



**Nichtlineare
Modellierung und
lineare Regelung
eines neuartigen
robotischen
Landesystems
für Drehflügler-
UAVs**

Andre Oeschger



DIPLOMARBEIT

NICHTLINEARE MODELLIERUNG

UND LINEARE REGELUNG

EINES NEUARTIGEN

ROBOTISCHEN LANDESYSTEMS

FÜR DREHFLÜGLER-UAVS

Freigabe:

Der Bearbeiter:

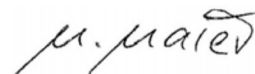
Unterschriften

André Oeschger



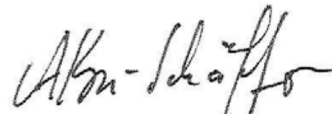
Betreuer:

Moritz Maier



Der Institutsdirektor

Prof. Dr.-Ing. Alin Albu-Schäffer



Dieser Bericht enthält Seiten, Abbildungen und Tabellen



Diplomarbeit

Nichtlineare Modellierung und lineare Regelung eines neuartigen robotischen Landesystems für Drehflügler-UAVs

André Oeschger

August 2015

Betreut von:

Dr.rer.nat. Werner Grimm
Institut für Flugmechanik und Flugregelung
Universität Stuttgart

Dipl.-Ing. Moritz Maier
Institut für Robotik und Mechatronik
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit einem System zur Landung von Drehflügler-UAVs bei schwierigen Witterungsbedingungen, wie zum Beispiel starkem Wind, sowie zur Landung auf mobilen Plattformen wie etwa einem Schiff. Das Drehflügler-UAV wird mit Hilfe eines am Boden, beziehungsweise am Schiff befestigten Roboterarmes gelandet. Es wird die Phase betrachtet in der der Roboterarm und das UAV bereits mit einander verbunden sind. Die Verbindungsstelle ist ein Kugelgelenk. Mit dem Roboterarm kann das Kugelgelenk und somit auch indirekt das UAV translatorisch bewegt werden. Das Kugelgelenk befindet sich nicht direkt im Massezentrum des UAVs, deshalb entstehen durch die vom Roboter aufgebrachtene Kräfte am Kugelgelenk auch Momente um das Massezentrum des UAVs. In dieser Arbeit wird ein nichtlineares Modell für ein UAV an dem sich ein Hebelarm mit Kugelgelenk befindet hergeleitet. Das nichtlineare Modell wird linearisiert. Es wird untersucht wie sich verschiedene Eigenschaften der UAV-Lageregelung eines am Kugelgelenk fixierten UAVs im Vergleich zu einem freifliegenden UAV ändern. Für das lineare Modell des UAVs mit Hebelarm und Kugelgelenk, werden mehrere Regler entworfen, die es ermöglichen durch Krafteinwirkung durch den Roboter am Kugelgelenk das UAV translatorisch an eine gewünschte Position zu bewegen ohne dabei seine Orientierung in ungewünschter Weise zu beeinflussen. Dabei werden die rotatorischen Zustände des UAVs in die Regelung mit einbezogen. Es werden Regelungskonzepte entworfen, die nur den Roboterarm als Aktuator einsetzen und Regelungen, die die Aktuatorik des UAVs mitbenutzen. Zur Steuerung des Roboters wird eine Drehmomentensteuerung für den DLR Leichtbauroboter hergeleitet, mit der es möglich ist Sollbeschleunigungen am Kugelgelenk, dem Endeffektor des Roboters, zu erzeugen. Für das nichtlineare UAV Modell, die linearen Regler und die Robotersteuerung wurden Simulationsmodelle erstellt und zusammen mit einer Dynamik- und Kinematiksimulation des Roboters simuliert. Ebenso wurden die linearen Regler zusammen mit der Robotersteuerung auch an der echten Hardware, dem DLR Leichtbauroboter 4 (LBR 4) und dem Quadrocopter Parrot AR.Drone 2.0 getestet.

The topic of this thesis is a system for landing rotary wing UAVs in bad weather conditions, strong wind for example and also on moving platforms like ships. The rotary wing UAV is landed by a ground fixed robotic arm. Only the phase when landing and the robot and UAV are already connected to each other is considered. The connection is a spherical joint. The robot can move the spherical joint and so move the UAV. Because the spherical joint is not located in the UAVs center of mass, moving around the spherical joint causes moments around the UAVs center of mass. In this thesis a nonlinear model of the UAV is developed. For that model it is possible to apply forces outside the center

of mass. From the nonlinear model a linear model is derived. First the linear model is used to investigate the influences by the force application outside the center of mass for the UAVs attitude controller. Then several linear landing controllers are developed for the linear model. The UAVs rotational state is taken into account by these controllers. Controllers are developed that only use the robotic arm as actuator and also controllers that use additionally to the robot the UAVs actuators. A feed forward for the robots motor torques is developed. For the nonlinear model, the linear controllers and the motor torque feed forward simulation models were developed. Together with a kinematics and dynamics simulation for the robot, simulation results were generated. In addition the controllers and the motor torque feed forward were tested with the real robot DLR light weight robot 4 (LWR 4) and the quadcopter AR.Drone 2.0.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit nur mit den angegebenen Hilfsmitteln und ohne unerlaubte fremde Hilfe selbstständig angefertigt und verfasst habe.

München, August, 2015
André Oeschger

Danksagung

Einen besonderen Dank an meinen Betreuer Moritz Maier. Du hast mich hervorragend unterstützt, hast dir für meine Fragen und die Durchführung der Experimente viel Zeit genommen und meine Vorschläge mit großer Offenheit angehört. Ich habe dadurch eine außergewöhnlich positive Betreuung erfahren dürfen. Als nächstes danke ich Herrn Dr. Werner Grimm, Sie standen mir bei organisatorischen, mathematischen und regelungstechnischen Fragen stets zur Seite. Vielen Dank an Dr. Konstantin Kondak für die gemeinsame Überprüfung der UAV-Modellierung. Großen Dank an Antonio Gonzales für seine Unterstützung beim Aufsetzen der Kinematik- und Dynamiksimulation des DLR Leichtbauroboters. Danke an Diego Rodriguez für seine Erläuterungen zu robotischen Themen. Vielen Dank an Theresa Brodbeck für ihre Unterstützung außerhalb des DLR. Es erfüllt mich mit großer Freude, dass ich selbst einen Beitrag zur Wissenschaft am DLR leisten durfte und dafür danke ich abschließend noch einmal Allen, die mich dabei unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufgabenstellung	1
1.3	Aufbau des Landesystem	2
1.4	Kommunikation des Gesamtsystems	3
2	Modellbildung UAV	6
2.1	Das nichtlineare Modell	6
2.1.1	Kreuzprodukt und Kreuzproduktmatrix	6
2.1.2	Generelle Annahmen	6
2.1.3	Masse	7
2.1.4	Trägheit	7
2.1.5	Äußere Kräfte und Momente	8
2.1.6	Rotatorische Kinematik	9
2.1.7	Rotatorische Dynamik	9
2.1.8	Translatorische Kinematik	11
2.1.9	Translatorische Dynamik	11
2.1.10	Zusammenfassung	12
2.2	Das lineare Modell	13
2.2.1	Linearisierung der rotatorischen Kinematik	13
2.2.2	Linearisierung der rotatorischen Dynamik	15
2.2.3	Linearisierung der translatorischen Kinematik	16
2.2.4	Linearisierung der translatorischen Dynamik	16
2.2.5	Zusammenfassung der Linearisierung	18
3	Untersuchungen am linearen UAV Modell	21
3.1	Stabilitätsuntersuchung	21
3.1.1	Lagestabilität im Freiflug	21
3.1.2	Lagestabilität des fixierten Flugapparats	24
3.2	Dämpfungsgrad und Eigenfrequenz	31
3.3	Stationäre Genauigkeit	32
3.3.1	Stationäre Genauigkeit im Freiflug	32
3.3.2	Stationäre Genauigkeit des fixierten Flugapparats	33
3.4	Zusammenfassung der Untersuchungen am linearen Modell	34
4	Regelung des linearen Systems	35
4.1	Herleitung der Regelstrecken	35

4.2	Landeregelung ausschließlich mit dem Roboterarm	39
4.2.1	Positionsregelung mit Polvorgabe	39
4.3	Landeregelungen mit dem Roboterarm und UAV-Aktuatorik	43
4.3.1	Positionsregelung Roboterarm, Momentenkompensation UAV . . .	44
4.3.2	Positionsregelung durch Roboterarm, Lageregelung durch das UAV	47
5	Steuerung des Roboterarms	56
5.1	Vorwärtskinematik	56
5.2	Jacobi-Matrix	58
5.3	Roboterdynamik in Gelenkwinkelkoordinaten	60
5.3.1	Massenmatrix	61
5.3.2	Gravitationsvektor	61
5.3.3	Zentrifugal- und Coriolis-Matrix	62
5.4	Roboterdynamik in kartesischen Koordinaten	62
5.5	Bewegung im Nullraum	64
5.6	Steuersignal an den Roboterdrehmomentenregler	65
5.7	Sollgrößen für die Endeffektorbeschleunigung	65
6	Simulation und Experiment	66
6.1	Erforderliche Kenngrößen	66
6.2	Vergleichsmodell	66
6.3	Gewählte Pole	67
6.4	Simulation	68
6.4.1	Simulation ohne Roboterdynamik	68
6.4.2	Simulation mit Roboterdynamik	70
6.5	Experimente	71
7	Zusammenfassung und Ausblick	78

Symbolverzeichnis

A	Fett gedruckte Großbuchstaben kennzeichnen eine Matrix.
a	Fett gedruckte Kleinbuchstaben kennzeichnen einen Vektor.
\dot{A}	Der Punkt überhalb der Variable zeigt die Ableitung nach der Zeit an.
$\tilde{\mathbf{a}}$	Die Kreuzproduktmatrix des Vektors a .
${}_e \mathbf{a}$	linksstehende Subskripts geben an in welchem Koordinatensystem die Größe dargestellt ist. In diesem Beispiel das Koordinatensystem e .
\mathbf{a}_{Fa}	rechtsstehende Subskripts sind Abkürzungen. In diesem Beispiel Fa für Flugapparat.
${}_e \mathbf{a}_{Fa}$	Die Beschleunigung des Fluggeräts.
${}_e \mathbf{a}_a$	Die Beschleunigung des Roboterarm.
${}_b \mathbf{arm}$	Der Hebelarm vom Fluggeräteschwerpunkt zum Kugelgelenk.
b	Das körperfeste Koordinatensystem b . Es befindet sich im Schwerpunkt des Flugapparats. Die x-Achse zeigt nach vorne, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach unten.
\mathbf{c}	Zeilenvektor der die Zustände mit dem Ausgang verknüpft.
C	Eine Matrix welche die Zustände mit den Ausgängen verknüpft.
C(q, \dot{q})	Die Zentrifugal- und Coriolis-Matrix des Roboterarms.
\mathbf{d}_{12}	Ein Verschiebungsvektor der die Position von Koordinatensystem 2 in Koordinatensystem 1 angibt.
$\det(\cdot)$	Berechnet die Determinante einer Matrix.
e	Das erdfeste Koordinatensystem e . Es befindet sich am Erdboden. Die Erde wird als ruhend und flach angenommen. Die x-Achse zeigt nach Norden, die y-Achse nach Osten und die z-Achse nach unten.
E	Eine Einheitsmatrix.
${}_e \mathbf{F}_a$	Die Kraft des Roboterarms auf den Schwerpunkt des Flugapparats.
${}_e \mathbf{F}_{Fa}$	Die Krafte aufgebracht vom Flugapparats. Sie wirkt in seinem Schwerpunkt.
${}_e \mathbf{F}_g$	Die Gewichtskraft des Flugapparat angreifend in seinem Schwerpunkt, dargestellt im erdfesten Koordinatensystem e .
g	Die Erdbeschleunigung.
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	Vektor des Schwerkräfteinflusses in der Roboterarmdynamik.
H	Eine Hurwitz-Matrix.
${}_b \mathbf{I}$	Der Trägheitstensor des Flugapparats dargestellt im Körperfesten Koordinatensystem b .
\mathbf{J}_{ee}	Die Jacobi-Matrix des Endeffektors. Sie ist abhängig von den Gelenkwinkeln.

\mathbf{J}_{ee_v}	Der translatorische Teil von \mathbf{J}_{ee}
\mathbf{J}_{ee_ω}	Der rotatorische Teil von \mathbf{J}_{ee}
\mathbf{k}	Eine Reglerverstärkung in Form eines Zeilenvektors.
\mathbf{K}	Eine Reglerverstärkungsmatrix.
Kern	Funktion die den Kern einer Matrix berechnet.
K_x	Proportionale Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die x-Achse.
K_y	Proportionale Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die y-Achse.
K_z	Proportionale Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die z-Achse.
K_{xd}	Differenzialer Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die x-Achse.
K_{yd}	Differenzialer Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die y-Achse.
K_{zd}	Differenzialer Verstärkungsfaktor des PD-Lagereglers des Flugapparats um die z-Achse.
$K_{ip_{ee}}$	Proportionale Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die x-Achse.
$K_{iq_{ee}}$	Proportionale Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die y-Achse.
$K_{ir_{ee}}$	Proportionale Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die z-Achse.
$K_{p_{ee}}$	Differenzialer Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die x-Achse.
$K_{q_{ee}}$	Differenzialer Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die y-Achse.
$K_{r_{ee}}$	Differenzialer Verstärkungsfaktor des Lagereglers des Endeffektors um die z-Achse.
$L\{\}$	Linearisierung des Klammerinhalts.
l_a	Länge des Hebelarms ${}_b\mathbf{arm}$ vom Fluggeräteschwerpunkt zum Kugelgelenk.
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	Die Massenmatrix des Roboterarm. Sie ist abhängig von den Gelenkwinkeln.
m	Die Masse des Gesamtsystems, m , ist die des Flugapparats.
${}_b\mathbf{M}_a$	Moment um den Fluggeräteschwerpunkt, das durch die Kraft des Roboterarms ${}_e\mathbf{F}_a$ und den Hebelarm ${}_b\mathbf{arm}$ verursacht wird.
${}_b\mathbf{M}_{Fa}$	Das Moment aufgebracht vom Flugapparat. Es wirkt um seinen Schwerpunkt.
\mathbf{n}	Ein Vektor der einen Skalaren Eingang auf zwei Eingänge verteilt.
\mathbf{P}	Die Matrix alle Parametervektoren
\mathbf{P}_n	Projektion in den Nullraum des Roboterarms.
\mathbf{q}	Ein Zustandsvektor dessen Einträge q_1 bis q_7 die Gelenkwinkel des Roboterarms sind.

\mathbf{Q}_S	Eine Steuerbarkeitsmatrix.
\mathbf{r}_{ee}	Die Position des Endeffektors.
${}^e\mathbf{r}_{Fa}$	Die Position des Fluggeräts.
\mathbf{R}_{be}	Rotationsmatrix vom Koordinatensystem e ins Koordinatensystem b .
$\mathbf{R}_{be_{12}}$	Der Eintrag in der 1. Zeile der 2. Spalte der Matrix \mathbf{R}_{be} .
\mathbf{R}_{eb}	Rotationsmatrix vom Koordinatensystem b ins Koordinatensystem e .
s_S	Die letzte Zeile der invertierten Steuerbarkeitsmatrix.
\mathbf{T}_{12}	Eine 4×4 Transformationsmatrix von System 2 in System 1.
$\mathbf{T}_{12_{24}}$	Der Eintrag in der 2. Zeile der 4. Spalte der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{12} .
${}^e\mathbf{v}_{Fa}$	Die Geschwindigkeit des Fluggeräts.
\mathbf{v}	Ein Eigenvektor.
\mathbf{V}	Ein Matrix aus Eigenvektoren.
v_{vor}	Ein skalares Vorfilter.
\mathbf{V}_{vor}	Ein Vorfilter in Form einer Matrix.
${}^e\mathbf{w}$	Ein Sollwerteingang.
\mathbf{x}	Der Zustandsvektor.
\mathbf{x}_{erw}	Der Zustandsvektor der erweiterten Regelstecke.
\mathbf{x}_{ee}	Der Zustandsvektor des Endeffektors mit seiner Position und Lage.
\mathbf{y}	Der Ausgangsvektor.
${}^b\boldsymbol{\omega}$	Die Drehgeschwindigkeit des Flugapparats.
ϕ	Eulerwinkel um die x-Achse.
θ	Eulerwinkel um die y-Achse.
ψ	Eulerwinkel um die z-Achse.
λ_i	Pol eines linearen Systems.
$\bar{\lambda}_i$	Pol eines geschlossenen Regelkreises.
$\boldsymbol{\tau}$	Drehmomente in den Gelenken des Roboterarms.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schiffslandung Helikopter und Schiffslandung Prinzipskizze.	1
1.2	Das UAV Landesystem.	2
1.3	Prinzipskizze des Landesystems	3
1.4	Kommunikationswege des gesamten Systems.	5
2.1	Skizze des Flugapparats mit den an ihm angreifenden Kräften.	7
2.2	Schaltbild des nichtlinearen Modells	13
2.3	Schaltbild des linearen Modells	20
3.1	Schaltbild der Zustandsvektorrückführung.	22
4.1	Schaltbild der Zustandsvektorrückführung mit Vorfilter.	41
4.2	Schaltbild der erweiterten Strecke.	43
4.3	Schaltbild des geschlossenen Kreises.	46
4.4	Schaltbild der Zustandsvektorrückführung mit Vorfilter.	53
4.5	Schaltbild der erweiterten Strecke.	55
5.1	Die Koordinatensysteme des DLR Leichtbauroboters.	57
6.1	Simulationsergebnisse ohne Roboterdynamik.	69
6.2	Simulationsergebnisse mit Roboterdynamik.	70
6.3	Vergleich der Endeffektor-Beschleunigungen.	71
6.4	Fahrtweg einer Mission.	72
6.5	Experiment Regler 1	73
6.6	Experiment Regler 2	74
6.7	Experiment Regler 3	75
6.8	Kommandiertes Gegenmomente die x-Achse	76
6.9	Kommandiertes Gegenmomente die y-Achse	77
7.1	Kraftmessung	78

Tabellenverzeichnis

1.1	Vorteile des Landesystems.	4
4.1	Generelle Annahmen für die Reglerauslegung.	37
4.2	Zusätzliche Annahmen für Polvorgabe und Störmomentenkompensation.	43
5.1	Denavit-Hartenberg Parameter des DLR Leichtbauroboters.	58
6.1	Werte der Variablen	67
6.2	Polvorgaben für Regler 1	67
6.3	Polvorgaben für Regler 2	68
6.4	Polvorgaben für Regler 3	68
6.5	Kartesische Positionen einer Mission.	72
6.6	Regelgüte bei drei Missionsabläufen.	73

Abkürzungsverzeichnis

- a* Arm. Diese Abkürzung wird als Index verwendet.
- DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt.
- ee* Endeffektor. Der Endpunkt des Roboterarms, welcher die Mitte des Kugelgelenks des Verbindungsstücks zum UAV ist. Diese Abkürzung wird als Index verwendet.
- Fa* Flugapparat oder UAV. Diese Abkürzung wird als Index verwendet.
- rev. Revisited, wird benutzt um Gleichungen zu kennzeichnen, die bereits notiert wurden.
- UAV Unmanned aerial vehicle, ein unbemanntes Luftfahrzeug.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Landung mit einem Hubschrauber auf einem Schiffsdeck ist bei schwerem Seegang für den Hubschrauberpiloten eine große Herausforderung. Der Pilot muss die Roll- und die Hubbewegung des Helikopters an die des Schiffs anpassen, um erfolgreich auf dem sich bewegenden Schiffsdeck landen zu können. Um in Zukunft die Schiffslandung mit Hubschraubern bei schwerem Seegang erleichtern zu können, wird am Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt an einem automatischen Landesystem mit Roboterarm für unbemannte Fluggeräte (UAVs) geforscht. Das Landesystem soll folgendermaßen funktionieren: Das UAV fliegt oberhalb des Schiffsdecks. Ein Roboterarm, der auf dem Schiffsdeck befestigt ist, verbindet sich automatisch mit dem Fluggerät. Die Verbindung zwischen UAV und Roboterarm ist ein Kugelgelenk. Das ist eine mögliche Ausführung, die wir als vorteilhaft erachten, weil durch das Kugelgelenk die rotatorischen Bewegungen des Roboterarms nicht auf das UAV übertragen werden. Der Roboterarm gleicht die Schiffsbewegungen aus und landet das UAV automatisch und in Kooperation mit dem UAV auf dem Schiffsdeck.

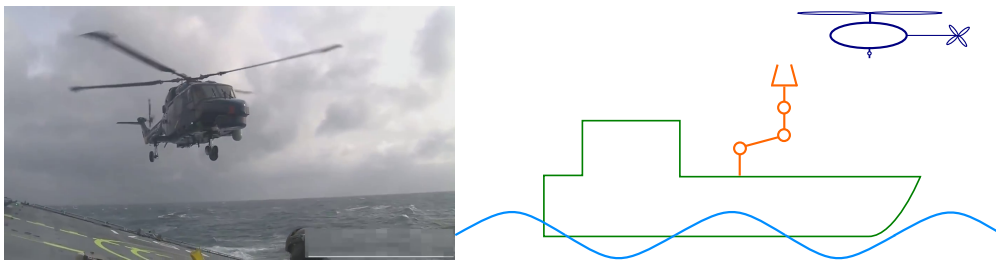


Abbildung 1.1: Rechts: Schiffslandung eines Helikopters bei schwerem Seegang [heliship]. Links: Prinzipskizze des UAV-Landesystems auf einem Schiff.

1.2 Aufgabenstellung

Um dieses anspruchsvolle automatische Landesystem zu verwirklichen, wird zunächst in dieser Diplomarbeit die Landung eines unbemannten Drehflügler-UAVs mittels Roboterarm auf festem Untergrund untersucht. Es soll ein nichtlineares Simulationsmodell erstellt werden. Arbeiten, bei denen ein UAV durch ein Seil gelandet wurde, haben gezeigt, dass eine Krafteinwirkung außerhalb des Schwerpunkts Einfluss auf die Lage- und Regelung des Fluggeräts hat ([sandino2014tether], Kapitel II Abschnitt C). Darum

1 Einleitung

soll der Einfluss des Landesystems auf die Lageregelung des UAVs untersucht werden. Es sollen mehrere Konzepte erarbeitet werden, wie die Kraft am Übertragungspunkt von Roboter zu Helikopter, dem Kugelgelenk, geregelt werden muss, um des Fluggerät erfolgreich zu landen. Dabei sollen auch Regelungen entworfen werden, welche die Aktuatorik des Fluggeräts mit einbeziehen. Um die für die Landung aufzubringende Kraft am Kraftübertragungspunkt auch einstellen zu können, soll ein Steuerung für einen Roboterarm entwickelt werden. Mit dem Leichtbauroboter des DLR, der sieben Freiheitsgrade besitzt, soll getestet werden, ob das gemessene Verhalten des Landesystems mit den Ergebnissen aus der Simulation übereinstimmt. In Abbildung 1.2 sind das echte Modell sowie das Simulationsmodell dargestellt.

