UNIVERSITETET I AGDER

Newton og Leibniz' arbeid med utviklingen av kalkulus sett i lys av dagens lærebøker

Med spesiell vekt på hovedteoremet i kalkulus og regnemåter

Erlend Harbo

Veileder

Reinhard Siegmund-Schultze

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2010

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Jeg har skrevet denne masteroppgaven som den siste delen av min femårige utdannelse i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder. Oppgaven er skrevet på våren 2010.

Jeg vil gjerne få takke alle de som har hjulpet og veiledet meg gjennom arbeidet med oppgaven. Først vil jeg takke Instituttet for Matematiske fag ved Fakultetet for Teknologi og Realfag for å ha lagt opp til et godt femårig løp og hjulpet med alt jeg har behøvd, spesielt det siste halve året med oppgaveskriving. Alle ansatte ved instituttet har alltid vært hjelpsomme og vennlige når jeg har spurt om hjelp. Jeg vil også takke mine medstudenter som jeg har delt lokalet med og som alle har vært med på å skape et godt og arbeidsvennlig miljø blant studentene.
Jeg vil også takke min forlovede Trine Strøm Einerkjær for å ha støttet og hjulpet meg gjennom hele prosessen.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til min veileder Reinhard Siegmund-Schultze for hans innspill og tilbakemeldinger som alltid har vært til stor hjelp gjennom hele arbeidet med oppgaven.

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg arbeidet med den historiske kalkulusen til Newton og Leibniz og sammenliknet den med tilsvarende kapitler i norske lærebøker. Jeg har lagt spesielt vekt på måten hovedteoremet i kalkulus blir behandlet og hvilke regnemåter som blir benyttet. Jeg har sett på arbeidet Newton og Leibniz gjorde ved deres oppdagelse og utvikling av kalkulus. Derfor har jeg tatt for meg hver enkelt matematiker og hans utvikling, metoder og beviser for det nye matematiske feltet. Etter dette valgte jeg ut flere lærebøker som hører til den videregående skolen i Norge og som omfatter dette begrepet. Bøkene har jeg analysert med hensyn på emnet og sett på likheter og forskjeller mellom disse og den historiske kalkulusen til Newton og Leibniz.

En av de store forskjellene mellom dagens kalkulus og de til Newton og Leibniz er konseptet og opperasjonene man benytter seg av. Newton og Leibniz benyttet seg av uavhengige variabler og implisitte funksjoner som inneholdt disse variablene, de regnet også med uendelig små enheter, kalt fluxioner/moments eller infinitesimaler, som man ikke hadde noen strengt matematisk fundament for og dermed ikke med sikkerhet kunne si at er lovlige å benytte. Dagens lærebøker har derimot funksjoner og opperasjoner på dem som sitt konsept, og opperasjonene er definert ved hjelp av grenseverdier. Dermed har kalkulus fått et strengt matematisk fundament hvor det ikke lenger er noen diskusjon på hvorvidt emnet er matematisk korrekt.

Det at Newton og Leibniz så at derivasjon og integrasjon er inverse opperasjoner, en enkel måte å se hovedteoremet i kalkulus på, er den viktigste grunnen til at de blir sett på som oppfinnerne av kalkulus. Etter å ha fått denne innsikten så de raskt hvordan alle de tidligere funnene innenfor emnet, som tidligere matematikere hadde funnet ved hjelp av metoder laget spesielt for den oppgaven, ble løst ved hjelp av hovedteoremet. De fleste av dagens lærebøker inneholder bare derivasjon, men i den læreboken (Sinus R2) som også omfatter integrasjon blir hovedteoremet introdusert på en måte som tydelig viser den inverse sammenhengen mellom opperasjonene. Etter å ha lært om derivasjon får elevene først introdusert integrasjon som den antideriverte, der eleven blir bedt om å finne et uttrykk som derivert gir uttrykket som oppgaven startet med. Læreboken har ellers ikke noen god formulering på hovedteoremet, men benytter den inverse sammenhengen gjennom store deler av emnet.

Sett fra et pedagogisk standpunkt så har kalkulus utviklet seg til det bedre fra utgavene til Newton og Leibniz og frem til dagens lærebøker. At emnet har fått et strengt matematisk fundament slik at lærere kan være sikre på at det de lærer bort til elevene er korrekt, og innføringen av funksjoner slik at man ikke lenger behøver selv å bestemme hvilken differensial som det skal utvikles fra, har ført til at kalkulus er et bedre pedagogisk fag. Samtidig har man videreført notasjonsmåten til Leibniz og gått bort fra den til Newton. Leibniz' skrivemåte er betraktelig lettere for andre matematikere å forstå og regne med så også dette har gjort kalkulus mer pedagogisk riktig.

Summary

In this assignment I have worked with the historical calculus of Newton and Leibniz and compared it to the corresponding chapters of Norwegian textbooks. I have paid specific attention to how the fundamental theorem of calculus is treated and which calculation methods that are being used. I have looked into the work Newton and Leibniz did when they discovered and developed the calculus. I have therefore looked at each mathematician and his development, methods and proofs of the mathematical field. Afterwards I chose several textbooks belonging to the Norwegian upper secondary school (den videregående skolen) that included the subject. These I have analyzed with respect to calculus and looked on similarities and differences between the books and the historical calculus of Newton and Leibniz.

One of the greatest differences between today's calculus and the calculus of Newton and Leibniz lies in the concept of function and the operations that are used. Newton and Leibniz made use of independent variables and implicit functions containing these variables, and they also calculated with infinitely small unities, called fluxions/moments or infinitesimals, which did not have a rigorous mathematical fundament. Therefore no one could say for sure whether it was legitimate to use. Today's textbooks on the other hand have functions as the concept, and several operations on them are defined by limits. This means that the calculus has gotten a rigorous mathematical fundament where there no longer is a discussion whether it is mathematical correct or not.

The fact that Newton and Leibniz discovered the inverse relationship between derivation and integration, a simple way to look at the fundamental theorem of calculus, is the main reason the two mathematicians are considered the discoverers of calculus. After gaining this insight they saw how all the earlier findings in the subject, discovered by earlier mathematicians via ad hoc methods, were based on using the fundamental theorem. Most of today's textbooks only consider derivation, but in the one which also considers integration the fundamental theorem is introduced in a way that clearly states the inverse relationship between the operations. After having learned about derivation the students are asked to find an expression that differentiated gives the expression that the assignment started with. The textbook does not have a good definition on the fundamental theorem, but it uses the inverse relationship of the operations throughout the chapters.

If we look at the calculus from a pedagogical point of view it has improved from the versions of Newton and Leibniz to today's textbooks. The fact that the subject now is rigorous so the teachers can be sure what they are teaching to the students is correct, and the introduction of functions so that they no longer have to choose which differential to develop from, has made the calculus a better pedagogical subject. At the same time one has carried on the notation of Leibniz and dismissed the one of Newton. Since Leibniz's notation is considerable easier for other mathematicians to both understand and calculate with it has also made the calculus a better pedagogical subject.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

Da jeg skulle velge emne for min masteroppgave ønsket jeg å skrive en oppgave som omhandlet et historisk tema. Jeg er også interessert i fysikk og har årsstudium fysikk i min utdannelse. Arbeidet som ble gjort på slutten av sekstenhundretallet av Newton og Leibniz da de utviklet et nytt emne innen matematikken, nemlig kalkulus, har vært svært viktig både innenfor matematikken og fysikken. Dette er et tema som interesserer meg og som jeg ønsket å lære mer om, så dermed var det enkelt å velge dette temaet som min masteroppgave. Oppgaven skal også ha en mer pedagogisk vinkling, så jeg har valgt å se på hvordan lærebøker i den norske videregående skolen behandler temaet og hvilke likheter og forskjeller det er.

Mine forskningsspørsmål er derfor:

1. Hvilke likheter og forskjeller kan man finne mellom de historiske kalkulusene til Newton og Leibniz og dagens lærebøker?
2. Har kalkulus utviklet seg til et bedre pedagogisk matematisk emne fra Newton og Leibniz og frem til i dag, og i tilfelle på hvilken måte?

Jeg har valgt å legge spesielt vekt på hovedteoremet i kalkulus og regnemåtene som blir benyttet.

I oppgaven ser jeg først på hva hovedteoremet i kalkulus egentlig sier og ulike strenghetsgrader på definisjonen av det. Så er det en oversikt over matematisk strenghet gjennom tidene, med spesielt vekt på beviser. Jeg vil så gi en liten oversikt over hvor langt matematikken var kommet innen Newton og Leibniz kom inn i bildet, primært ved å vise til eksempler på problemer tidligere matematikere hadde klart å løse via ulike metoder. Så vil jeg ta for meg hver enkelt matematiker og se på hvordan han oppdager og arbeider med kalkulus. Videre har jeg valgt ut noen norske lærebøker som tar for seg temaet og analyserer hvordan disse innfører og arbeider med emnet. Jeg vil så ha en diskusjon hvor jeg samler sammen det jeg har funnet og trekker tråder mellom de ulike delene av oppgaven.

Til slutt vil jeg gi en konklusjon hvor jeg oppsumerer funnene med tanke på forskningsspørsmålene og forsøker å svare på disse.

Figurene i oppgaven er enten laget av meg for å illustrere hvordan matematikeren/læreboken selv viser figurer, kopiert fra den aktuelle læreboken som kapittelet handler om kopiert fra en annen bok. Ved det siste tilfellet gir figurteksten hvilke bok den er hentet fra.

2. Hovedteoremet i kalkulus

Siden en svært viktig del av kalkulus er hovedteoremet som fastsetter den inverse sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon vil jeg i starten si litt om dette. Som vi skal se senere var flere problemer innen kalkulus løst før Newton og Leibniz kom med sine arbeider, men ved alle disse hadde man brukt metoder som var laget spesielt for dette problemet, og ingen hadde fullstendig sett forbindelsen mellom derivasjon og integrasjon. Og det er denne viktige innsikten av Newton og Leibniz som gjør at det er disse to som blir regnet som oppdagere av kalkulus.

En viktig ting å definere når man skal si noe om hovedteoremet i kalkulus er hvilke funksjoner og hvilket integralbegrep dette vil gjelde for. I starten brukte man mye polynomfunksjoner og liknende, men etter hvert kom flere funksjonsgrupper til og man så at hovedteoremet ikke nødvendigvis ville fungere på alle disse. Man måtte finne de funksjonene og det integralbegrepet som er slik at integrasjon og derivasjon blir inverse opperasjoner, og deretter lage en definisjon som er strengt korrekt matematisk.

En enkel måte å se på integralet av en ikke-negativ funksjon er å betrakte det som arealet mellom grafen til funksjonen og x-aksen. Men denne tenkemåten fanger ikke opp alle klasser funksjoner, og den første strenge definisjonen på et integral av en funksjon på et intervall er Riemann -integralet, oppkalt etter matematikeren Bernhard Riemann (1826-1866). Dette er et integral som er relativt enkelt å definere, men det er ikke egnet for en rekke teoretiske beregninger. Blant annet er grenseverdiprosesser, som trengs til for eksempel Fourier-serier, vanskelige å arbeide med ved Riemann-integralet. Dette er blitt løst ved Lebesgue -integralet, oppkalt etter matematikeren Henri Leon Lebesgue (1875-1941). Dette integralet gjør det mye enklere å se når og hvordan man kan ta grenseverdier under et integraltegn, og det gjør det mulig å integrere en større klasse av funksjoner.

En vanlig og enkel måte å definere hovedteoremet på er å dele det opp i to deler, hvor en forutsetter at integrasjonsbegrepet er klart definert. Når det kommer til derivasjon så er det stort sett ett begrep som er allment akseptert, mye på grunn av at dette er direkte definert og dermed er det ikke så åpent for ulike tolkninger. Integrasjonsbegrepet har derimot ikke en slik direkte definisjon, det er delvis definert i forhold til derivasjon, og dette fører til logiske problemer med hovedteoremet. Blant annet vil man finne uendelig mange antideriverte til en funksjon, hvor de ulike har forskjellige konstantledd. Dermed blir de to delene seende slik ut, hvor man har spesialisert flere steder, blant annet med å bruke teoremet om at kontinuerlige funksjoner er integrerbare med Riemanns integral:

1. Integrasjon omvender derivasjon: Det betyr, hvis en funksjon er deriverbar, så er den deriverte funksjonen integrerbar og det ubestemte integralet er lik den deriverbare funksjonen bortsett fra en ubestemt additiv konstant.
2. Derivasjon omvender integrasjon: Det betyr, hvis en funksjon er integrerbar, så er det ubestemte integralet deriverbart og den deriverte funksjonen er lik den opprinnelige integrerbare funksjonen.

Dette er en veldig muntlig måte å gi hovedteoremet på, og det har som sagt også flere spesialiseringer og usikkerheter i seg. Hvis man ser i lærebøker som tar for seg temaet litt grundig så vil en mer matematisk måte å gi hovedteoremet på en enkel og vanlig måte se mer ut som dette:

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ og $x \in [a, b]$ så gjelder det med Riemanns integral:

1. Hvis $F^{'}(x) = f(x)$, så er $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
2. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Det er mulig at en kontinuerlig funksjon f er differensierbar nesten over alt på $[0,1]$, dens deriverte f' er Lebesgue-integrerbar, men likevel er integralet av f' ikke lik økningen til f. Dette gjelder for blant annet Cantorfunksjonen, og dette betyr at denne funksjonen ikke er absolutt kontinuerlig. Absolutt kontinuitet er en glatthetsegenskap for en funksjon som er strengere enn kontinuitet eller uniform kontinuitet. For å løse dette problemet har man laget et kriterium for funksjoner som kalles absolutt kontinuerlig.

Et annet relevant begrep i denne sammenhengen er 'begrenset variasjon', som er tett beslektet med absolutt kontinuitet. Et spesielt problem som dukker opp er funksjoner som Volterrafunksjonen, navngitt etter matematiker og fysiker Vito Volterra, som har de spesielle egenskapene at den er både deriverbar over alt, den deriverte er begrenset over alt men den er ikke integrerbar. Dermed har man en funksjon som kan deriveres men hvor en ikke kommer tilbake til utgangspunktet nå den så blir integrert. Dette kan løses med å legge på et tilleggskriterium på nummer en. Ved å kreve at F er en funksjon med begrenset variasjon så eliminerer man de funksjonene som kan deriveres men som ikke integreres opp til riktig funksjon igjen. Dermed blir en bedre definisjon på hovedteoremet i kalkulus:
Hvis f er absolutt kontinuerlig på $[a, b]$ og $x \in [a, b]$:

1. F har begrenset variasjon og $F^{'}(x) = f(x)$, så er $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
2. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

3. Matematisk strenghet gjennom tidene

Strenghetsbegrepet innen matematikken har ikke vært fast opp gjennom tidene. Det har forandret seg for å passe til behovet i tiden og det har ikke alltid beveget seg fra mindre til sterkere strenghet. Man kan gå så langt tilbake som til Babylonierne, som var den folkegruppen som hadde den mest avanserte og sofistikerte matematikken blant før-grekerne. Likevel har ikke Babylonierne noen form for bevis til noen av sine matematiske problemer og løsninger. De jobbet med spesifikke problemer, og løsningene ble foreskrevet, hvis du bare følger oppskriften gitt her så får du korrekt resultat. Men de gir et stort antall eksempler, så en viss form for rettfrediggjøring av de matematiske prosedyrene har de nok forsøkt å gi, som Wilder sier det:

"The Babylonians had brought mathematics to a stage where two basic concepts of Greek mathematics were ready to be born- the concept of a ***theorem*** *and the concept of a* ***proof****."*(Kleiner, 1991, p. 292) (ordene i fet skrift var allerede i kursiv i den opprinnelige teksten)

Så kom tiden hvor de gamle grekerne gjør noe drastisk med måten matematikken blir oppfattet på. Å innføre aksiomer som man videre bygger opp et matematisk byggverk basert på beviser som er utledet fra postulatene, er et stort sprang fra de tidligere tiders mangler på ordentlige bevis. Denne metoden førte matematikken et langt steg fremover når de gjaldt både strenghet og mulighet til å bevise setninger og teorier, men det førte også med seg problemer med å føre matematikken videre. Den strenge oppbyggingen førte til at grekerne ikke kunne benytte seg av konsepter som ikke var del av strukturen som var bygget opp, men som viste seg å være nyttige ved den senere utviklingen av matematikken. Blant disse konseptene var irrasjonale tall og uendelighet (selv om man hadde Eudoxus' teori om inkommensurable størrelser og hans metode med uttømming) og disse vet vi nå at var viktige i den videre utviklingen.

"The axiomatic method in Greece did not come without costs. It is paradoxical that the very perfection of classical Greek mathematics – the insistence on strict, logical deduction – likely contributed to its eventual decline… Thus a very rigorous period in mathematics brought in its wake a long period of mathematical activity with little attention paid to rigor. Too much rigor may lead to rigor mortis." (Kleiner, 1991, pp. 293-294)

Etter grekerne skjedde det lite på en lang stund, men man begynte etter hvert å forsøke seg på å utvikle et symbolspråk for matematikken. De første tre årtusenene vi kjenner til matematisk aktivitet blant mennesker var det knapt noe symbolspråk for matematikken, og alt ble gitt i form av vanlig språk og setninger. Men i løpet av femten og sekstenhundretallet forandret dette på seg, og spesielt Viète, Descartes og Leibniz sto bak denne utviklingen. For oss er det vanskelig å tenke seg matematikk uten symbolspråket, og når man fikk dette på plass åpnet det seg en helt ny og kraftig metode for å undersøke og bevise matematikk. Funn gjort på denne tiden kom ofte som en følge av den tette relasjonen mellom innhold og form som et godt symbolspråk ofte avslører. Man kan for eksempel se på Leibniz' oppdagelse og "bevis" av produktregelen for derivasjon som vi skal komme tilbake til senere: $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$, hvor han så sier at $dx\,dy$ er uendelig mye mindre enn resten og dermed kan tas bort. Denne oppdagelsen kunne nok aldri vært gjort uten symbolspråket som på en måte gir regelen direkte ved å sette inn riktige verdier for x og y. Men denne nye måten å regne med notasjon på førte også med seg problemer. For selv om Leibniz' produktregel ser korrekt ut og er lett å regne med så er det ingen som, på denne tiden, kunne fortelle hvorfor man til slutt bare kan ta bort $dx\ dy$ ved enden av regningen. Med andre ord har man et matematisk byggverk der deler ikke har et fundament som er bygget opp slik grekerne gjorde det. Man har gått fra å ha en matematikk med en veldig streng matematisk oppbygging til en der man kan regne med konsepter man ikke fullt ut forstår. Et annet eksempel som viser hvordan man brukte regnemåter man gikk ut fra er riktige siden de gir noe som ser ut som et korrekt resultat er Eulers ekspansjon av $\cos x$ ved hjelp av potensrekker. Han utvider venstreside i identiteten $(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz$ ved å bruke binomialkoeffisienter og setter de reelle delene lik $\cos nz$. Da får han $\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots$. Så lar han n være et uendelig stort heltall og z et uendelig lite tall. Da vil $\cos z = 1$, $\sin z = z$, $n(n-1) = n^2$, $n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$, … Dermed blir likningen over til $\cos nz = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \cdots$. Så sier Euler at $nz = x$, og at dette er et endelig tall siden n er uendelig stort og z uendelig lite, og dermed ender man opp med $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$. Dette eksempelet på arbeid med den nye algebraiske metoden viser hvordan man regnet med konsepter man ikke var helt sikre på. Man gikk ut ifra at det som var sant for konvergente serier også er sant for divergente serier, det som er sant for endelige kvantiteter også er sant for uendelig store og små kvantiteter og det som er sant for polynomer også er sant for potensrekker. Men hvorfor stolte matematikere på denne tiden så mye på symbolene og de svarene de fikk ved å arbeide med disse? Kleiner sier det slik:

"First and foremost, the use of such formal methods led to important results. A strong intuition by the leading mathematicians of the time kept errors to a minimum [selv om noen feil ble begått]. *Moreover, the methods were often applied to physical problems and the reasonableness of the solutions "guaranteed" the correctness of the result (and, by implication, the correctness of the methods). There was also a belief (held by Newton, among others) that mathematicians were simply uncovering God's grand mathematical design of nature."*(Kleiner, 1991, pp. 295-296).

