsverfahren auf der einen Seite, sowie auf die iterativ zu lösenden Dekompositionsverfahren auf der anderen Seite auf. Hinsichtlich letztgenannter sind prinzipiell auch neue oder alternative Problemformulierungen unter Anwendung der Benders Dekomposition denkbar [18]. Diese können sich durch die Identifizierung und Isolierung komplizierter Matrix-Blockstrukturen oder durch Übertragung bekannter Implementierungen von Dekompositionen zwischen den drei Dimensionen eines OESM ergeben. Beispielsweise indem die Überlegung zur Dekomposition des Optimal Power Flow Problems so weiterentwickelt wird, dass für jeden Modellknoten ein unabhängiges Subproblem bestimmt und parallel gelöst werden kann. Übertragen auf die zeitliche Dimension bedeutet dies, dass Dekompositionen angestrebt werden sollten, welche eine Lösung der einzelnen Zeitschritte unabhängig voneinander ermöglichen. Vor allem solche Beschleunigungsstrategien bieten sich vor dem Hintergrund der hier festgestellten, stark zeitschrittabhängigen Skalierung der

Rechenzeit in OESM an. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn es gelingt sie auf der konzeptionellen Seite z.B. durch Kombination mit seriellen Verfahren effektiver zu machen oder auf der technischen Seite die Verwendung von Hochleistungsrechnerarchitekturen zu ermöglichen.

## 7 Referenzen

- [1] N. P. Padhy, "Unit Commitment-A Bibliographical Survey," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 1196–1205, May 2004.
- [2] M. Ventosa, A. Baïllo, A. Ramos, and M. Rivier, "Electricity market modeling trends," *Energy Policy*, vol. 33, no. 7, pp. 897–913, May 2005.
- [3] J. Nitsch, T. Pregger, T. Naegler, D. Heide, F. Trieb, Y. Scholz, K. Niehaus, N. Gerhardt, M. Sterner, T. Trost, A. von Oehsen, R. Schwinn, C. Pape, H. Hahn, M. Wickert, and B. Wenzel, "Langfristszenarien und Strategien für den Ausbau der erneuerbaren Energien in Deutschland bei Berücksichtigung der Entwicklung in Europa und global," Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (BMU), 2012.
- [4] R. Schultz and H. J. Wagner, *Innovative Modellierung und Optimierung von Energiesystemen*, vol. 26. LIT Verlag Münster, 2009.
- [5] M. Schönfelder, A. Eßer-Frey, M. Schick, W. Fichtner, V. Heuveline, and T. Leibfried, "New developments in modeling network constraints in techno-economic energy system expansion planning models," *Zeitschrift für Energiewirtschaft*, vol. 36, no. 1, pp. 27–35, 2012.
- [6] H. Kondziella and T. Bruckner, "Flexibility requirements of renewable energy based electricity systems - a review of research results and methodologies," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 53, pp. 10–22, 2016.
- [7] A. S. Brouwer, M. van den Broek, W. Zappa, W. C. Turkenburg, and A. Faaij, "Least-cost options for integrating intermittent renewables in low-carbon power systems," *Applied Energy*, vol. 161, pp. 48–74, 2016.
- [8] W. Short, P. Sullivan, T. Mai, M. Mowers, C. Uriarte, N. Blair, D. Heimiller, and A. Martinez, "Regional energy deployment system (ReEDS)," *Contract*, vol. 303, pp. 275–3000, 2011.
- [9] A. Tuohy, E. Denny, and M. O'Malley, "Rolling Unit Commitment for Systems with Significant Installed Wind Capacity," *2007 IEEE Lausanne Power Tech*, pp. 1380–1385, Jul. 2007.
- [10] K. Le and J. Day, "Rolling Horizon Method: A New Optimization Technique for Generation Expansion Studies," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101, no. 9, pp. 3112–3116, Sep. 1982.
- [11] S. H. Fuller and L. I. Millett, "Computing Performance: Game Over or Next Level?," *Computer*, vol. 44, no. 1, pp. 31–38, Jan. 2011.
- [12] B. Stott, J. Jardim, and O. Alsac, "DC Power Flow Revisited," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 24, no. 3, pp. 1290–1300, Aug. 2009.
- [13] A. M. Geoffrion, "Generalized Benders decomposition," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 10, no. 4, pp. 237–260, Oct. 1972.
- [14] J. H. Roh, M. Shahidehpour, and Y. Fu, "Market-Based Coordination of Transmission and Generation Capacity Planning," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 1406–1419, Nov. 2007.
- [15] N. Alguacil and A. J. Conejo, "Multiperiod optimal power flow using Benders decomposition," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 196–201, 2000.
- [16] Y. Scholz, H. C. Gils, T. Pregger, D. Luca de Tena, and D. Heide, "Integrated capacity expansion and operation modelling for variable renewable energy based power supply in Europe," *Energy*, vol. submitted, under review, 2016.
- [17] C. Noack, F. Burggraf, S. S. Hosseiny, P. Lettenmeier, S. Kolb, S. Belz, J. Kallo, K. A. Friedrich, T. Pregger, K. K. Cao, D. Heide, T. Naegler, F. Borggreffe, U. Bünger, J. Michalski, T. Raksha, C. Voglstätter, T. Smolinka, F. Crotagino, S. Donadei, P.-L.

Horvath, and G.-S. Schneider, "Studie über die Planung einer Demonstrationsanlage zur Wasserstoff-Kraftstoffgewinnung durch Elektrolyse mit Zwischenspeicherung in Salzkavernen unter Druck," Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi), 2014.

- [18] M. Shahidehopour and Y. Fu, "Benders decomposition: applying Benders decomposition to power systems," *IEEE Power and Energy Mag.*, vol. 3, no. 2, pp. 20–21, Mar. 2005.