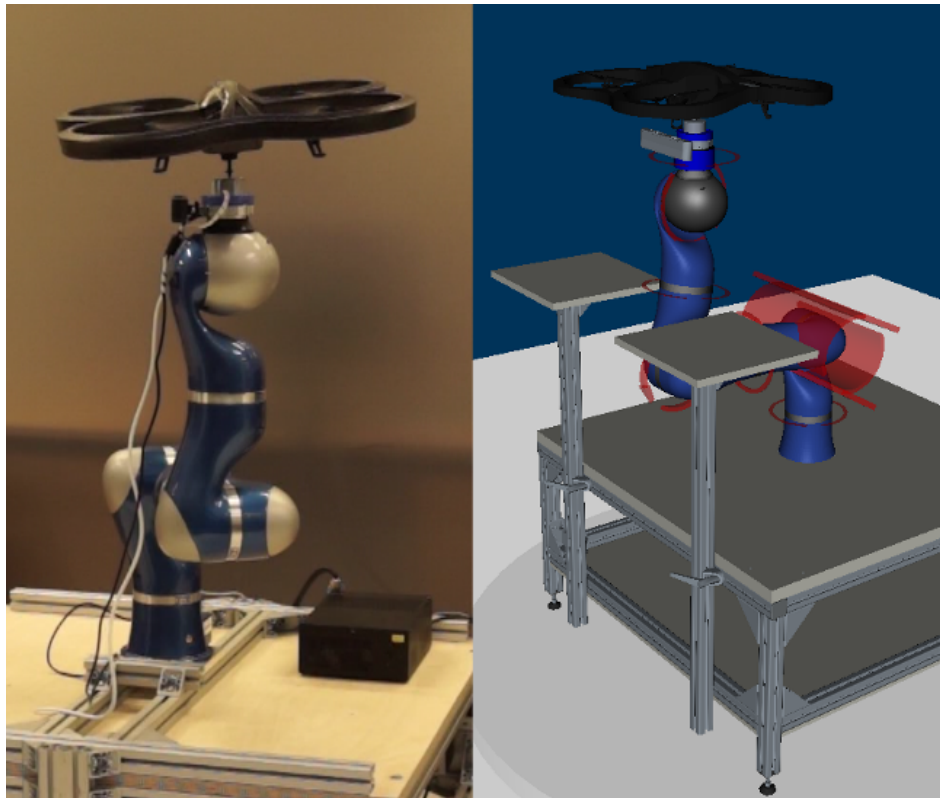


Abbildung 1.2: Das UAV Landesystem. Der Roboterarm ist mit dem UAV über ein Kugelgelenk verbunden. Links: Echtes Modell, rechts: Simulation. [maier2015LandingUAV]

1.3 Aufbau des Landesystem

Der Aufbau des Landesystems ist in Abbildung 1.3 gezeigt. Das Einfangen des UAVs ist nicht Teil dieser Arbeit. Es wird nur die Landephase betrachtet, bei der das UAV bereits über das Kugelgelenk mit dem Endeffektor des Roboters verbunden ist. Weil

das Kugelgelenk nicht direkt im Massezentrum des UAVs positioniert ist, existiert ein Hebelarm zwischen Massezentrum und Kugelgelenk. Das Kugelgelenk ist mit dem Roboter über einen Elektromagneten verbunden. Durch Bewegen des Roboters kann das UAV translatorisch bewegt werden, dadurch entstehen über den Hebelarm Momente um das Massezentrum des UAV. Alternative Lösungen zu dem hier vorgestellten Lan-

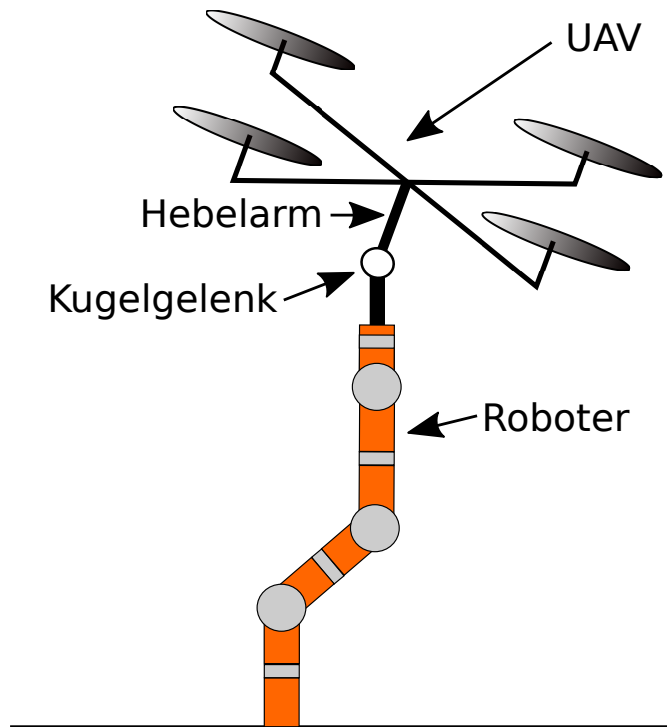


Abbildung 1.3: Prinzipskizze des Landesystems

desystem sind zum Beispiel Systeme, welche zusätzliche Sensorik [herisse2010landing], [sanchez2013toward] und speziell angepassten UAV Reglern [yang2009design], [sandino2011applicability] verwenden oder Systeme mit Landeunterstützung durch ein Seil [oh2006approaches], [sandino2014tether]. Die Vorteile des hier vorgestellten Systems gegenüber der genannten Alternativsysteme sind in Tabelle 1.1 zu sehen.

1.4 Kommunikation des Gesamtsystems

Abbildung 1.4 veranschaulicht die Abläufe im Gesamtsystem. Die UAV Zustände werden von der Sensorik des UAVs gemessen oder von der nichtlinearen UAV Simulation aus Kapitel 2 Abschnitt 2.1 berechnet. Aus ihnen und aus den Sollzuständen berechnet eine der Landeregeln aus Kapitel 4 die erforderlichen Beschleunigungskommandos für den Roboterarm und die zusätzlichen Momentenkommandos an das UAV. Die vom Landeregler erzeugten Momentenkommandos werden zusätzlich zum Onboard-

- Die Flugregler des UAVs werden nicht modifiziert.
 - Schiffsbewegungen können innerhalb des Bewegungsraums des Roboters ausgeglichen werden.
 - Es kann auch zum Starten benutzt werden.
-

Tabelle 1.1: Vorteile des Landesystems.

Lageregler des UAVs an die UAV-Simulation gesendet, beziehungsweise ans echte UAV kommandiert. Die vom Landeregler erzeugten Kommandos für die translatorischen Beschleunigungen des Kugelgelenks (Endeffektor des Roboters) werden an die Roboter-Drehmomentensteuerung aus Kapitel 5 gesendet. Die Roboter Drehmomentensteuerung errechnet aus der vorgegebenen Beschleunigung und den Zuständen des Roboters die erforderlichen Motordrehmomente des Roboters. Diese Drehmomente werden an den Motordrehmomentenregler des Roboters gesendet. Der Motordrehmomentenregler errechnet aus den Soll Drehmomenten und den Roboterzuständen die erforderlichen Motorströme. Die Motorströme werden an die Roboter-Simulation oder an den realen Roboter gesendet. Daraus ergibt sich eine Beschleunigung des Kugelgelenks, die entweder direkt auf das echte UAV wirkt oder deren Zahlenwert an die UAV Simulation gesendet wird. Die UAV Simulation, Landeregelung und die Roboter-Steuerung sind Teil dieser Arbeit. Die Motordrehmomentenregelung des Roboters und die Robotersimulation standen zur Verfügung. Die Parameter des UAV-Onboard-Lagereglers der Parrot AR.Drone 2.0 wurden mit einem Versuch identifiziert.

1.4 Kommunikation des Gesamtsystems

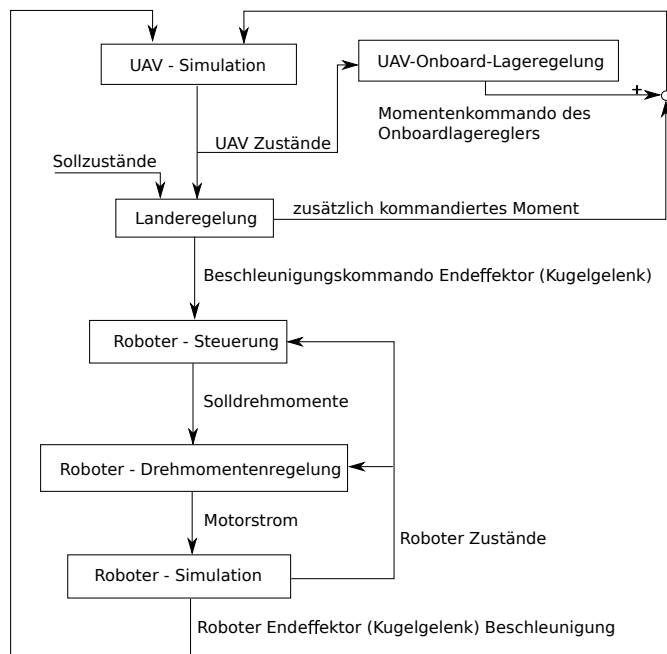


Abbildung 1.4: Kommunikationswege des gesamten Systems.

2 Modellbildung UAV

Zur Simulation des Systemverhaltens wie auch zur Auslegung des Reglers werden mathematische Modelle benötigt. In diesem Kapitel werden diese Modelle für das UAV, an dem ein Hebel mit einem Kugelgelenk befestigt ist, hergeleitet.

2.1 Das nichtlineare Modell

In diesem Abschnitt wird das nichtlineare mathematische Modell des Flugapparats bis zur Verbindungsstelle mit dem Roboterarm, dem Kugelgelenk, hergeleitet. Es dient als Modell für Simulationsergebnisse. In Abbildung 2.1 sind die am Flugapparat angreifenden Kräfte und Momente, die verwendeten Koordinatensysteme und die Hebellänge vom Schwerpunkt zum Kugelgelenk eingezeichnet. In der linken unteren Ecke der Skizze sieht man das erdfeste Koordinatensystem e . Im Schwerpunkt des Fluggeräts befindet sich der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems b . Die im Schwerpunkt angreifenden Kräfte sind die vom Flugapparat aufgebraachte Kraft \mathbf{F}_{Fa} und die durch die Erdbeschleunigung g wirkende Gewichtskraft \mathbf{F}_g . Um den Schwerpunkt wirkt ein vom Fluggerät aufgebraachtes Moment \mathbf{M}_{Fa} . Der Hebel vom Schwerpunkt zum Kugelgelenk hat die Länge l_a . Am Kugelgelenk greift die Kraft des Roboterarms \mathbf{F}_a an.

2.1.1 Kreuzprodukt und Kreuzproduktmatrix

Zur vereinfachten Darstellung in Formeln wird statt dem Kreuzprodukt die Kreuzproduktmatrix verwendet.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \implies \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.1.2 Generelle Annahmen

Für die Erstellung des nichtlinearen Modells werden diese generellen Vereinbarungen getroffen. Die Erde ist flach und ruhend. Es gibt keine Windeinflüsse. Die Schwerkraft ist konstant. Mit dem Roboterarm kann die am Kugelgelenk wirkende Kraft exakt aufgebracht werden. Es wird angenommen, dass der Flugapparat Kräfte und Momente direkt aufbringen kann, die Aktuatoren werden nicht modelliert. Der Flugapparat sowie der

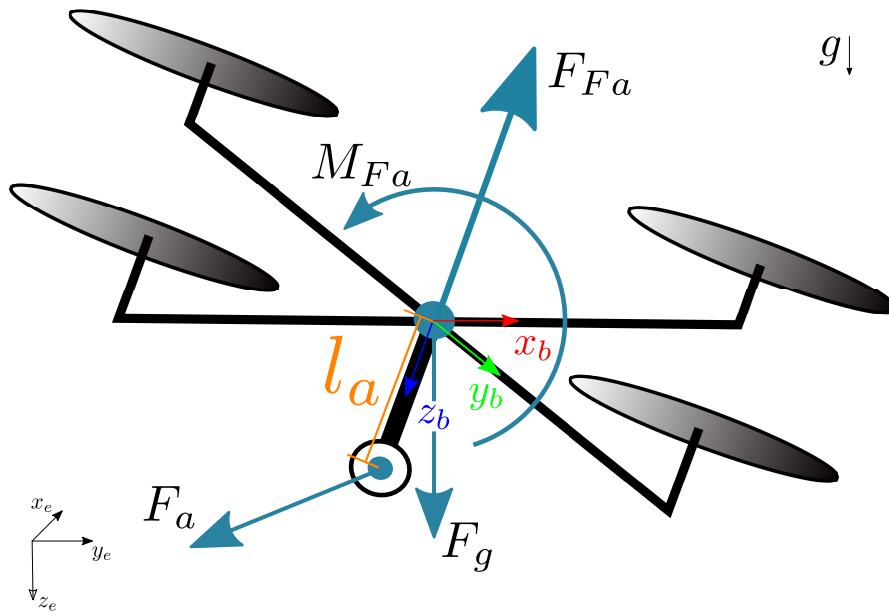


Abbildung 2.1: Skizze des Flugapparats mit den an ihm angreifenden Kräften.

Hebel zum Kugelgelenk sind starr. Der Hebelarm vom Flugapparat zum Kugelgelenk ist masselos.

2.1.3 Masse

Die Masse des Gesamtsystems, m , ist die des Flugapparats. Die Masse des Hebelarms zwischen Fluggerät und Kugelgelenk wird vernachlässigt. Dadurch ändert sich die Position des Massezentrums des Flugapparats auch nicht.

2.1.4 Trägheit

Der Trägheitstensor ${}_b\mathbf{I}$ des Flugapparats wird im körperfesten Koordinatensystem b , das sich im Schwerpunkt des Flugapparats befindet, dargestellt. Im körperfesten Koordinatensystem ändert sich der Trägheitstensor nicht. Es wird die Annahme getroffen, dass die Körperachsen gleich den Hauptträgheitsachsen sind. Durch diese Annahme hat der Trägheitstensor nur Einträge auf seinen Hauptdiagonalen.

$${}_b\mathbf{I} = \begin{bmatrix} {}_bI_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}_bI_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}_bI_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.1.5 Äußere Kräfte und Momente

Erdbeschleunigung

Die Erdbeschleunigung g verursacht eine Kraft ${}_e\mathbf{F}_g$ im Schwerpunkt des Flugapparats in z-Richtung des Koordinatensystems e.

$${}_e\mathbf{F}_g = m \cdot {}_e\mathbf{g} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Roboterarm

Durch die Beschleunigung ${}_e\mathbf{a}_a$ des Roboterarmes wirkt die Kraft ${}_e\mathbf{F}_a$ über das Kugelgelenk auf den Flugapparat.

$${}_e\mathbf{F}_a = m \cdot {}_e\mathbf{a}_a = m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a \quad (2.5)$$

Der Hebel, ${}_b\mathbf{arm}$, geht vom Schwerpunkt des Flugapparats zum Kraftangriffspunkt des Roboters, dem Kugelgelenk. Er hat die Länge l_a .

$${}_b\mathbf{arm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_a \end{pmatrix}_b \quad (2.6)$$

Durch den Hebelarm wirkt durch die Kraft ${}_e\mathbf{F}_a$ auch ein Moment ${}_b\mathbf{M}_a$ um den Schwerpunkt des Flugapparats.

$${}_b\mathbf{M}_a = {}_b\widetilde{\mathbf{arm}} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot {}_e\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a \quad (2.7)$$

Flugapparat

Der Flugapparat kann durch seine Aktuatoren sowohl eine Kraft ${}_e\mathbf{F}_{Fa}$, die durch den Schwerpunkt wirkt, als auch ein Moment ${}_b\mathbf{M}_{Fa}$, das um seinen Schwerpunkt wirkt, erzeugen.

$${}_e\mathbf{F}_{Fa} = \mathbf{R}_{eb} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.8)$$

$${}_b\mathbf{M}_{Fa} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.9)$$

2.1.6 Rotatorische Kinematik

Die Kinematik der Rotation beschreibt die Änderung die Lage des körperfesten Koordinatensystems b bezüglich des erdfesten Koordinatensystems e .

$$\dot{\mathbf{R}}_{be} = {}_b\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \cdot \mathbf{R}_{be} \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{be} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{be11} & \dot{R}_{be12} & \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be21} & \dot{R}_{be22} & \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be31} & \dot{R}_{be32} & \dot{R}_{be33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{R}_{be11} & \dot{R}_{be12} & \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be21} & \dot{R}_{be22} & \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be31} & \dot{R}_{be32} & \dot{R}_{be33} \end{bmatrix} &= {}_b \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{be11} & R_{be12} & R_{be13} \\ R_{be21} & R_{be22} & R_{be23} \\ R_{be31} & R_{be32} & R_{be33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{be21} \cdot \omega_z - R_{be31} \cdot \omega_y & R_{be22} \cdot \omega_z - R_{be32} \cdot \omega_y & R_{be23} \cdot \omega_z - R_{be33} \cdot \omega_y \\ R_{be31} \cdot \omega_x - R_{be11} \cdot \omega_z & R_{be32} \cdot \omega_x - R_{be12} \cdot \omega_z & R_{be33} \cdot \omega_x - R_{be13} \cdot \omega_z \\ R_{be11} \cdot \omega_y - R_{be21} \cdot \omega_x & R_{be12} \cdot \omega_y - R_{be22} \cdot \omega_x & R_{be13} \cdot \omega_y - R_{be23} \cdot \omega_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{be21} \cdot \omega_z - R_{be31} \cdot \omega_y \\ R_{be31} \cdot \omega_x - R_{be11} \cdot \omega_z \\ R_{be11} \cdot \omega_y - R_{be21} \cdot \omega_x \\ R_{be22} \cdot \omega_z - R_{be32} \cdot \omega_y \\ R_{be32} \cdot \omega_x - R_{be12} \cdot \omega_z \\ R_{be12} \cdot \omega_y - R_{be22} \cdot \omega_x \\ R_{be23} \cdot \omega_z - R_{be33} \cdot \omega_y \\ R_{be33} \cdot \omega_x - R_{be13} \cdot \omega_z \\ R_{be13} \cdot \omega_y - R_{be23} \cdot \omega_x \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

2.1.7 Rotatorische Dynamik

Die Dynamik der Rotation beschreibt, wie und wodurch sich die Drehgeschwindigkeit des Fluggeräts ändert. Sie wird im körperfesten Koordinatensystem b notiert, weil im körperfesten Koordinatensystem b der Trägheitstensor \mathbf{I} des Flugapparats konstant ist.

Starrkörperbewegung

Die Gleichung zur Beschreibung der rotatorischen Dynamik eines starren Körpers ([**fm**], Seite 30), lautet:

$${}_b\dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}_b\mathbf{I}^{-1} \cdot {}_b\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot {}_b\mathbf{I} \cdot {}_b\boldsymbol{\omega} + {}_b\mathbf{I}^{-1} \cdot {}_b\mathbf{M} \quad (2.14)$$

2 Modellbildung UAV

Mit den Größen

$${}_b\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad {}_b\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad {}_b\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$${}_b\mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Starrkörperbewegung kombiniert mit äußeren Momenten

Das äußere Moment durch die Kraft des Roboters und das Moment des Flugapparats werden in \mathbf{M} eingesetzt.

$${}_b\mathbf{M} = {}_b\mathbf{M}_a + {}_b\mathbf{M}_{Fa} \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.19)$$

Einsetzen in die Starrkörperbewegung ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{Fa} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.1.8 Translatorische Kinematik

Die Kinematik der Translation beschreibt die Änderung der Position des Fluggeräts bezüglich des erdfesten Koordinatensystems e .

$${}^e \dot{\mathbf{r}}_{Fa} = {}^e \mathbf{v}_{Fa}, \quad {}^e \dot{\mathbf{v}}_{Fa} = {}^e \mathbf{a}_{Fa} \quad (2.21)$$

$${}^e \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix} = {}^e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^e \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} + {}^e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.9 Translatorische Dynamik

Die translatorische Dynamik beschreibt, wie und wodurch sich die translatorische Geschwindigkeit des Flugapparats ändert. Änderungen der translatorischen Bewegung des Flugapparats werden durch äußere Kräfte hervorgerufen.

$${}^e \mathbf{F} = m \cdot {}^e \mathbf{a}_{Fa} \quad (2.23)$$

${}^e \mathbf{F}$ ist die Summe aller äußeren Kräfte.

$${}^e \mathbf{F} = {}^e \mathbf{F}_g + {}^e \mathbf{F}_a + {}^e \mathbf{F}_{Fa} \quad (2.24)$$

$${}^e \mathbf{F} = m \cdot {}^e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + m \cdot {}^e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a + \mathbf{R}_{eb} \cdot {}^b \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.25)$$

Gleichung (2.23) und (2.25) in einander eingesetzt und aufgelöst nach ${}^e \mathbf{a}_{Fa}$:

$${}^e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = {}^e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + {}^e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a + \frac{1}{m} \cdot \mathbf{R}_{eb} \cdot {}^b \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.26)$$

2.1.10 Zusammenfassung

Dynamik der Rotation

$$\begin{aligned}
 {}_b \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot {}_b \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{Fa}
 \end{aligned} \tag{2.20 rev.}$$

Kinematik der Rotation

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{be21} \cdot \omega_z - R_{be31} \cdot \omega_y \\ R_{be31} \cdot \omega_x - R_{be11} \cdot \omega_z \\ R_{be11} \cdot \omega_y - R_{be21} \cdot \omega_x \\ R_{be22} \cdot \omega_z - R_{be32} \cdot \omega_y \\ R_{be32} \cdot \omega_x - R_{be12} \cdot \omega_z \\ R_{be12} \cdot \omega_y - R_{be22} \cdot \omega_x \\ R_{be23} \cdot \omega_z - R_{be33} \cdot \omega_y \\ R_{be33} \cdot \omega_x - R_{be13} \cdot \omega_z \\ R_{be13} \cdot \omega_y - R_{be23} \cdot \omega_x \end{pmatrix} \tag{2.13 rev.}$$

Kinematik der Translation

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e \tag{2.22 rev.}$$

Dynamik der Translation

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a + \frac{1}{m} \cdot \mathbf{R}_{eb} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \tag{2.26 rev.}$$

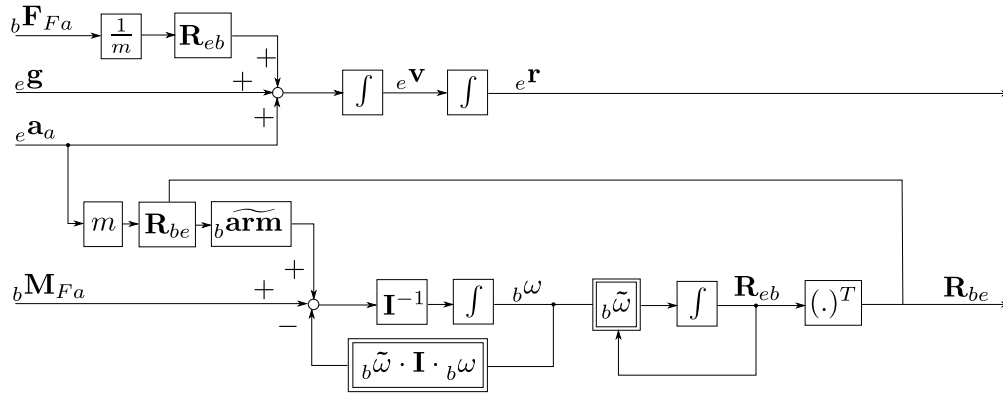


Abbildung 2.2: Schaltbild des nichtlinearen Modells

2.2 Das lineare Modell

Um das Modell aus Kapitel 2.1 zu untersuchen und um lineare Regler dafür entwerfen zu können, werden die Gleichungen aus Abschnitt 2.1.10 linearisiert.