Selv om man regnet med disse usikkerhetene, så var det flere matematikere som kritiserte det og ønsket et sterkt fundament for den nye regnemåten. Dette ble det tatt tak i på attenhundretallet, og flere tok tak i arbeidet. Det første relativt vellykkede forsøket ble startet av Cauchy i 1821, der han valgte ut noen få konsepter, nemlig grenseverdier, kontinuitet, konvergens, derivat og integral, og valgte ut grenseverdikonseptet som det ene alle andre skulle baseres på. Etter dette kommer han frem til de store resultatene innen kalkulus ved metoder som ikke er langt fra våre moderne metoder. Likevel har Cauchys forsøk på å skape et strengt matematisk fundament for kalkulus flere problemer. Han bruker blant annet flere ganger verbale definisjoner av konsepter, han benytter seg av infinitesimaler og han bruker geometriske bevis for å bevise flere grenseverdier. Derfor ønsket Weierstrass og Dedekind å gjøre noe med denne

"mixture of algebraic formulation and geometric justification which Cauchy favored [and which] did not provide full comprehension of the major results of function theory"(Kleiner, 1991, p. 11)

For å klare dette ønsket de å definere teoremene på en rent aritmetisk måte i det som ble kjent som aritmetiseringen av analysen. Helt siden starten av arbeidet med kalkulus ble de reelle tallene sett på som geometriske, uten noen eksplisitt formulering av egenskapene deres. Siden de reelle tallene var med i det meste av analysen, ble også teoremene og bevisene nødvendigvis geometriske og intuitive. Weierstrass og Dedekind innså at man trengte en strengt aritmetisk definisjon av de reelle tallene for å løse de største hindrene for å lage et strengt matematisk fundament for kalkulusen. Det andre problemet som måtte løses var å finne en presis algebraisk definisjon på grenseverdikonseptet slik at man kunne bytte ut Cauchys intuitivt geometriske oppfatning. Dette ble løst med Weierstrass' definisjon av grenseverdi, (ϵ, δ)- definisjonen, som er den vi fortsatt bruker i dag (om enn i en enda mer formell og streng form). Dermed hadde man ved Weierstrass endelig klart å bli kvitt infinitesimalene, som hadde vært brukt relativt ukritisk av forgjengerne de siste to århundrene.

Som vi har sett har ikke bare strengheten i matematikken forandret seg gjennom årene, også midlene som blir brukt for å etablere den matematiske strengheten har gjennomgått forandring. I det gamle Hellas hadde man ikke etablert et teorem før det var blitt geometrisert, og denne holdningen ble opprettholdt gjennom middelalderen og renessansen. Men kalkulusen som oppsto på seksten og syttenhundretallet var ikke enkelt å forsvare ved hjelp av geometrien, og algebra ble det nye middelet for å forsvare arbeidene. Dette ble en glidende overgang der man en tid hadde en blanding av geometriske og algebraiske metoder i blant annet Cauchys arbeid, før Weierstrass og Dedekind på attenhundretallet gjorde aritmetikk, i stede for algebra og geometri, til det gjeldende språket for strenghet innen matematikken.

Aritmetikken ble ikke ledende lenge, for på slutten av atten og begynnelsen av nittenhundretallet begynte man å se på grunnlaget for den euklidske geometrien og det aksiomatiske systemet generelt. Dette førte til utviklingen av ikke-euklidsk geometri og den moderne aksiomatiske metoden, utviklet sent på attenhundretallet. Man begynte ved hjelp av dette å utvikle abstrakt algebra, med grupper, kropper og ringer med mer, og den aksiomatiske metoden viste seg nok en gang å være et sterkt verktøy. Det er likevel betydelige forskjeller mellom Euklids aksiomatiske metode og den moderne utgaven som vokste frem. Euklid bygde opp sine aksiomer som idealer av den virkelige, fysiske verdenen, og de ble derfor sett på som selvinnlysende sannheter som beskriver en allerede eksisterende verden. Med den moderne metoden ser man på aksiomene, og dermed også teoremene, som blottet for mening. Det aksiomatiske systemet trenger heller ikke være kategorisk, det tillater altså essensielt forskjellige tolkninger (modeller), som alle kan tilfredsstille de samme aksiomene. Dette er en hittil fundamentalt ukjent ide. Den moderne aksiomatiske metoden er dermed et samlende og abstrakt system, som kunne benyttes ikke bare for å lage et konsistent fundament men også for å oppdage og bevise. Metoden var likevel ikke noen ubetinget suksess, for selv om noen så på den som den sentrale metoden for matematisk arbeid var det andre som argumenterte for at den kveler kreativiteten som metode for oppdagelse og at den har sine begrensninger som metode for bevis.

Dette førte til at matematikkens filosofi ble splittet i tre hovedfilosofier, logisismen, formalismen og intuisjonismen. Dette er det første formelle uttrykket av matematikere for hva matematikk, og spesielt bevis innen matematikken, er. Den logistiske tesen forsvarer at matematikken er en del av logikk. Matematiske konsepter blir beskrevet i form av logiske konsepter. Men selv om den logiske tesen var viktig filosofisk og hjalp til og med arbeid innen matematisk logikk, så ble den ikke tatt inn av store deler av det matematiske samfunnet. Dette kom nok av at den ikke kunne gi realitet til matematikken annet enn gjennom logiske konsepter og at det tok veldig lang tid for å få resultatene av hvilken som helst konsekvens.

Den største debatten i det matematiske samfunnet, som fortsatt ikke er avgjort, står mellom tilhengere av formalismen og intuisjonismen. Den formalistiske tesen ser på matematikken som en studie av aksiomatiske systemer. Både de primitive leddene og aksiomene skal bli sett på som rekker med symboler som ingen mening skal bli tillagt. Disse skal så bli manipulert etter reglene som er etablert for å oppnå teoremene for systemet. Formalistene har blitt anklaget for å ta bort all mening innen matematikken og gjøre det om til ren symbolmanipulasjon, men dette er ikke hva man prøver på. Formalistene ønsker å se på fundamentet til matematikken, ikke den daglige praksisen, og formalisere emnet slik at man kan vise at matematikken er fri for uoverensstemmelser. Men i 1931 ble dette ønsket om en hoveddesign lagt på is, når Gödel publiserte sine ufullstendighetsteoremer. Disse sier at overensstemmelse av en stor klasse av aksiomatiske systemer ikke kan bli etablert innenfor systemet, og hvis et system er i full overensstemmelse så er det ufullstendig. Dette gir problemer for å lage et matematisk system som er fullstendig strengt, og som Kleiner og Chaitin kommenterer at Gödels arbeid

"demands the surprising and, for many, discomforting conclusion that there can be no definitive answer to the question "What is a proof?". Just as in the 19th century, following the invention of non-Euclidean geometries, noncommutative algebras, and other developments, mathematics lost its claim to (absolute) truth, so in the 20th century, following Gödel's work, it lost its claim to certainty."(Kleiner, 1991, pp. 306-307)

Intuisjonistene mener at ingen formell analyse av aksiomatiske systemer er nødvendig, og man bør ikke basere matematikken på et aksiomatisk system. Det er i stede for matematikerens intuisjon som vil veilede ham til å unngå motsigelser, men han må være ekstra oppmerksom på definisjoner og metoder for bevis. Disse må være konstruktive og endelige, og spesielt så er loven om den ekskluderende tredje, komplett uendelig, utvalgsaksiomet og bevis ved motsigelse ikke lovlige. Dette fører til at mange av matematikkens viktigste oppdagelser ikke blir godtatt innen intuisjonismen. På den andre siden så er bevisene til intuisjonismen vel aksepterte innen formalismen.

Denne uenigheten mellom formalistene og intuisjonistene var virkelig, og for første gang var matematikere splittet i synet på hva et bevis innen matematikken egentlig er. Dette er likevel ikke noe som de fleste matematikere bekymrer seg over, spesielt mens man jobber med det daglige matematiske arbeidet, og det er ikke sikkert at denne uenigheten noen gang vil kunne løses. Weyl sier det på denne måten:

"The question of the ultimate foundations and the ultimate meaning of mathematics remains open; we do not know in what direction it will find its final solution or even whether a final objective answer can be expected at all. 'Mathematizing' may well be a creative activity of man, like language or music, of primary originality, whose historical decisions defy complete objective rationalization"(Kleiner, 1991, pp. 308-309).

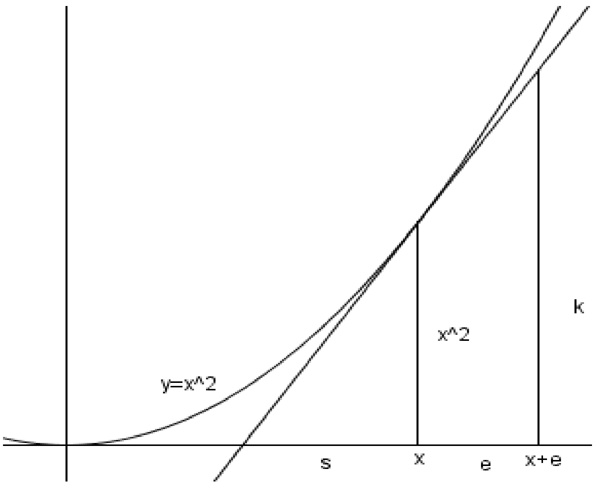
4. Tiden før Newton og Leibniz

Det var gjort mye og viktig arbeid rundt det som tidligere ble regnet som tangency og quadrature (som vi nå kaller derivasjon og integrasjon) i tiårene før Newton og Leibniz gjorde sine arbeider med å videreutvikle og finne sammenhengene innen kalkulus. Mange matematikere var kommet langt i utviklingen av metoder for å løse problemer i begge disse kategoriene, men ingen hadde klart å se sammenhengen mellom dem og formulert et forslag til hovedteoremet i kalkulus. Vi skal nå se et eksempel på hver metode, utført av to av de viktigste matematikerne før Newton og Leibniz. Vi følger eksemplene gitt av Kleiner (Kleiner, 2001, pp. 140-141)

4.1 Fermats metode for å finne tangenten til en kurve

Den første til systematisk å håndtere tangentproblemer var en matematiker ved navn Fermat. I 1630-årene fant han en metode for å finne tangenten til et hvilket som helst punkt i et hvert polynom, her skal vi se på fremgangsmåten hans.

Tenk deg vi skal finne tangenten til $y = x^2$ i punktet (x, x^2) (se figur 1). La så $x + e$ være et annet punkt på x-aksen og la s være subtangenten til kurven i (x, x^2). Formlikhet for trekantene gir at $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$. Nå hevder Fermat at k er adekvat til $(x + e)^2$ (han mente sannsynligvis så "så nær lik som mulig", selv om han aldri sier dette). Han skriver dette som $k \cong (x + e)^2$, og dermed blir $\frac{x^2}{s} \cong \frac{(x+e)^2}{s+e}$. Når vi løser denne for s får vi: $x^2 + \frac{x^2 e}{s} \cong (x + e)^2$ og videre blir $s \cong \frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{ex^2}{e(2x+e)} = \frac{x^2}{2x+e}$. Av dette følger at $\frac{x^2}{s} \cong 2x + e$. Her er det viktig å legge merke til at $\frac{x^2}{s}$ er helningen til tangenten til $y = x^2$ i punktet (x, x^2). Nå velger Fermat "å slette" e-en og hevder helningen til tangenten er $2x$.

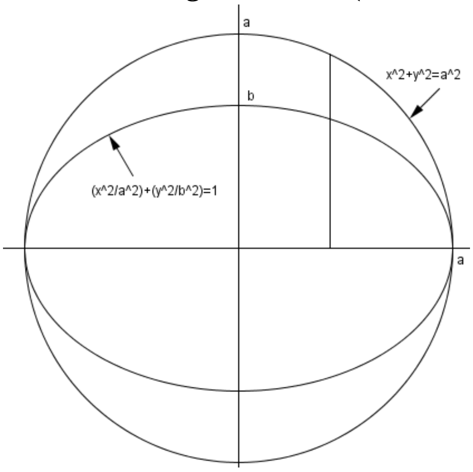


Figur 1 Fermats tangentløsning

Fermat ble sterkt kritisert for denne metoden av mange i sin samtid, spesielt Descartes. Denne gikk ut på introduksjonen og etterfølgende bort taking av den mystiske e-en. Divisjon med e betyr at den ikke er null, mens å kvitte seg med den betyr at den er null. Dette er uakseptabelt hevdet de helt korrekt. Men Fermats mystiske e inneholdt en viktig ide, nemlig å tilegne en svært liten økning til en variabel.

4.2 Cavalieris prinsipp

Et viktig redskap for å løse problemer innen kalkulus var begrepet om udelelighet. Begrepet ble brukt så tidlig som i det gamle Hellas, og kan for eksempel være i form av et areal som er sammensatt av en sum av uendelig mange linjer (de udelelige). Dette ble brukt av flere i det tidlige sekstenhundretallet, men det var Cavalieri som i boken "*Geometry of Indivisibles*" i 1635 gjorde det om fra et vagt konsept til en nyttig teknikk for å bestemme arealer og volumer. Metoden går ut på å se på geometriske figurer som bestående av uendelig mange udeleligheter av lavere dimensjon. Så et areal består av uendelig mange parallelle linjer med lik avstand mellom seg, mens et volum består av uendelig mange parallelle plan med lik avstand mellom seg. For å finne arealet (eller volumet) av en figur, må man sammenlikne det med en annen figur med kjent høyde der man kjenner arealet (eller volumet). Cavalieris prinsipp går da ut på å sammenlikne de udelelige elementene, og hvis disse alltid er i et gitt forhold så er også arealene (eller volumene) av de to figurene i dette forholdet.



Figur 2 Cavalieris prinsipp på sirkel og ellipse

Vi kan for eksempel si at vi ikke vet arealet av en ellipse, men vi vet at arealet av en sirkel er πr^2. Ordinaten til ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ har et forhold til ordinaten til sirkelen $x^2 + y^2 = a^2$ som tilsvarer $\frac{b}{a}$ (se figur 2). Derfor er arealet av ellipsen $= \frac{b}{a} \times$ $arealet\ av\ sirkelen = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ba.$

5. Sir Isaac Newton

5.1 Biografi

Newton ble født første juledag 1642 i familiens herregård i Woolsthorpe. Faren var død når Newton ble født, og etter bare tre år giftet moren seg på ny. Dette førte til at han for det meste ble oppdratt av sin bestemor. Han gikk på lokale skoler frem til tolvårsalderen, før han flyttet til byen Grantham hvor han bodde hos den lokale apotekeren og gikk på grammar school. Etter fire år ble han kalt tilbake til sin mor, som var blitt enke igjen. Hun ønsket hjelp på gården, men det ble raskt klart at Newton ikke var noen god gårdsgutt. Han fikk etter hvert lov til å dra tilbake til Grantham, etter hjelp til overtalelse fra sin onkel og den tidligere skolemesteren på skolen. Vel tilbake på skolen startet han på forberedelsene for å komme inn på Cambridge. Det viste seg at skolen, i motsetning til de fleste andre skoler, underviste i uttrekking av kuberoten, elementær måling, plantrigonometri og konstruksjoner av geometriske figurer. Dette gikk langt forbi det som vanligvis ble undervist selv på universiteter på den tiden, og kan være med på å forklare Newtons store matematiske innsikt allerede ved ankomst til Cambridge(D. T. Whiteside, 1982, p. 101).

Som attenåring ble Newton tatt opp som en stipendiat på Trinity College, det fremste colleget i Cambridge. Dette medførte at han måtte gjøre enkle huslige tjenester for å gjennomføre skolegangen. På denne tiden var ikke Cambridge noe særlig annet enn en fabrikk for universitetsgrader, det var svært sjeldent forelesninger og disse var mest for å øke inntekten til de ansatte. Newton fullførte sjelden bøkene i pensum, som for det meste besto av aristotelisk filosofi. I 1663 undersøkte han for en tid astrologi, dette var et fag som ikke var på pensum eller hørte til etablerte studier, men det førte ham til den friskere delen av universitetet, hvor han ble introdusert til arbeider av blant annet Descartes. Endelig hadde han funnet det han søkte når han kom til Cambridge, og han leste seg opp både på Descartes og liknende matematikere den siste tiden ved universitetet (Westfall, 1980, p. 90). Universitetet tillot at han gjorde dette, selv om det ikke var innenfor det vanlige pensumet. I 1665 fikk han sin universitetsgrad selv om han ikke hadde fulgt løpet som skolen hadde lagt opp, hovedsakelig fordi universitetet ikke lenger trodde på sitt eget pensum med nok overbevisning til å håndheve det (Westfall, 1980, p. 141).

Sommeren 1665 kom byllepesten til universitetet, og så godt som alle ble sendt bort fra skolen. Newton dro da tilbake til morens gård og ble i hovedsak der til han nok en gang returnerte til Cambridge sent i 1667. Her ble han tatt opp som Minor Fellow i 1667 og Major Fellow i 1668. Så, den 29.oktober 1669, tok han over for Isaac Barrow (1630-1677), og ble den andre Lucasian professor ved Cambridge. Barrow var Newtons lærer ved universitetet og anbefalte ham som sin arvtaker. Denne stillingen førte til at han endelig fikk økonomisk sikkerhet med en god lønn, og han ble også intellektuelt uavhengig. Stillingen innebar også at Newton måtte holde en forelesning i uka, og levere inn ti av forelesningsskriptene til biblioteket hvert år. Barrow hadde allerede omgjort stillingen fra å være en post med vekt på undervisningen til en med vekt på forskning, og Newton la ikke mye arbeid ned i sine forelesninger. Han leverte tre til ti forelesninger inn til biblioteket hvert år de første sytten årene, og ingen etter dette de resterende årene som Lucasian professor(Rickey, 1987, p. 364).

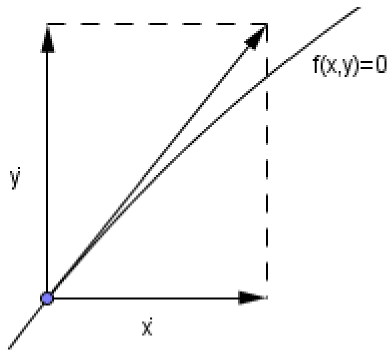
I begynnelsen av 1696 dro Newton til London, for å innta stillingen som bestyrer av Den Kongelige Mynt. Fire år senere blir han leder av Den Kongelige Mynt og trekker seg i 1701 fra sin stilling som Lucasian professor ved Cambridge. Så, i 1703, ble han valgt inn som president for det britiske vitenskapsakademiet (The Royal Society), en stilling han beholdt livet ut. Newton gjorde ikke stort vitenskapelig arbeid de senere årene, han passet på Den Kongelige Mynt og vitenskapsakademiet, reviderte *Principia* to ganger og arbeidet innefor områdene teologi og kjemi. Han var også engasjert i konflikten med Leibniz og kirke og religionshistorie. I 1705 ble han slått til ridder av dronning Anne, ikke for sine vitenskapelige bedrifter, men for å ha stilt til valg i parlamentet i 1705(Westfall, 1980, p. 625). Newton døde, 84 år gammel, den 20.mars 1727 etter å ha vært syk med gikt og betente lunger. Han ble begravd i Westminister Abbey den 28.mars, og på gravmonumentet er det inngravert ”La menneskene fryde seg over at det har eksistert et slik fremragende ornament til menneskeheten.”

5.2 Newtons måte å arbeide med kalkulus

Det var ikke så vanlig å publisere sine matematiske funn på tiden Newton gjorde sine viktigste oppdagelser, mye på grunn av manglende journaler å publisere i. Det var derfor mye vanligere at funn ble kommunisert til sine kollegaer via personlige brev og manuskripter som ble sirkulert privat. Dette førte til at mye av Newtons arbeid innen teoretisk matematikk forble upublisert i hans liv. Man kan selvsagt finne mye av dette anvendt i hans *Principia Mathematica* fra 1687, men denne er utgitt lenge etter Newton egentlig var ferdig med sitt arbeid med å utforme sin kalkulus. Dette betyr at man må se på Newtons brev og manuskripter for å få en innsikt i måten han kom frem til og anvendte sin kalkulus.

Mye av fundamentet til sine oppdagelser legger Newton i sitt arbeid under årene som pesten herjer Cambridge. Han er på universitetet en stund på våren i 1666 når man trodde pesten hadde forlatt stedet, og på denne tiden skrev han det som senere er blitt kjent som maitraktaten fra 1666. Han måtte relativt raskt flytte tilbake til gården i Woolsthorpe, hvor han reviderte maitraktaten til en oppsummering av sitt arbeide så langt i det som er blitt kjent som ”the October 1666 Tract on Fluxions (oktobertraktaten fra 1666 om fluxioner)”.

En viktig ting å legge merke til rundt arbeidene til både Newton og Leibniz er at de på denne tiden ikke arbeidet med funksjoner, de så på variabler og implisitte funksjoner som inneholder disse variablene. Newton kaller sine variable for fluents, disse er kvantiteter som er under konstant forandring. Dette gir med en gang en tilknytning til fysikalsk tenkning. Et eksempel kan være et punkt som flyter kontinuerlig langs en kurve. Disse variablene er implisitt regnet som funksjoner av tid. Hans viktigste konsept er det han kaller en fluxion, betegnet med $\dot{x}$ (det kan være verdt å merke seg at Newton i starten brukte andre bokstaver, som p og q for Fluxionene til x og y. Den prikkede notasjonen $\dot{x}$ og $\dot{y}$ som er blitt karakteristisk for Newtons kalkulusnotasjon ble først brukt konsekvent av ham på tidlig 1690 tallet). Dette er den momentane forandringen til fluenten x, ved nyere notasjon kalles den $\frac{dx}{dt}$. Newton ser på bevegelsen til et punkt på en kurve, ofte med likningen $f(x,y)=0$. Den deles opp i horisontal og vertikal bevegelse med respektive hastigheter $\dot{x}$ og $\dot{y}$ (se



Figur 3 f(x,y)=0

figur 3). Siden retningen på et punkt langs en kurve er langs tangenten til kurven, betyr det at helningen til tangenten til kurven $f(x,y) = 0$ i punktet (x,y) på kurven er $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Siden $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ og $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ så er $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$, som jo er vår notasjon. Dette betyr at helningen til tangenten, altså den deriverte, er en kvotient av fluxioner. Hans første arbeid er på å finne relasjonen mellom fluxionene $\dot{x}$ og $\dot{y}$ gitt $f(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0$, altså et polynom. Han gir den følgende løsningen:

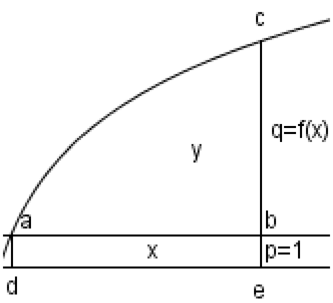
"set all y^e termes on one side of y^e equation that they become equal to nothing. And first multiply each terme by so many times $\frac{\dot{x}}{x}$ as x hath dimensions in that terme. Secondly multiply each terme by so many times $\frac{\dot{y}}{y}$ as y hath dimensions in it. … the summe of all these products shall bee equall to nothing. W^{ch} Equation gives y^e relation of y^e velocitys."(Edwards, 1979, p. 193).

Med andre ord er løsningen hans $\sum(\frac{i\dot{x}}{x} + \frac{j\dot{y}}{y})\, a_{ij} x^i y^j = 0$ [I]. Ved å omforme litt på denne kan man få at $\sum(\frac{i\dot{x}}{x} + \frac{j\dot{y}}{y})\, a_{ij} x^i y^j = \sum \dot{x} i a_{ij} x^{i-1} y^j + \dot{y} j a_{ij} x^i y^{j-1} = 0$. Hvis vi skriver med moderne notasjon er dette $\sum \dot{x} i a_{ij} x^{i-1} y^j + \dot{y} j a_{ij} x^i y^{j-1} = \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, eller $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(= \frac{dy}{dx}\right) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ som er løsningsmetoden vi kjenner i dag. Som et bevis for [I] ser han først på to legemer som beveger seg med konstant fart, og han vet at da er distansen som blir tilbakelagt proporsjonal med farten. Han fortsetter med å si at i et uendelig kort tidsintervall o så vil også legemer som ikke har konstant fart oppføre seg på en tilsvarende måte. Så hvis de i det ene øyeblikket er x og y, så er de i det neste $x + \dot{x}o$ og $y + \dot{y}o$. Hvis man så putter dette inn i den opprinnelige likningen får man $\sum a_{ij} (x + \dot{x}o)^i (y + \dot{y}o)^j = 0$. Ved å benytte binomialekspansjon får man $\sum a_{ij} x^i y^j + \sum a_{ij} x^i (j y^{j-1} \dot{y} o + ledd\ med\ o^2) + \sum a_{ij} y^j \left(i x^{i-1} \dot{x} o + ledd\ med\ o^2\right) + \sum a_{ij} \left(i x^{i-1} \dot{x} o + \cdots\right)\left(j y^{j-1} \dot{y} o + \cdots\right) = 0$. Ved å bruke at $\sum a_{ij} x^i y^j = 0$ og droppe alle ledd som inneholder o^2, blir resultatet $\sum a_{ij} (i x^{i-1} y^j \dot{x} o + j x^i y^{j-1} \dot{y} o) = 0$. Ved å dele med o får Newton så den ønskede formelen [I].

La oss se på et eksempel på denne metoden, og se hvordan den kan løse problemet med å finne tangenten til kurven $f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, ved et tilfeldig punkt (x,y) på kurven. Her lar Newton o være en uendelig liten tidsperiode. Da vil $\dot{x}o$ og $\dot{y}o$ være uendelig små økninger i x og y. Newton antar som tidligere nevnt at de momentane forandringene $\dot{x}$ og $\dot{y}$ forblir konstante i det uendelig korte tidsintervallet, dette tilsvarer egentlig middelverdisetningen i dagens matematikk, nemlig at hvis en funksjon er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b) så eksisterer det en c slik at $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Han kaller $\dot{x}o$ og $\dot{y}o$ for moments, dette er økningen av en fluent i en uendelig kort tidsperiode. Dermed er $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ et punkt på kurven uendelig nær punktet (x,y). Setter man dette inn i den opprinnelige likningen får man: $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = x^3 + 2x^2\dot{x}o + x\dot{x}^2o^2 + x^2\dot{x}o + 2x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + ax\dot{y}o + ay\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 2y^2\dot{y}o - y\dot{y}^2o^2 - y^2\dot{y}o - 2y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0$. Ved å bruke at $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ og dividere med o så får vi: $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}^2o - a\dot{x}^2o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o + \dot{x}^3o^2 - \dot{y}^3o^2 = 0$. Nå kvitter Newton seg med alle ledd som inneholder o, med begrunnelse at de er uendelig mye mindre enn de resterende leddene. Dermed kan vi separere og få $\dot{x}$ på den ene og $\dot{y}$ på den andre siden av likhetstegnet: $\dot{x}(3x^2 - 2ax + ay) = \dot{y}(3y^2 - ax)$. Dermed kan vi få et uttrykk for helningen til tangenten: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}$. Dette er en ganske generell prosedyre, og Newton nevner at han slik kan finn helningen til tangenten til en hvilken som helst algebraisk kurve. På en liknende måte som Fermat et halvt århundre tidligere, får Newton problemer med å forklare hva o er for noe. Er det null? Er det en endelig mengde? Er det uendelig lite?

5.3 Hovedteoremet i kalkulus

Etter å ha klart å finne $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ for polynomer med likning $f(x, y) = 0$ ønsker Newton å finne en metode for det motsatte problemet. Han ønsker å finne y uttrykket ved x, gitt en likning som gir forholdet mellom x og kvotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ til deres fluxioner, altså enten en likning på formen $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \phi(x)$ som er et problem av typen vi i dag ville kalle antiderivasjon, eller det mer generelle tilfellet $g\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0$ som gir en differensiallikning. I hans femte og syvende illustrative problemer i oktobertraktaten fra 1666 så diskuterer Newton utregning av arealer ved hjelp av antiderivasjon. Dette er den første gangen i historien hovedteoremet i kalkulus blir eksplisitt gitt ved formen $\frac{dA}{dx} = y$, hvor A er arealet under kurven $y = f(x)$, noe som gir en basis for en algoritmisk tilnærming til utregning av arealer. Flere slike areal og tangentproblemer hadde vært undersøkt og løst i tiårene før Newton, men dette ved hjelp av teknikker som var tilpasset det spesielle problemet, ofte infinitesimaler eller udelelige elementer sammen med Cavalieris prinsipp. Det var Newtons introduksjon og anvendelse av sine generelle algoritmiske teknikker som gjør at man regner Newton, og ikke noen av de tidligere, som en av oppdagerne av kalkulus. Newtons metode gikk ut på først å fastsette forandringen til det ønskede arealet med hensyn til x, for så å bruke antiderivering for å finne arealet. Dette, sammen med hans måte å benytte fluxioner på tangent og stigningshastighet, gjorde det for første gang klart at det er en invers relasjon mellom tangent og arealproblemer, at de hører til det samme matematiske emnet og at det er distinkte og generelle algoritmer som kan benyttes på dette emnet.



Figur 4 Arealet under kurven

For å se på måten Newton kom frem til hovedteoremet i kalkulus ved bruk av fluxioner ser vi på figur 4. Her er y arealet abc under kurven $q = f(x)$, og vi lar det vertikale segmentet bc være det som bestemmer arealet mens det beveger seg mot høyre med enhetsfart $\dot{x} = 1$. Hvis $p = 1 = \dot{x}$ (slik som figuren viser) så er arealet av rektangelet lik x. Videre sier Newton: *"supposing y^e line cbe by parallel motion to describe y^e two [areas] x and y; The velocity W^{th} W^{ch} they increase will bee, as be to bc: y^t is, y^e motion by W^{ch} x increaseth being $be = p = 1$, y^e motion by W^{ch} y increaseth will be $bc = q$."*(Edwards, 1979, p. 196). (Her betyr y^t that og y^e the)

Han tar det altså som åpenbart at tidsforandringen av arealet y er $q = f(x)$ med $\dot{x} = 1$, så $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$, dette kan vi se i sitatet ovenfor der han nettopp tar den inverse til begge sider. Dette beviset er ikke noe vi i dagens matematikk ville sett på som et strengt korrekt bevis, og Newton tenkte nok på en økning i areal fra y til $y + oq$ og tilsvarende økning fra x til $x + o$ i det uendelig lille tidsintervallet o. Dette forklarer blant annet den motsatte relasjonen ved at stigningen til kurven med ordinat $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ er x^n og at arealet under kurven med ordinat x^n er $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, som hadde vært kjent en stund når Newton kom med sine oppdagelser. Dette kommer av at hvis arealet $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ så gir [I] at $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n$, og motsatt. Det er også verdt å merke seg at Newton konsekvent utelot integrasjonskonstanten, så alle hans kurver gikk gjennom origo.

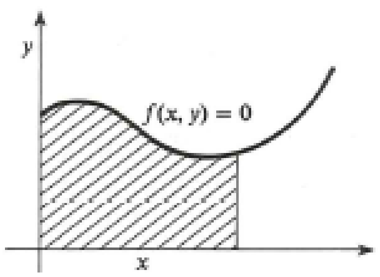
5.4 Regler og anvendelser

Kjerneregelen er en viktig arbeidsmetode innen kalkulus, og med Newtons fluxioner er den nærmest en del av den vanlige regningen. For å ta et eksempel kan vi se på utregningen av $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ når $y = (1 + x^n)^{3/2}$. I dette tilfellet ville Newton ha valgt en ny variabel $z = 1 + x^n$ som dermed har fluxion $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$. Nå vil $y^2 = z^3$, og dermed er $2y\dot{y} = 3z^2\dot{z}$. Ved å sette inn for variablene her får man at $2(1 + x^n)^{3/2}\dot{y} = 3(1 + x^n)^2 nx^{n-1}\dot{x}$. Dermed får man at $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3(1+x^n)^2 nx^{n-1}}{2(1+x^n)^{3/2}} = \frac{3}{2}nx^{n-1}\sqrt{1 + x^n}$. Newton viser nå også reglene for produkt og kvotient, men disse blir bare introdusert ved hjelp av eksempler på teknikkene man bruker og ingen eksplisitt algoritme for dette blir gitt. Han kommer også med flere eksempler på hvordan metoden med å bytte variabel kan hjelpe med å løse ulike problemer, og skriver at

"*how to proceed in other cases (as when there are cube rootes, surde denominators, rootes within rootes (as* $\sqrt{ax + \sqrt{aa - xx}}$*) etc. in the equation may bee easily deduced from what hath been already said"*(Edwards, 1979, p. 199).

I *De Analysi* fra 1669 gir han også regelen at hvis y er sammensatt av flere ledd så vil arealet som y gir være sammensatt av arealene som hvert ledd gir, som vi i dag kjenner som regelen for leddvis integrasjon.

Hvis man ikke har et polynom har Newton flere metoder for å løse problemet på. En måte er å bytte variabel slik vi har sett tidligere, men hvis denne metoden ikke fører frem har han også teknikken for å approksimere løsningen som er blitt kjent som Newtons metode. Denne metoden hjelper ham å løse problemer med implisitte funksjoner av typen $f(x, y) = 0$ (figur 5). Han hadde brukt for et eksplisitt uttrykk for y slik at han kunne utføre en integrasjon, og approksimasjonsmetoden hjelper med å finne dette. La oss følge et eksempel av en enklere funksjon av typen $y = f(x)$ av Edwards (1979, pp. 201-202) for så å se på en generell metode. Newton gav i starten bare eksempler på hvordan metoden kunne benyttes. Hvis vi har likningen $y^3 - 2y - 5 = 0$, så approksimerer vi løsningen til å være 2. Han setter så inn $y = p + 2$ i den opprinnelige likningen og får dermed at $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Nå overser man alle ikke-lineære ledd av p og får at $10p - 1 = 0$, altså $p = 0.1$. Dermed velger han $p = 2.1$ som den andre approksimasjonen for y, og setter



Figur 5 Newtons metode for f(x,y)=0. Hentet fra Edvards (1979, p. 203)

$y = q + 2.1$ inn i den opprinnelige likningen. Dermed får man likningen $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ for q. Nok engang ignoreres alle ikke-lineære ledd og man står igjen med $11.23q + 0.061 = 0$, eller $q = -0.0054$. dermed blir den tredje approksimasjonen 2.0946, som er ganske nærme den egentlige 2.09455148 med åtte desimaler. En generell løsningsmetode for likningen $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = 0$ blir da å approksimere x_n for den faktiske løsningen x_* og sette inn $x_* = x_n + p$ i likningen. Da får man at $0 = \sum_{i=0}^{k} a_i {x_*}^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (x_n + p)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i ({x_n}^i + i{x_n}^{i-1}p + \cdots)$, som igjen gir at $0 = f(x_n) + pf'(x_n) + \cdots$, der prikkene står for ledd med høyere grad av p. Ved å overse disse leddene av høyere grad får man at $p \cong -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ slik at $x_* \cong x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$, som er formelen for den $(n+1)$te approksimasjonen når man benytter Newtons metode. For implisitte funksjoner av typen $f(x,y) = 0$ benytter man en tilsvarende måte, men nå får man også ledd med x når man velger approksimasjonene til y. Dermed får man etter hvert en potensrekke for y der Newton så ville integrert ledd for ledd for å finne en tilnærmet løsning.