2.2.1 Linearisierung der rotatorischen Kinematik

Damit sich die Rotationsmatrix \mathbf{R}_{be} in Abhängigkeit von Eulerwinkeln darstellen lässt, wird die Sinusfunktion $\sin(x)$ mit $s(x)$ und die Cosinusfunktion $\cos(x)$ mit $c(x)$ abgekürzt.

$$\mathbf{R}_{be}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c(\theta) \cdot c(\psi) & c(\theta) \cdot s(\psi) & -s(\theta) \\ -c(\phi) \cdot s(\psi) + s(\phi) \cdot s(\theta) \cdot c(\psi) & c(\phi) \cdot c(\psi) + s(\phi) \cdot s(\theta) \cdot s(\psi) & s(\phi) \cdot c(\theta) \\ s(\phi) \cdot s(\psi) + c(\phi) \cdot s(\theta) \cdot c(\psi) & -s(\phi) \cdot c(\psi) + c(\phi) \cdot s(\theta) \cdot s(\psi) & c(\phi) \cdot c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) linearisiert um den Punkt $(\phi_0, \theta_0, \psi_0) = (0, 0, 0)$:

$$L\{\mathbf{R}_{be}(\phi, \theta, \psi)\} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Gleichung (2.28) zeigt den Zusammenhang der Eulerwinkel und der um die Nullage linearisierten Transformationsmatrix \mathbf{R}_{be} . Der Zusammenhang wird benötigt, um bei den linearen Gleichungen geschickt von der Darstellung in Eulerwinkeln zur Darstellung mit Transformationsmatrizeinträgen wechseln zu können. Kapitel 3 benutzt zur anschaulicheren Darstellung der Gleichungen die Eulerwinkel-Repräsentation. Für die Regelung des linearen Systems, Kapitel 4, sind die Gleichungen mit Transformationsmatrizeinträ-

2 Modellbildung UAV

gen dargestellt. Die nichtlineare Kinematik der Rotation lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{be21} \cdot \omega_z - R_{be31} \cdot \omega_y \\ R_{be31} \cdot \omega_x - R_{be11} \cdot \omega_z \\ R_{be11} \cdot \omega_y - R_{be21} \cdot \omega_x \\ R_{be22} \cdot \omega_z - R_{be32} \cdot \omega_y \\ R_{be32} \cdot \omega_x - R_{be12} \cdot \omega_z \\ R_{be12} \cdot \omega_y - R_{be22} \cdot \omega_x \\ R_{be23} \cdot \omega_z - R_{be33} \cdot \omega_y \\ R_{be33} \cdot \omega_x - R_{be13} \cdot \omega_z \\ R_{be13} \cdot \omega_y - R_{be23} \cdot \omega_x \end{pmatrix} \quad (2.13 \text{ rev.})$$

Gleichung (2.13) wird um die Ruhelage, den Punkt

$$\mathbf{R}_{be0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linearisiert.

$$L \left\{ \begin{pmatrix} \dot{R}_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} \right\} = L \left\{ \begin{pmatrix} R_{be21} \cdot \omega_z - R_{be31} \cdot \omega_y \\ R_{be31} \cdot \omega_x - R_{be11} \cdot \omega_z \\ R_{be11} \cdot \omega_y - R_{be21} \cdot \omega_x \\ R_{be22} \cdot \omega_z - R_{be32} \cdot \omega_y \\ R_{be32} \cdot \omega_x - R_{be12} \cdot \omega_z \\ R_{be12} \cdot \omega_y - R_{be22} \cdot \omega_x \\ R_{be23} \cdot \omega_z - R_{be33} \cdot \omega_y \\ R_{be33} \cdot \omega_x - R_{be13} \cdot \omega_z \\ R_{be13} \cdot \omega_y - R_{be23} \cdot \omega_x \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_z \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ -\omega_x \\ -\omega_y \\ \omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Umgeschrieben als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ergibt sich:

$$L \left\{ \begin{pmatrix} \dot{R}_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\omega_x} \\ e^{\omega_y} \\ e^{\omega_z} \\ R_{be11} \\ R_{be21} \\ R_{be31} \\ R_{be12} \\ R_{be22} \\ R_{be32} \\ R_{be13} \\ R_{be23} \\ R_{be33} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

2.2.2 Linearisierung der rotatorischen Dynamik

Die Gleichung der nichtlinearen Dynamik der Rotation lautet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.20 rev.}$$

Gleichung (2.20) linearisiert um den Punkt

$$\mathbf{R}_{be_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_{x_0} \\ \omega_{y_0} \\ \omega_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{x_0a} \\ a_{y_0a} \\ a_{z_0a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
L \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \right\} &= - L \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right\} \\
&+ L \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -l_a & 0 \\ l_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{be} \cdot m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\} \\
&+ L \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \right\} \\
&= - 0 \\
&+ \begin{pmatrix} -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} \cdot e a_{y_a} \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} \cdot e a_{x_a} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{M_x}{I_{xx}} \\ \frac{M_y}{I_{yy}} \\ \frac{M_z}{I_{zz}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dargestellt als Produkt einer Matrix mit einem Vektor :

$$L \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e\omega_x \\ e\omega_y \\ e\omega_z \\ R_{be11} \\ R_{be21} \\ R_{be31} \\ R_{be12} \\ R_{be22} \\ R_{be32} \\ R_{be13} \\ R_{be23} \\ R_{be33} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_x \\ e a_y \\ e a_z \\ {}_b M_{x_{Fa}} \\ {}_b M_{y_{Fa}} \\ {}_b M_{z_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

2.2.3 Linearisierung der translatorischen Kinematik

Die translatorische Kinematik, Gleichung (2.22), ist bereits linear und muss deshalb nicht linearisiert werden.

2.2.4 Linearisierung der translatorischen Dynamik

Die Gleichung der nichtlinearen Dynamik der Translation lautet:

$${}_e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = {}_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + {}_e \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_a + \frac{1}{m} \cdot \mathbf{R}_{eb} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \quad (2.26 \text{ rev.})$$

g wird als konstant angenommen. Gleichung (2.26) wird linearisiert um den stationären Schwebeflug, bei dem der Flugapparat seine Gewichtskraft trägt. Der Arbeitspunkt lautet:

$$\mathbf{R}_{eb0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{x0a} \\ a_{y0a} \\ a_{z0a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_{x0_{Fa}} \\ F_{y0_{Fa}} \\ F_{z0_{Fa}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \cdot m \end{pmatrix}, \quad g_0 = g$$

Die Kraft $F_{z_{Fa}}$ setzt sich somit zusammen aus:

$$F_{z_{Fa}} = F_{z0_{Fa}} + \Delta F_{z_{Fa}} = -g \cdot m + \Delta F_{z_{Fa}} \quad (2.33)$$

Die Linearisierung von (2.26) ergibt:

$$\begin{aligned}
 L \left\{ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\} &= L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \mathbf{R}_{eb} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{Fa} \right\} \\
 &= L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} R_{eb11} & R_{eb12} & R_{eb13} \\ R_{eb21} & R_{eb22} & R_{eb23} \\ R_{eb31} & R_{eb32} & R_{eb33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ -g \cdot m + \Delta F_z \end{pmatrix} \right\} \\
 &= L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} R_{eb11} \cdot F_x + R_{eb12} \cdot F_y + R_{eb13} \cdot \Delta F_z - R_{eb13} \cdot g \cdot m \\ R_{eb21} \cdot F_x + R_{eb22} \cdot F_y + R_{eb23} \cdot \Delta F_z - R_{eb23} \cdot g \cdot m \\ R_{eb31} \cdot F_x + R_{eb32} \cdot F_y + R_{eb33} \cdot \Delta F_z - R_{eb33} \cdot g \cdot m \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} F_x - g \cdot m \cdot R_{eb13} \\ F_y - g \cdot m \cdot R_{eb23} \\ \Delta F_z - g \cdot m \end{pmatrix}_e \\
 &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} F_x - g \cdot m \cdot R_{eb13} \\ F_y - g \cdot m \cdot R_{eb23} \\ \Delta F_z \end{pmatrix}_e \\
 &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} \frac{F_x}{m} - g \cdot R_{eb13} \\ \frac{F_y}{m} - g \cdot R_{eb23} \\ \frac{\Delta F_z}{m} \end{pmatrix}_e \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{eb23} \\ R_{eb13} \\ R_{be12} \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}_e \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_e + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}_e
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Die linearisierte Gleichung von (2.26), dargestellt als Produkt aus einer Matrix mit einem Vektor:

$$L \left\{ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}_e a_{x_a} \\ {}_e a_{y_a} \\ {}_e a_{z_a} \\ {}_b F_{x_{Fa}} \\ {}_b F_{y_{Fa}} \\ {}_b \Delta F_{z_{Fa}} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

2.2.5 Zusammenfassung der Linearisierung

Gleichung (2.22), (2.30), (2.32), (2.35) in einem System zusammengefasst:

$$\underbrace{L}_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} e\dot{v}_x \\ e\dot{v}_y \\ e\dot{v}_z \\ e\dot{r}_x \\ e\dot{r}_y \\ e\dot{r}_z \\ b\dot{\omega}_x \\ b\dot{\omega}_y \\ b\dot{\omega}_z \\ R_{be11} \\ \dot{R}_{be21} \\ \dot{R}_{be31} \\ \dot{R}_{be12} \\ \dot{R}_{be22} \\ \dot{R}_{be32} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e v_x \\ e v_y \\ e v_z \\ e r_x \\ e r_y \\ e r_z \\ b \omega_x \\ b \omega_y \\ b \omega_z \\ R_{be11} \\ R_{be21} \\ R_{be31} \\ R_{be12} \\ R_{be22} \\ R_{be32} \\ R_{be13} \\ R_{be23} \\ R_{be33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ e a_{y_a} \\ e a_{z_a} \\ b F_{x_{F_a}} \\ b F_{y_{F_a}} \\ b \Delta F_{z_{F_a}} \\ b M_{x_{F_a}} \\ b M_{y_{F_a}} \\ b M_{z_{F_a}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (2.36)$$

Neusortierung des Systems

Gleichung (2.36) wird neu sortiert.

$$\begin{pmatrix}
 e\dot{v}_x \\
 e\dot{v}_y \\
 e\dot{v}_z \\
 e\dot{r}_x \\
 e\dot{r}_y \\
 e\dot{r}_z \\
 b\dot{\omega}_x \\
 b\dot{\omega}_y \\
 b\dot{\omega}_z \\
 \dot{R}_{be23} \\
 \dot{R}_{be13} \\
 \dot{R}_{be12} \\
 \dot{R}_{be11} \\
 \dot{R}_{be22} \\
 \dot{R}_{be33} \\
 \dot{R}_{be23} + \dot{R}_{be32} \\
 \dot{R}_{be13} + \dot{R}_{be31} \\
 \dot{R}_{be12} + \dot{R}_{be21}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \mathbf{0}_{18 \times 7}
 \cdot
 \begin{pmatrix}
 e v_x \\
 e v_y \\
 e v_z \\
 e r_x \\
 e r_y \\
 e r_z \\
 b \omega_x \\
 b \omega_y \\
 b \omega_z \\
 R_{be23} \\
 R_{be13} \\
 R_{be12} \\
 R_{be11} \\
 R_{be22} \\
 R_{be33} \\
 R_{be23} + R_{be32} \\
 R_{be13} + R_{be31} \\
 R_{be12} + R_{be21}
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\
 \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix}
 e a_{x_a} \\
 e a_{y_a} \\
 e a_{z_a} \\
 b F_{x_{Fa}} \\
 b F_{y_{Fa}} \\
 b \Delta F_{z_{Fa}} \\
 b M_{x_{Fa}} \\
 b M_{y_{Fa}} \\
 b M_{z_{Fa}}
 \end{pmatrix}
 \tag{2.37}$$

Der obere Teil des Systems, Zeile 1 bis 12 ist steuerbar. Der untere Teil, Zeile 13 bis 18, ist nicht durch Regelung beeinflussbar.

Steuerbares System

Der steuerbare Teil von Gleichung (2.37) ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e\dot{v}_x \\ e\dot{v}_y \\ e\dot{v}_z \\ e\dot{r}_x \\ e\dot{r}_y \\ e\dot{r}_z \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ {}_b\dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e v_x \\ e v_y \\ e v_z \\ e r_x \\ e r_y \\ e r_z \\ {}_b \omega_x \\ {}_b \omega_y \\ {}_b \omega_z \\ R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ e a_{y_a} \\ e a_{z_a} \\ {}_b F_{x_{F_a}} \\ {}_b F_{y_{F_a}} \\ {}_b \Delta F_{z_{F_a}} \\ {}_b M_{x_{F_a}} \\ {}_b M_{y_{F_a}} \\ {}_b M_{z_{F_a}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (2.38)$$

Für das lineare System aus Gleichung (2.38) können lineare Regler entworfen werden. Dies geschieht in Kapitel 4. Im nächsten Kapitel werden regelungstechnisch relevante Eigenschaften dieses Systems untersucht und die Unterschiede zu einem freifliegenden UAV dargestellt.

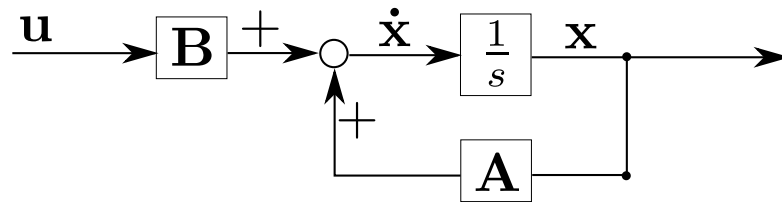


Abbildung 2.3: Schaltbild des linearen Modells

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Es wird angenommen, dass die Lage des Fluggeräts mit einem PD-Regler stabilisiert wird. Bei Experimenten mit einer Landeunterstützung, welche Kräfte außerhalb des Fluggeräteschwerpunktes aufbrachte, stelle man fest, dass eine solche Landeunterstützung Einfluss auf die Lageregelung des Fluggeräts hat ([sandino2014tether], Kapitel II Abschnitt C). Um diese Effekte genauer verstehen zu können, werden in diesem Kapitel grundsätzliche Änderungen des Systemverhaltens der UAV-Lage mathematisch dargestellt.

3.1 Stabilitätsuntersuchung

Bei der Stabilitätsuntersuchung geht es darum, Festzustellen ob ein System sich stabil verhält. Stabiles Verhalten bedeutet bedeutet, dass das System bei einer Auslenkung aus seiner Ruhelage wieder in die Ruhelage zurück kehrt.

3.1.1 Lagestabilität im Freiflug

Um Vergleiche der Lagestabilität des linearen Modells des ans Kugelgelenk gebundenen Fluggeräts mit der eines frei fliegenden Fluggeräts machen zu können, werden zunächst die Gleichungen für das freifliegende Fluggerät aufgestellt.

Lineares Modell

Die linearen Differenzialgleichungen zur Beschreibung der Lage des Flugapparats im Freiflug um den Punkt $(\phi_0, \theta_0, \psi_0, \omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ lauten:

$${}_b\dot{\boldsymbol{\omega}} = {}_b\mathbf{I}^{-1} \cdot {}_b\mathbf{M}, \quad {}_b\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = {}_b\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot {}_b\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$${}_e\dot{\boldsymbol{\phi}} = {}_e\boldsymbol{\omega}, \quad {}_e\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = {}_e\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Um diesen Linearisierungspunkt gilt, dass die Größen in den Koordinatensystemen b und e gleich sind:

$${}_e\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = {}_b\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Das lineare Gesamtsystem der Lage des Flugapparats ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

Das System hat einen sechsfachen Pol bei 0. Die Darstellung in Eulerwinkeln wurde an dieser Stelle gewählt, um bei der Reglerverstärkungsmatrix einheitliche Vorzeichen der Matrixeinträge zu haben.

PD-Regler

Es wird eine Zustandsvektorrückführung, siehe auch Abbildung 3.1, der folgenden Form betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{w} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \mathbf{w} + \begin{pmatrix} -K_x \cdot \phi - K_{xd} \cdot \omega_x \\ -K_y \cdot \theta - K_{yd} \cdot \omega_y \\ -K_z \cdot \psi - K_{zd} \cdot \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{w} - \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{yd} & 0 & 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{zd} & 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

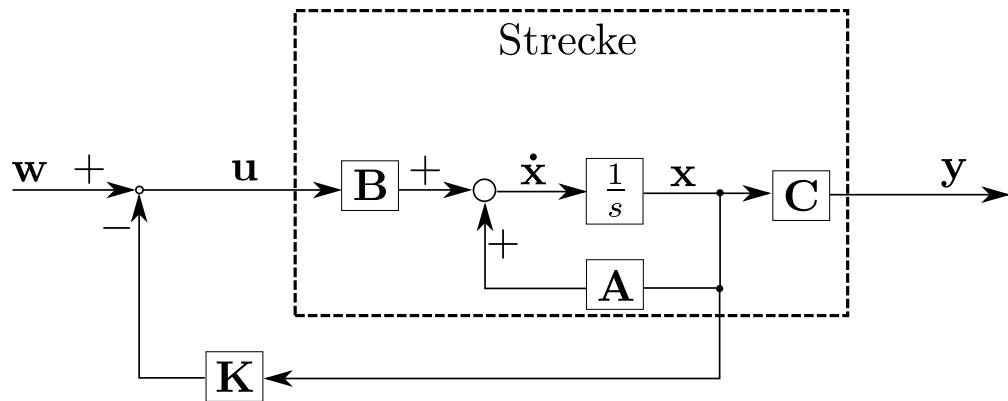


Abbildung 3.1: Schaltbild der Zustandsvektorrückführung.

Geschlossener Regelkreis

Mit dem PD-Regler aus Gleichung (3.5) eingesetzt in das System (3.4) ergibt sich folgende Gleichung für den geschlossenen Regelkreis:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}^e} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^e} \\
 &+ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \\
 &\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e \mathbf{w} - \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{yd} & 0 & 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{zd} & 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}^e}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Das System lässt sich vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}^e} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{-K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{-K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A-B-K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^e} \\
 &+ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot e \mathbf{w}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Es wird folgende Abkürzung verwendet:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (3.8)$$

Überprüfung der Stabilität

Das charakteristische Polynom von $\bar{\mathbf{A}}$ berechnet sich mit:

$$\begin{aligned} & \det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{-K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{-K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{(I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x)(I_{yy} \cdot \lambda^2 + K_{yd} \cdot \lambda + K_y)(I_{zz} \cdot \lambda^2 + K_{zd} \cdot \lambda + K_z)}{I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Es gilt die Annahme, dass:

$$\begin{aligned} K_x &> 0, & K_y &> 0, & K_z &> 0, \\ K_{xd} &> 0, & K_{yd} &> 0, & K_{zd} &> 0, \\ I_{xx} &> 0, & I_{yy} &> 0, & I_{zz} &> 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Stabilitätsuntersuchung wird der Satz von Hurwitz herangezogen. Die jeweiligen Rotationsbewegungen um die x-, y- und z-Achse können unabhängig von einander betrachtet werden. Die Hurwitz-Matrizen \mathbf{H} für die drei Polynome aus (3.9) lauten.

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 \\ I_{xx} & K_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} K_{yd} & 0 \\ I_{yy} & K_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_z = \begin{bmatrix} K_{zd} & 0 \\ I_{zz} & K_z \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Damit die Nullstellen der Polynome und somit die Pole des geschlossenen Regelkreises einen negativen Realteil haben, müssen alle Koeffizienten der Polynome und alle Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrizen positiv sein. Die Unterdeterminanten sind:

$$K_{xd}, \quad K_{xd} \cdot K_x, \quad (3.12)$$

$$K_{yd}, \quad K_{zd} \cdot K_y, \quad (3.13)$$

$$K_{zd}, \quad K_{zd} \cdot K_z \quad (3.14)$$

Alle Koeffizienten der Polynome und alle Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrizen sind mit den Bedingungen aus (3.10) immer positiv. Somit ist der geschlossene Regelkreis im Freiflugfall immer stabil.

3.1.2 Lagestabilität des fixierten Flugapparats

Nachdem im vorausgehenden Abschnitt die Gleichungen für das freifliegende Fluggerät hergeleitet wurden, werden hier die Gleichungen zur Untersuchung der Lagestabilität des linearen Modells für den durch das Kugelgelenk fixierten Flugapparat aufgestellt.

Lineares Modell

Die lineare Differenzialgleichung, die das Verhalten des am Kugelgelenk fixierten Flugapparat beschreibt wurde in Kapitel 2.2 hergeleitet. Sie lautet:

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{v}_y \\ {}_e\dot{v}_z \\ {}_e\dot{r}_x \\ {}_e\dot{r}_y \\ {}_e\dot{r}_z \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ {}_b\dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e v_y \\ {}_e v_z \\ {}_e r_x \\ {}_e r_y \\ {}_e r_z \\ {}_b \omega_x \\ {}_b \omega_y \\ {}_b \omega_z \\ R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e a_{x_a} \\ {}_e a_{y_a} \\ {}_e a_{z_a} \\ {}_b F_{x_{Fa}} \\ {}_b F_{y_{Fa}} \\ {}_b \Delta F_{z_{Fa}} \\ {}_b M_{x_{Fa}} \\ {}_b M_{y_{Fa}} \\ {}_b M_{z_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (2.38 \text{ rev.})$$

Es wird der Spezialfall betrachtet, dass das Kugelgelenk, welches Fluggerät und Roboterarm verbindet, sich translatorisch nicht beschleunigt. Dieser Spezialfall ist ein sehr häufig vorkommender Fall, denn er stellt unter anderem die Situation dar, dass sich der Roboterarm nicht bewegt und lediglich das Fluggerät eine Lageabweichung hat. Ähnliche Ergebnisse haben auch alle Fälle für ein durch den Roboter beschleunigtes Kugelgelenk, außer wenn der Roboterarm das Kugelgelenk exakt gleich wie den Schwerpunkt des UAV beschleunigt. Bei exakt gleicher Beschleunigung ergibt sich der Freiflugfall. Soll sich im linearen Modell das Kugelgelenk translatorisch nicht beschleunigen, so muss gelten:

$${}_e a_{x_a} + g \cdot R_{be13} + \frac{1}{m} \cdot {}_b F_{x_{Fa}} = 0 \quad (3.15)$$

$${}_e a_{y_a} + g \cdot R_{be23} + \frac{1}{m} \cdot {}_b F_{y_{Fa}} = 0 \quad (3.16)$$

$${}_e a_{z_a} + \frac{1}{m} \cdot {}_b \Delta F_{z_{Fa}} = 0 \quad (3.17)$$

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Nimmt man an, dass das UAV keine Kräfte in x-Richtung und in y-Richtung aufbringen kann, $F_{x_{F_a}} = 0$ und $F_{y_{F_a}} = 0$, zum Beispiel bei einem Quadrocopter, ergeben sich folgende Konstanten für die Beschleunigungseingänge:

$${}^e a_{x_a} = -g \cdot R_{be13} \quad (3.18)$$

$${}^e a_{y_a} = -g \cdot R_{be23} \quad (3.19)$$

$${}^e a_{z_a} = -\frac{1}{m} \cdot {}_b \Delta F_{z_{F_a}} \quad (3.20)$$

Setzt man diese Ergebnisse für die Beschleunigungseingänge in (2.38) ein, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} {}^e \dot{v}_x \\ {}^e \dot{v}_y \\ {}^e \dot{v}_z \\ {}^e \dot{r}_x \\ {}^e \dot{r}_y \\ {}^e \dot{r}_z \\ {}_b \dot{\omega}_x \\ {}_b \dot{\omega}_y \\ {}_b \dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g \cdot m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e v_y \\ {}^e v_z \\ {}^e r_x \\ {}^e r_y \\ {}^e r_z \\ {}_b \omega_x \\ {}_b \omega_y \\ {}_b \omega_z \\ R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b M_{x_{F_a}} \\ {}_b M_{y_{F_a}} \\ {}_b M_{z_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ treten in den translatorischen Zuständen keine Änderungen auf. Daher werden nur die rotatorischen Zustände

betrachtet. Die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ {}_b\dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \cdot m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g \cdot m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b\omega_x \\ {}_b\omega_y \\ {}_b\omega_z \\ R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_bM_{xFa} \\ {}_bM_{yFa} \\ {}_bM_{zFa} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Um eine leichtere Vergleichbarkeit mit Abschnitt 3.1.1 zu ermöglichen, wird die Darstellung in Eulerwinkeln dieser Stelle verwendet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \cdot m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \cdot m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_bM_{xFa} \\ {}_bM_{yFa} \\ {}_bM_{zFa} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}^e} \quad (3.23)$$

Pole der offenen Regelstrecke

Das charakteristische Polynom von \mathbf{A} berechnet sich mit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (3.24)$$

$$= \frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 \cdot I_{xx} - g \cdot m \cdot l_a) \cdot (\lambda^2 \cdot I_{yy} - g \cdot m \cdot l_a)}{I_{xx} \cdot I_{yy}} \quad (3.25)$$

Die Pole des Systems sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von \mathbf{A} .

$$\frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 \cdot I_{xx} - g \cdot m \cdot l_a) \cdot (\lambda^2 \cdot I_{yy} - g \cdot m \cdot l_a)}{I_{xx} \cdot I_{yy}} = 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}}} & \lambda_2 &= -\sqrt{\frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}}} & \lambda_5 &= 0 \\ \lambda_3 &= \sqrt{\frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{yy}}} & \lambda_4 &= -\sqrt{\frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{yy}}} & \lambda_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die offene Regelstrecke hat zwei instabile Pole.