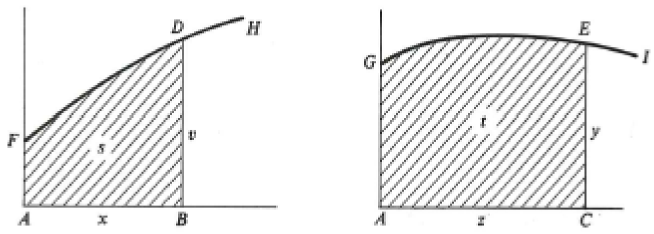
Etter å ha gjort mange store funn og mye arbeid organiserte Newton sitt matematiske arbeid på kalkulus i avhandlingen *De Methodis Serierum et Fluxionum (On the Methods of Series and Fluxions)* i 1671. Han forsøkte å få dette verket publisert, men ingen ønsket å trykke det og det ble ikke publisert før i 1736, en stund etter hans død. Verket starter med en utvidet versjon av *De Analysis* med blant annet en samling problemer som viser bruksområder for fluxionsmetoder. Har gir for eksempel i problem tre en metode for å finne maksima og minima, hvor han skriver at
"When a quantity is greatest or least, at that moment its flow neither increases nor decreases: for if it increases, that proved that it was less and will at once be greater than it now is, and conversely so if it decreases. Therefore seek its fluxion [by previously described methods] and set it equal to nothing"(Edwards, 1979, p. 209)

Her sier han, med vår notasjon og begreper, at for å finne maksima og minima for funksjonen $f(x)$ må man løse likningen $f'(x) = 0$. I *De Methodis* har Newton også utviklet sitt fluxionsbegrep. Nå er det ikke lenger bare tiden t, men hvilken som helst mengde som strømmer uniformt (any quantity flowing uniformly) kan bli valgt til å være den uavhengige variabelen x.

Disse fluxionene brukes som tidligere nevnt ikke lenger i dagens matematikk, men vi kan se på hvordan sammenhengen er mellom disse og dagens eksplisitte funksjoner. Hvis man har de to fluentene $y = y(t)$ og $x = x(t)$, og så spesialiserer ved å si at $x = t$ så får vi den ordinære eksplisitte funksjonen $y = y(t) = y(x)$. Ved å sette inn $x + \dot{x}o$ og $y + \dot{y}o$ for x og y i $y = y(x)$får vi likningen $y(x) + \dot{y}o = y(x + \dot{x}o)$. Hvis vi så flytter over og dividerer med o får vi $\dot{y} = \frac{y(x+\dot{x}o)-y(x)}{o}$. Ved å la o gå mot null og velge at $\dot{x} = 1$ så ser vi at $\dot{y}$ er identisk med den deriverte vi kaller $\frac{dy}{dx}$ i det vilkårlige men stasjonære punktet x. På den ene siden er Newtons måte mer generell, fordi den ikke gir noe relasjon mellom x og y og vi har ikke den eksplisitte avhengigheten som funksjonen $y = y(x)$ gir. På den andre siden er den mer spesiell fordi vi velger å sette $x = t$, noe som spesialiserer tilfellet. Man kan også se på når det er mulig å eliminere o, slik som eksempelet med $f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

Dette avhang av den konkrete naturen til polynomlikningen som er gitt, noe man ikke kan forvente av eksplisitt gitte funksjoner slik som $y = y(x)$.

En annen metode Newton benytter seg av i *De Methodis* er substitusjonsintegral. Han introduserer dette ved et eksempel, hvor han ser på de to kurvene FDH og GEI som blir beskrevet av henholdsvis $v = f(x)$ og $y = g(z)$, se figur 6. Videre ser han på ordinatene $DB = v$ og $EC = y$ som øker oppreist på grunnlinjene $AB = x$ og $AC = z$. Økningen, og dermed fluxionene, til arealene s og t vil da være som disse ordinatene multiplisert med farten de øker med, altså fluxionene til grunnlinjene. Dermed er $\frac{\dot{s}}{\dot{t}} = \frac{v\dot{x}}{y\dot{z}}$. Hvis vi velger $\dot{x} = 1$ så vil $\dot{s} = v$. Dermed er $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}}$. Hvis vi videre antar at $s = t$ så vil $\dot{s} = \dot{t} = v$ så $y = \frac{v}{\dot{z}}$. Hvis til slutt z er gitt som en funksjon av x, $z = \phi(x)$ eller $x = \psi(z)$, så vil $y = \frac{v}{\dot{z}}$, med høyre side uttrykket som en funksjon av z, definere funksjonen $y = g(z)$ der de to arealene er like. Spesielt er $y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{f(x)}{\phi'(x)} = \frac{f(\psi(z))}{\phi'(\psi(z))}$ og $y = f\big(\psi(z)\big)\psi'(z)$. Med moderne notasjon er det Newton sier at hvis man har integralet $\int f(x)dx$ så transformeres dette til $\int f\big(\psi(z)\big)\psi'(z)dz$ hvis man gjør substitusjonen $x = \psi(z)$. Vi kan se på det første eksempelet han gir, gjengitt i Edwards (1979, p. 211)



Figur 6 Substitusjonsintegral. Hentet fra Edwards (1979, p. 210)

Han velger å bruke $v = \sqrt{ax - x^2}$ og $z = \sqrt{ax}$. Da blir $v^2 = ax - x^2$, $z^2 = ax$ og $2z\dot{z} = a$. Da har vi at $y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{2vz}{a} = \frac{2z}{a}\sqrt{ax - x^2}$. Ved å gange med a oppe og nede og sette den øvre inn i rottegnet for så å benytte oss av at $ax = z^2$, får vi at $y = \frac{2z}{a^2}\sqrt{a^3x - a^2x^2} = \frac{2z}{a^2}\sqrt{a^2z^2 - z^4} = \frac{2z}{a^2}\sqrt{z^2(a^2 - z^2)} = \frac{2z^2}{a^2}\sqrt{a^2 - z^2}$. Dette er da likningen for den andre kurven som man substituerer med. Dermed får Newton at $\int \sqrt{ax - x^2}dx = \int \frac{2z^2}{a^2}\sqrt{a^2 - z^2}dz$.

5.5 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Newtons kanskje mest kjente verk, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, som ble publisert i 1687 var en milepæl for moderne vitenskap. Her blir både Newtons lover for mekanikk og gravitasjonsteorien presentert for første gang, noe som revolusjonerte mye av datidens fysikk. De foregående delkapitlene har vist at Newton på mange måter var ferdig med sin kalkulus basert på fluxioner på denne tiden, men i *Principia* benytter han seg nesten ikke av dette nye, kraftige matematiske verktøyet. I stede for brukes klassisk syntetisk geometri for å bevise og forklare de forskjellige lemmas, setninger og liknende i boken. I en anonym artikkel publisert i *The Philosophical Transactions of the Royal Society* under kontroversen med Leibniz skrev Newton

“*By the help of the new Analysis Mr. Newton found out most of the properties of his Principia Philosophiae but, because the ancients for making things certain admitted nothing into Geometry before it was demonstrated synthetically, he demonstrated the propositions synthetically, that the Systeme of the Heavens might be founded upon good Geometry. And this makes it now difficult for unskillful men to see the Analysis by which those Propositions were found out.”*(Whitrow, 1989, p. 83)

For selv om store deler av boken ved første øyekast består av geometriske beviser og forklaringer, er de fleste egentlig bygget opp med geometriske vilkår før man introduserer ultimate ratios av størrelser som går mot null. Dette er langt unna hva Euklids geometri benyttet seg av og Euklid ville nok ikke kjent igjen sitt arbeide i Newtons produkt. Det er derimot ingen hold i teorien om at Newton først brukte fluxioner for å finne proposisjonene i boken, for så å gjøre disse om til den geometriske formen de ble presentert i. Blant alle papirene Newton etterlot seg finnes det ingen der fluxionsbegrepet først blir benyttet, før dette blir omgjort til geometriske problemer av typen som er i *Principia*. Eller som Whiteside sier det

”the published state of the Principia – one in which the geometrical limit –increment of a variable line –segment plays a fundamental role –is exactly that in which it was written.” (D.T Whiteside, 1970)

6. Gottfried Wilhelm Leibniz

6.1 Biografi

Gottfried Wilhelm Leibniz ble født søndag 1.juli 1646 i byen Leipzig. Han var sønn av Catharina og Friedrich, og faren var viseformann ved fakultetet for filosofi og professor i moralfilosofi ved Universitetet i Leipzig. Allerede når Leibniz var seks år gammel døde faren, og etterlot seg et stort bibliotek til sønnen. Dette ble i starten lukket for Leibniz på grunn av hans unge alder, men han forsøkte å lære seg latin på egenhånd, og når en lærd adelsmann som var venn av familien hørte om dette overtalte han familien om å slippe Leibniz inn i det store biblioteket. (Aiton, 1985, p. 12). Dette førte til at Leibniz fikk tilgang til en mengde bøker han ikke ville fått før universitetet allerede ved en alder på åtte år. I juli 1653 begynte han på Nicolai skolen, der han forble elev frem til påske 1661. På dette tidspunktet startet Leibniz på Universitetet i Leipzig hvor han tok kurs i filosofi, spesielt aristotelisk, og introduksjonskurs om Euklid. Matematikkforelesningene ved universitetet var så uklare at nesten ingen andre enn Leibniz forsto dem. Han bemerket senere det lave nivået på matematikkundervisningen og la til at hvis han hadde tilbrakt ungdommen i Paris, slik som Pascal, så ville han kanskje vært i en posisjon til å berike vitenskapen tidligere (Aiton, 1985, p. 13). Han var derimot heldigere med sin filosofilærer, og skrev sin bachelor innen dette feltet som ble publisert i 1663. Han fortsatte å studere filosofi, og tidlig i februar 1664 fikk han sin master i filosofi med avhandlingen *Specimen quaestionum philosophicarum ex jure collectarum*. Han fikk den publisert desember samme året. Like etter mastergraden var ferdig døde også moren, og Leibniz måtte dra til sin onkel i Braunschweig for å ordne med detaljene rundt arven. Onkelen var berømt innen rettsvesenet, og så med en gang de usedvanlige evnene til sin nevø. En liten stund etter de skiltes sendte han et lærd brev til Leibniz rundt emnet jus. Dette brukte Leibniz under sin forberedelse til sin bachelor i jus. Denne mottok han i 1665, og han ønsket å fortsette på universitetet for å få en doktorgrad i emnet. Noe overraskende fikk han ikke plass ved universitetet, noe som førte til at han måtte flytte til Universitetet i Altdorf i starten av oktober 1666. Her kunne han nesten umiddelbart presenterte sin doktorgradsavhandling *De casibus perplexis in jure (om vanskelige saker i jus)*, trolig fordi han hadde forberedt den i Leipzig. Den ble publisert i november 1666, og den 22.februar 1667 mottok Leibniz sin doktorgrad. Han fikk tilbud om en fast stilling ved Universitetet i Altdorf, og indikasjoner på at om han ønsket det så kunne han få en tidlig stilling til et professorat. Dette avslo Leibniz og konstaterte at hans ånd trakk ham i en helt annen retning (Aiton, 1985, p. 22).

Han tar i stede jobb hos baron Johann Christian von Boineburg og Kurfürsten i Mainz. I 1672 ble han sendt til Paris for å forsøke å overbevise franskmennene om å gå til ”hellig krig” mot Egypt for å avlede dem fra deres ønske om å ta Tyskland. I Paris møter Leibniz en matematiker og fysiker ved navn Christiaan Huygens (1629-1695) som er kjent for blant annet å ha laget den første boken om sannsynlighetsregning, *On reasoning in games of chance*, sin oppdagelse av ringene rundt Saturn og sin teori om lys. Huygens anbefaler Leibniz å lese seg opp på Pascal hvis han ønsker å bli matematiker. Da det viste seg at Egypt-planen hans ikke gikk igjennom, ble han sendt videre på en rask tur til London i 1673. Her fikk han tak i en kopi av Barrows *Lectiones geometricae*, han møtte flere av den tidens viktige matematikere og han ble medlem av det britiske vitenskapsakademiet. Dette ble han etter å ha fremvist en regnemaskin han hadde laget og som var den første til å kunne utføre alle de fire grunnleggende regneoperasjonene. Det er denne reisen som senere førte til uenigheten om hvem som var førstemann til å oppdage kalkulus, for det er godt mulig Leibniz så en utgave av et manuskript til Newtons *De Analysi*. Det er likevel lite trolig han hadde fått så mye ut av dette siden hans matematiske evner i geometri og analyse fortsatt var langt fra ferdigutviklet(Boyer & Merzbach, 1989, p. 400). Mens han var i London fikk han beskjed om at valgmannen i Mainz var gått bort, og han reiste derfor tilbake til Paris i stede for å dra til Mainz som var planen. Han ble etter litt ansatt hos hertugen av Brunswick, men fikk bli i Paris noen år til, der han leste seg kraftig opp på matematikk. I 1676 ble han kalt til Hannover, og etter en rask tur innom London kom han til sin nye hjemby. I slutten av 1677 ble han, etter egen forespørsel, forfremmet til Privy Counsellor, en post han holdt resten av livet. De resterende årene fortsatte han å jobbe for hertugen av Braunschweig, og jobbet til sammen for tre av dem. Han jobbet som historiker, politisk rådgiver og bibliotekar ved hertugens bibliotek. Leibniz fikk lov til å fortsette med sine egne arbeider ved siden av jobben, og han publiserte sine viktigste matematiske verker i tiden under hertugen. Leibniz døde søndag 14.november 1716, 70 år gammel. Han ble gravlagt 14.desember i Neuerstädter kirke, der verken det britiske vitenskapsakademiet, Berlins vitenskapsakademi eller hans tidligere arbeidsgivere var til stede. Det ble ikke bestilt noe monument over denne store matematikeren, og graven var umerket i over femti år. I dag er den merket med en kopperplate med inskripsjonen ”Ossa Leibnitii” (Leibniz' beina).

6.2 Leibniz' måte å regne med kalkulus

En av de viktigste delene av Leibniz' kalkulus var hans notasjon på området. Denne gjorde det mye enklere å regne på, og også forstå, mye av emnet. Som Edwards sier det:

”It is hardly an exaggeration to say that the calculus of Leibniz brings within the range of an ordinary student problems that once required the ingenuity of an Archimedes or a Newton.”(Edwards, 1979, p. 232).

Som et eksempel kan man se på kjerneregelen, som ved den senere funksjonsanalysen sier at hvis $f(x) = g(u(x))$ så er $f'(x) = g'\big(u(x)\big) * u'(x)$. Denne skrivemåten sier ingen ting om hvorfor formelen er riktig eller hvordan man skal gå frem for å bevise den, men hvis man heller bruker differensialsnotasjonen med $z = g(y)$ og $y = u(x)$ så får vi i stede $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} * \frac{dy}{dx}$. Denne formelen antyder sin egen gyldighet hvis man på høyre side tar bort dy-ene som om de er virkelige tall. Den antyder også et logisk bevis for formelen, ved å bytte ut dx, dy, dz med de endelige økningene $\Delta y, \Delta x, \Delta z$ og la dette gå til grenseverdiene.

Tidlig i sin matematiske karriere jobbet Leibniz med sum og differanse av etterfølgende ledd i en sekvens av tall, vi skal her følge et eksempel av Edwards(1979, p. 235). Leibniz så blant annet på sekvensen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ og sekvensen $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ av differansene $d_i = a_i - a_{i-1}$. Med disse sekvensene så han at $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$. Så summen av de etterfølgende differansene er lik differansen mellom det første og siste leddet i den originale sekvensen. For eksempel så han på sekvensen av kvadrattall, $0, 1, 4, \dots, n^2$, og deres differansesekvens. Han fant at denne sekvensen må være de etterfølgende oddetallene $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ siden $i^2 - (i-1)^2 = i^2 - i^2 + 2i - 1 = 2i - 1$. Siden $a_0 = 0$ følger det at summen av de n første oddetallene er n^2, altså $1 + 3 + 5 +$

$\cdots + (2n-1) = n^2$. Resultatet gir også Leibniz muligheten til å summere opp uendelige serier av tall. Gitt at tallene $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ er differansen mellom to etterfølgende tall av sekvensen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ slik at $b_i = a_i - a_{i+1}$. Da vil $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Hvis man i tillegg har at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så følger det at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1$(I). I tiden i Paris fra 1672 fikk han under et møte med Huygens en utfordring i å finne summen av serien $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \cdots$, som er de inverse av trekanttallene. Dette var en oppgave som passet Leibniz fint på denne tiden, for han var kjent med Pascals aritmetiske trekant, denne kan skrives som:

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	6	10	15	21	…
1	4	10	20	35	56	…
1	5	15	35	70	126	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Her er det n-te elementet i hver rad summen av de n første elementene i raden over. Slik er det n-te trekanttallet summen av de n første heltallene og ligger på plass nummer n i tredje rad. Radene nedover(fra og med rad 3) består av figurtallene (trekanttall, pyramidetall o.s.v.), og figurtall n i rad k er bygget opp av de n første elementene i rad $k-1$. Omvendt gjelder også at figurtall n i rad k er differansen mellom figurtall n og $n-1$ i rad $k+1$. Leibniz innså at Huygens problem kunne bli løst hvis man endret litt på den aritmetiske trekanten. Hvis man starter med den inverse av heltallene, i stede for heltallene selv, og tar differansen av mellom tall nummer n og tall nummer $n+1$ i raden over, så får man det Leibniz selv kaller den harmoniske trekanten:

$\mathbf{\frac{1}{1}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	…
$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{168}$	…
$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{504}$	…
$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{1}{1260}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Etter å ha funnet dette ser Leibniz at hans formel (I) impliserer at summen av leddene i hver rad er lik det første elementet av den foregående raden. Dette gir blant annet at $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} +$

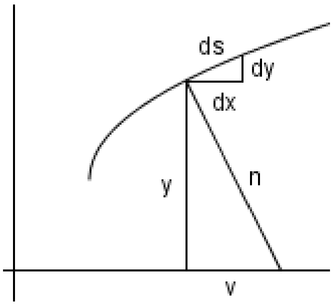
$\frac{1}{20} + \cdots = 1$ (II), og ser man på det n-te elementet i andre rad får man at det er $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Dette er halvparten av den inverse til det n-te trekanttallet $\frac{n(n+1)}{2}$, noe som betyr at hvis man multipliserer likningen (II) med 2 så får man summen Huygens ønsket, nemlig $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \cdots = 2$. Tilsvarende kan man også si at summen av den inverse til tetraedertallene må være $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots = \frac{3}{2}$. Dette arbeidet med den aritmetiske og den harmoniske trekanten og oppdagelsen av den inverse sammenhengen mellom å ta differansen og summen av elementene i en sekvens blir viktig for Leibniz' videre arbeid med kalkulus.

6.3 Den karakteristiske trekanten

Leibniz fortsatte etter dette med å lese på arbeidene til datidens viktigste matematikere, som han ofte fikk anbefalt av Huygens. Og det var under studier av arbeidene til Pascal han oppdaget sin berømte karakteristiske trekant. I et brev til l'Hospital i 1694 skriver Leibniz om denne oppdagelsen, og hva den førte med:

" [With the] use of what I call the "characteristic triangle", formed from the elements of the coordinates and the curve, I thus found as it were in the twinkling of an eyelid nearly all the theorems that I afterward found in the works of Barrow and Gregory. Up to that time, I was not sufficiently versed in the calculus [algebra] of Descartes, and as yet did not make use of equations to express the nature of curved lines; but, on the advice of Huygens, I set to work at it, and I was far from sorry that I did so: for it gave me the means almost immediately of finding my differential calculus. This was as follows. I had for some time previously taken a pleasure in finding the sums of series numbers, and for this I had made use of the well-known theorem, that, in a series decreasing to infinity, the first term is equal to the sum of all the differences. From this I had obtained what I call the "harmonic triangle," as opposed to the "arithmetical triangle" of Pascal ... Recognizing from this the great utility of differences and seeing that by the calculus of M. Descartes the ordinates of the curve could be expressed numerically, I saw that to find quadratures or the sums of the ordinates was the same thing as to find an ordinate (that of the quadratrix), of which the difference is proportional to the given ordinate. I also recognized almost immediately that to find tangents is nothing else but to find the sums, provided that one supposes that the differences are incomparably small."(Edwards, 1979, pp. 244-245)

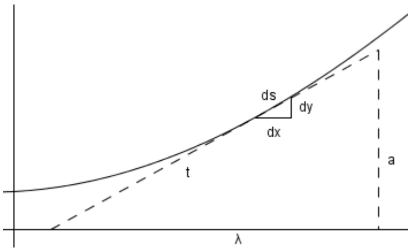
Pascal hadde vist formelen for arealet av overflaten til en kule, $A = 4\pi a^2$, ved å innføre en infinitesimal (uendelig liten) rettvinklet trekant med en hypotenus som er tangent til en kvartsirkel i et gitt punkt. Ved hjelp av formlike trekanter, kunnskap om arealet av en uendelig liten sone av halvkulen med gitt radius og indivisibler (deler som ikke kan deles opp mer) finner han en måte å komme frem til arealet av en halvkule (og dermed også kule) ved å benytte seg av indivisibler og summering. Da Leibniz leste dette gikk det et lys opp for han, og han kommenterer at det er litt rart at ikke Pascal selv la merke til dette. Leibniz' oppdagelse er at metoden med den infinitesimale trekanten Pascal bruker også kan benyttes på en vilkårlig kurve, ved å bytte ut radiusen i sirkelen med en normal fra kurven. Han finner, på en veldig lik måte som Pascal, at de to trekantene på figur 7 er formlike. Dermed må $\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}$, eller $y\,ds = n\,dx$. Ved å summere indivisibler får han (med nyere notasjon) at $\int y\,ds = \int n\,dx$. Notasjonen for integral var på denne tiden fortsatt ikke oppfunnet av Leibniz, så han skrev egentlig denne oppdagelsen med vanlige ord. Ved å multiplisere det han kaller momentet med 2π får han arealet $A = \int 2\pi y\,ds = \int 2\pi n\,dx$ for overflaten man får ved å rotere den opprinnelige kurven rundt x-aksen. Ved å sette $2\pi n$ utenfor integralet (hvis n er konstant) eller uttrykke n ved x får man et integral som ofte er lettere å regne med. Vi skal nå se på et problem som blir forenklet ved denne utskiftningen, men det er viktig å merke seg at Leibniz på denne tiden ikke kunne regne på denne måten, siden hans kalkulus var langt fra ferdigutviklet.



Figur 7 Leibniz' karakteristiske trekant

Vi ser på parabelen $y = \sqrt{x}$, for $0 \le x \le a$. Når vi vet at den deriverte til dette uttrykket er $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ kan vi si at stigningstallet til linja som gir n er $-2\sqrt{x}$, siden denne står vinkelrett på tangenten i punktet. Denne linja vil også gå gjennom punktet $(x_1, \sqrt{x_1})$ og da kan vi finne en likning for denne linja: $y - \sqrt{x_1} = -2\sqrt{x_1}(x - x_1)$ som gir at $y = -2\sqrt{x_1}x + 2\sqrt{x_1}x_1 + \sqrt{x_1}$. Ved å finne hvor denne skjærer x-aksen kan vi finne v: $0 = -2\sqrt{x_1}x + 2\sqrt{x_1}x_1 + \sqrt{x_1}$ så $2\sqrt{x_1}x = 2\sqrt{x_1}x_1 + \sqrt{x_1}$ og $x = x_1 + \frac{1}{2}$. Siden y skjærer x-aksen i punktet $x = x_1$ vil man alltid få at $v = \frac{1}{2}$. Ved å nå bruke Pythagoras' setning på den store trekanten på figur 7 finner vi et uttrykk for n: $(\frac{1}{2})^2 + \sqrt{x}^2 = n^2$som gir at $n = \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$. Dermed kan vi bruke at paraboloiden man får ved å rotere parabelen om x-aksen har arealet $A = \int 2\pi y\,ds = \pi \int_0^a \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{\pi}{6}((4a+1)^{\frac{3}{2}} - 1)$. Denne metoden gjorde at man kunne gjøre om et ukjent integral til et integral man hadde løsningsmetoder for.

Samtidig så Leibniz hvordan hans karakteristiske trekant kunne bli benyttet på buelengde og kvadraturproblemer. Hvis man ønsker å finne buelengden til en gitt kurve, tegner man inn tangenten t som går fra x-aksen til vertikal ordinat med konstant lengde a og den karakteristiske trekanten (figur 8). På samme måte som sist ser han at trekantene gir $\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a}$ eller $a\,ds = t\,dy$. Ved å summe opp infinitesimalene får han at $\int a\,ds = \int t\,dy$.



Figur 8 Buelengde og karakteristisk trekant

Dermed har han gjort om et buelengdeproblem til et problem hvor man skal finne arealet under en annen kurve.

Den tredje måten han brukte sin karakteristiske trekant på var i sammenheng med figur 7, der han så at trekantene gav $\frac{dy}{v} = \frac{dx}{y}$ eller $v\ dx = y\ dy$. Ved å summere opp som før får han at $\int v\, dx = \int y\, dy$. Leibniz kommenterte at hvis kurven går gjennom origo og grunnlinjeintervallet er $[0, b]$ så er det høyre integralet simpelthen lik arealet $\frac{1}{2}b^2$ av en trekant med grunnlinje og høyde lik b, eller

"straight lines that continually increase from zero, when each is multiplied by its element of increase, form together a triangle"(Edwards, 1979, p. 243)

Som sagt hadde ikke Leibniz kommet med sin notasjon av integraler, og han oppsummerte sine tre funn på en muntlig måte:

"Thus, to find the area of a given figure, another figure is sought such that its subnormals are respectively equal to the ordinates of the given figure, and then this second figure is the quadratrix of the given one; and thus from this extremely elegant consideration we obtain the reduction of the areas of surfaces described by rotation to plane quadratures [første metode], *as well as the rectification of curves* [andre metode]; *at the same time we can reduce these quadratures of figures to an inverse problem of tangents* [tredje metode]"(Leibniz, Gerhardt, & Child, 1920, p. 41).

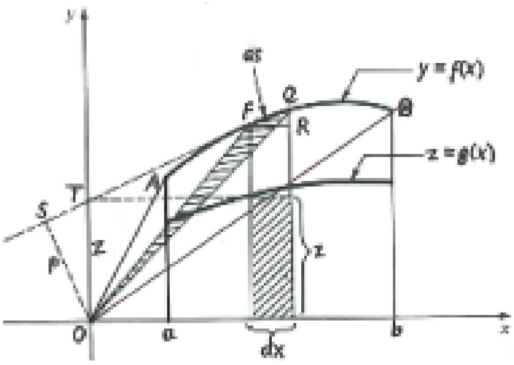
Siden vi har at $v = y\frac{dy}{dx}$, vil den siste formelen gi oss at $\int v\ dx = \int y \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int y\ dy$.

Oppdagelsen av disse omformingene ved hjelp av den karakteristiske trekanten er viktig siden det på høyre side gir oss samme variabel både i integranden og i differensialen (eller en integrand som kan uttrykkes ved samme variabel som differensialen). Dermed gjør Leibniz det mulig for seg å redusere integrasjonsproblemer til enkle trekanter der han har mulighet til å benytte seg av summer av differanser slik han har i sin harmoniske trekant.

For å se hvordan den siste metoden kan omgjøre kvadraturproblemer til inverse tangentproblemer følger vi et eksempel av Edwards(1979, p. 244). Gitt at vi skal finne arealet av $\int_0^a x^n\ dx$ under kurven $z = x^n$. Hvis vi kan finne en kurve $y = f(x)$ med $v = x^n$, så vil vi få at $\int_0^a x^n\ dx = \int y\ dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2}f(a)^2$ hvis vi går ut ifra at $f(0) = 0$. Her må man legge merke til at $\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x=0}^{x=a}$ står for en uendelig sum av differanser av trekanter, som Leibniz kan finne ved hjelp av sin harmoniske trekant. Hvis vi prøver med $y = bx^k$ ønsker vi å finne $v = y\frac{dy}{dx} = bx^k * bkx^{k-1} = b^2kx^{2k-1} = x^n$, hvis man velger $k = \frac{1}{2}(n+1)$ og $b = [\frac{1}{2}(n+1)]^{-\frac{1}{2}}$ så stemmer dette. Etter dette funnet kan man si at $\int_0^a x^n\ dx = \frac{1}{2}(ba^k)^2 = \frac{2}{2(n+1)}a^{\frac{2}{2}(n+1)} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

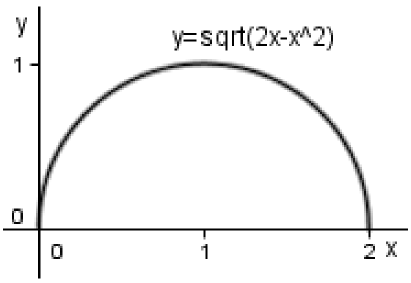
Dette var den første gangen Leibniz bruker seg av to viktige ideer i sin kalkulus, nemlig transformasjonen av integraler ved hjelp av substitusjon og reduksjonen av kvadraturproblemer til inverse tangentproblemer. Disse første oppdagelsene av Leibniz var likevel ikke noen nyhet innen matematikkens verden, alle tre metodene hans hadde blitt oppdaget av andre matematikere på et tidligere tidspunkt. Selv hans karakteristiske trekant var implisitt i arbeidet til Pascal. Men han tok likevel store steg for seg selv i arbeidet mot å utforme en generell aritmetisk metode for å sammenfatte de ulike resultatene og teknikkene som var funnet i matematikken på den tiden.

Etter dette arbeidet anbefaler Huygens at Leibniz leser seg opp spesielt på Descartes, og ikke lenge etterpå kom han med en mer generell måte å arbeide på. Han bruker seg av det man i dag ofte kaller Cavalieris prinsipp, som i dette tilfellet er viktig siden det sier at hvis det er en en-til-en forbindelse mellom indivisibler i to plane regioner, slik at de tilsvarende indivisibler (som her også kan sees som infinitesimaler med areal lik deres lengder multiplisert med en uendelig liten bredde) har samme areal, så vil også de to regionene ha samme areal. Han brukte så dette til å se på en gitt kurve $y = f(x)$, for $a \leq x \leq b$. Han bruker de to nærliggende punktene $P(x, y)$ og $Q(x + dx, y + dy)$ for å lage den infinitesimale trekanten OPQ, hvor O er origo (se figur 9). Tangentlinjen som går fra P til Q kalles ds, og forlengelsen av denne skjærer y-aksen i punktet $T(0, z)$ og la $OS = p$ være linjestykket som går fra origo og vinkelrett ut på denne tangentlinja. Så innføres en ny variabel $z = g(x) = y - x\frac{dy}{dx}$, som er høyden av y minus lengden mellom O og skjæringspunktet T. Da vil trekanten OST være formlik den karakteristiske trekanten PRQ, og dermed er $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$ eller $p\ ds = z\ dx$. Arealet av trekanten OPQ er gitt ved grunnlinjen ds og høyden p og dermed er arealet $a(OPQ) = \frac{1}{2}p\ ds = \frac{1}{2}z\ dx$. Hvis vi ser på sektoren OAB ser vi den er delt opp i uendelig små trekanter av typen som OPQ, så med summering av disse blir da $a(OAB) = \frac{1}{2}\int_a^b z\ dx$. Men vi vet også at $\int_a^b y\ dx = \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + a(OAB) = \frac{1}{2}[xy]\,_a^b + a(OAB)$, som vi kan se ut ifra de tre trekantene på figuren. Ved å bytte ut arealet av trekanten med $\frac{1}{2}\int_a^b z\ dx$ får Leibniz $\int_a^b y\ dx = \frac{1}{2}\left([xy]\,_a^b + \int_a^b z\ dx\right)$. Denne formelen kalles Leibniz' "transmutasjonsteorem" (transmutation theorem), og det er viktig å merke seg hvordan denne også viser et inverst forhold mellom tangentproblemet og kvadraturproblemet. Det er også verdt å merke seg at hvis man setter inn $z = g(x) = y - x\frac{dy}{dx}$ i transmutasjonsteoremet så får man $\int_a^b y\ dx = \frac{1}{2}\left([xy]\,_a^b + \int_a^b \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx\right)$. Ved å flytte leddet med $\frac{1}{2}\int_a^b y\ dx$ over og bytte integrasjonsgrenser får vi formelen for delvis integrasjon: $\int_a^b y\ dx = [xy]\,_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x\ dy$.



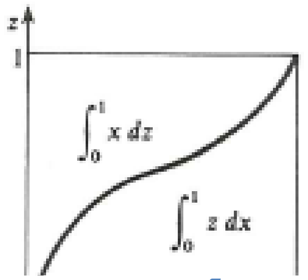
Figur 9 Transmutasjonsteoremet. Hentet fra Edwards (1979, p. 246) og omgjort litt.

Leibniz brukte denne metoden for å komme frem til summen til den berømte uendelige serien for $\frac{\pi}{4}$ som nå bærer hans navn. For å finne denne så han på øvre halvdel av enhetssirkelen med sentrum i $x = 1, y = 0$, så den er beskrevet av $y = \sqrt{2x - x^2}$ (figur 10). Dermed vil $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} * (2 - 2x) = \frac{1-x}{y}$, og vi kan finne z som man trenger for å regne med: $z = y - x\frac{1-x}{y} = \sqrt{2x - x^2} - \frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x-x^2-x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{2x-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$. Vi kan så gjøre denne om slik at vi har en x som avhenger av z: $z^2 = \frac{x}{2-x}$ så $2z^2 = x(1 + z^2)$ og $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$. Så benytter Leibniz seg av



Figur 10 Øvre halvdel av enhetssirkel

transmutasjonsformelen på arealet av en kvartsirkel slik: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 z\,dx\right)$, vi har at $\int_0^1 z\,dx = 1 - \int_0^1 x\,dz$ (figur 11) og kan derfor skrive $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \int_0^1 x\,dz\right)\right) = 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\,dz$. Ved å utvide $\frac{1}{1+z^2}$ som geometrisk rekke, hvor man ser på $\frac{1}{1+z^2}$ som $\frac{1}{1-(-z^2)}$ og anser $(-z^2)$ som kvotient av en geometrisk rekke, kan vi skrive $\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + x^4 - \cdots)\,dz = 1 - [\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \cdots]_0^1$. Uten å si noe om konvergens når $z = 1$, eller at han integrerer leddvis uten å vite sikkert at dette er noe han har muligheten til, finner Leibniz den berømte serien $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$



Figur 11 utregning av $\frac{\pi}{4}$. Hentet fra Edwards (1979, p. 249)

6.4 Utviklingen av notasjon og hovedteoremet i kalkulus

Til nå har vi sett på hvordan Leibniz oppdager og benytter ulike metoder for å gjøre integraler og liknende om fra regnestykker man ikke klarte på den tiden, til nye som man hadde løsningsmetoder for. De fleste av metodene var i utgangspunktet kjent i matematikkverdenen på den tiden, men Leibniz fikk viktig lærdom i hvordan areal og tangentproblemer (integrasjon og derivasjon) kunne bli sett på som inverse opperasjoner. Vi skal nå se på hvordan han fra slutten av 1675 utviklet sin teori om analytisk kalkulus. Han hadde i starten ikke kommet opp med notasjonen han er blitt så kjent for, og starter et manuskript fra 29.oktober 1675 ved å gi hans tidligere resultat, nemlig formelen $\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy$ på følgende måte: $\frac{\overline{omn.\ell}^2}{2} = omn.\overline{\overline{omn.\ell}\frac{\ell}{a}}$ der strek over betyr parentes, han innfører en konstant $a = 1$ for å bevare dimensjonal homogenitet, $omn.$ betyr sum og kommer fra det latinske ordet $omnia$ som betyr alt, og ℓ står for den uendelig lille økningen i y. Dermed står det egentlig $\frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right)dy$. Et annet viktig teorem som dukker opp i denne teksten er $omn.x\ell = x\,omn.\ell - omn.omn.\ell$, eller $\int x\,dy = xy - \int y\,dx$ som er skrivemåten vi kjenner formelen for delvis integrasjon. Her, og ofte ellers i sine tidlige manuskripter, skriver Leibniz $\int y$ uten å presisere om det er $\int y\,dx$ eller $\int y\,dy$ han mener, men dette er en ting han retter opp i senere. Like etter kommer han med introduksjonen av det velkjente $\int$–tegnet når han sier at

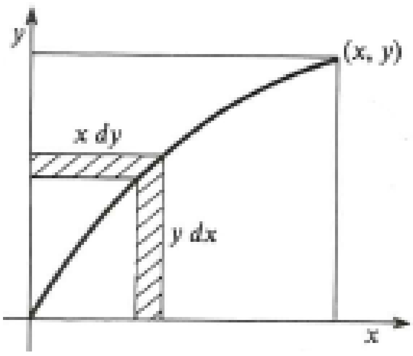
"it will be useful to write $\int$ for omn, so that $\int \ell = omn.\ell$, or the sum of the ℓ's. Thus, $\frac{\int \overline{\ell}^2}{2} = \int \overline{\int \overline{\ell}\frac{\ell}{a}}$ [I] and $\int \overline{x\ell} = x\int \overline{\ell} - \int\int \ell$ [II]."(Edwards, 1979, p. 253).

Han velger symbolet $\int$ som er en langstrakt S for summ. Han fortsetter så med å utforske dette, og setter for eksempel $\ell = dx$ i [I] for å få at $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ for så å velge $\ell = x\,dx$ i [II] og få at $\int x^2\,dx = x\int x\,dx - \int\left(\int x\,dx\right) = x\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}$ som man ved å flytte over siste leddet får at $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$.