PD-Regler

Die Gleichung des PD-Reglers zur Stabilisierung der Lage lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{w} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \mathbf{w} + \begin{pmatrix} -K_x \cdot \phi - K_{xd} \cdot \omega_x \\ -K_y \cdot \theta - K_{yd} \cdot \omega_y \\ -K_z \cdot \psi - K_{zd} \cdot \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{w} - \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{yd} & 0 & 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{zd} & 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5 \text{ rev.})$$

Geschlossener Regelkreis

Setzt man den PD-Regler aus Gleichung (3.5) in Gleichung(3.23) ein, ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e \mathbf{w} - \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{yd} & 0 & 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{zd} & 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.28)$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a - K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a - K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot e \mathbf{w} \quad (3.29)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (3.30)$$

Überprüfung der Stabilität

Das charakteristische Polynom von $\bar{\mathbf{A}}$ berechnet sich mit.

$$\begin{aligned} \det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \cdot \mathbf{E}) &= \left(I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x - g \cdot m \cdot l_a \right) \\ &\cdot \left(I_{yy} \cdot \lambda^2 + K_{yd} \cdot \lambda + K_y - g \cdot m \cdot l_a \right) \\ &\cdot \frac{(I_{zz} \cdot \lambda^2 + K_{zd} \cdot \lambda + K_z)}{I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Es gilt die Annahme, dass:

$$\begin{aligned} K_x &> 0, & K_y &> 0, & K_z &> 0, \\ K_{xd} &> 0, & K_{yd} &> 0, & K_{zd} &> 0, \\ I_{xx} &> 0, & I_{yy} &> 0, & I_{zz} &> 0, \\ g &> 0, & m &> 0, & l_a &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Für die Stabilitätsuntersuchung wird der Satz von Hurwitz herangezogen. Die jeweiligen Rotationsbewegungen um die x-, y- und z-Achse können unabhängig von einander betrachtet werden. Die Hurwitz-Matrizen \mathbf{H} für die drei Polynome aus (3.31) lauten.

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} K_{xd} & 0 \\ I_{xx} & K_x - g \cdot m \cdot l_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} K_{yd} & 0 \\ I_{yy} & K_y - g \cdot m \cdot l_a \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H}_z = \begin{bmatrix} K_{zd} & 0 \\ I_{zz} & K_z \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Damit die Nullstellen der Polynome und somit die Pole des geschlossenen Regelkreises einen negativen Realteil haben, müssen alle Koeffizienten der Polynome und alle Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrizen positiv sein. Die Unterdeterminanten sind:

$$K_{xd}, \quad K_{xd} \cdot (K_x - g \cdot m \cdot l_a), \quad (3.35)$$

$$K_{yd}, \quad K_{yd} \cdot (K_y - g \cdot m \cdot l_a), \quad (3.36)$$

$$K_{zd}, \quad K_{zd} \cdot K_z, \quad (3.37)$$

Alle Koeffizienten der Polynome und alle Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrizen sind mit den Bedingungen aus (3.32) immer positiv, wenn gilt:

$$\frac{K_x}{g \cdot m} > l_a \quad (3.38)$$

$$\frac{K_y}{g \cdot m} > l_a \quad (3.39)$$

Somit ist der geschlossene Regelkreis im Fall, dass der Flugapparat an ein Kugelgelenk fixiert ist, stabil, solange Bedingung (3.32) und die Bedingungen (3.38) und (3.39) erfüllt sind.

3.2 Dämpfungsgrad und Eigenfrequenz

Der Einfluss der Hebellänge l_a auf den Dämpfungsgrad und die Eigenfrequenz des geschlossenen Regelkreises wird in diesem Abschnitt überprüft. Das charakteristische Polynom des Modells mit Lagereger im Freiflug lautet:

$$\frac{(I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x)(I_{yy} \cdot \lambda^2 + K_{yd} \cdot \lambda + K_y)(I_{zz} \cdot \lambda^2 + K_{zd} \cdot \lambda + K_z)}{I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}} \quad (3.9 \text{ rev.})$$

Das charakteristische Polynom des Modells mit Lagereger, fixiert an ein Kugelgelenk ist:

$$\begin{aligned} & \left(I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x - g \cdot m \cdot l_a \right) \\ & \cdot \left(I_{yy} \cdot \lambda^2 + K_{yd} \cdot \lambda + K_y - g \cdot m \cdot l_a \right) \\ & \cdot \frac{(I_{zz} \cdot \lambda^2 + K_{zd} \cdot \lambda + K_z)}{I_{xx} \cdot I_{yy} \cdot I_{zz}} \end{aligned} \quad (3.31 \text{ rev.})$$

Die Struktur der einzelnen Klammern entspricht der eines charakteristischen Polynoms einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 \quad (3.40)$$

ζ ist der Dämpfungsgrad, ω_0 die ungedämpfte Eigenfrequenz der Pole. Vergleich der ersten Klammer des charakteristischen Polynom für den Freiflugfall mit (3.40).

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 = I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x \quad (3.41)$$

$$\implies \omega_0 = \sqrt{\frac{K_x}{I_{xx}}} \quad \zeta = \frac{K_{xd}}{2 \cdot \sqrt{K_x \cdot I_{xx}}} \quad (3.42)$$

Analoges kann für die zweite und die dritte Klammer berechnet werden. Vergleich der ersten Klammer des charakteristischen Polynom für den Fall, dass das Fluggerät an das Kugelgelenk fixiert ist, mit (3.40).

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 = I_{xx} \cdot \lambda^2 + K_{xd} \cdot \lambda + K_x - g \cdot m \cdot l_a \quad (3.43)$$

$$\implies \omega_0 = \sqrt{\frac{K_x - g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}}} \quad \zeta = \frac{K_{xd}}{2 \cdot \sqrt{(K_x - g \cdot m \cdot l_a) \cdot I_{xx}}} \quad (3.44)$$

Vergleich der dritten Klammer des charakteristischen Polynom für den Fall, dass das Fluggerät an das Kugelgelenk fixiert ist, mit (3.40).

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 = I_{zz} \cdot \lambda^2 + K_{zd} \cdot \lambda + K_z \quad (3.45)$$

$$\implies \omega_0 = \sqrt{\frac{K_z}{I_{zz}}} \quad \zeta = \frac{K_{zd}}{2 \cdot \sqrt{K_z \cdot I_{zz}}} \quad (3.46)$$

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Für die Hebellänge $l_a = 0$ vereinfachen sich die Ergebnisse aus (3.44) zu (3.42). (3.46) ist bereits wie im Freiflug. Betrachtet man die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0 in (3.44), so stellt man fest, dass sie im Vergleich zum Freiflug für größer werdende Hebellängen abnimmt. Die Dämpfung in (3.44) nimmt für größer werdende Hebellängen zu. Um den Einfluss des Hebelarms auf die Pole auszugleichen, können die Reglerparameter folgendermaßen angepasst werden.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_x}{I_{xx}}} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{K_{x_{neu}} - g \cdot m \cdot l_a}{I_{xx}}} \quad (3.47)$$

$$\zeta = \frac{K_{xd}}{2 \cdot \sqrt{K_x \cdot I_{xx}}} \stackrel{!}{=} \frac{K_{xd_{neu}}}{2 \cdot \sqrt{(K_{x_{neu}} - g \cdot m \cdot l_a) \cdot I_{xx}}} \quad (3.48)$$

$$\implies K_{x_{neu}} = K_x + g \cdot m \cdot l_a, \quad K_{xd_{neu}} = K_{xd} \quad (3.49)$$

Für die y-Parameter gestaltet sich die Berechnung analog.

3.3 Stationäre Genauigkeit

In diesem Abschnitt wird die stationäre Genauigkeit der Zustandsvektorrückführung zur Lageregelung überprüft.

3.3.1 Stationäre Genauigkeit im Freiflug

Die Gleichung, die den Flugapparat mit eingebautem Lageregler im Freiflug beschreibt, lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{-K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{-K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (3.7 \text{ rev.})$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{w}$$

Es wird folgende Abkürzung verwendet:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (3.50)$$

Die Gleichung für den Ausgang des Systems lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Die Übertragungsmatrix des geschlossenen Kreises im Frequenzbereich berechnet sich mit:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx} \cdot s^2 + K_{xd} \cdot s + K_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy} \cdot s^2 + K_{yd} \cdot s + K_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz} \cdot s^2 + K_{zd} \cdot s + K_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Für den Grenzfall s gegen Null ergibt sich:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_z} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Wie in (3.53) zu sehen ist, ist der geschlossene Regelkreis mit einer Zustandsvektorrückführung als Lageregelung im Freiflugfall nicht stationär genau. Das bedeutet, dass die kommandierte Lage ${}^e \mathbf{w}$ vom System nicht exakt eingenommen wird.

3.3.2 Stationäre Genauigkeit des fixierten Flugapparats

Die Gleichung, die den Flugapparat mit eingebautem Lageregler fixiert an ein Kugelgelenk beschreibt, lautet:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a - K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{g \cdot m \cdot l_a - K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot {}^e \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.29 \text{ rev.})$$

3 Untersuchungen am linearen UAV Modell

Es wird folgende Abkürzung gemacht:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (3.54)$$

Die Gleichung für den Ausgang des Systems lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{matrix} \quad (3.55)$$

Die Übertragungsmatrix des geschlossenen Kreises im Frequenzbereich berechnet sich mit:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx} \cdot s^2 + K_{xd} \cdot s + K_x - g \cdot m \cdot l_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy} \cdot s^2 + K_{yd} \cdot s + K_y - g \cdot m \cdot l_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz} \cdot s^2 + K_{zd} \cdot s + K_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Für den Grenzfall s gegen Null ergibt sich:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_x - g \cdot m \cdot l_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_y - g \cdot m \cdot l_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_z} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Wie in (3.57) zu sehen ist, ist der geschlossene Regelkreis mit einer Zustandsvektorrückführung als Lageregelung auch für den Fall, dass der Flugapparat an ein Kugelgelenk fixiert ist, nicht stationär genau. Das bedeutet, dass die kommandierte Lage ${}_e \mathbf{w}$ vom System nicht exakt eingenommen wird.

3.4 Zusammenfassung der Untersuchungen am linearen Modell

Wie in diesem Kapitel mathematisch zu sehen ist, bestätigt sich die Aussage aus ([sandino2014tethe], Kapitel II Abschnitt C), dass Kräfteinfluss außerhalb des Schwerpunkts die Lageregelung des Flugapparats ungünstig beeinflusst. Der Flugapparat kann nicht ohne weiteres fixiert und gelandet werden, da sich die Fixierung auf die Eigenschaften der Lageregelung des Flugapparats auswirkt. Um diese Auswirkungen durch Maßnahmen im Flugapparat oder durch Berücksichtigung in der Regelung des Roboterarms berücksichtigen zu können, muss eine Kommunikation zwischen Fluggerät und Roboterarmregelung stattfinden. Der Zustand und das Verhalten des Fluggeräts müssen der Roboterarmregelung bekannt sein. Idealerweise sollten sich auch Steuerbefehle ans Fluggerät kommandieren lassen.

4 Regelung des linearen Systems

In diesem Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten zur linearen Regelung des UAV-Landesystems hergeleitet. Hierbei wird das lineare System aus 2.2 verwendet. Es beschreibt das UAV mit seinem Hebelarm und dem Kugelgelenk. Wie die Beschleunigungen der Beschleunigungseingänge ${}^e a_{x_a}$, ${}^e a_{y_a}$ und ${}^e a_{z_a}$ von System (2.38) durch den Roboter aufgebracht werden ist Teil von Kapitel 5.

4.1 Herleitung der Regelstrecken

Zunächst werden zur übersichtlicheren Handhabung die linear unabhängigen Teile von Gleichung (2.38) von einander getrennt. Die Gleichung des unregulierten linearen Modells lautet:

$$\begin{pmatrix} {}^e \dot{v}_x \\ {}^e \dot{v}_y \\ {}^e \dot{v}_z \\ {}^e \dot{r}_x \\ {}^e \dot{r}_y \\ {}^e \dot{r}_z \\ {}^b \dot{\omega}_x \\ {}^b \dot{\omega}_y \\ {}^b \dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be23} \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e v_y \\ {}^e v_z \\ {}^e r_x \\ {}^e r_y \\ {}^e r_z \\ {}^b \omega_x \\ {}^b \omega_y \\ {}^b \omega_z \\ R_{be23} \\ R_{be13} \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^e a_{y_a} \\ {}^e a_{z_a} \\ {}^b F_{x_{Fa}} \\ {}^b F_{y_{Fa}} \\ {}^b \Delta F_{z_{Fa}} \\ {}^b M_{x_{Fa}} \\ {}^b M_{y_{Fa}} \\ {}^b M_{z_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (2.38 \text{ rev.})$$

4 Regelung des linearen Systems

Das System aus Gleichung (2.38) kann in vier von einander unabhängige Systeme aufgeteilt werden. Hierzu wird Gleichung (2.38) neu sortiert.

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_x \\ {}^e\dot{r}_x \\ {}^b\dot{\omega}_y \\ R_{be_{13}} \\ {}^e\dot{v}_y \\ {}^e\dot{r}_y \\ {}^b\dot{\omega}_x \\ R_{be_{23}} \\ {}^e\dot{v}_z \\ {}^e\dot{r}_z \\ {}^b\dot{\omega}_z \\ R_{be_{12}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e r_x \\ {}^b \omega_y \\ R_{be_{13}} \\ {}^e v_y \\ {}^e r_y \\ {}^b \omega_x \\ R_{be_{23}} \\ {}^e v_z \\ {}^e r_z \\ {}^b \omega_z \\ R_{be_{12}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m \cdot l_a}{I_{yy}} & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^b F_{x_{F_a}} \\ {}^b M_{y_{F_a}} \\ {}^e a_{y_a} \\ {}^b F_{y_{F_a}} \\ {}^b M_{x_{F_a}} \\ {}^e a_{z_a} \\ {}^b \Delta F_{z_{F_a}} \\ {}^b M_{z_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Die vier von einander unabhängigen Systeme sind:

Translation in x-Richtung und Rotation um die y-Achse.

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_x \\ {}^e\dot{r}_x \\ {}^b\dot{\omega}_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e r_x \\ {}^b \omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & 0 & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^b F_{x_{F_a}} \\ {}^b M_{y_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Translation in y-Richtung und Rotation um die x-Achse.

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_y \\ {}^e\dot{r}_y \\ {}^b\dot{\omega}_x \\ R_{be_{23}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_y \\ {}^e r_y \\ {}^b \omega_x \\ R_{be_{23}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & 0 & \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{y_a} \\ {}^b F_{y_{F_a}} \\ {}^b M_{x_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Translation in z-Richtung.

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_z \\ {}^e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_z \\ {}^e r_z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{z_a} \\ {}^b \Delta F_{z_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Rotation um die z-Achse.

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b\omega_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_bM_{zFa} \quad (4.5)$$

Im Folgenden werden die Annahmen aus Tabelle 4.1 getroffen: Durch die Annahme

-
- Der Flugapparat bringt bis auf seine Trimmkraft $F_{z0Fa} = -g \cdot m$ keine zusätzlichen translatorischen Kräfte auf, das heißt, $F_{xFa} = 0$, $F_{yFa} = 0$, $\Delta F_{zFa} = 0$.
 - Die Lageregelung des Flugapparats ist als Zustandsvektorrückführung realisiert.
 - Die Parameter der UAV Onboard-Lageregelung sind bekannt.
-

Tabelle 4.1: Generelle Annahmen für die Reglerauslegung.

$F_{xFa} = 0$, $F_{yFa} = 0$, $\Delta F_{zFa} = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (4.2), (4.3), (4.4) und (4.5) zu:

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ \dot{R}_{be13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e a_{x_a} \\ {}_b M_{yFa} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_y \\ {}_e\dot{r}_y \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ \dot{R}_{be23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_y \\ {}_e r_y \\ {}_b \omega_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e a_{y_a} \\ {}_b M_{xFa} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_z \\ {}_e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_z \\ {}_e r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_e a_{z_a} \quad (4.8)$$

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_z \\ \dot{R}_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b\omega_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_bM_{zFa} \quad (4.5 \text{ rev.})$$

4 Regelung des linearen Systems

Um die Gleichungen (4.6), (4.7) und (4.5) um die Lageregelung des Flugapparats zu ergänzen, wird Gleichung (3.7) betrachtet.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{-K_x}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{-K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A-B-K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{w} \quad (3.7 \text{ rev.})$$

Setzt man für den Sollwert der Lageregelung des UAVs $\mathbf{w} = (0, 0, 0)^T$, entfällt Matrix \mathbf{B} in (3.7). Die Lageregelung aus (3.7) wird in (4.6), (4.7) und (4.5) eingesetzt. Die vier Gleichungen werden zu:

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_x \\ e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ {}_b M_{y_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_y \\ e\dot{r}_y \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & \frac{-K_x}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_y \\ e r_y \\ {}_b \omega_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} & \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_{y_a} \\ {}_b M_{x_{F_a}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_z \\ e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_z \\ e r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e a_{z_a} \quad (4.8 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b \omega_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_b M_{z_{F_a}} \quad (4.11)$$

Anders als in Gleichung (3.7) ist in Gleichung (4.9) das Vorzeichen von K_y positiv. Dies kommt durch die Beziehung $R_{be13} = -\theta$. Es werden in den folgenden Abschnitten verschiedene Zustandsvektorrückführungen dargestellt. Siehe Abbildung 3.1. Die Gleichung für den Eingang \mathbf{u} lautet daher:

$$\underbrace{\mathbf{u}}_{\text{Eingang}} = - \underbrace{\mathbf{K}}_{\text{Reglervverstärkungsmatrix}} \cdot \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Zustand}} + \underbrace{\mathbf{w}}_{\text{Sollwert}} \quad (4.12)$$

4.2 Landeregelung ausschließlich mit dem Roboterarm

Die Position des Flugapparats soll allein mit dem Roboterarm geregelt werden. Vorteil dieses Konzepts ist, dass nur der Zustand des Flugapparats und sein Systemverhalten bekannt sein muss und keine Steuerkommandos zum Flugapparat gesendet werden müssen. Werden dem UAV keine Zusatzmomente von außen kommandiert, ${}_bM_{x_{Fa}} = 0$, ${}_bM_{y_{Fa}} = 0$ und ${}_bM_{z_{Fa}} = 0$, erhält man:

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_e a_{x_a} \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_y \\ {}_e\dot{r}_y \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & \frac{-K_x}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_y \\ {}_e r_y \\ {}_b \omega_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_e a_{y_a} \quad (4.14)$$

$$\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_z \\ {}_e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_e v_z \\ {}_e r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_e a_{z_a} \quad (4.8 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b \omega_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Die Drehgeschwindigkeit um die z-Achse und somit auch auf die Lage um die z-Achse kann im System (4.15) durch Regelung nicht beeinflusst werden. Deshalb wird die Gleichung zum Entwurf der Regelung nicht benutzt. Die zur Auslegung der Regelung benötigten Regelstrecken sind (4.13), (4.14) und (4.8).

4.2.1 Positionsregelung mit Polvorgabe

Regelung der Translation in x-Richtung und Stabilisierung der Rotation um die y-Achse

Betrachtet wird die Gleichung für die Translation in x-Richtung und Rotation um die y-Achse:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot \underbrace{{}_e a_{x_a}}_u \quad (4.13 \text{ rev.})$$

4 Regelung des linearen Systems

Für eine Folgeregelung für die Position in x-Richtung lautet die Ausgangsgleichung:

$$\underbrace{e^{r_x}}_y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{v_x} \\ e^{r_x} \\ b\omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_x \quad (4.16)$$

Beim einem Eingrößensystem wird die Reglerverstärkungsmatrix \mathbf{K} zu einem Zeilenvektor \mathbf{k} . Um die Reglerparameter \mathbf{k} zu berechnen, wird die Ackermann-Formel ([rt2], Seite 54) verwendet. Sie lautet:

$$\mathbf{k} = \mathbf{s}_S \cdot (\bar{a}_0 \cdot \mathbf{A}^0 + \bar{a}_1 \cdot \mathbf{A}^1 + \dots + \bar{a}_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) \quad (4.17)$$

n ist die Anzahl der Zustände, in diesem Fall 4. \mathbf{s}_S ist die letzte Zeile von \mathbf{Q}_S^{-1} , \mathbf{Q}_S^{-1} ist die invertierte Steuerbarkeitsmatrix ([rt2], Seite 33).

$$\mathbf{Q}_S^{-1} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B}]^{-1} \quad (4.18)$$

Für \mathbf{B} wird \mathbf{b} eingesetzt. \bar{a}_i sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises. Für diesen Fall werden vier Pole des geschlossenen Regelkreises gewählt: $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$ und $\bar{\lambda}_4$. Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises lautet:

$$\begin{aligned} & (s - \bar{\lambda}_1) \cdot (s - \bar{\lambda}_2) \cdot (s - \bar{\lambda}_3) \cdot (s - \bar{\lambda}_4) \\ = & s^4 \\ & + (-\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4) \cdot s^3 \\ & + (\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4) \cdot s^2 \\ & + (-\bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3) \cdot s \\ & + (\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\bar{a}_0 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \quad (4.20)$$

$$\bar{a}_1 = -\bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \quad (4.21)$$

$$\bar{a}_2 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \quad (4.22)$$

$$\bar{a}_3 = -\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 \quad (4.23)$$

Die Formel des geschlossenen Regelkreises lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (4.24)$$

4.2 Landeregelung ausschließlich mit dem Roboterarm

$\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}$ ist ein dyadisches Produkt [dyadprod]. Der geschlossene Regelkreis (4.24) ist nicht stationär genau. Deshalb wird für ihn ein skalares Vorfilter v_{vor} errechnet.

$$v_{vor} = - \left(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})^{-1} \cdot \mathbf{b} \right)^{-1} \quad (4.25)$$

Der vollständige Regelkreis für eine Folgeregelung von ${}^e r_x$ lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot v_{vor} \cdot {}^e r_{x_{soll}} \quad (4.26)$$

Aus Platzgründen ist das Ergebnis des Reglerverstärkungsvektors \mathbf{k} und die daraus folgenden Ergebnisse nicht symbolisch aufgeschrieben.