Det var også i dette manuskriptet fra slutten av oktober Leibniz for første gang skriver $\ell = \frac{y}{d}$, som bare tre dager senere ble gjort om til den velkjente dy. Notasjonen $\frac{y}{d}$ bruker han først i en diskusjon om det inverse tangentproblemet:

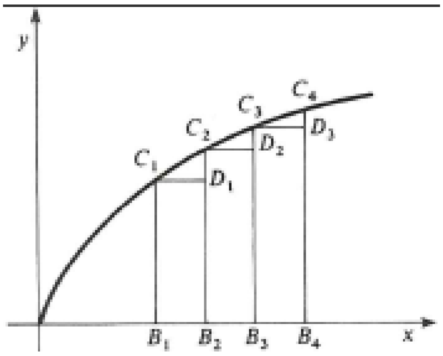
"Given ℓ, and its relation to x, to find $\int \ell$. This is to be obtained from the contrary calculus, that is to say, suppose that $\int \ell = ya$. Let $\ell = \frac{ya}{d}$. Then just as $\int$ will increase, so d will diminish the dimensions. But $\int$ means a sum, and d a difference. From the given y, we can always find $\frac{y}{d}$ or ℓ, that is, the difference of the y's. Hence one equation may be transformed into the other"(Edwards, 1979, p. 253).

Innen november 1676 var notasjonen blitt veldig lik den endelige utgaven, og han gir reglene for derivasjon og integrasjon av potenser på en lett gjenkjennelig måte for dagens matematikere: $dx^e = ex^{e-1}$ og $\int x^e\, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1}$, og her må ikke e nødvendigvis være et positivt heltall. Han påpeker også at x kan være en funksjon av den uavhengige variabelen, i stede for den uavhengige variabelen selv. Denne oppdagelsen åpnet for det vi i dag kaller kjerneregelen som han blant annet brukte for å finne den deriverte av $\sqrt{a+bz+cz^2}$. Han velger da å bytte $x = a + bz + cz^2$, og vet at $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ og $dx = (b+2cz)dz$. Dermed blir $d\left(\sqrt{a+bz+cz^2}\right) = \frac{(b+2cz)dz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}$. I juli 1677 gir han også et bevis for produkt og kvotientregelen på måter som likner veldig på hverandre. For produktregelen sier han at $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$. Her sier han at $dx\,dy$ er uendelig mye mindre enn resten og man kan derfor utelate disse. Dermed blir $d(xy) = x\,dy + y\,dx$. Leibniz er i starten også opptatt av å verifisere sine funn innen sin analytiske kalkulus med geometriske argumenter, der for eksempel produktregelen er i overensstemmelse med addisjon av arealene på figur 12, $\int x\,dy + \int y\,dx = xy$.



Figur 12 Produktregelen geometrisk. Hentet fra Edwards (1979, p. 256).

I en revidert utgave av 1677-manuskriptet blir rollen til den uendelig lille karakteristiske trekanten vist eksplisitt i den nye kalkulusen. Leibniz ser nå på en kurve som en polygon med uendelig mange vinkler og uendelig små sider. Elementet ds, som egentlig er buelengden, er en side i denne polygonen, altså en uendelig liten rett linje som binder sammen to tilstøtende vertekser. Dermed vil $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$, hvor dx og dy er differansen mellom x- og y-koordinatene mellom disse to tilstøtende verteksene. Leibniz identifiserer tydelig $\int y\,dx$ med summen av uendelig små rektangler med høyde y og bredde dx, og han skrev om figur 13 at



Figur 13 Summen av uendelig små rektangler. Hentet fra Edwards (1979, p. 257).

"I represent the area of a figure by the sum of all the rectangles contained by the ordinates and the differences of the abscissae, i. e., by the sum $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 +$ etc. For the narrow triangles $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$, etc., since they are infinitely small compared with the said rectangles, may be omitted without risk; and thus I represent in my calculus the area of the

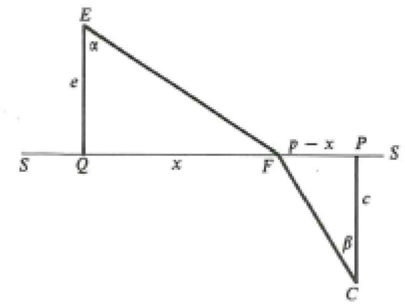
figure by $\int y\, dx$, or the sum of the rectangles contained by each y and the dx that corresponds to it.”(Leibniz, et al., 1920, p. 138).

Etter dette kommer han til det vi i dag kaller hovedteoremet i kalkulus. Gitt en kurve med ordinat z som man søker arealet til. Anta det eksisterer en kurve med ordinat y slik at $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ hvor a er en konstant (sannsynligvis for å beholde en dimensjonal homogenitet). Da er $z\, dx = a\, dy$, og arealet under den opprinnelige kurven er $\int z\, dx = a \int dy = ay$ hvis man antar (som Leibniz vanligvis gjorde) at kurven til y passerer gjennom origo. Dermed blir kvadraturproblemer redusert til inverse tangentproblemer. Så for å finne arealet under kurven med ordinat z, er det nok å finne en kurve som har en tangent som tilfredsstiller $\frac{dy}{dx} = z$. Ved å trekke arealet over $[0, a]$fra arealet over $[0, b]$ (og velge $a = 1$) så følger at $\int_a^b z\, dx = y(b) - y(a)$.

De metodene vi har sett på til nå har kommet fra korrespondanser og manuskripter Leibniz skrev under sitt arbeid med sin uferdige kalkulus. Den første publikasjonen han gjør av sitt materiale kommer ut i 1684 i *Acta Eruditorum* som var et periodisk tidsskrift som kom ut i Leipzig. Tittelen på utgivelsen var ”*A new method for maxima and minima as well as tangents, which is impeded neither by fractional nor by irrational quantities, and a remarkable type of calculus for this*”, og han gir blant annet sine regneregler for potens, produkt og kvotient uten å vise til hvordan han fant dem. Differensialene blir introdusert uten å vise så mye til de uendelig små delene som Leibniz brukte i sitt arbeid for å komme frem til sluttproduktet. Hvis man har et vilkårlig tall dx så blir dy definert som tallet slik at $\frac{dy}{dx}$ er lik helningen på tangenten. Dette er en definisjon som ikke er helt gal selv i dagens lys, og som Edwards sier det:

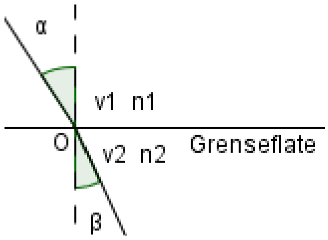
”By modern standards, this is not so bad, except that no real definition of the tangent line is supplied”(Edwards, 1979, p. 258).

Tangenten blir definert som det å tegne en linje mellom to punkter på linjen som er uendelig nær hverandre eller å fortsette siden til en polygon med uendelig mange vinkler. I denne artikkelen viser Leibniz også hvordan sin nye kalkulus kan brukes til å finne maksima og minima ved å finne når den deriverte er null, hvordan en positivt derivert betyr at det opprinnelige uttrykket øker, og motsatt, og at den andrederiverte lik null gir vendepunkt. Vi skal her se på et eksempel Leibniz bruker for å vise hvordan man kan finne maks/min-punkter, gjengitt av Edwards (1979, p. 259).



Figur 14 Finne maksima og minima. Hentet fra Edwards (1979, p. 259)

La to punkter C og E (figur 14) være gitt, og en linje SS i samme plan. Man skal finne et punkt F på SS slik at når man kopler sammen C og E med F vil summen av rektangelet av CF og en gitt linje h og rektangelet av FE og en gitt linje r være så liten som mulig. Her får man at $FC = \sqrt{(p-x)^2 + c^2}$ og $FE = \sqrt{x^2 + e^2}$. Dermed blir uttrykket, w, som skal bli minimert $w = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}$. Så deriverer man uttrykket og setter dette lik null: $dw = -\frac{2h(p-x)}{2\sqrt{(p-x)^2+c^2}} + \frac{2rx}{2\sqrt{x^2+e^2}} = 0$ som gir at $\frac{h(p-x)}{\sqrt{(p-x)^2+c^2}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2+e^2}}$. Man kan så gjøre om dette til $\frac{h}{r} = \frac{x\sqrt{(p-x)^2+c^2}}{(p-x)\sqrt{x^2+e^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+e^2}}}{\frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+c^2}}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Dette resultatet tolker Leibniz som loven for lysbrytning når lyset går fra et medium med densitet r (med respekt til farten til lys) til et med densitet h. Linjen SS representerer grenseflaten mellom de to mediene. Denne loven er i dag kjent som Snells lov som også har med forholdet mellom hastigheten i de to mediene, nemlig $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ (figur 15). Leibniz legger til at dette er et funn som mange lærde menn har søkt med omstendelige måter, men at noen som er dyktige i denne kalkulusen kan gjennomføre det i disse linjene så lett som magi.

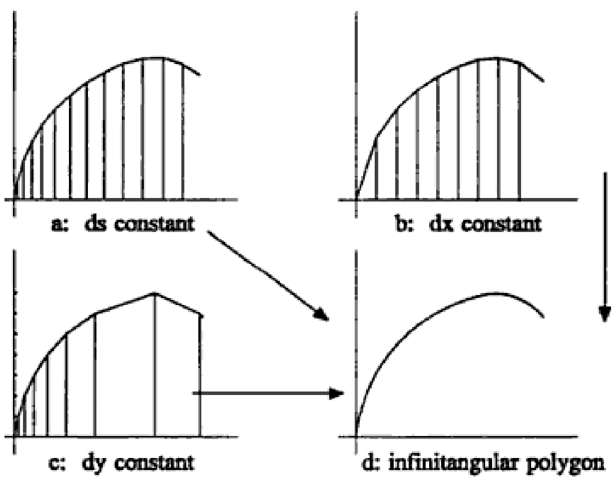


Figur 15 Loven for lysbrytning

Den første gangen symbolet $\int$ dukker opp i en publisert artikkel er i en liten omtale av en bok skrevet av John Craig, også denne utgivelsen kom i *Acta Eruditorum*, i 1686. Craig har forsøkt å benytte Leibniz' kalkulus til å bevise Barrows teorem, som sier at summen av intervallene mellom ordinatene og perpendikulære til en kurve tatt på aksen er i størrelse lik halvparten av kvadratet av den siste ordinaten. Craig har kommet frem til en litt feilaktig konklusjon, og Leibniz skriver denne artikkelen for å gi en riktig fremstilling. Han skriver at:

"Let the ordinate be x, the abscissa y, and the interval between perpendicular and ordinate, described before, p. Then according to my method it follows immediately that $p\,dy = x\,dx$, as Dr. Craig has also found. When we now subject this differential equation to summation we obtain $\int p\,dy = \int x\,dx$ (like powers and roots in ordinary calculations, so here sum and difference, or $\int$ and d, are each other's converse). Hence we have $\int p\,dy = \frac{1}{2}xx$, which was to be demonstrated."(Struik, 1986, p. 282).

6.5 Noen forskjeller mellom Leibniz' og dagens kalkulus



Figur 16 Ulike differensialer holdt konstant. Hentet fra Bos (1993, p. 89)

En viktig forskjell fra dagens matematikk var måten Leibniz valgte hvilke av differensialene til polygonen med uendelig mange vinkler som skulle være konstant. I dag er det alltid slik at dx har konstant avstand, og at dy og ds ikke har det, men dette er ikke en nødvendighet. I Leibniz' utgave av kalkulus var det ikke en fast størrelse som skulle være konstant, og man valgte den konstante basert på karakteren til kurven og karakteren til polygonen. Dermed kunne den beste måten å jobbe med en kurve på være å velge ds konstant og dermed $dds = 0$, mens dx og dy er variable og dermed at ddx og ddy ikke lik null (så lenge kurven ikke er en rett linje). Ved en annen kurve kunne det være en fordel å velge dx konstant og dermed $ddx = 0$ mens de andre er variabler. En illustrasjon over hvordan de ulike valgene ser ut, og hvordan alle går til å bli den samme kurven når polygonen får uendelig mange vinkler kan sees på figur 16. Å velge en størrelse som alltid konstant var ikke akseptabelt for Leibniz, for det er ingenting på kurven som tilsier at dx skal velges i stede for hvilken som helst annen variabel og at alle andre variable alltid skal sees i relasjon til denne. Han ønsket altså ikke å se variablene som funksjoner som avhenger av en uavhengig variabel. Dette er også en av de store forskjellene fra dagens matematikk, for denne problemstillingen forsvant når man begynte å bruke funksjonskonseptet på kalkulus. La oss se på et eksempel på hvordan Leibniz hadde mulighet til å velge variabel som skulle jobbes ut fra, ved å følge et eksempel av Bos (Bos, 1993, pp. 91-92).

La oss se på parabelen $ay = x^2$. Her vil man få ulike likningssett ettersom hvilke variabler man velger å gå ut ifra, og dermed hvilke differensialer som skal være konstante. Hvis man for eksempel velger at dx skal være konstant så får man at:

$$
\begin{aligned}
&a\,dy = 2x\,dx \\
&a\,ddy = 2(dx)^2 \\
&a\,d^3y = 0 \\
&a\,d^4y = 0, osv.
\end{aligned}
$$

Men hvis man i stede for velger dy som konstant får man at:

$$
\begin{aligned}
&a\,dy = 2x\,dx \\
&0 = 2(dx)^2 + 2x\,ddx \\
&0 = 6\,dx\,ddx + 2xd^3x \\
&0 = 6(ddx)^2 + 8\,dx\,d^3x + 2xd^4x, osv.
\end{aligned}
$$

Man kan også få andre sett ved å velge for eksempel ds eller $y\,dx$ konstant. Men det er også mulig å gi en relasjon mellom differensialene som gjelder for alle progresjonene av variabler. I tilfellet for koordinatene x og y i parabelen blir denne relasjonen:

$$
\begin{aligned}
&a\,dy = 2x\,dx \\
&a\,ddy = 2(dx)^2 + 2x\,ddx \\
&a\,d^3y = 6\,dx\,ddx + 2xd^3x \\
&a\,d^4y = 6(ddx)^2 + 8\,dx\,d^3x + 2xd^4x, osv.
\end{aligned}
$$

Vi ser her at førsteordens differensiallikning ikke er avhengig av hvilken variabel man velger, men at de blir det ved høyere orden. Man kan også se av eksempelet at et veloverveid valg av variabel kan gjøre differensiallikningene av høyere orden betraktelig enklere å jobbe med. Dette var en av de viktigste fordelene ved Leibniz' mulighet til å velge fritt hvilken variabel det skulle arbeides ut fra.

Vi har til nå sett på hvordan Leibniz utviklet og arbeidet med sin kalkulus, og at den på flere steder er forskjellig fra den kalkulusen vi kjenner i dag. Jeg vil til slutt gjøre en liten sammenlikning av dagens kalkulus og den kalkulusen Leibniz jobbet med.
Den første store forskjellen er konseptet. Det arbeides med forskjellige objekter, og der Leibniz ser på variabler der ingen uavhengig variabel er valgt ut som utgangspunkt, har dagens kalkulus derimot et funksjonsbegrep der man har dette. Den andre forskjellen som peker seg ut er opperasjonene som blir benyttet. Ved derivasjon med Leibniz' kalkulus så tilegner man en variabel en ny, uendelig mindre variabel som kalles dens differensial. I dag tilegner vi en funksjon en ny funksjon nemlig den deriverte, som blir definert ved hjelp av grenseverdier. En liknende forskjell finner vi ved integral. Den tredje forskjellen er at variabelkonseptet til Leibniz innebærer en uvisshet i differensialene, som man må løse ved å velge progresjonen av variablene. Dette problemet kommer aldri opp i moderne kalkulus siden man jobber med funksjoner med spesifiserte uavhengige variable.

Vi ser at moderne kalkulus har rettet opp i en del av problemene rundt den tidlige kalkulusen til Leibniz, med blant annet ikke lenger å ha uendelig små og store størrelser og at man ikke lenger får ulike likninger alt ettersom hvilken variabel man velger å utvikle fra. Det er likevel viktig å se at Leibniz' kalkulus på de aller fleste områdene ikke var feilaktig eller dårlig på noen måte, og muligheten for å velge hvilken variabel som skulle utvikles fra gav dem muligheten til å forenkle en del uttrykk

6.6 En moderne mening med infinitesimaler

Som vi har sett spilte infinitesimaler, uendelig små størrelser, en viktig rolle i utviklingen av kalkulus. Også i nærmere hundre og femti år etter dette var infinitesimalregning et av de viktigste arbeidsverktøyene til matematikere som jobbet med integral og derivasjonsregning. Men denne metoden hadde også sine svakheter, spesielt det at ingen visste hva en infinitesimal egentlig var og selvmotsigelsen at en infinitesimal burde være lik null og ulik null alt etter hva som passer best der og da. Disse svakhetene førte også til at man byttet infinitesimaler med grensebegrepet når man arbeidet med å formalisere analysens grunnlag på attenhundretallet. Flere ganger forsøkte man å gjeninnføre infinitesimalene, blant annet Hans Hahn i 1907 og Laugwitz og Schmieden i 1958, men alle forsøkene hadde klare svakheter:

"I Hahns utvidelse fantes det ikke transcendente funksjoner; man kunne ikke snakke om $\sin x$ og e^x, men var henvist til å drive analyse med polynomer og brøk – funksjoner. Laugwitz og Schmieden løste dette problemet, men isteden hadde deres tallinje nulldivisorer: et produkt kunne godt være null uten at noen av faktorene var det. Like alvorlig var mangelen på en god ordningsrelasjon"(Lindstrøm, 1996, p. 71)

Det var først i 1960 at matematikeren Abraham Robinson kom opp med en fullgod løsning på problemet rundt infinitesimaler, når han fremla sin ikke-standard analyse. Han innførte en utvidet tallinje $^*\mathbf{R}$ som har både uendelig små og store størrelser i tillegg til de reelle tallene. Regnereglene for tallene i $^*\mathbf{R}$, kalt de hyperreelle tallene, er de samme som for de reelle tallene, og enhver funksjon definert for reelle tall har en naturlig utvidelse for de hyperreelle tallene. Robinson klarer i tillegg å konstruere et transformasjonsprinsipp som tar alle reelle tall over i den utvidede tallinjen $^*\mathbf{R}$ og som definerer regnereglene i $^*\mathbf{R}$.

Dermed hvis man ønsker å bevise et teorem i **R** så bruker man transformasjonsprinsippet for å oversette utsagnet til $^*\mathbf{R}$, så beviser man det ved hjelp av ikke-standard metoder (ofte lettere siden man kan benytte seg av infinitesimalargumenter), for så å begrense det tilbake til **R**. Dette siste steget gjøres ved hjelp av et teorem som sier at det for et hvert endelig hyperreelt tall a så finnes det nøyaktig ett reelt tall uendelig nærme, betegnet $st(a)$. Hvis man da ser på den deriverte til $f(x) = x^2$, så ville Leibniz ha identifisert $2x + dx$ med $2x$, mens Robinson ville skrevet $st(2x + dx) = 2x$.

Robinson sa selv i 1966 at med hans strengt korrekte matematiske teori om infinitesimaler så kan Leibniz' ide bli fullstendig rettferdiggjort, og i 1986 sa Keisler at

"The reason Robinson's work was not done sooner is that the Transfer Principle for the hyperreal numbers is a type of axiom that was not familiar in mathematics until recently" (Kleiner, 2001, p. 168)

Altså at matematikken ikke var utviklet langt nok til at et slikt bevis kunne gjennomføres noe særlig tidligere enn når Robinson publiserte sitt verk. Dette kan nok stemme, men man kan likevel ikke si at matematikerne på den tiden jobbet med en trygghet om at infinitesimalene en dag kunne bli strengt matematisk bevist.

7. Norske lærebøker

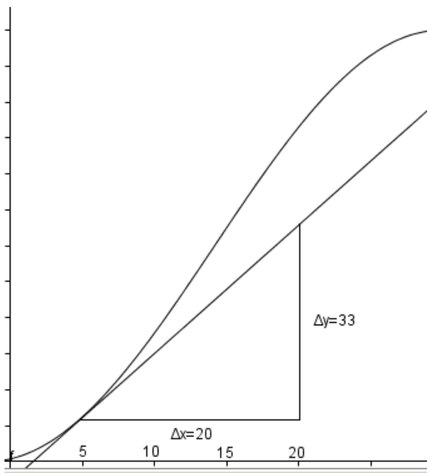
De vanligste matematikklærebøkene i den videregående skolen i Norge i dag er Sinus og Matematikk. Disse læreverkene kommer i flere utgaver, alt etter som hvilket kurs man skal ta. Jeg kommer til å fokusere på hvordan kalkulus blir introdusert og behandlet i bøkene for kursene S1, R1 og R2, for dette er kurs som behandler temaet på litt ulike måter og er laget for forskjellige elevgrupper. Jeg kommer videre til å dele opp i underkapitler for hver bok, og se på læreplanen for dette kurset og hvordan forfatterne har valgt å fremlegge stoffet.

7.1 Sinus S1

Dette er en bok for elever som går andre året på videregående skole, og som ønsker å ta den samfunnsfaglige matematikken. I oversikten over læreplanmål for kapittel 6 står det:

”Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

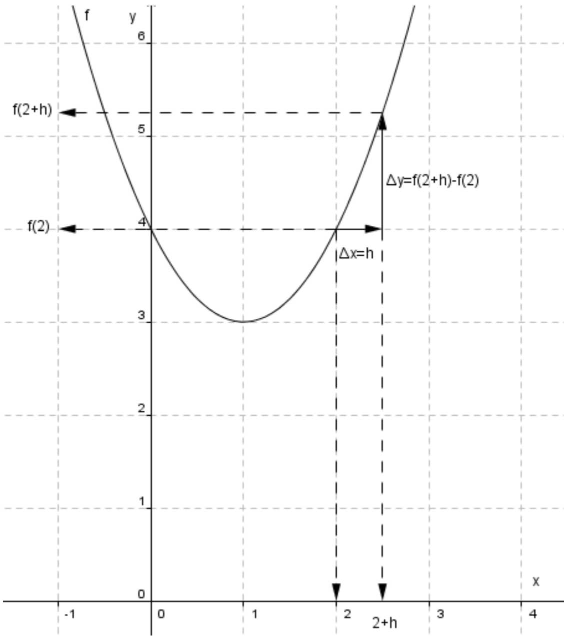
- *Finne gjennomsnittlig veksthastighet for en funksjon ved regning og finne tilnærmingsverdier for momentan vekst i praktiske anvendelser*
- *Gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner”*(Oldervoll, 2007b, p. 163)



Figur 17 Momentan vekstfart ved tangent

Boken begynner med å innføre begrepet gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av et eksempel med en plante som vokser med ujevn hastighet. De ser på hvor raskt planten vokser i gjennomsnitt i løpet av ti dager, deretter definerer de gjennomsnittlig vekstfart til funksjonen f i intervallet $[x_1, x_2]$ som: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. De fortsetter så videre med eksempelet, men ser nå på grafen i punktet $x = 5$. De definerer tangenten som en linje som er like bratt som grafen i $x = 5$ og som berører grafen i dette punktet. Momentan vekstfart blir så funnet grafisk ved å tegne tangenten til grafen i det ønskede punktet for så å finne helningstallet til tangenten (Se figur 17). Til slutt i dette avsnittet ser de på hvordan man kan finne den deriverte av en graf ved hjelp av lommeregner.

Videre går de over til å se på grenseverdier for ubestemte uttrykk. Også dette blir innført ved hjelp av et eksempel, nemlig funksjonen $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$. Til dette delkapittelet har de ingen figurer. De viser at man ikke kan regne ut $f(0)$ siden man da må dele med 0, men fortsetter med å regne ut $f(0{,}1), f(0{,}01), f(0{,}001), f(-0{,}1), f(-0{,}01), f(-0.001)$ og ser at man nærmer seg mot 2 fra begge sider. De skriver dette som $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ uten å definere dette mer. De viser så at man kan forkorte bort x-en i nevneren så lenge man beholder lim-tegnet, for så å sette inn $x = 0$ i likningen og få 2.



Figur 18 Vekstfart som grenseverdi

Etter dette innføres vekstfart som grenseverdi. Man ser på funksjonen $f(x) = x^2 - 2x + 4$ i punktet $x = 2$. De innfører h, som er et lite tall og regner gjennomsnittlig vekstfart til f i intervallet $x = 2$ til $x = 2 + h$. Vi kan legge merke til at de ikke kaller h en infinitesimal, eller en uendelig liten økning i x, slik som Newton og Leibniz ville gjort, de sier h er et lite tall for så senere å la det gå mot null med grenseverdier. En figur (figur 18) er plassert inn i teksten for å hjelpe elevene å forstå hva de ulike notasjonene står for. De finner at $\Delta x = (2 + h) - 2 = h$ og $\Delta y = f(2 + h) - f(2)$. Videre skriver de:

"så lar vi h nærme seg null. Intervallet $[2,2 + h]$ *vil da krympe og etter hvert bare inneholde punktet* $x = 2$. *Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet* $[2,2 + h]$ *nærmer seg da den momentane vekstfarten i punktet* $x = 2$. *Den momentane vekstfarten i punktet* $x = 2$ *er dermed lik grenseverdien* $lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$. "(Oldervoll, 2007b, p. 173).

Videre regner de først ut $f(2)$ og $f(2 + h)$ ved å sette inn i likninga og finner så grenseverdien. Etter dette eksempelet definerer de den deriverte til en funksjon f for $x = a$ som $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Videre følger noen eksempler hvor de bruker definisjonen på den deriverte og eksempelgrafer for å finne reglene for den deriverte av en konstant, en førstegradslikning og til slutt for x^n. Oppgavene som følger og som elevene skal øve seg med går ut på å benytte formlene de har lært, og å finne likningen til tangenten i et gitt punkt. Et lite delkapittel med regler for den deriverte av en konstant ganget med en funksjon, og en funksjon addert med en annen funksjon følger, før man kommer til den mer praktiske delen av kapittelet.

Her starter man med funksjonsdrøfting, og bruker en eksempelgraf til å definere en funksjons monotoniegenskaper. Dette er at funksjonen f vokser i et område hvis og bare hvis $f'(x) > 0$ og minker hvis og bare hvis $f'(x) < 0$. Så defineres stasjonære punkter som steder hvor $f'(x) = 0$, og man vektlegger at det stasjonære punktet er et topp- eller bunnpunkt hvis $f'(x)$ skifter fortegn i punktet. Hvis man ser bort fra funksjonsbegrepet er dette en metode som ble vist både av Newton i 1671 i *De Methodis* (upublisert frem til 1736) og Leibniz i 1684 i sin artikkel i *Acta Eruditorum*. Etter dette gir boken noen eksempler og oppgaver hvor man finner stasjonære punkter og tegner fortegnslinje for å se om det er topp eller bunnpunkt, og noen oppgaver hvor fortegnslinja er gitt og elevene skal skissere grafen.

Så kommer et delkapittel kalt optimering, hvor elevene får et praktisk problem og må gjøre litt enkel modellering for å komme frem til en funksjon. Man skal så bruke derivasjon på denne funksjonen for finne svaret på oppgaven. Et eksempel de bruker i boken er en kvadratisk papplate med sidekanter $36\ cm$. Elevene skal lage en eske ved å brette opp kantene, og spørsmålet er hvor høy eska bør være for å romme mest mulig. Kapittelet avsluttes med en seksjon for grensekostnad og grenseinntekt. Her argumenteres det for at når x øker med en enhet så øker $f(x)$ med ca. $f'(x)$ enheter. Dette gjøres ved å si:

"hvis ikke $f'(x)$ endrer seg mye i intervallet $[x, x+1]$, får vi en god tilnærmingsverdi for $f'(x)$ hvis vi bruker verdien $h = 1$ i uttrykket ovenfor [uttrykket for den deriverte]. *Det gir $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = f(x+1) - f(x)$."* (Oldervoll, 2007b, p. 194).

Heretter understrekes det at dette er en tilnærmingsverdi, og at det fungerer best når $f'(x)$ endrer seg lite mellom x og $x + 1$. Dette brukes videre i avsnittet for å definere og regne på grensekostnader og grenseinntekter ved å bruke at den deriverte forteller hvor mye kostnaden/inntekten vil øke når man øker produksjonen/salget med en enhet.

7.1.1 Diskusjon av Sinus S1

Denne boken er laget for elever som tar samfunnsfaglig matematikk, og dermed er det ingen forsøk på å forklare hovedteoremet i kalkulus, siden integrasjon aldri blir tatt opp som et tema. Derivasjon blir introdusert ved hjelp av grafer og funksjoner, ved først å se på gjennomsnittlig vekstfart, for så å la $\Delta x \to 0$ og dermed få den deriverte i et punkt. Den første store forskjellen fra både Newton og Leibniz er funksjonsbegrepet. Funksjoner var ikke et begrep som ble brukt på den tiden, de studerte i stede for variabler og implisitte funksjoner som består av disse variablene.

Boken bruker seg av størrelsen h, som er en størrelse som nærmer seg null, men aldri helt blir det. Denne kan sammenliknes med Newtons uendelig lille tidsperiode o og Leibniz dx, men læreboken bruker grenseverdier for å unngå problemene rundt hva h egentlig er og hvorfor den kan tas bort ved slutten av regningen. Boken inneholder likevel noen formuleringer som kan virke forvirrende. Ved å skrive "Så lar vi h nærme seg null. Intervallet $[2, 2+h]$ vil da krympe og etter hvert bare inneholder punktet $x = 2$." antyder de at man ikke bruker grenseverdier likevel, men at h egentlig er null når man regner med den. Derivasjon blir behandlet relativt enkelt gjennom hele boken, med derivasjonsregler som blir "bevist" ved et enkelt eksempel, og man går aldri dypt inn i definisjonen på den deriverte. Notasjonen som brukes er nærmest den til Leibniz. De bruker $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ved innføring av den deriverte, men bytter ut Δx med h og Δy med funksjonsuttrykkene når de skal sette opp definisjonen på den deriverte.

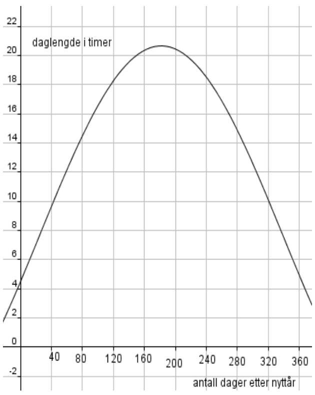
Boken velger å ikke si noe om den andrederiverte til en funksjon. Etter å ha innført derivasjon og derivasjonsreglene ville ikke dette vært et delkapittel som hadde krevd stor plass eller forklaring. Men det kunne hjulpet en del elever å forstå bedre både hvordan funksjoner fungerer og hvorfor derivasjon er slikt et viktig begrep i matematikk.

7.2 Matematikk S1

Denne boken er skrevet for elever i samme matematikkurs som Sinus S1, det vil si elever som tar samfunnsfagsmatematikk det andre året på videregående skole. Boken har et eget kapittel dedikert til derivasjon, nemlig kapittel 5. Bakerst i boken står en oversikt over læreplanmål som skal dekkes gjennom året, og de aktuelle for derivasjon er:

"Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- *beregne nullpunkter og skjæringspunkter mellom grafer, både med og uten digitale hjelpemidler*
- *finne gjennomsnittlig veksthastighet for en funksjon ved regning og finne tilnærmingsverdier for momentan vekstfart i praktiske anvendelser*
- *gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner"*(Heir, 2007, p. 326)

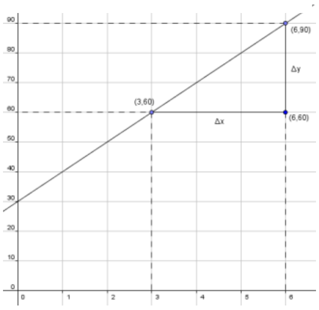


Figur 19 Daglengde i Trøndelag

Kapittelet starter med en aktivitet for å motivere elevene. De viser en graf (figur 19) over daglengden et sted i Trøndelag målt i timer. Elevene skal bruke grafen til å finne mest mulig ut av daglengden, finne ut hva som menes med vårjevndøgn, sommersolverv, høstjevndøgn og vintersolverv og plotte disse på grafen. Så skal de si noe om grafen i disse punktene.

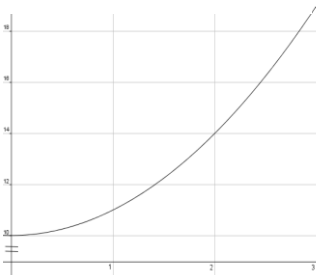
Så starter de opp med å se på gjennomsnittlig vekstfart. De begynner med et eksempel hvor de skal finne stigningstallet til en rett linje. Her brukes grafen til en lineær funksjon (figur 20), og det velges to punkter $(3,60)$ og $(6,90)$. Økningen i x-verdi definerer de som Δx og den tilsvarende endringen i y-verdi som Δy.

"Stigningstallet for linja blir da: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{90-60}{6-3} = \frac{30}{3} = 10$. *Stigningstallet viser hvor fort* y *vokser i forhold til* x. *Derfor blir stigningstallet også kalt* ***vekstfart*** *eller* ***veksthastighet****."*(Heir, 2007, p. 183). (ordene i fet skrift var allerede i kursiv i den opprinnelige teksten)



Figur 20 Gjennomsnittlig vekstfart, lineær

Etter denne lineære starten med definisjon av vekstfarten fortsetter man med den ikke-lineære funksjonen $V(X) = 1{,}1x^2 + 10$, der x står for antall minutter etter påfyllingen av vann i en tank starter (figur 21). Her påpeker de at volumøkningen ikke er like stor hele tiden og at grafen bare blir brattere. Det første minuttet er $\Delta x = 1$ og $\Delta y = 1{,}1$, så $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1{,}1$. Siden y har benevning liter og x har benevning minutt er den gjennomsnittlige vekstfarten til volumet det første minuttet 1,1 liter/minutt. I løpet av de to siste minuttene øker volumet med 8,9, så da blir $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8{,}9}{2} = 4{,}45$ liter/minutt.



Figur 21 Ikke-lineær vekstfart

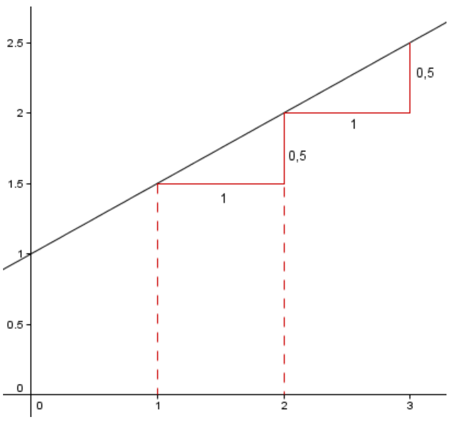
Etter dette eksempelet kommer en definisjon på gjennomsnittlig vekstfart i en farget firkant:

"den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[x_1, x_2]$ *er* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. *Benevningen for vekstfarten er benevningen for* y *dividert med benevningen for* x*"*(Heir, 2007, p. 185).

Etter et nytt eksempel hvor vekstfarten blir negativ, og noen oppgaver, går boken videre med et delkapittel som heter momentan vekstfart.

Momentan vekstfart defineres som stigningstallet til tangenten i et punkt. De fortsetter med eksempelet hvor vann strømmer inn i en tank. Nå skal man finne hvor fort vannvolumet øker etter nøyaktig to minutter, noe som tilsvarer å finne momentan vekstfart i punktet $x = 2$. De tegner da inn tangenten til grafen i punktet $x = 2$ og finner stigningstallet til denne. Dette er 4,4 så de konkluderer med at den momentane vekstfarten etter nøyaktig to minutter var 4,4 liter per minutt. Et avsnitt hvor usikkerheten ved å tegne inn en tangent på en graf for så å regne ut ifra denne tangenten følger, før de viser hvordan man kan finne momentan vekstfart ved hjelp av kalkulator når man kjenner funksjonsuttrykket.

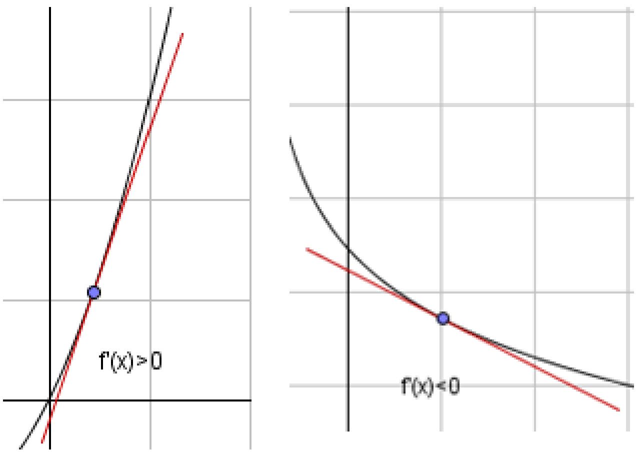
Etter dette følger delkapittelet kalt den deriverte. Her starter man ved å definere notasjonen, nemlig at $f'(x)$ er vekstfarten for $f(x)$ i punktet $(x, f(x))$. Deretter kommer en farget firkant med en definisjon av den deriverte:



Figur 22 Derivasjon av lineære funksjoner

"Den deriverte av en funksjon f *for en bestemt* x*-verdi er stigningstallet til tangenten i punktet med denne* x*-verdien"*(Heir, 2007, p. 191).

De startet så med å se på ulike funksjonsgrupper og deres deriverte. Først er det lineære funksjoner. De velger funksjonen $f(x) = 0{,}5x + 1$ og ser på grafen (figur 22). Ut fra grafen generaliserer de med å si at vekstfarten er 0,5 i alle punkter på grafen, og derfor er $f'(x)$ lik 0,5 for alle verdier av x. Med en ny generalisering sier de at den deriverte av $f(x) = ax + b$ alltid er a uten å bevise dette noe videre. Videre ser de på en konstant funksjon $f(x) = 5$. En liten tegning av denne er i margen.