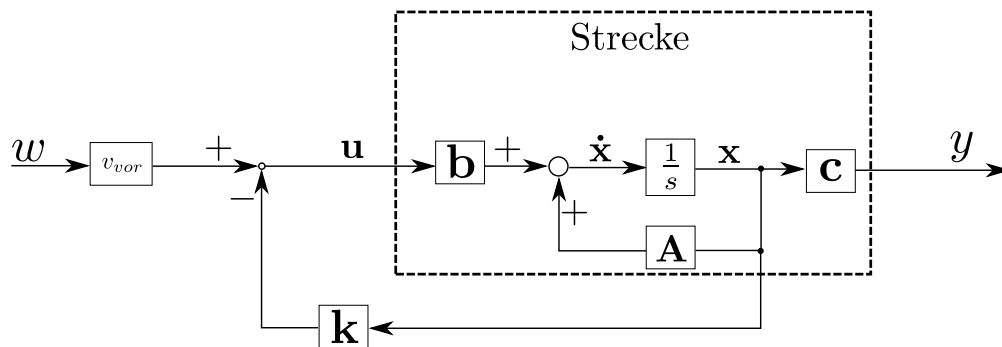


Abbildung 4.1: Schaltbild der Zustandsvektorrückführung mit Vorfilter.

Integraler Regleranteil Falls die Regelung mit Vorfilter keine ausreichende stationäre Genauigkeit erzielt, kann alternativ dazu eine Regelung mit integralem Regleranteil verwendet werden. Der Vorfilter wird dann nicht mehr benötigt. Damit die Positionsregelung auch bei geringen Abweichungen im Streckenmodell stationär genau wird, wird ein integraler Regleranteil für den Positionsfehler hinzugefügt. Der Zustandsvektor wird um die Zustandsgröße $e_{r_{x_i}}$, dem Integral des Positionsfehlers in x-Richtung ergänzt. Das

erweiterte Streckenmodell mit den Größen aus (4.13) und (4.16), ist:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{e}_{r_{x_i}} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ e_{r_{x_i}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} e \dot{v}_x \\ e \dot{r}_x \\ b \dot{\omega}_y \\ R_{be13} \\ \dot{e}_{r_{x_i}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{erw}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ b \omega_y \\ R_{be13} \\ e_{r_{x_i}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{erw}} \\
 &+ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{erw}} \cdot \underbrace{e a_{x_a}}_u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e r_{x_{soll}}}_w
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Mit den Koeffizienten eines Charakteristischen Polynoms 5. Grades

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_0 &= -\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 \bar{a}_1 &= \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 &\quad + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 \bar{a}_2 &= -\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 &\quad - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_5 - \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_5 - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 - \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 - \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 \bar{a}_3 &= \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_4 \\
 &\quad + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\
 \bar{a}_4 &= -\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_5
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

und mit den Größen \mathbf{A}_{erw} , \mathbf{b}_{erw} und \mathbf{x}_{erw} , kann mit der Ackermann-Formel die Reglerverstärkung in Form des Zeilenvektors \mathbf{k} für eine Polvorgabe berechnet werden. Ein Schaltbild der erweiterten Strecke ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Analog zur normalen Zustandsvektorrückführung lautet die Gleichung für \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{erw} \tag{4.29}$$

Regelung der Translation in y-Richtung und Stabilisierung der Rotation um die x-Achse

Die Berechnungen sind analog zu Abschnitt 4.2.1, lediglich steht zu Beginn Gleichung (4.14) statt Gleichung (4.13).

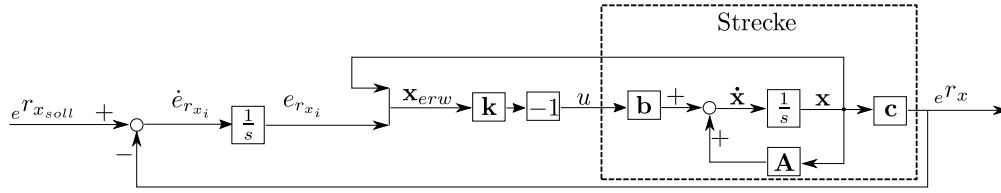


Abbildung 4.2: Schaltbild der erweiterten Strecke.

Regelung der Translation in z-Richtung

Die Berechnungen sind ebenfalls analog zu Abschnitt 4.2.1. Es steht zu Beginn Gleichung (4.8) statt Gleichung (4.13). Hier verändert sich jedoch auch das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises.

$$s^2 + (-\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) \cdot s + (\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2) \quad (4.30)$$

Daraus folgt:

$$\bar{a}_0 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \quad (4.31)$$

$$\bar{a}_1 = -\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 \quad (4.32)$$

Zusammenfassung der Positionsregelung mit dem Roboterarm

Mit der Herangehensweise wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben können für die Systeme (4.13), (4.14) und (4.8) die Pole vorgegeben werden und die Strecken einer Folgeregelung unterzogen werden. Das Folgeverhalten ist für ein exaktes Modell der Regelstrecke stationär genau. Benötigt man stationäres Verhalten auch bei kleinen Abweichungen im Streckenmodell, sollte die Regelung um einen integralen Anteil ergänzt werden.

4.3 Landeregelungen mit dem Roboterarm und UAV-Aktuatorik

Bei den Reglern in diesem Abschnitt wird dem UAV aktiv zusätzlich zum internen Reglerkommando des UAVs ein Zusatzmoment kommandiert. Es gelten die gleichen Annahmen wie in Tabelle 4.1. Zusätzlich gelten die Annahmen aus Tabelle 4.2.

-
- Dem Flugapparat können Momente kommandiert werden, die auf das interne Momenten-Reglerkommando des Flugapparats aufaddiert werden.
-

Tabelle 4.2: Zusätzliche Annahmen für die Reglerauslegung Positionsregelung mit Polvorgabe und Störmomentenkompensation.

4.3.1 Positionsregelung durch den Roboterarm, Armstörmomentenkompensation durch das UAV

Die Motivation hinter diesem Konzept ist, dass das durch die Roboterarmbewegung entstehende Moment genau bekannt ist und somit durch Kommandierung eines Gegenmoments am Flugapparat ausgeglichen werden kann. Der Flugapparat bleibt dadurch in der Nulllage. Das Signal für den Momenteneingang soll so gewählt werden, dass das durch die Roboterbewegung auftretende Moment kompensiert wird. Die vier Regelstrecken sind:

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_x \\ e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ {}_b M_{y_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (4.9 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_y \\ e\dot{r}_y \\ {}_b\dot{\omega}_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & \frac{-K_x}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_y \\ e r_y \\ {}_b \omega_x \\ R_{be23} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_{y_a} \\ {}_b M_{x_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (4.10 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} e\dot{v}_z \\ e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_z \\ e r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e a_{z_a} \quad (4.8 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}_b\dot{\omega}_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_b \omega_z \\ R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}_b M_{z_{Fa}} \quad (4.11 \text{ rev.})$$

Regelung der Translation in x-Richtung, Kompensation des Moments durch das UAV um die y-Achse

Gleichung (4.9) beschreibt die Translation in x-Richtung und die die Drehung um die y-Achse.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e\dot{v}_x \\ e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ {}_b M_{y_{Fa}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (4.9 \text{ rev.})$$

Wenn der Eingang $e a_{x_a}$ keinen Einfluss mehr auf die Drehung um die y-Achse haben soll, muss gelten:

$$m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} \cdot e a_{x_a} + \frac{1}{I_{yy}} \cdot {}_b M_{y_{Fa}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.33)$$

Daraus folgt:

$${}_b M_{y_{Fa}} = -m \cdot l_a \cdot e a_{x_a} \quad (4.34)$$

Eingang \mathbf{u} wird ersetzt durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot e a_{x_a} \quad (4.35)$$

4.3 Landeregelungen mit dem Roboterarm und UAV-Aktuatorik

Durch die Wahl von

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -l_a \cdot m \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

erhält man das System:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{r}_x \\ {}_b\dot{\omega}_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -l_a \cdot m \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \cdot {}_e a_{x_a} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \\ {}_b \omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} \cdot \underbrace{{}_e a_{x_a}}_{\tilde{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Wie am Vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ zu sehen ist, hat der Eingang ${}_e a_{x_a}$ jetzt keinen Störeinfluss mehr auf die Rotation des Flugapparats. Auch hat sich das System auf eine Eingangsgröße reduziert. Der durch Regelung beeinflussbare Teil von (4.37) sind die ersten zwei Zustände von (4.37). Geht man zusätzlich noch davon aus, dass die Startzustände von ${}_b \omega_y = 0$ und $R_{be_{13}} = 0$ sind, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}_e\dot{v}_x \\ {}_e\dot{r}_x \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{neu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{neu}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{neu}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{neu}} \cdot {}_e a_{x_a} \quad (4.38)$$

Es kann wieder mit der Ackermann Formel aus Abschnitt 4.2.1 für das System (4.38) eine Reglerverstärkung \mathbf{k} zur Eingrößenregelung mit Polvorgabe ausgerechnet werden. Die Ausgangsgleichung für (4.38) lautet:

$$\underbrace{{}_e r_x}_{\mathbf{y}} = \underbrace{(0 \quad 1)}_{\mathbf{c}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}_e v_x \\ {}_e r_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (4.39)$$

Für die stationäre Genauigkeit wird wieder ein Vorfilter v_{vor} errechnet mit den Größen aus (4.38).

$$v_{vor} = - \left(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{A}_{neu} - \mathbf{b}_{neu} \cdot \mathbf{k})^{-1} \cdot \mathbf{b}_{neu} \right)^{-1} \quad (4.40)$$

4 Regelung des linearen Systems

Hat man den für die Regelung des Systems (4.38) benötigten Zeilenvektor \mathbf{k} und das Vorfilter für (4.38) berechnet, lautet die Gleichung für u um (4.9) zu regeln:

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \left(-(\mathbf{k} \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} e^{v_x} \\ e^{r_x} \\ b\omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix} + v_{vor} \cdot e^{r_{x_{soll}}} \right) \quad (4.41)$$

Die Gleichung für den geschlossenen Regelkreis ist:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} \ 0 \ 0)) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot v_{vor} \cdot e^{r_{x_{soll}}} \quad (4.42)$$

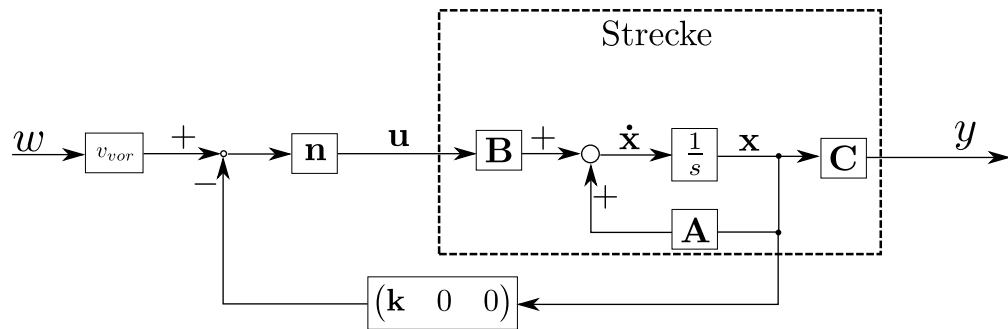


Abbildung 4.3: Schaltbild des geschlossenen Kreises.

Regelung der Translation in y-Richtung, Kompensation des Moments durch das UAV um die x-Achse

Die Regelung erfolgt analog zu Abschnitt 4.3.1, jedoch mit Gleichung (4.10) statt Gleichung (4.9).

Regelung der Translation in z-Richtung

Die Regelstrecke (4.8) hat nur einen Eingang. Das Verfahren zur Polvorgabe erfolgt wie in Abschnitt 4.2.1.

Regelung der Rotation um die z-Achse

Es kommt im linearen Modell zu keinen Störmomenten durch den Roboter um die z-Achse, darum wird Gleichung (4.11) nicht betrachtet und die Rotation um die z-Achse wird in diesem Ansatz nicht zusätzlich zum UAV geregelt.

Zusammenfassung Positionsregelung mit dem Roboterarm, Kompensation des Armstörmoments durch das UAV

Durch die Kommandierung zusätzlicher Momente ist es möglich das durch die Roboterbewegung entstehende Moment am Flugapparat auszugleichen. Durch die künstliche Einschränkung, dass mit dem Moment nur die Störmomente des Roboterarms ausgeglichen werden und nicht etwa sogar eine Lage kommandiert werden kann, vereinfacht sich die Reglerauslegung auf ein Eingrößenproblem.

4.3.2 Positionsregelung durch Roboterarm, Lageregelung durch das UAV

Die aktive Lageregelung beim Landevorgang ermöglicht es den Flugapparat in die Sollflugrichtung zu drehen und so den Aktuatoraufwand am Roboterarm zu verringern. Es soll die Lage des Flugapparats während des Landevorgangs, durch Kommandierung von zum internen Reglerkommando aufaddierten Momente, vorgegeben werden können. Es gelten die Annahmen aus Tabelle 4.1 und aus Tabelle 4.2. Die Regelstrecken lauten:

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_x \\ {}^e\dot{r}_x \\ {}^b\dot{\omega}_y \\ {}^R_{be13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e r_x \\ {}^b \omega_y \\ {}^R_{be13} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^b M_{y_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (4.9 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_y \\ {}^e\dot{r}_y \\ {}^b\dot{\omega}_x \\ {}^R_{be23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{xd}}{I_{xx}} & \frac{-K_x}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_y \\ {}^e r_y \\ {}^b \omega_x \\ {}^R_{be23} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-m \cdot l_a}{I_{xx}} & \frac{1}{I_{xx}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e a_{y_a} \\ {}^b M_{x_{Fa}} \end{pmatrix} \quad (4.10 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_z \\ {}^e\dot{r}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e v_z \\ {}^e r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}^e a_{z_a} \quad (4.8 \text{ rev.})$$

$$\begin{pmatrix} {}^b\dot{\omega}_z \\ {}^R_{be12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_{zd}}{I_{zz}} & \frac{-K_z}{I_{zz}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^b \omega_z \\ {}^R_{be12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot {}^b M_{z_{Fa}} \quad (4.11 \text{ rev.})$$

Regelung der Translation in x-Richtung und der Lage um die y-Achse

Gleichung (4.9) beschreibt die Translation in x-Richtung und die die Drehung um die y-Achse.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}^e\dot{v}_x \\ {}^e\dot{r}_x \\ {}^b\dot{\omega}_y \\ {}^R_{be13} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{K_y}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e r_x \\ {}^b \omega_y \\ {}^R_{be13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^b M_{y_{Fa}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (4.9 \text{ rev.})$$

Mit den zwei Eingängen ${}^e a_{x_a}$ und ${}^b M_{y_{Fa}}$ können zwei Zustände einer Folgeregelung unterzogen werden. Die Position in x-Richtung und die Lage um die y-Achse sollen einer

4 Regelung des linearen Systems

Folgeregelung unterzogen werden, daher lautet die Gleichung für den Ausgang:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{r_x} \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{v_x} \\ e^{r_x} \\ b\omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (4.43)$$

Bei der Polvorgabe für das System (4.9) werden 4 Pole, $\bar{\lambda}_i$, $i = 1 \dots 4$, des geschlossenen Regelkreises vorgegeben. Es wird die Methode der modalen Regelung mit Unterdrückung von Eigenbewegungen im physikalischen Zustand verwendet. Diese Regelungsmethode der modalen Regelung mit Unterdrückung von Eigenbewegungen im physikalischen Zustand findet man in ([rt2], Seite 56). Die Definitionsgleichung für die Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises lautet:

$$\left[\bar{\lambda}_i \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

\mathbf{E} bezeichnet die Einheitsmatrix. Die Vektoren \mathbf{v}_i sind die Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises zu den Eigenwerten $\bar{\lambda}_i$ des geschlossenen Regelkreises. Die Vektoren \mathbf{p}_i , der Länge m , Anzahl der Eingänge, in diesem Fall also 2, sind Entwurfparameter die gewählt werden können. Für die Vektoren \mathbf{p}_i gilt:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_i \quad (4.45)$$

wobei \mathbf{K} die gesuchte Verstärkungsmatrix ist. Schreibt man die Parametervektoren \mathbf{p}_i und Eigenvektoren \mathbf{v}_i der Reihe nach in eine Matrix so erhält man:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \mathbf{K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \quad (4.46)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (4.47)$$

(4.44) ausgeschrieben mit den Variablen aus Gleichung (4.9):

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_i & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_i + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,i} \\ \mathbf{V}_{2,i} \\ \mathbf{V}_{3,i} \\ \mathbf{V}_{4,i} \\ \mathbf{P}_{1,i} \\ \mathbf{P}_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Damit Gleichung (4.44) einen eindimensionalen Lösungsraum besitzt, werden für jeden Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ genau $m - 1$ Zusatzbedingungen gestellt. In diesem Fall ist es also eine Zusatzbedingung. Diese wird in Form einer zusätzlichen Zeile an das Gleichungssystem

4.3 Landeregelungen mit dem Roboterarm und UAV-Aktuatorik

(4.44) angefügt. Will man, dass sich die Eigenbewegung von $\bar{\lambda}_i$ nicht im Zustand x_j bemerkbar macht, so wird dies als zusätzliche Zeile der Gleichung (4.44) geschrieben, bei der in der Spalte j eine 1 steht und in den übrigen Spalten dieser Zeile die 0. Fordert man, dass sich die Eigenbewegung des ersten Eigenwertes $\bar{\lambda}_1$ nicht im ersten Zustand x_1 , also ${}^e v_x$, bemerkbar macht, so ergibt sich folgende Zusatzzeile für (4.44):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Die Wahl dieser Zusatzforderung und die im weiteren Verlauf des Abschnitts gewählten Zusatzforderungen führen dazu, wie man an Gleichung (4.70) erkennen kann, dass die translatorischen und die rotatorischen Zustände im Geschlossenen Regelkreis von einander entkoppelt sind. Ergänzt man (4.48) um die Zeile (4.49) und fordert dadurch, dass $\bar{\lambda}_1$ sich nicht in ${}^e v_x$ bemerkbar macht, so erhält man:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,1} \\ \mathbf{V}_{2,1} \\ \mathbf{V}_{3,1} \\ \mathbf{V}_{4,1} \\ \mathbf{P}_{1,1} \\ \mathbf{P}_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Die Ergebnisse für \mathbf{v}_1 und \mathbf{p}_1 erhält man durch die Berechnung des rechten Kerns [kern] der Matrix.

$$\begin{aligned} \text{Kern} & \left(\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\lambda_1} \\ -\frac{g}{\lambda_1} \\ -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\lambda_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{g}{\lambda_1} \\ -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Für den zweiten Eigenwert $\bar{\lambda}_2$ wird gefordert, dass er sich nicht im zweiten physikalischen Zustand ${}^e r_x$ bemerkbar macht. Die zusätzliche Zeile für das Gleichungssystem (4.44)

4 Regelung des linearen Systems

lautet:

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.53)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_2 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,2} \\ \mathbf{V}_{2,2} \\ \mathbf{V}_{3,2} \\ \mathbf{V}_{4,2} \\ \mathbf{P}_{1,2} \\ \mathbf{P}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_2 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\bar{\lambda}_2} \\ -\frac{g}{\bar{\lambda}_2} \\ -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_2 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{g}{\bar{\lambda}_2} \\ -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_2 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\bar{\lambda}_2} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Für den dritten Eigenwert $\bar{\lambda}_3$ wird gefordert, dass er sich nicht im dritten physikalischen Zustand ${}_b\omega_y$ bemerkbar macht. Die zusätzliche Zeile für das Gleichungssystem (4.44) lautet:

$$[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_3 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,3} \\ \mathbf{V}_{4,3} \\ \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$\text{Kern} \left(\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_3 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{\lambda}_3 \\ l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_3 \\ l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Für den vierten Eigenwert $\bar{\lambda}_4$ wird gefordert, dass er sich nicht im vierten physikalischen Zustand $R_{be_{13}}$ bemerkbar macht. Die zusätzliche Zeile für das Gleichungssystem (4.44) lautet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,4} \\ \mathbf{V}_{2,4} \\ \mathbf{V}_{3,4} \\ \mathbf{V}_{4,4} \\ \mathbf{P}_{1,4} \\ \mathbf{P}_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

$$\text{Kern} \left(\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 & -g & 1 & 0 \\ -1 & \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 + \frac{K_{yd}}{I_{yy}} & \frac{-K_y}{I_{yy}} & m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{\lambda}_4 \\ l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_4 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_4 \\ l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_4 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Die Verstärkungsmatrix K , welche die Pole des geschlossenen Regelkreises an die gewünschten Stellen $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ platziert, mit den Bedingungen, dass

- $\bar{\lambda}_1$ sich nicht in ${}_e v_x$ bemerkbar macht,
- $\bar{\lambda}_2$ sich nicht in ${}_e r_x$ bemerkbar macht,
- $\bar{\lambda}_3$ sich nicht in ${}_b \omega_y$ bemerkbar macht,
- $\bar{\lambda}_4$ sich nicht in $R_{be_{13}}$ bemerkbar macht,

4 Regelung des linearen Systems

berechnet sich mit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{g}{\bar{\lambda}_1} & -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\bar{\lambda}_1} \\ -\frac{g}{\bar{\lambda}_2} & -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_2 - K_{yd} + \frac{g \cdot l_a \cdot m - K_y}{\bar{\lambda}_2} \\ -\bar{\lambda}_3 & l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_3 \\ -\bar{\lambda}_4 & l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\lambda}_3} & \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\bar{\lambda}_1} & -\frac{1}{\bar{\lambda}_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 & l_a \cdot m \cdot (\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4) \\ \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & -l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \\ 0 & -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 - I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_2 - K_{yd} \\ g & -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + K_{yd} - g \cdot l_a \cdot m \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Die Matrix \mathbf{K} wurde aus Platzgründen transponiert notiert. Der geschlossene Regelkreis hat die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \tag{4.66} \\
 \begin{pmatrix} e \dot{v}_x \\ e \dot{r}_x \\ b \dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 & -\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e a_{x_a} \\ b M_{y_{Fa}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Um, unter der Bedingung, dass die Regelstrecke genau bekannt ist, stationäre Genauigkeit herzustellen, wird ein Vorfilter \mathbf{V}_{vor} berechnet.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{vor} &= - \left(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B} \right)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & 0 \\ -l_a \cdot m \cdot \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & -I_{yy} \cdot \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Setzt man das Vorfilter ein, erhält man die vollständige Gleichung der Folgeregelung.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_{vor} \cdot \mathbf{w} \tag{4.69} \\
 \begin{pmatrix} e \dot{v}_x \\ e \dot{r}_x \\ b \dot{\omega}_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 & -\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e v_x \\ e r_x \\ b \omega_y \\ R_{be13} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e r_{x_{soll}} \\ R_{be13_{soll}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

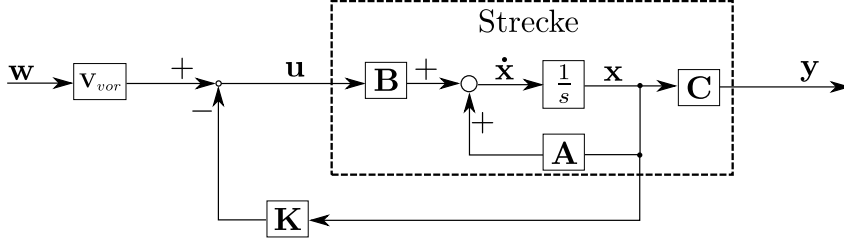


Abbildung 4.4: Schaltbild der Zustandsvektorrückführung mit Vorfilter.

Integraler Regleranteil Falls die Regelung mit Vorfilter keine ausreichende stationäre Genauigkeit erzielt, kann alternativ dazu eine Regelung mit integralem Regleranteil verwendet werden. Der Vorfilter wird dann nicht mehr benötigt. Damit die Positionsregelung und die Lageregelung auch bei geringen Abweichungen im Streckenmodell stationär genau wird, wird ein integraler Regleranteil für den Positionsfehler und ein integraler Regleranteil für den Lagefehler hinzugefügt. Der Zustandsvektor wird um die Zustandsgrößen $e_{r_{x_i}}$, dem Integral des Positionsfehlers in x-Richtung und $e_{R_{be_{13_i}}}$, dem Integral des Lagefehlers um die y-Achse, ergänzt. Die Ausgangsgleichung für (4.9) lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_{r_x} \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_{v_x} \\ e_{r_x} \\ {}_b\omega_y \\ R_{be_{13}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (4.71)$$

Das erweiterte Streckenmodell mit den Größen aus (4.9) und (4.71), ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{e}_{r_{x_i}} \\ \dot{e}_{R_{be_{13_i}}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{erw}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ e_{r_{x_i}} \\ e_{R_{be_{13_i}}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{erw}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{erw}} \cdot \mathbf{u} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{w} \quad (4.72)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m \cdot l_a \cdot \frac{1}{I_{yy}} & \frac{1}{I_{yy}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{erw}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_{a_{x_a}} \\ {}_bM_{yFa} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_{r_{x_{soll}}} \\ R_{be_{13_{soll}}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

4 Regelung des linearen Systems

Ein Schaltbild der erweiterten Strecke ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Analog zur normalen Zustandsvektorrückführung lautet die Gleichung für \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{erw} \quad (4.73)$$

Rechnet man die modale Regelung für die Positionsregelung in die x-Richtung und Lageregelung um die y-Achse mit den Größen \mathbf{A}_{erw} , \mathbf{b}_{erw} und \mathbf{x}_{erw} durch und fordert, dass

- $\bar{\lambda}_5$ sich nicht in R_{be13} bemerkbar macht,
- $\bar{\lambda}_6$ sich nicht in ${}^e r_x$ bemerkbar macht,

so ergibt sich die Reglerverstärkungsmatrix zu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -a & l_a \cdot m \cdot a \\ b & -l_a \cdot m \cdot b \\ 0 & -I_{yy} \cdot d - K_{yd} \\ g & K_y - g \cdot l_a \cdot m - I_{yy} \cdot e \\ c & -l_a \cdot m \cdot c \\ 0 & -I_{yy} \cdot f \end{bmatrix}^T \quad (4.74)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5 \\ b &= \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_5 + \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\ c &= \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4 \cdot \bar{\lambda}_5 \\ d &= \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_6 \\ e &= \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_6 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_6 \\ f &= \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_6 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Die Matrix \mathbf{K} wurde aus Platzgründen transponiert notiert. Der geschlossene Kreis hat dann die Form:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}^e \dot{v}_x \\ {}^e \dot{r}_x \\ b \dot{\omega}_y \\ \dot{R}_{be13} \\ \dot{e}_{r_{xi}} \\ \dot{e}_{R_{be13_i}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 & -c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{erw} - \mathbf{B}_{erw} \cdot \mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} {}^e v_x \\ {}^e r_x \\ b \omega_y \\ R_{be13} \\ e_{r_{xi}} \\ e_{R_{be13_i}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{erw}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e r_{x_{soll}} \\ R_{be13_{soll}} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

Die translatorischen Zustände sind von den rotatorischen Zuständen entkoppelt. Der Regelkreis ist stationär genau.

4.3 Landeregelungen mit dem Roboterarm und UAV-Aktuatorik

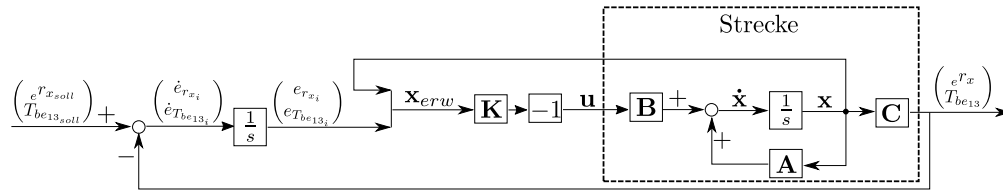


Abbildung 4.5: Schaltbild der erweiterten Strecke.

Regelung der Translation in y-Richtung und der Lage um die x-Achse

Die Regelung erfolgt analog zu Abschnitt 4.3.2 jedoch mit Gleichung (4.10) statt Gleichung (4.9).

Regelung der Translation in z-Richtung

Die Regelstrecke (4.8) hat nur einen Eingang. Das Verfahren zur Polvorgabe erfolgt wie in Abschnitt 4.2.1.

Regelung der Rotation um die z-Achse

Die Regelstrecke (4.11) hat nur einen Eingang. Das Verfahren zur Polvorgabe erfolgt wie in Abschnitt 4.2.1, jedoch mit (4.11) statt (4.8).

Zusammenfassung

Durch das hier gewonnene Regelungsgesetz ist es möglich die Lage des Fluggeräts aktiv in Sollflugrichtung auszurichten, um so den Aktuatoraufwand am Roboterarm zu verringern. Auch beeinflussen sich, eine Kommandierung von Solllage oder Sollposition im geschlossenen Regelkreis nicht mehr. Dies liegt an den vorgenommenen Entkopplungen. Mit dieser Regelung sind im geschlossenen Regelkreis die translatorischen Zustände von den rotatorischen Zuständen entkoppelt. Die Pole $\bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ und mit integralem Regleranteil zusätzlich $\bar{\lambda}_5$ machen sich nur in den translatorischen Zuständen bemerkbar. Die Pole $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ und gegebenenfalls $\bar{\lambda}_6$ machen sich nur in den rotatorischen Zuständen bemerkbar.

5 Steuerung des Roboterarms

Bisher wurden UAV Modellierung und Kraftregelgesetze betrachtet. Die erforderlichen Kräfte sollen durch den Roboterarm aufgebracht werden, welcher mit dem UAV über das Kugelgelenk verbunden ist. Dazu wird in diesem Kapitel ein Steuerungsgesetz für die Drehmomente der Motoren in den sieben Gelenken des DLR Leichtbauroboters hergeleitet. Der Begriff Endeffektor bezeichnet den Endpunkt des Roboterarms, der zur Manipulation der Umwelt benutzt wird. In diesem Fall ist dies das Kugelgelenk, das den Roboterarm mit dem UAV verbindet. Die durch das UAV auf den Roboter wirkenden Kräfte, durch Drehung des UAVs und durch dessen Antrieb, sind für die Robotersteuerung nicht modelliert. Die auftretenden Kräfte durch das UAV sind in seiner Solllage, der Nulllage, Null. Die Kräfte die auf den Roboter wirken, um sich selbst zu beschleunigen, sind deutlich größer als die durch das UAV.

5.1 Vorwärtskinematik

Um den Zustand des siebengelenkigen Roboters zu beschreiben können die sieben Gelenkwinkel $q_1 \dots q_7$ herangezogen werden.

$$\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7)^T \quad (5.1)$$

Die Koordinatentransformation eines Koordinatensystems bezüglich eines anderen Koordinatensystems kann mit einer Drehmatrix \mathbf{R} und mit einem translatorischen Vektor \mathbf{d} beschrieben werden. Um einen Punkt vom Koordinatensystem 1 ins erdfeste System e zu transformieren werden die Rotation

$$\mathbf{R}_{e1} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

und die Translation

$$\mathbf{d}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

benötigt. Die Transformation eines Punktes von Koordinatensystem 1 ins Koordinatensystem e kann mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{e1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e1} & \mathbf{d}_{e1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

berechnet werden ([**sciavicco1996modelling**], Seite 35). Um die Transformation durchzuführen muss an den zu transformierenden Koordinatenvektor eine 1 angehängt werden. Mit Hilfe der modifizierten Denavit-Hartenberg Parameter aus Tabelle 5.1 können mit der Gleichung (5.5) ([**moddhparams**], Abschnitt Modified DH parameters) die Transformationsmatrizen für die Koordinatensysteme des DLR Leichtbauroboters, zu sehen in Abbildung 5.1, berechnet werden. Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist mit $s(x)$ und die Cosinusfunktion $\cos(x)$ mit $c(x)$ abgekürzt.

$$T_{(i-1)\leftarrow i} = \begin{bmatrix} c(\theta_i) & -s(\theta_i) & 0 & a_i \\ s(\theta_i) \cdot c(\alpha_{i-1}) & c(\theta_i) \cdot c(\alpha_{i-1}) & -s(\alpha_{i-1}) & -d_i \cdot s(\alpha_{i-1}) \\ s(\theta_i) \cdot s(\alpha_{i-1}) & c(\theta_i) \cdot s(\alpha_{i-1}) & c(\alpha_{i-1}) & d_i \cdot c(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

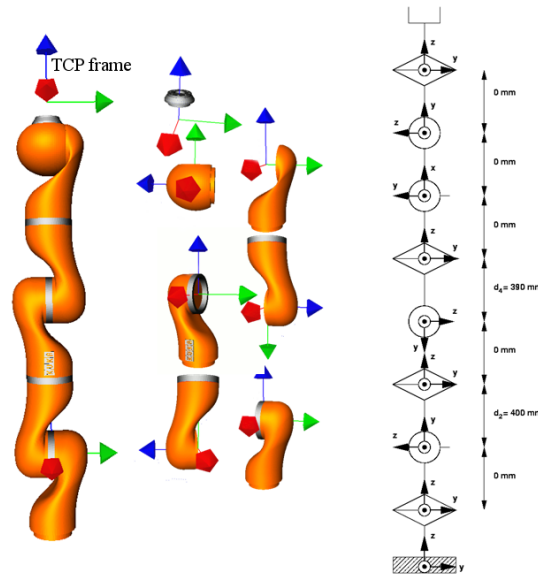


Abbildung 5.1: Die Koordinatensysteme des DLR Leichtbauroboters ([**zacharias2012knowledge**], Seite 137).

5 Steuerung des Roboterarms

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	l_1	q_1
2	0	90	0	q_2
3	0	-90	l_2	q_3
4	0	-90	0	q_4
5	0	90	l_3	q_5
6	0	90	0	q_6
7	0	-90	l_4	q_7

Tabelle 5.1: Denavit-Hartenberg Parameter des DLR Leichtbauroboters.

$$\mathbf{T}_{e1} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin(q_3) & -\cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{34} = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{T}_{45} = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_3 \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{56} = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{T}_{67} = \begin{bmatrix} \cos(q_7) & -\sin(q_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_7) & -\cos(q_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{7ee} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Multipliziert man die Transformationsmatrizen der Reihe nach mit einander so erhält man die Transformation vom Koordinatensystem des Endeffektors, Index ee , ins erdfeste Koordinatensystem e .

$$\mathbf{T}_{e \leftarrow ee} = \mathbf{T}_{eee} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \cdot \mathbf{T}_{45} \cdot \mathbf{T}_{56} \cdot \mathbf{T}_{67} \cdot \mathbf{T}_{7ee} \quad (5.10)$$

Das Ergebnis der Gleichung (5.10) ist aus Platzgründen nicht notiert. Sind die sieben Gelenkwinkel bekannt, so können mit Hilfe der Transformation \mathbf{T}_{eee} Punkte die im Koordinatensystem des Endeffektors angegeben sind in Koordinaten des erdfesten Koordinatensystems transformiert werden.

5.2 Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix ist eine $m \times n$ Matrix sämtlicher partieller Ableitungen (auch Ableitungsmatrix genannt). In der Robotik beschreibt die Jacobi-Matrix des Endeffektors,

\mathbf{J}_{ee} , den Zusammenhang zwischen den sieben Gelenkgeschwindigkeiten und der kartesischen Geschwindigkeit des Endeffektors.

$$\mathbf{J}_{ee} = \frac{\partial \mathbf{x}_{ee}}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{J}_{ee} = \frac{\partial \mathbf{x}_{ee}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \mathbf{q}} \implies \frac{\partial \mathbf{x}_{ee}}{\partial t} = \mathbf{J}_{ee} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (5.12)$$

In der Notation mit Punkten für die Ableitungen nach der Zeit:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ee} = \mathbf{J}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5.13)$$

Die Jacobi-Matrix lässt sich in einen translatorischen Teil \mathbf{J}_{ee_v} und in einen rotatorischen Teil \mathbf{J}_{ee_ω} aufteilen.

$$\mathbf{J}_{ee} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ee_v} \\ \mathbf{J}_{ee_\omega} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Die Position \mathbf{r}_{ee} des Endeffektors kann in der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{eee} abgelesen werden. Der Vektor \mathbf{r}_{ee} hat die Einträge der 4. Spalte Zeile 1 bis 3 der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{eee} .

$$\mathbf{r}_{ee} = \begin{pmatrix} r_{xee} \\ r_{yee} \\ r_{zee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{eee14} \\ T_{eee24} \\ T_{eee34} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{J}_{ee_v} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ee}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_7} \\ \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_7} \\ \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_7} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Die Gelenke $q_1 \dots q_7$ liefern jeweils nur Rotationen um die z-Achsen ihrer lokalen Koordinatensysteme. Aus diesem Grund können zum Aufstellen der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee_ω} die z-Achsen der Transformationen von den jeweiligen Gelenkkoordinatensystemen ins erdfeste System benutzt werden. Dazu werden die Transformationen der Gelenksysteme ins erdfeste System berechnet.

$$\mathbf{T}_{e1} = \mathbf{T}_{e1} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{T}_{e2} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{T}_{e3} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{T}_{e4} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{T}_{e5} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \cdot \mathbf{T}_{45} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{T}_{e6} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \cdot \mathbf{T}_{45} \cdot \mathbf{T}_{56} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{T}_{e7} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \cdot \mathbf{T}_{45} \cdot \mathbf{T}_{56} \cdot \mathbf{T}_{67} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{T}_{eee} = \mathbf{T}_{e1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34} \cdot \mathbf{T}_{45} \cdot \mathbf{T}_{56} \cdot \mathbf{T}_{67} \cdot \mathbf{T}_{7ee} \quad (5.24)$$

Die Richtungsvektoren der z-Achsen der Robotergelenke sind jeweils die Einträge der 3. Spalte Zeile 1 bis 3 der Transformationsmatrizen zum jeweiligen Gelenk ([**sciavicco1996modelling**

], Seite 76). Die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee_ω} wird aus den jeweiligen z-Achsen zusammengesetzt, indem die z-Achsen der Reihe nach Gelenk 1 bis 7 in eine Matrix geschrieben werden. Das Endeffektor Koordinatensystem hat zum Koordinatensystem des 7. Gelenks nur eine translatorische und keine rotatorische Verschiebung. Das bedeutet, dass die Rotation im Koordinatensystem des 7. Gelenks und im Koordinatensystem des Endeffektors die gleiche ist. Deshalb kommt \mathbf{T}_{ee} im rotatorischen Teil der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee_ω} nicht vor.

$$\mathbf{J}_{ee_\omega} = \begin{bmatrix} T_{e113} & T_{e213} & T_{e313} & T_{e413} & T_{e513} & T_{e613} & T_{e713} \\ T_{e123} & T_{e223} & T_{e323} & T_{e423} & T_{e523} & T_{e623} & T_{e723} \\ T_{e133} & T_{e233} & T_{e333} & T_{e433} & T_{e533} & T_{e633} & T_{e733} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Die gesamte Jacobi-Matrix für den Endeffektor lautet:

$$\mathbf{J}_{ee} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ee_v} \\ \mathbf{J}_{ee_\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{xee}}{\partial q_7} \\ \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{yee}}{\partial q_7} \\ \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_2} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_3} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_4} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_5} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_6} & \frac{\partial r_{zee}}{\partial q_7} \\ T_{e113} & T_{e213} & T_{e313} & T_{e413} & T_{e513} & T_{e613} & T_{e713} \\ T_{e123} & T_{e223} & T_{e323} & T_{e423} & T_{e523} & T_{e623} & T_{e723} \\ T_{e133} & T_{e233} & T_{e333} & T_{e433} & T_{e533} & T_{e633} & T_{e733} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee} verknüpft nicht nur die Gelenkgeschwindigkeiten mit der kartesischen Geschwindigkeit des Endeffektors, sondern auch die von den Motoren in den Gelenken aufbrachten Drehmomente $\boldsymbol{\tau}$ mit den dadurch am Endeffektor in die kartesischen Raumrichtungen wirkenden Kräfte und Momente \mathbf{F} . Um diesen Zusammenhang herzuleiten wird das Prinzip der virtuellen Arbeit benutzt ([craig2005introduction], Seite 157). Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit ist die geleistete Arbeit unabhängig vom Koordinatensystem (Gelenkkoordinaten oder kartesische Koordinaten). Die Arbeit ist definiert als Skalarprodukt der Kraft mit der zurückgelegten Strecke. Somit gilt:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \partial \mathbf{q} = \mathbf{F}^T \cdot \partial \mathbf{x}_{ee} \quad (5.27)$$

Mit Gleichung (5.11) ergibt sich:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \partial \mathbf{q} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J}_{ee} \cdot \partial \mathbf{q} \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J}_{ee} \quad (5.29)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{ee}^T \cdot \mathbf{F} \quad (5.30)$$

Mit Gleichung (5.30) können Kräfte und Momente beziehungsweise Motordrehmomente vom Kartesischen- ins Gelenkwinkelkoordinatensystem und umgekehrt transformiert werden.

5.3 Roboterdynamik in Gelenkwinkelkoordinaten

Für die Regelung eines realen Roboters müssen die durch die Masse entstehenden Effekte mit einbezogen werden. Die Gleichung für die Dynamik des Roboterarms, ([ott2008cartesian

], Seite 29), lautet:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.31)$$

Dabei ist $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ die Massenmatrix im Gelenkwinkelraum, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ wird Zentrifugal- und Coriolis-Matrix genannt, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ist der Einfluss der Schwerkraft und $\boldsymbol{\tau}$ sind die Motordrehmomente.

5.3.1 Massenmatrix

Um die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ zu berechnen werden die Jacobi-Matrizen \mathbf{J}_i für die Schwerpunkte der sieben Armsegmente, und sowohl die Masse m_i als auch die Trägheitstensoren der Armsegmente benötigt. Die Massenmatrizen \mathbf{M}_{x_i} der einzelnen Armsegmente sind in ihren lokalen kartesischen Koordinatensystemen notiert als:

$$\mathbf{M}_{x_i} = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Die kinetische Energie E des Roboters berechnet sich aus der Summe der einzelnen kinetischen Energien der einzelnen Armsegmente

$$E = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^7 (\dot{\mathbf{x}}_i^T \cdot \mathbf{M}_{x_i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i) \quad (5.33)$$

ausgedrückt im Gelenkwinkelraum

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^7 (\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{M}_{x_i} \cdot \mathbf{J}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \sum_{i=1}^7 (\mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{M}_{x_i} \cdot \mathbf{J}_i) \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Massenmatrix ausgedrückt im Gelenkwinkelraum ist definiert als:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{M}_{x_i} \cdot \mathbf{J}_i) \quad (5.35)$$

5.3.2 Gravitationsvektor

Die durch die Erdbeschleunigung erzeugte Schwerkraft am Armsegment i , \mathbf{F}_{g_i} berechnet sich mit:

$$\mathbf{F}_{g_i} = m_i \cdot \mathbf{g} \quad (5.36)$$

5 Steuerung des Roboterarms

Die durch die Schwerkraft am Roboter geleistete Arbeit \mathbf{W}_g berechnet sich mit:

$$\mathbf{W}_g = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{F}_{g_i}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_i) \quad (5.37)$$

Wegen Energieerhaltung ist die in Gelenkkoordinaten geleistete Arbeit $\boldsymbol{\tau}_g \cdot \dot{\mathbf{q}}$ gleich \mathbf{W}_g :

$$\boldsymbol{\tau}_g^T \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{F}_{g_i}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{F}_{g_i}^T \cdot \mathbf{J}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.38)$$

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{F}_{g_i}) \quad (5.39)$$

Somit ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_g = \sum_{i=1}^7 (\mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{F}_{g_i}) \quad (5.40)$$

Beim Gravitationsvektor wird die Masse des UAVs nicht dazu addiert, weil das UAV sich selbst in der Luft hält, also keine Gewichtskraft in z-Richtung auf den Roboter hat. Bei der Massenmatrix muss jedoch die Masse des UAVs berücksichtigt werden.

5.3.3 Zentrifugal- und Coriolis-Matrix

Die Zentrifugal- und Coriolis-Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ wird als gegeben angenommen. Die genaue Berechnung kann ([ott2008cartesian], Seite 23) entnommen werden.

5.4 Roboterdynamik in kartesischen Koordinaten

Die Dynamik des Roboters in Gelenkwinkelkoordinaten lautet:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.31 \text{ rev.})$$

Durch umformen erhält man:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (5.41)$$

Leitet man Gleichung (5.13) nach der Zeit ab, ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}_{ee} = \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.42)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \dot{\mathbf{J}}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{ee} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (5.43)$$

Setzte man Gleichung (5.41) in Gleichung (5.43) ein, ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \dot{\mathbf{J}}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (5.44)$$

Für den Eingang $\boldsymbol{\tau}$ sollen Beschleunigungen im kartesischen Raum kommandiert werden.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{ee}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{J}_{ee}^T \cdot \mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{soll} \quad (5.45)$$

In Gleichung (5.45) steht $\mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q})$ für die Massenmatrix des Roboters im kartesischen Raum. Setzt man Gleichung (5.45) in Gleichung (5.44) ein erhält man

$$\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \dot{\mathbf{J}}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \left(\mathbf{J}_{ee}^T \cdot \mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{soll} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \quad (5.46)$$

Setzt man für

$$\mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q}) = \left[\mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}_{ee}^T \right]^{-1} \quad (5.47)$$

ein, ([ott2008cartesian], Seite 32), ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \ddot{\mathbf{x}}_{soll} + \left[\dot{\mathbf{J}}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})) \right] \quad (5.48)$$

Wie in Gleichung (5.48) zu sehen ist wird mit dem Eingang aus Gleichung (5.45) das Ziel $\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \ddot{\mathbf{x}}_{soll}$ nicht erreicht. Der in den eckigen Klammern stehende Störterm bleibt erhalten. Um ihn kompensieren zu können wird eine invertierbare Jacobi-Matrix des Endeffektors \mathbf{J}_{ee} benötigt. Der DLR Leichtbauroboter hat 7 Gelenke, somit also sieben Freiheitsgrade. Um sich im kartesischen Raum zu bewegen werden jedoch nur 6 Freiheitsgrade (3 translatorischen und 3 rotatorische) benötigt. Der Roboter hat also einen Freiheitsgrad mehr als für die Bewegung im kartesischen Raum benötigt wird. Der Roboter ist einfach redundant. Daher ist die Jacobi-Matrix des Endeffektors \mathbf{J}_{ee} eine 6×7 Matrix und deshalb nicht direkt invertierbar. Sie kann invertierbar gemacht werden, indem die Matrix um einen linear unabhängigen Zeilenvektor $\mathbf{z}_n(q)$ ergänzt wird. Die Einträge $z_{n_i}(q)$ des Zeilenvektors $\mathbf{z}_n(q)$ lassen sich mit folgender Formel aus ([ott2008cartesian], Seite 48) berechnen:

$$z_{n_i}(q) = (-1)^{7+i} \cdot \det(\mathbf{J}_{n_i}) \quad (5.49)$$

Wobei \mathbf{J}_{n_i} die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee} ist, bei der die Spalte i weggelassen wurde. Die Funktion $\det(\cdot)$ berechnet die Determinante einer Matrix. Eine invertierbare Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{een} der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{ee} ist:

$$\mathbf{J}_{een} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{ee} \\ \mathbf{z}_n(q) \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Ersetzt man in Gleichung (5.44) \mathbf{J}_{ee} durch \mathbf{J}_{een} erhält man:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \dot{\mathbf{J}}_{een} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{een} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (5.51)$$

Auch in $\mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q})$ wird \mathbf{J}_{ee} durch \mathbf{J}_{een} ersetzt.

$$\mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q}) = \left[\mathbf{J}_{een} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}_{een}^T \right]^{-1} \quad (5.52)$$

Das Setzen von

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{een}^T \cdot \mathbf{M}_{xee}(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{soll} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \left[\mathbf{J}_{een} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \right]^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}}_{een} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5.53)$$

für das Eingangssignal $\boldsymbol{\tau}$ in Gleichung (5.51) führt zu

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{ee} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{soll} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Das Eingangssignal aus Gleichung (5.53) führt zum gewünschten Verhalten $\ddot{\mathbf{x}}_{ee} = \ddot{\mathbf{x}}_{soll}$. Durch das Erweitern der Jacobi-Matrix hat man einen neuen Zustand im Zustandsraum geschaffen, dem jedoch keine physikalische Größe direkt zugeordnet werden kann. Diesen zusätzlichen Zustand kann man sich für einen redundanten Roboterarm so vorstellen, dass es eine Vielzahl von Gelenkwinkeln \mathbf{q} für eine kartesische Position plus Lage des Endeffektors gibt. Zur Veranschaulichung: Bei einem Menschen ist die Position des Ellenbogens bei einer bestimmten Handposition und Handlage nicht eindeutig festgelegt. Der Ellenbogen kann sich trotz Fixierung der Hand bewegen. Bewegungen des Roboterarms bei denen sich die Position des Endeffektors nicht ändern werden Nullraumbewegungen genannt.

5.5 Bewegung im Nullraum

Der DLR LBR 4 ist redundant, das heißt es gibt ein Gelenk mehr als zum Anfahren einer kartesischen Position und Lage notwendig ist. Dadurch können Bewegungen mit dem Roboter ausgeführt werden, welche die Bewegung des Endeffektors nicht beeinflussen. Dies Bewegungen nennt man Nullraumbewegungen. Damit, wie man an Gleichung (5.44) erkennen kann, ein kommandiertes Momentenkommando $\boldsymbol{\tau}_n$ keinen Einfluss auf die Beschleunigung des Roboterarms hat, muss gelten:

$$\mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}_n \cdot \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Da dies für alle Kommandos $\boldsymbol{\tau}_n$ gelten muss bleibt

$$\mathbf{J}_{ee} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}_n = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

Wobei die eingeführte Matrix \mathbf{P}_n diese Eigenschaft erfüllt. Eine Möglichkeit, beschrieben in ([ott2008cartesian], Seite 51), diese Matrix zu wählen ist

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}_n^T(q) \cdot \left(\mathbf{z}_n(q) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}_n^T(q) \right)^{-1} \cdot \mathbf{z}_n(q) \quad (5.57)$$

Durch den Einsatz der Matrix \mathbf{P}_n können Drehmomente $\mathbf{P}_n \cdot \boldsymbol{\tau}_n$ kommandiert werden die sich nicht auf die Beschleunigung des Endeffektors auswirken und sich nur als Nullraumbewegung bemerkbar machen. Es kann zum Beispiel durch die Wahl von $\boldsymbol{\tau}_n = K_p \cdot (\mathbf{q}_0 - \mathbf{q})$, mit einem gewählten Verstärkungsfaktor K_p , das Ziel verfolgt werden, dass sich die Gelenkwinkel \mathbf{q} des Roboters möglichst den gewählten Standardgelenkwinkeln \mathbf{q}_0 annähern. Diese Bewegung wird nur dann ausgeführt, wenn sie die Beschleunigung des Endeffektors nicht beeinflusst.

5.6 Steuersignal an den Roboterdrehmomentenregler

Die vollständige Gleichung für den Eingang $\boldsymbol{\tau}$ zur Vorgabe einer Endeffektorbeschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}_{soll}$, Kompensation aller Störterme und Regelung der Nullraumbewegung des Roboters lautet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{J}_{ee_n}^T \cdot \mathbf{M}_{x_{ee_n}}(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{soll} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ & + \mathbf{P}_n \cdot \boldsymbol{\tau}_n - \left[\mathbf{J}_{ee_n} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \right]^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}}_{ee_n} \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Diese Drehmomente $\boldsymbol{\tau}$ werden als Sollgrößen an den Drehmomentenregler des Roboterarms gesendet.

5.7 Sollgrößen für die Endeffektorbeschleunigung

Die in Kapitel 4 berechneten Beschleunigungskommandos ${}^e a_{x_a}, {}^e a_{y_a}, {}^e a_{z_a}$, die vom Landerregler kommandiert wird, dienen als Sollwerte für die translatorische Beschleunigung des Endeffektors. Die Orientierung des Endeffektors soll in der Nulllage gehalten werden. Hierfür wird eine Regler analog zu ([sidi1997spacecraft], Seite 155) verwendet

$$\dot{p}_{soll} = -\frac{1}{2} \cdot K_{ip_{ee}} \cdot (\mathbf{T}_{eee32} - \mathbf{T}_{eee23}) - K_{p_{ee}} \cdot p \quad (5.59)$$

$$\dot{q}_{soll} = -\frac{1}{2} \cdot K_{iq_{ee}} \cdot (\mathbf{T}_{eee13} - \mathbf{T}_{eee31}) - K_{q_{ee}} \cdot q \quad (5.60)$$

$$\dot{r}_{soll} = -\frac{1}{2} \cdot K_{ir_{ee}} \cdot (\mathbf{T}_{eee21} - \mathbf{T}_{eee12}) - K_{r_{ee}} \cdot r \quad (5.61)$$

Dabei sind $\dot{p}_{soll}, \dot{q}_{soll}, \dot{r}_{soll}$ die Sollbeschleunigungen um die Raumachsen x, y, z , die Größen $K_{ip_{ee}}, K_{iq_{ee}}, K_{ir_{ee}}, K_{p_{ee}}, K_{q_{ee}}, K_{r_{ee}}$ sind Reglerverstärkungsfaktoren und p, q, r die Drehgeschwindigkeiten des Endeffektors um die Achsen des erdfesten Koordinatensystems. p, q, r sind die letzten drei Einträge des Vektors $\mathbf{J}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{q}}$. Diese Beschleunigungskommandos $\dot{p}_{soll}, \dot{q}_{soll}, \dot{r}_{soll}$ werden als Drehbeschleunigungskommandos für die Drehbeschleunigungseingänge von $\ddot{\mathbf{x}}_{soll}$ benutzt. Die Sollgröße $\ddot{\mathbf{x}}_{soll}$ für Gleichung (5.58) wird folgendermaßen gesetzt:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{soll} = \begin{pmatrix} {}^e a_{x_a} \\ {}^e a_{y_a} \\ {}^e a_{z_a} \\ \dot{p}_{soll} \\ \dot{q}_{soll} \\ \dot{r}_{soll} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

6 Simulation und Experiment

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse aus Simulationen und Experimente mit den Reglern aus Kapitel 4 und der Robotersteuerung aus Kapitel 5 vorgestellt. Die Experimente haben gezeigt, dass nur Regler mit integralem Regleranteil ausreichende stationäre Genauigkeit erreichen. Deshalb werden in diesem Kapitel ausschließlich Regler mit integralem Regleranteil betrachtet. Die betrachteten Regler sind der Landeregler aus Kapitel 4, Abschnitt 4.2.1, welcher nur die Roboter-Aktuatorik benutzt, jedoch die UAV Zustände beachtet und der Regler aus Abschnitt 4.3.2, welcher durch zusätzlichen Einsatz der UAV-Aktuatorik die rotatorischen Zustände des UAVs von den translatorischen Zuständen des UAVs entkoppelt. Der Regler aus Abschnitt 4.2.1 wird im Folgenden Regler 2 genannt. Der Regler aus Abschnitt 4.3.2 wird im Folgenden Regler 3 genannt. Für Regler 3 ist die Nulllage als Solllage gewählt. Regler 2 und Regler 3 werden mit dem Vergleichsregler aus Abschnitt 6.2, der nur den Roboter-Endeffektor zur gewünschten Position fährt ohne das UAV zu beachten verglichen. Der Vergleichsregler wird im folgenden Regler 1 genannt. Der Regler aus Abschnitt 4.3.1 wurde für den echten Roboter nicht implementiert, deshalb sind auch keine Simulationsergebnisse für ihn gelistet, weil für ihn ähnliche Ergebnisse wie für Regler 3 bei Kommandierung der Nulllage zu erwarten sind. Die Simulationsergebnisse und experimentellen Ergebnisse sind im rechtshändigen Koordinatensystemen des realen Roboters dargestellt dessen z-Achse nach oben weist.

6.1 Erforderliche Kenngrößen

Die für die Simulation sowie für die Regelung benötigten Größen der Variablen sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Die Eigenwerte der geregelten Parrot AR.Drone 2.0 wurden durch einen Versuch identifiziert und daraus die Reglerparameter des UAVs bestimmt. Die Größen des Roboterarms unterliegen der Geheimhaltung. Die erforderlichen Größen wie zum Beispiel Jacobi- oder Massenmatrix werden von der Robotersimulation während der Simulation bereitgestellt.

6.2 Vergleichsmodell

Um für die in Kapitel 4 entworfenen Regler ein Vergleichsmodell zu haben wurde ein Regler entworfen der nur die Roboter-Endeffektor-Position steuert und die Zustände des UAVs nicht beachtet. Weil in die Robotersteuerung aus Kapitel 5 direkt Endeffektor-Sollbeschleunigungen gegeben werden können lässt sich die Position des Endeffektors

Name	Wert
m	0.480 kg
g	9.81 m/s ²
l_a	0.06 m
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	0.006, 0.007, 0.012 kg · m ² , Quelle [ardroneTarget]
Pole des UAVs um die x-Achse	$-3.5286 + 9.0099i, -3.5286 - 9.0099i$
K_x, K_{xd}	0.5897, 0.03847
Pole des UAVs um die y-Achse	$-3.2058 + 9.3811i, -3.2058 - 9.3811i$
K_y, K_{yd}	0.6554, 0.0494
Pole des UAVs um die z-Achse	$-1.2646 + 0.8396i, -1.2646 - 0.8396i$
K_z, K_{zd}	0.02765, 0.03035
$K_{ipee}, K_{iqee}, K_{iree}$	12, 12, 12
$K_{p ee}, K_{q ee}, K_{r ee}$	7, 7, 7

Tabelle 6.1: Werte der Variablen

	Polvorgabe
Translation x, Rotation y	-3, -4, -5
Translation y, Rotation x	-3, -4, -5
Translation z	-3, -4, -5

Tabelle 6.2: Polvorgaben für Regler 1

mit einer linearen Regelung für folgendes System regeln.

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\tilde{r}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ r \\ f \tilde{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r_{soll} \quad (6.1)$$

Mit der Position r der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a . Gleichung (6.1) gilt für alle drei Raumrichtungen. Für System (6.1) wird eine Polvorgabe nach Ackermann gemacht.

6.3 Gewählte Pole

Die Polvorgaben für die drei Regler können aus den Tabellen 6.2, 6.3 und 6.4 entnommen werden. Für den Vergleichsregler wurden die Pole so gewählt, dass eine subjektiv schnelle Fahrt des Endeffektors erreicht wird. Für den Regler 2 wurden schnellere Pole gewählt als für Regler 1, um zu testen, ob trotz schnellerer Fahrt eine Verbesserung in der Lageabweichung erzielt werden kann. Für Regler 3 sind die translatorischen Pole von den rotatorischen Polen entkoppelt. Die translatorischen Pole in x- und y-Richtung wurden gleich dem Vergleichsregler, Regler 1, gewählt. Die rotatorischen Pole um die x- und die y-Achse, $-3+9i, -3-9i$ sind ähnlich der ursprünglichen Pole des UAVs gewählt,

	Polvorgabe
Translation x, Rotation y	-5, -5, -5, -5, -5
Translation y, Rotation x	-5, -5, -5, -5, -5
Translation z	-3, -4, -5

Tabelle 6.3: Polvorgaben für Regler 2

	Polvorgabe
Translation x, Rotation y	$-3 + 9i$, $-3 - 9i$, -3, -4 -5, -5
Translation y, Rotation x	$-3 + 9i$, $-3 - 9i$, -3, -4 -5, -5
Translation z	-3, -3, -3
Rotation z	-3, -3, -3

Tabelle 6.4: Polvorgaben für Regler 3

um so nur die entkoppelnde Wirkung des Reglers 3 in seinen Momentenkommandos zu verdeutlichen.

6.4 Simulation

In der Simulation wird die Sprungantwort der mit Regler 1, 2 oder 3 geregelten Systeme auf einen Sprung in y-Richtung um einen Meter gezeigt. Simuliert wird das UAV mit dem nichtlinearen Simulationsmodell aus Kapitel 2.1, in Zusammenspiel mit dem Onboard-Lageregler für alle drei Achsen (Gleichung (3.5)). In den Schaubildern, Abbildung 6.1 und Abbildung 6.2, sind jeweils in der ersten Zeile die Ergebnisse des Reglers 1, in der zweiten Zeile des Reglers 2 und in der dritten Zeile des Reglers 3 zu sehen.

6.4.1 Simulation ohne Roboterdynamik

Bei der Simulation ohne Roboterdynamik werden die von den Landereglern aus Kapitel 4 und dem Vergleichsregler erzeugten Kommandos für die Sollbeschleunigungen am Kugelgelenk, ${}_e a_{x_a}$, ${}_e a_{y_a}$ und ${}_e a_{z_a}$, direkt als Kugelgelenksbeschleunigungen der nichtlinearen UAV-Simulation verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.1 zu sehen. Im Vergleich zu Regler 1 erreicht Regler 2 ein besseres Ergebnis bei der Lageabweichung, benötigt jedoch trotz der schnelleren Pole mehr Zeit zum Erreichen der Sollposition. Regler 3 erreicht in der Simulation das beste Ergebnis für die Lageabweichung. Durch das während der Beschleunigungsphasen des Kugelgelenks in y-Richtung kommandierte Gegenmoment um die x-Achse wird die Nulllage gehalten. Numerische Abweichung 10^{-15} Grad. Der translatorische Übergang ist vergleichbar mit Regler 2.

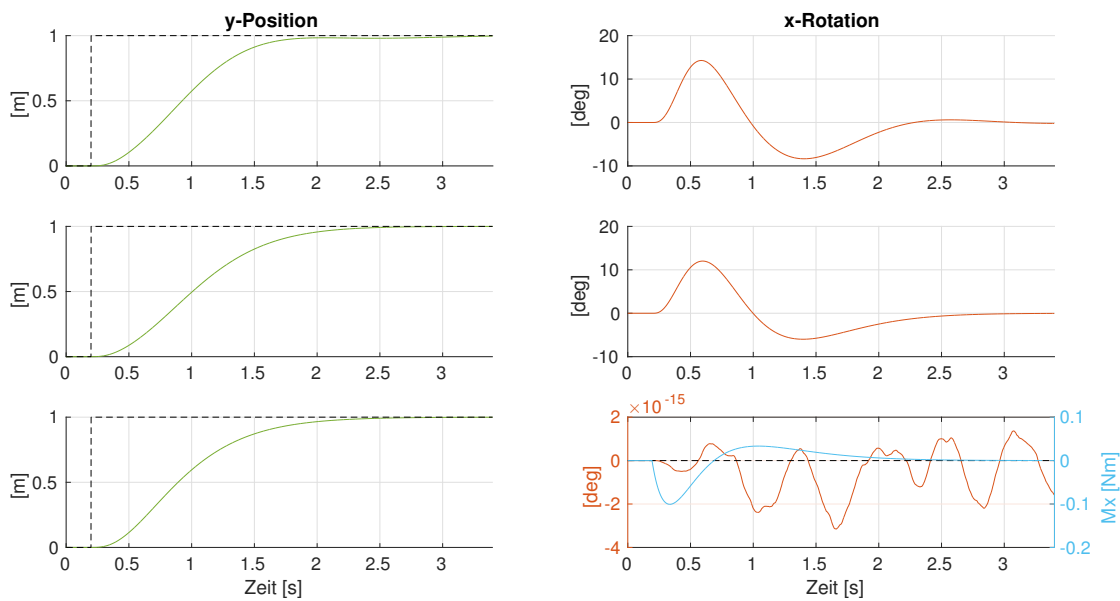


Abbildung 6.1: Simulationsergebnisse ohne Roboterdynamik bei einem Sollwertsprung in y-Richtung um 1 Meter. Links die translatorischen Bewegungen mit Regler 1, 2 und 3, rechts die jeweilige dazugehörige rotatorische Lagebewegung. Die Fahrt mit Regler 2 hat weniger Lageabweichung als mit Regler 1. Keine Lageabweichung bei Regler 3.

6 Simulation und Experiment

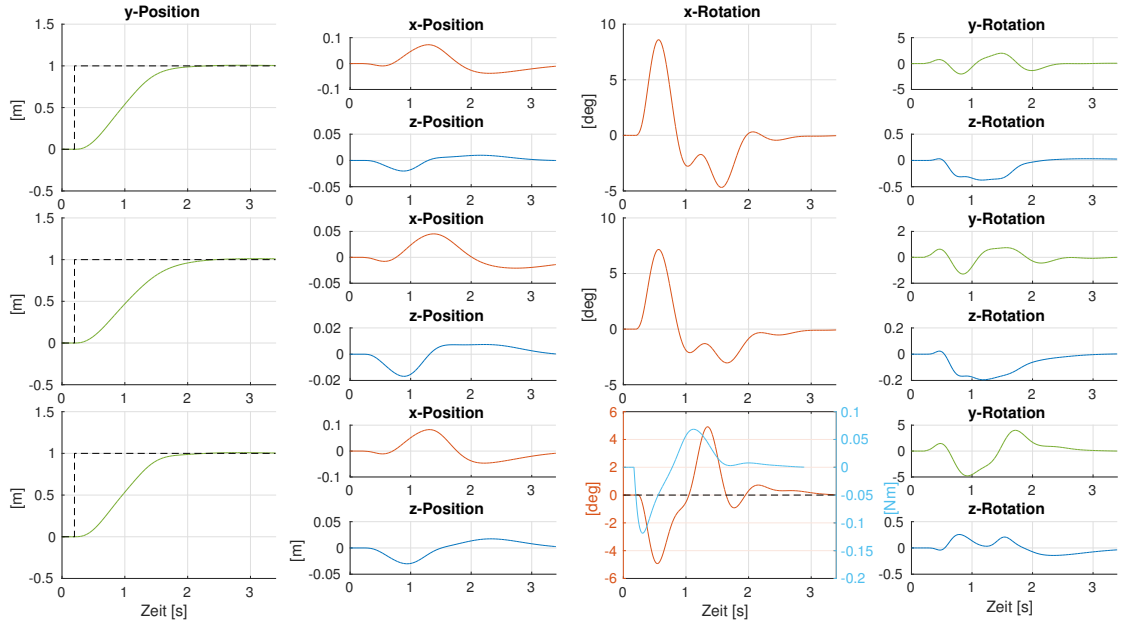


Abbildung 6.2: Simulationsergebnisse mit Roboterdynamik bei einem Sollwertsprung in y-Richtung um 1 Meter. In der ersten Spalte ist die translatorische Bewegung in y-Richtung zu sehen, bei einer Fahrt mit Regler 1, 2 und 3. In Spalte 3 sind die dazugehörigen rotatorischen Bewegungen um die x-Achse zu sehen. Spalte 2 und 4 zeigen translatorische beziehungsweise rotatorische Abweichung in und um die anderen Achsen. Die Fahrt mit Regler 2 hat weniger Lageabweichung als mit Regler 1. Bei der Fahrt mit Regler 3 wird die Lage des UAVs wegen zu niedriger translatorischer Beschleunigung, durch ein zu großes Kompensationsmoment in Fahrtrichtung, ausgelenkt.

6.4.2 Simulation mit Roboterdynamik

Bei der Simulation mit Roboterdynamik werden die von Regler 1, 2 und 3 erzeugten Sollbeschleunigungen am Kugelgelenk, ${}^e a_{x_a}$, ${}^e a_{y_a}$, und ${}^e a_{z_a}$ der Robotersteuerung aus Kapitel 5 übergeben. Diese errechnet die erforderlichen Motordrehmomente, welche an den Motordrehmomentenregler des Roboters gesendet werden. Der Motordrehmomentenregler errechnet die Motorströme, die an die Robotersimulation übergeben werden. Die von der Robotersimulation errechnete Beschleunigung des Endeffektors, also des Kugelgelenks, wird an den Beschleunigungseingang der nichtlinearen UAV-Simulation gesendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.2 zu sehen. Für Regler 1 und Regler 2 ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie bei der Simulation ohne Roboter-Dynamik. Die Abweichungen in der Lage sind jedoch geringer, da, wie in Abbildung 6.3 zu sehen ist, die tatsächliche Beschleunigung am Kugelgelenk geringer ist als in der Simulation ohne Roboter-Dynamik. Dies liegt sowohl an der Trägheit der Motoren und auch an der

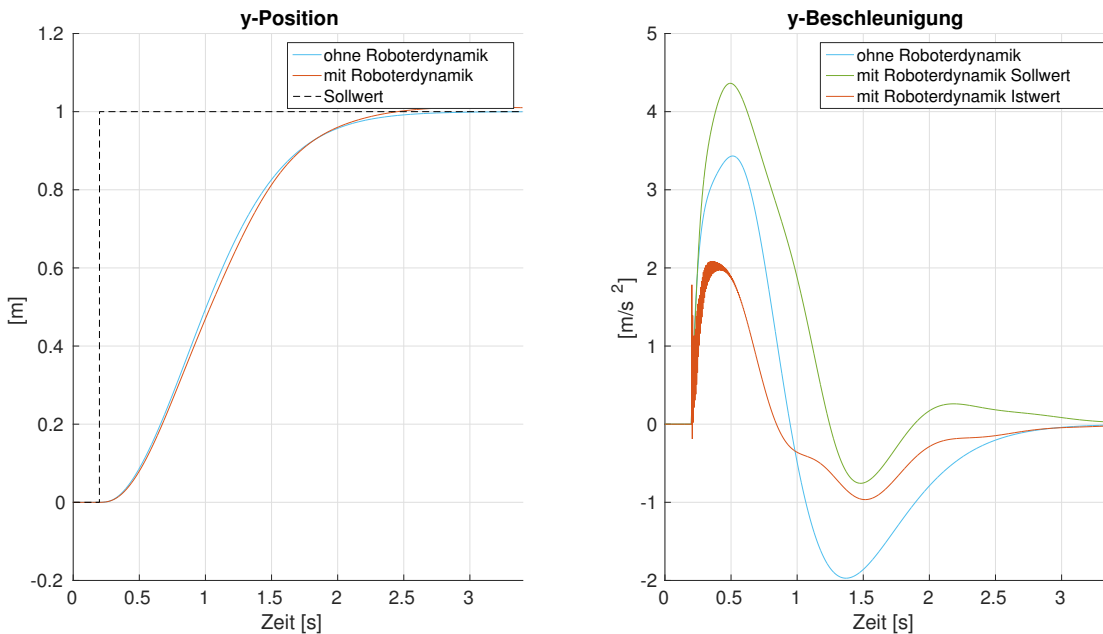


Abbildung 6.3: Vergleich der Endeffektor-Beschleunigungen der Simulationen mit und ohne Roboterdynamik bei einem Sollwertsprung in y-Richtung um 1 Meter. Bei der Simulation mit Roboterdynamik ist ein deutlicher Unterschied zwischen Ist- und Sollbeschleunigung zu erkennen.

Reibung in den Motorlagern und in den Roboterjelenken. Für Regler 3 ergibt sich ein anderes Bild als bei der Simulation ohne Roboter-Dynamik. Weil die tatsächliche Beschleunigung am Kugelgelenk deutlich geringer ist als die kommandierte Beschleunigung des Reglers, passt das vom Regler kommandierte Gegenmoment nicht zum tatsächlich auftretenden Moment durch die Kugelgelenksbeschleunigung. Die tatsächliche Beschleunigung ist geringer als die kommandierte, deshalb ist das kommandierte Gegenmoment größer als das erforderliche. Dies macht sich in einer ungewollten Auslenkung der Lage in Bewegungsrichtung bemerkbar. Durch die Abweichung der kommandierten zu den tatsächlichen Motordrehmomenten, treten auch geringe Abweichungen in den anderen Bewegungsrichtungen auf, ebenfalls zu sehen in Abbildung 6.2.

6.5 Experimente

Bei den Experimenten wird nicht eine einzelne Sprungantwort betrachtet sondern eine ganze Abfolge von kartesischen Koordinaten angefahren. Die nach einander angefahrenen Positionen sind Abbildung 6.4 veranschaulicht und die Koordinaten in Tabelle 6.5 ersichtlich. Die Koordinate ist erreicht, wenn die Positionsabweichung des UAVs weniger als 1 Millimeter beträgt. Dann wird nach einer Sekunde Wartezeit die nächste Position angefahren. Das einmalige Abfahren der fünf Positionen wird im Folgenden Mission

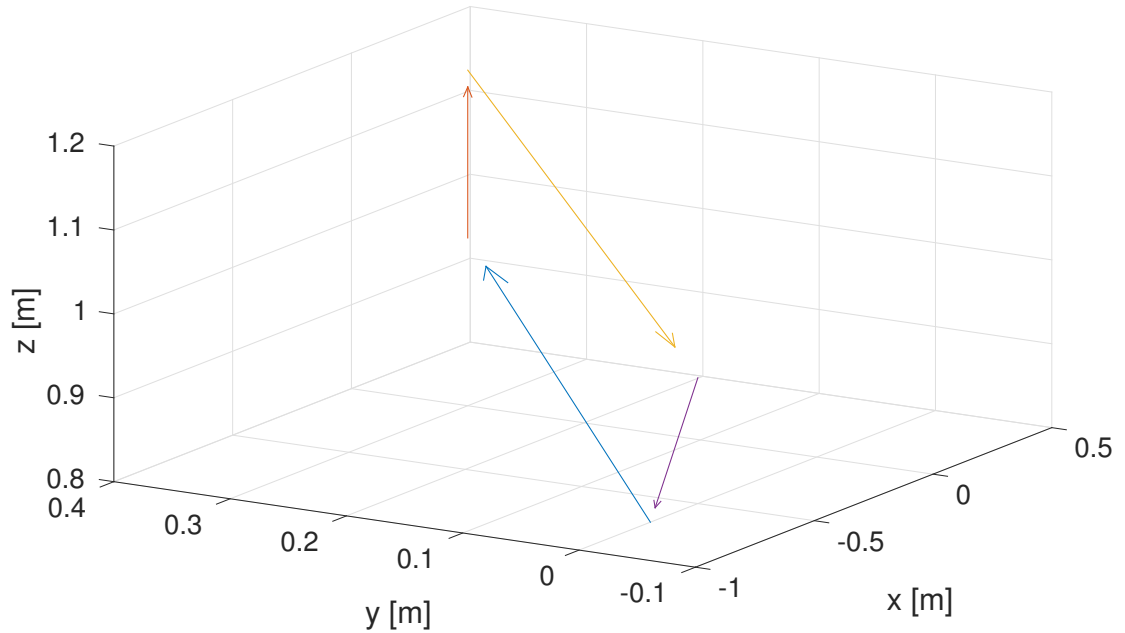


Abbildung 6.4: Fahrtweg einer Mission, angegeben in Basiskoordinaten des Roboters.

	x	y	z
Position 1	-0.7	0	0.8
Position 2	0	0.3	1
Position 3	0	0.3	1.2
Position 4	-0.5	0	0.95
Position 5	-0,7	0	0.8

Tabelle 6.5: Kartesische Positionen einer Mission. Angaben in Metern.

genannt. Bei den Experimenten wird die Mission pro Regler drei mal gefahren. Siehe Abbildung 6.5, 6.6 und 6.7. Die Standzeit zwischen den Missionen wird aus den Berechnungen der Regelgüte ausgeschlossen, weil sich sonst bei längerer Standzeit zwischen den Missionen ein bessere Regelgüte ergeben würde. Für jeden Regler wird die Gesamtfahrzeit für drei Missionen berechnet. Es wird die L^2 Norm

$$J = \int e(t)^2 dt, \quad e(t) = x_{soll}(t) - x(t) \quad (6.2)$$

für die translatorischen und für die rotatorischen Zustände über alle drei Missionsläufe bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.6 zu sehen. Es ist zu beachten, dass die Messung des UAVs der Rotation um die z-Achse einen sehr großen Drift aufweist. Mehrere Grad pro Minute. Tatsächlich bewegt sich das UAV jedoch nur gering um die z-Achse. Weil die Messung für die Rotation um die z-Achse fehlerhaft ist, wurde sie, obwohl es möglich wäre, mit Regler 3 nicht geregelt.

	Regler 1	Regler 2	Regler 3
Gesamtfahrzeit [s]	50.89	48.67	66.95
L^2 Translation in x	3.72	3.86	3.66
L^2 Translation in y	0.86	0.89	0.85
L^2 Translation in z	0.80	0.80	0.91
L^2 Rotation um x	330.52	157.12	240.58
L^2 Rotation um y	1612.44	272.56	263.75
L^2 Rotation um z	28557.79	11763.39	20252.45

Tabelle 6.6: Regelgüte bei drei Missionsabläufen.

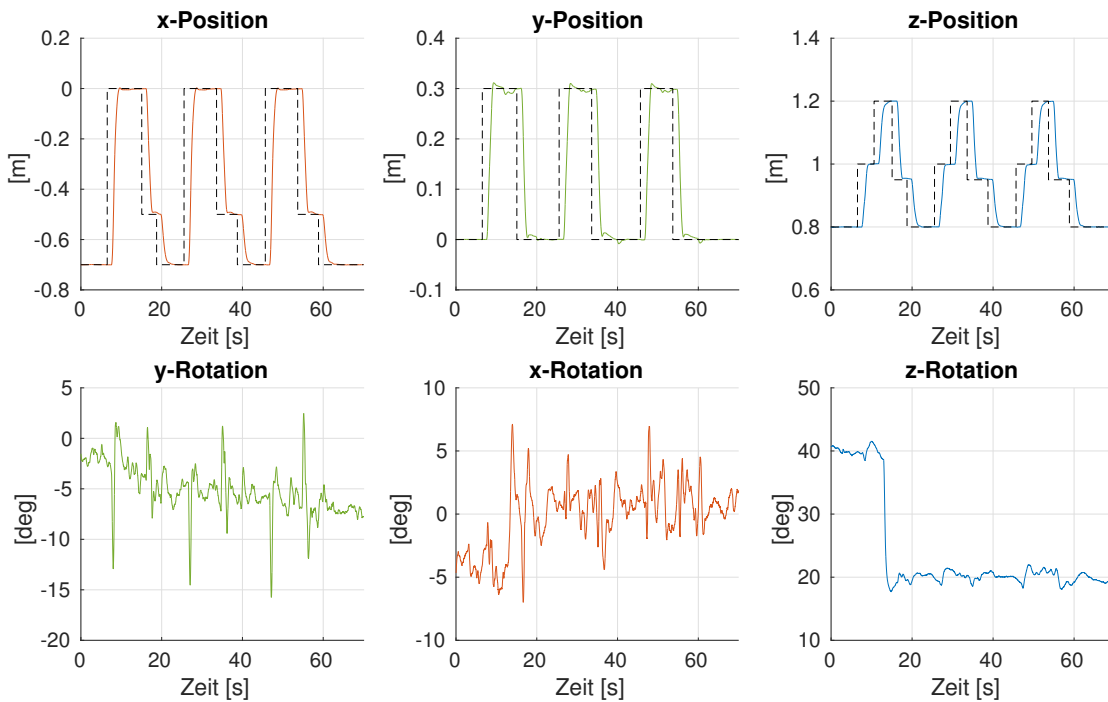


Abbildung 6.5: Experiment mit dem Regler 1. Drei Missionsfahrten mit dem Regler 1. In der ersten Zeile sind die Positionsverläufe in den drei Raumrichtungen zu sehen. In der zweiten Zeile sieht man die Lage um die drei Raumachsen.

6 Simulation und Experiment

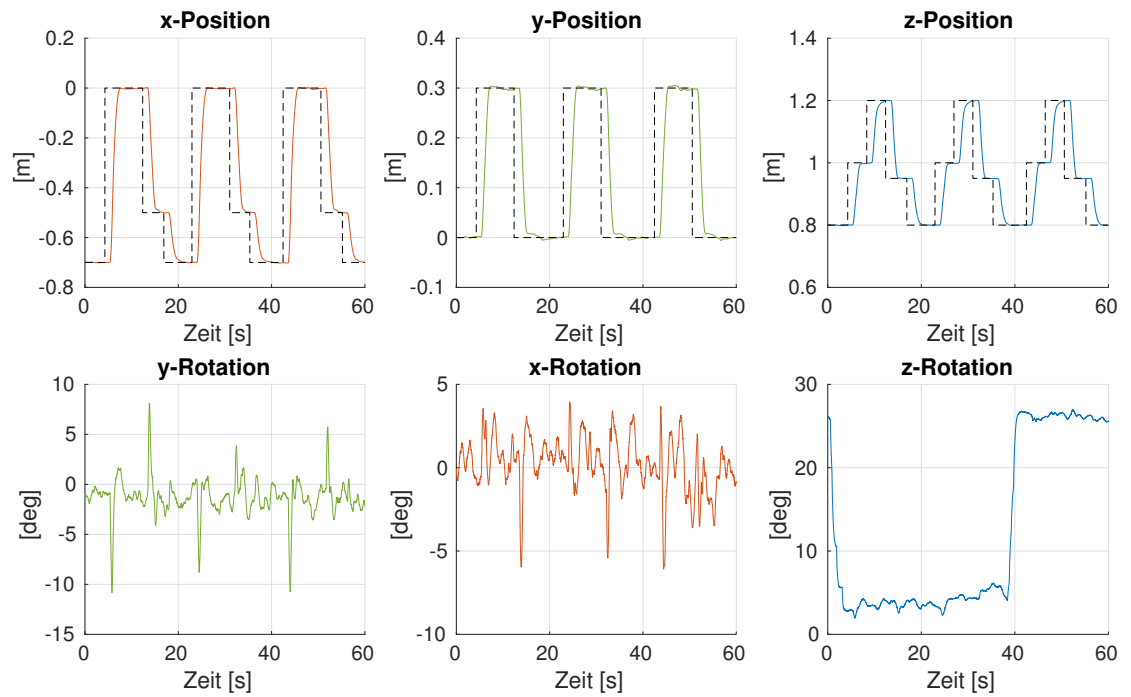


Abbildung 6.6: Experiment mit dem Regler 2. Drei Missionsfahrten mit dem Regler 2. In der ersten Zeile sind die Positionsverläufe in den drei Raumrichtungen zu sehen. In der zweiten Zeile sieht man die Lage um die drei Raumachsen.

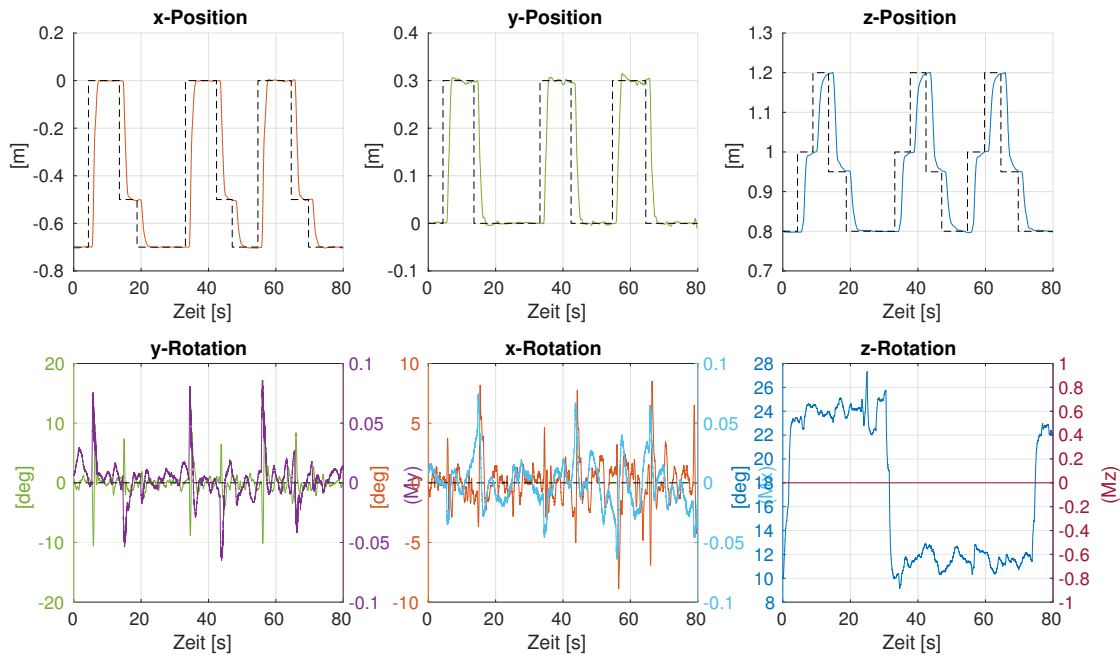


Abbildung 6.7: Experiment mit dem Regler 3. Drei Missionsfahrten mit dem Regler 3. In der ersten Zeile sind die Positionsverläufe in den drei Raumrichtungen zu sehen. In der zweiten Zeile sieht man die Lage um die drei Raumachsen und die von Regler 3 kommandierten Kompensationsmomente (Geschwindigkeitskommandos).

6 Simulation und Experiment

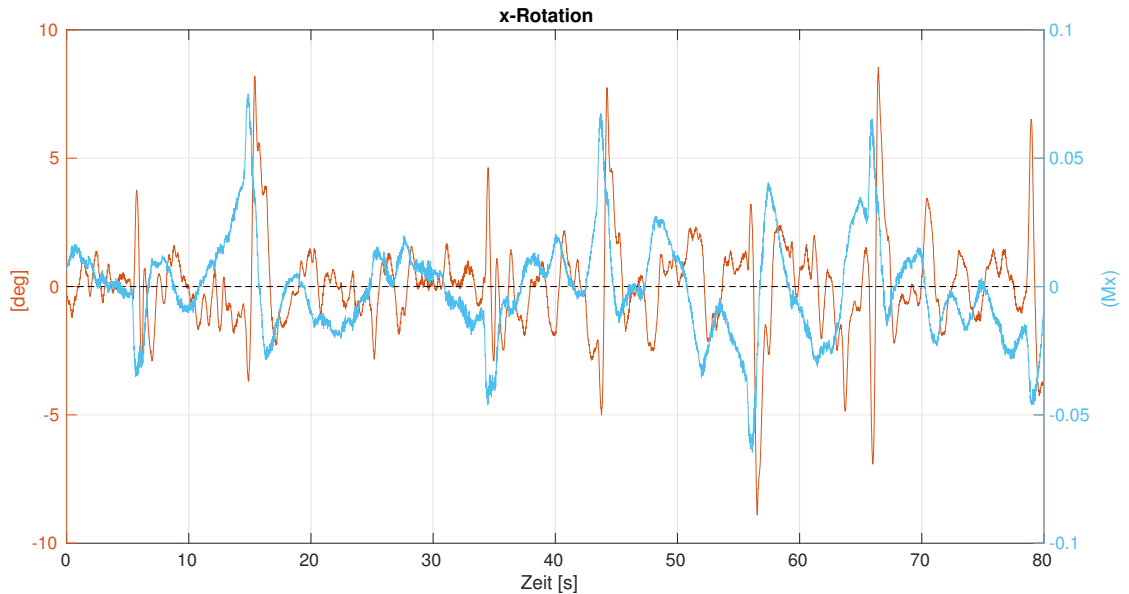


Abbildung 6.8: Lage und kommandiertes Gegenmomente in Form von Geschwindigkeitskommandos für die Drehung um die x-Achse.

Die kürzeste Fahrzeit für drei Missionen erreicht Regler 2. Regler 1 hat eine ähnliche Fahrzeit. Regler 3 ist deutlich langsamer. Regler 2 hat den niedrigsten kombinierten Fehler für die Rotation um die x und y-Achse. Zum Experiment mit Regler 3 sei angemerkt, dass es möglich sein muss dem UAV zusätzliche Momente kommandieren zu können. Dem verwendeten UAV, Parrot AR.Drone 2.0, können keine Momente kommandiert werden. Stattdessen werden Prozentwerte der maximalen translatorischen Geschwindigkeiten an den Quadrokopter kommandiert ([**ardroneGuide**], Seite 35). Für eine kommandierte Geschwindigkeit errechnet das UAV die benötigte Lage was zu einem Moment in die gewünschte Richtung führt. Um ein Moment um die x-Achse zu erhalten wird eine negative Geschwindigkeit in die y-Richtung kommandiert. Für ein Moment um die y-Achse wird eine Geschwindigkeit in x-Richtung kommandiert. Für die Orientierung um die z-Achse lässt sich die Soll Drehgeschwindigkeit an den Quadrokopter kommandieren, was wegen des Drifts der Rotationsmessung um z jedoch nicht getan wird. Für die im Experiment kommandierten Geschwindigkeiten wird das von Regler 3 erzeugte Momentenkommando mit dem Faktor 0.3 multipliziert und an den Quadrokopter kommandiert. Wie in Abbildung 6.8 und 6.9 zu sehen versucht Regler 3 durch entsprechende Geschwindigkeitskommandos ein Gegenmoment zum Moment, das durch die Beschleunigung des Kugelgelenks entsteht, zu erzeugen. Dies gelingt jedoch mit den Geschwindigkeitskommandos anstelle von Momentenkommandos nur ansatzweise.

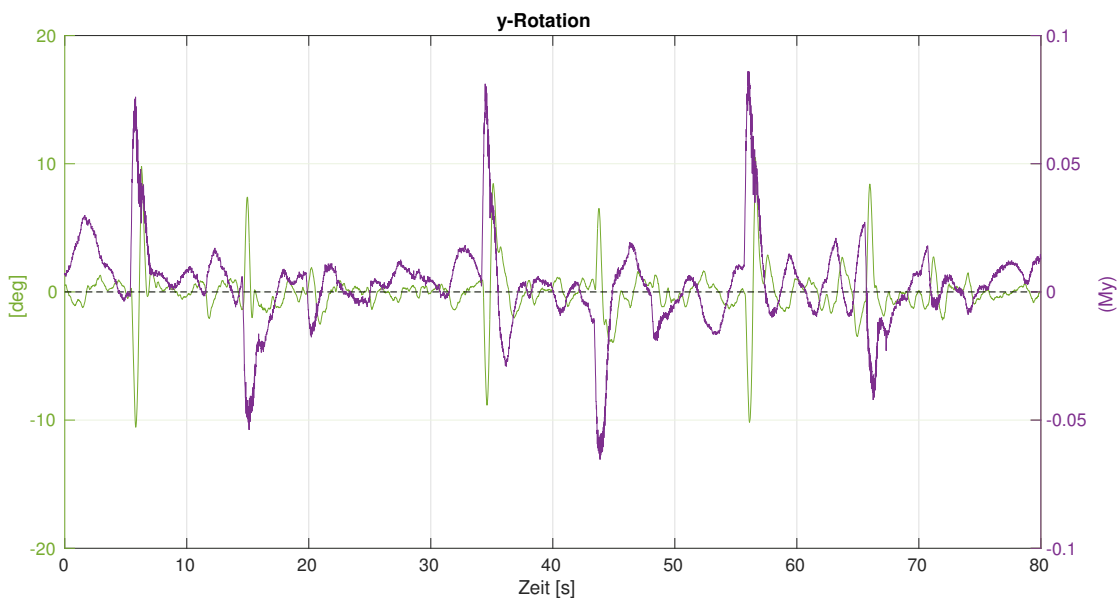


Abbildung 6.9: Lage und kommandiertes Gegenmomente in Form von Geschwindigkeitskommandos für die Drehung um die y-Achse.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit zeigt das eine Landeunterstützung mittels Roboterarm für ein UAV nicht nur theoretisch möglich sondern auch praktisch durchführbar ist. Wie in Kapitel 6 gezeigt wurde bringen Landeregler die den Lagezustand des UAVs beachten, deutliche Vorteile gegenüber eines bloßen Verfahrens des Endeffektors. Das Potenzial des Reglers aus Abschnitt 4.3.2 wurde nicht voll ausgeschöpft. Das herausragende Verhalten das der Regler in der Simulation ohne Roboterdynamik beim halten der Lage zeigt, konnte in der Simulation mit Roboterdynamik und im Experiment nicht erreicht werden. Deutliche Verbesserungen würde eine Kompensation der Motorträgheit und der Motor- und Gelenkreibung in der Robotersteuerung und die Verwendung eines anderen UAVs dem direkt Momente kommandierte werden können bringen. Alternativ dazu könnten die am Kugelgelenk auftretenden Kräfte direkt gemessen werden, siehe Abbildung 7.1 und anhand der gemessenen Kräfte ein Gegenmoment ans UAV kommandiert werden. Eine

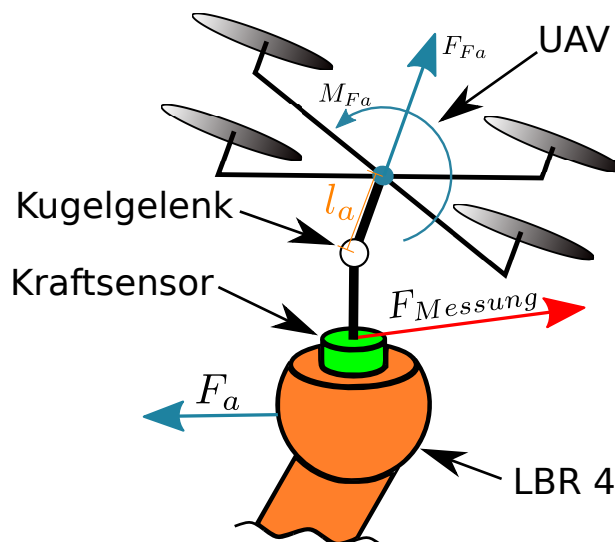


Abbildung 7.1: Alternativ zur modalen Regelung könnte die Störkraft direkt gemessen und für das daraus resultierende Moment ein Gegenmoment ans UAV kommandiert werden.

andere Möglichkeit bei der Modellierung wäre, das verbundene UAV mit seinen Aktuatoren direkt in die kinematische Kette des Roboters mit aufzunehmen. Die der Landung vorangehende Kopplung des Roboterarms zum UAV kann zum Beispiel magnetisch erfolgen [ducHingeMag] und das Lokalisieren sowie Einfangen mit Unterstützung einer Kamera.