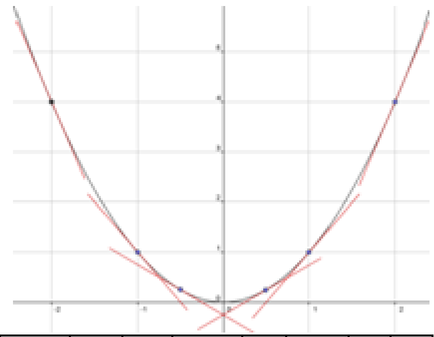


Figur 23 Tangenten til stigende og synkende graf

"siden vekstfarten er null i alle punkter på grafen, er $f'(x) = 0$ *for alle verdier av* x*. Den deriverte av en konstant funksjon er null"*(Heir, 2007, p. 192).

Også i dette tilfellet blir regelen bare utledet fra et enkelt eksempel. Etter dette ser man på grafen og den deriverte. En farget firkant inneholder setningene "når grafen stiger, er den deriverte positiv" og "når grafen synker, er den deriverte negativ", og dette støttes opp av to grafer som stiger og synker og man har tegnet inn tangenten til et punkt (figur 23).

Videre har de en tegning av en skiløper på toppen og bunnen av en graf/bakke med en farget firkant i bunnen med teksten ”i topp- og bunnpunkter er den deriverte null”.



X	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
f'(x)	-4	-2	-1	0	1	2	4

Figur 24 Med tabell. $f(x) = x^2$ med tangentlinjer

Så kommer et delkapittel om derivasjonsregler. Det starter med grafen til funksjonen $f(x) = x^2$, der tangenten er tegnet inn i punktene $x = -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2$. Man ønsker å finne et generelt uttrykk for den deriverte av funksjonen, og setter opp en tabell over x-verdier og tilsvarende stigningstall som leses av grafen (figur 24 med tabell). Elevene blir spurt om de ser noe mønster, før de påpeker at den deriverte i hvert tilfelle er dobbelt så stor som x-verdien. Videre skrives det at *”denne regelen kan utledes ved å bruke definisjonen. Vi kan derfor skrive* $(x^2)' = 2x$*”*(Heir, 2007, p. 194).

Videre fortelles det at man ved å bruke definisjonen også kan vise at $(x^3)' = 3x^2$ og at en generelt kan vise at $(x^r)' = rx^{r-1}$. Så gis regelen $[k * f(x)]' = k * f'(x)$ når k er konstant uten annet en et eksempel i forveien. Etter et par eksempler på denne regelen kommer regelen om at man deriverer ledd for ledd i et flerleddet uttrykk sammen med noen eksempler på dette.

Neste delkapittel omhandler fortegnslinje for den deriverte. Først blir det repetert hvordan grafen er når den deriverte er positiv, negativ og null. De starter så med å se på funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 5$. De finner den deriverte ved $f'(x) = 2x - 4 + 0 = 2x - 4$ og begynner å drøfte den deriverte gjennom fire punkter:*”*

- $f'(x) = 0$
  $2x - 4 = 0$
  $x = 2$
  $f'(x) = 0$ *for* $x = 2$
- *Vi tester for* $x < 2$ *og velger* $x = 0$*:*
  $f'(0) = 2 * 0 - 4 = -4$
  $f'(x)$ *er negativ for* $x < 2$
- *Vi tester for* $x > 2$ *og velger* $x = 10$*:*
  $f'(10) = 2 * 10 - 4 = 16$
  $f'(x)$ *er positiv for* $x > 2$
- *Vi setter opp fortegnsilja for* $f'(x)$*:*
  x-linje 2
- $f'(x)$ $- - - - - - - - - 0$ ———————

  Av fortegnslinja ser vi:
  $f(x)$ *minker i intervallet* $<\leftarrow, 2>$*. I dette intervallet synker grafen.*
  $f(x)$ *vokser i intervallet* $<2, \rightarrow>$*. Her stiger grafen.”*(Heir, 2007, p. 198).

Etter dette kommer et avsnitt om hvordan man kan kontrollere fortegnslinja ved hjelp av lommeregner, før man starter med drøfting av funksjoner.

Her blir det lagt vekt på at når den deriverte er positiv i et intervall så vokser grafen, og når den deriverte er negativ i et intervall så minker grafen. Det blir også introdusert ekstremalverdier, der maksimalverdi blir definert som andrekoordinaten til et toppunkt og minimalverdien som andrekoordinaten til et bunnpunkt. Kapittelet avsluttes med en del eksempler og oppgaver hvor man skal finne ekstremalpunkter i en praktisk setting, men i alle disse blir elevene gitt funksjonen de skal jobbe med.

7.2.1 Diskusjon av Matematikk S1

Denne boken er også beregnet på elever som tar samfunnsfaglig matematikk, og det er meningen man skal gjøre teorien mer praktisk rettet enn for de som tar teoretisk matematikk. Dette ser man ved flere anledninger, spesielt når regler og setninger presenteres med et enkelt eksempel som det eneste ”beviset” for at det er korrekt.

Boken velger til og med ikke å vise og benytte seg av definisjonen på den deriverte. Definisjonen blir aldri gitt til elevene, og den eneste gangen den blir nevnt er når regelen for den deriverte av x^n blir gitt. Da fortelles det at denne regelen kan utledes ved å benytte definisjonen på den deriverte, men det blir ikke fortalt noe mer enn det. Dette til tross for at et av læreplanmålene, som boken selv har med, sier at ” eleven skal kunne gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner”. Definisjonen på den deriverte er nok den delen som mange vil si er den vanskeligste som elevene får innen derivasjon i kurset S1. Det kan være det er for ikke å gjøre stoffet alt for vanskelig forfatterne har valgt å ta dette bort fra boken. Likevel er dette en viktig del i læreplanen, og noe elevene godt kan få til eksamen på sommeren, så grunnlaget for å ta det bort virker veldig tynt. Definisjonen er også viktig for at elevene skal bedre forstå hva derivasjon og den deriverte til en funksjon er, og hvordan man kan finne en korrekt verdi for den. Ut fra måten boken lærer bort temaet kan det virke som om den deriverte bare er en rett linje, og dens stigningstall, som tegnes for hånd med utgangspunkt i grafen, og ikke et viktig matematisk konsept med strengt fastsatte regler og metoder.

Et område hvor boken gjør en god jobb er ved å ta med benevningen den deriverte får etter utregning. Ofte blir den deriverte bare sett på som et tall, men den har også en benevning som bestemmes ut ifra den opprinnelige funksjonen. Dette blir forklart på en god og ryddig måte i boken, og oppgavene som følger gir elevene flere eksempler hvor de kan øve på dette selv.

7.3 Sinus R1

Sinus R1 er laget for elever som velger den abstrakte delen av matematikkundervisningen i skolen på andre året videregående, og skal legge mer vekt på beviser enn S1 faget (Oldervoll, 2007a, p. 3). Jeg skal her ikke gå så omfattende til verks med denne boken, men vise litt eksempler på hvordan dette faget og denne boken gir mer innsikt i hvordan matematikken bak reglene som vises i S1 er.

Etter å ha innført regelen om at $\left(u(x)+v(x)\right)' = u(x)' + v(x)'$ i starten av et delkapittel, bruker de den siste siden til å bevise at det virkelig er slik ved å bruke definisjonen av den deriverte. De setter $f(x) = x(x) + v(x)$ og setter dette inn i definisjonen:

"$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} = lim_{h\to 0}(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}) = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$. Vi har nå bevist at $\left(u(x)+v(x)\right)' = u(x)' + v(x)'$. Denne regelen gjelder også for en sum av flere funksjoner.(Oldervoll, 2007a, p. 242).

Etter dette kommer et bevis på at $\left(k * u(x)\right)' = k * u'(x)$ som går på en veldig lik måte.

I delkapitlene som omhandler funksjonsdrøfting bruker de at en funksjon f er deriverbar i et punkt $x = a$ hvis to krav er oppfylt, nemlig at funksjonen er kontinuerlig i $x = a$ og $\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$. Denne definisjonen er relativt enkel, og som vi har sett er ikke en funksjon nødvendigvis deriverbar selv om den er kontinuerlig. Likevel holder den for de funksjonene elevene arbeider med i dette kurset, og å skulle forklare absolutt kontinuitet ville raskt blitt alt for avansert. Det blir også poengtert at den andrederiverte gir krumningen og vendepunktene på en graf.

Videre har de et bevis for at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ hvor de også setter inn i definisjonen for den deriverte, bruker seg av logaritmeregler og foretar et variabelbytte. Videre kommer et bevis for at $(x^n)' = nx^{n-1}$, hvor de bruker seg av at $(a^x)' = a^x * \ln a$ som ble vist på den forrige siden. Beviset forutsetter at x er et positivt tall, men de sier at formelen også kan bevises om det er negativt.

"Når $x > 0$, er $x = e^{ln\,x}$. Da er $x^n = (e^{ln\,x})^{*n} = e^{(ln\,x)*n} = e^{n*ln\,x} = e^{u(x)}$ der $u(x) = n * ln\,x$. Da er $u'(x) = n * (ln\,x)' = n * \frac{1}{x}$. Dermed er $(x^n)' = (e^{u(x)})' = e^{u(x)} * u'(x) = x^n * n * \frac{1}{x} = n * \frac{x^n}{x^1} = n * x^{n-1}$.(Oldervoll, 2007a, p. 280)

For å bevise formelen $(u * v)' = u' * v + u * v'$ forutsetter de at $f = u * v$ der u og v er to deriverbare funksjoner. Så setter de inn i definisjonen for den deriverte:

"$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)*v(x+h)-u(x)*v(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)*v(x+h)-\boldsymbol{u(x)*v(x+h)}+\boldsymbol{u(x)*v(x+h)}-u(x)*v(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))*v(x+h)+u(x)(v(x+h)-v(x))}{h} = lim_{h\to 0}(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} * v(x+h) + u(x) *$

$\frac{v(x+h)-v(x)}{h}) = lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} * lim_{h\to 0} v(x+h) + u(x) * lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = u^{'}(x) * v(x) + u(x)v^{'}(x)$. *I den tredje linja trakk vi fra og la til leddet* $u(x) * v(x+h)$ *i telleren. I den nest siste linja brukte vi grenseverdisetninger. Til slutt brukte vi definisjoner av* $u^{'}(x)$ *og* $v^{'}(x)$ *og at* v *er en kontinuerlig funksjon slik at* $lim_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$*."*(Oldervoll, 2007a, p. 284)

Denne metoden for å bevise setningen er relativt annerledes enn den vi så Leibniz benytte i 1677. Leibniz' metode innefattet infinitesimaler og regning med disse, og raskt gjenfortalt sa han at $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$ for så å ta bort $dx\,dy$ siden dette er uendelig mye mindre enn resten. Som nevnt flere ganger tidligere var ikke funksjonsbegrepet eller regning med grenseverdier i kalkulus påbegynt på Leibniz' tid, og dermed kunne han ikke ha kommet opp med en like god definisjon som boken bruker. Likevel gir Leibniz' bevis et intuitivt inntrykk av å være korrekt og det kan være enklere for elever å følge resonnementet hans i forhold til boken som er langt og benytter seg av flere vanskelige begreper. Men selv om Leibniz' infinitesimaler etter Robinson har blitt strengt matematisk korrekte så vil nok det å plutselig innføre disse i et bevis i boken forvirre elevene mer enn det vil hjelpe dem til å forstå matematikken bak beviset.

De beviser også regelen om at $\left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'}*v-u*v'}{v^2}$ ved å sette inn $\frac{u}{v}$ i definisjonen til den deriverte og regne ut.

7.3.1 Diskusjon av Sinus R1

Vi ser her at denne boken og dette faget legger mye større vekt på den abstrakte matematikken med beviser og større matematisk strenghet enn det samfunnsfaglige faget S1. Formler og regler som bare blir innført med enkle eksempler som "bevis" i S1 får i R1 både forklaringer og beviser hvor man går til definisjonen av den deriverte og bruker denne for å gi et godt bevis til elevene. Man velger likevel å ikke bevise formelen for $(x^n)'$ fullt ut, men gjør det bare ved spesialtilfellet $x > 0$. Dette kan komme av at den norske skolen ikke legger så stor vekt på de delene av matematikken som trengs for å gjennomføre beviset, for her trenger man ikke bare definisjonen på den deriverte men også god forståelse av binomialkoeffisienter. Her kommer et eksempel på hvordan læreboken kunne ha bevist formelen, men det forutsetter som sagt at elevene er fortrolige med å utvide med binomialkoeffisienter. Man måtte også ha forklart hvert steg nærmere hvis det skulle blitt en del av en lærebok.

$$(x^n)^{'} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0h^n) - x^n}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0h^n}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + x^0h^{n-1} = \binom{n}{1}x^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Det er også tydelig hvordan boken går dypere inn i stoffet ved for eksempel å diskutere hva den andrederiverte til en funksjon sier om funksjonen og gi en enkel, om ikke fullstendig strengt matematisk korrekt, definisjon på når en funksjon er deriverbar.

7.4 Sinus R2

Denne boken er beregnet for elever som tar den abstrakte matematikken tredje året på videregående. Dette er det eneste av fagene på videregående i Norge som har integralregning som en del av læreplanen, og derfor er det denne delen jeg legger vekt på. I boken vektlegges bevis for reglene og formlene den presenterer, og det er dedikert to hele kapitler til integrasjon.

7.4.1 Kapittel 1: Integralregning

Kapittelet har som mål at eleven skal kunne:*”*

- *gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert*
- *beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon*
- *tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer ”*(Oldervoll, 2008, p. 9).

Kapittelet starter med å innføre det de kaller den antideriverte. De gjør dette ved et eksempel på en bil som kjører. Den kjører først med jevnfart i $50\ m$, før den akselererer og får en fart gitt ved en funksjon avhengig av tiden, $v(t) = 2t + 15$. Boken lurer på om man kan finne et uttrykk for avstanden bilen er fra målepunktet etter t sekunder, og vet at $s(0) = 50$ siden den er $50\ m$ fra målepunktet når tiden starter. Fra før av vet de at $s^{'}(t) = v(t)$, og dermed må $s^{'}(t) = 2t + 15$. Uten å utfordre elevene noe mer foreslås $s(t) = t^2 + 15t$ som et mulig uttrykk for strekningen bilen har tilbakelagt, for da er $s^{'}(t) = (t^2)^{'} + (15t)^{'} = 2t + 15$. Men ved dette uttrykket for strekningen vil $s(0) = 0$, og dette stemmer ikke.

”også uttrykket $s(t) = t^2 +\ 15t + 50$ *har riktig derivert. Dette uttrykket gir verdien* $s(0) = 50$*. Dette uttrykket for* $s(t)$ *er da det riktige. Legg merke til at hvis* C *er en konstant (et fast tall), har uttrykket* $s(t) = t^2 + 15t + C$ *derivert lik* $s^{'}(t) = 2t + 15$*.”*(Oldervoll, 2008, p. 10).

De går videre med et nytt eksempel hvor de først finner en antiderivert uten konstantledd, så ser at denne pluss syv er en annen antiderivert til det opprinnelige uttrykket, for så å si at den antideriverte pluss en konstant C også er en antiderivert. Så kommer en definisjon:

”La F *være en antiderivert til funksjonen* f*. Enhver antiderivert til* f *har da et funksjonsuttrykk av typen* $F(x) + C$ *der* C *er en konstant.”*(Oldervoll, 2008, p. 11).

Å finne den antideriverte ved å finne et uttrykk som derivert tar deg tilbake til utgangspunktet er en veldig god måte å innføre integrasjon og enkelt vise hva hovedteoremet i kalkulus egentlig sier. Dette er også likt måten Newton og Leibniz nærmet seg materialet når de begynte å arbeide med stoffet og grunnen til at de blir sett på som oppdagere av kalkulus, nemlig det at derivasjon og integrasjon er inverse opperasjoner. Å fastsette denne sammenhengen tidlig i kapittelet er en god ide slik at elevene raskt får en intuitiv forståelse av hva integrasjon er.

Så følger et bevis på at alle antideriverte må være på denne formen, hvor de først fastslår at ekvivalensen $H^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow H(x) = C$. Videre brukes dette til å vise at differansen mellom to antideriverte av samme uttrykk må være en konstant C. Og dermed må alle antideriverte være på formen $F(x) + C$.

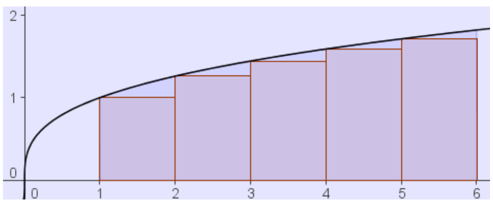
Etter dette kommer et avsnitt om ubestemt integral. De fastslår at symbolet $\int f(x)dx$ brukes om den antideriverte til en funksjon f, og at man for eksempel skriver $\int(2x + 1)dx = x^2 + x + C$. De definerer så at $\int$ er et integraltegn, $\int f(x)dx$ kalles et ubestemt integral og $f(x)$ kalles integranden.

"å integrere f vil si å finne de antideriverte til f."(Oldervoll, 2008, p. 14).

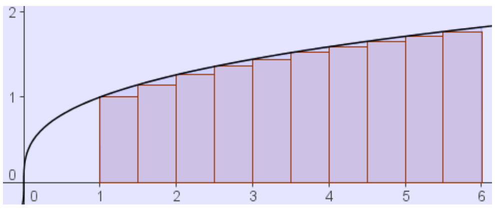
Videre brukes at man allerede vet at $(x^r)^{'} = r * x^{r-1}$ så lenge $r \neq -1$ til å vise at $\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right)^{'} = \frac{1}{r+1}(x^{r+1})^{'} = \frac{1}{r+1}(r+1)x^{r+1-1} = x^r$, og dermed har man regelen $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, r \neq -1$. Det vises også at regelen gjelder generelt, også når r er negativ og når man har $x^{\frac{m}{n}}$. Så kommer reglene om den integrerte av en sum og en konstant ganget med en funksjon på en gang, der de sier at $\int\big(a * f(x) + b * g(x)\big)dx = a * F(x) + b * G(x) + C$, der a, b og C er konstanter. Setningen bevises ved å derivere den høyre siden og se at man da får integranden.

Regelen for den integrerte av x^r gjelder ikke for $r = -1$, og neste delkapittel tar for seg dette tilfellet. Igjen brukes kjent materiale, nemlig at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ når $x > 0$. Dermed blir $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$, og de viser at for negative verdier av x blir $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$. Dette kan så bli slått sammen til $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$. Videre følger et delkapittel hvor reglene for eksponentialfunksjonen og et positivt tall opphøyet i x finnes på tilsvarende måte.

Så kommer de til bestemte integral, som innføres som grensen for en sum. De starter med å se på funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ fra $x = 1$ til $x = 6$. Ønsket er å finne arealet A av flatestykket avgrenset av x-aksen, grafen til funksjonen og disse x-verdiene. De deler opp intervallet $[1,6]$ i fem like deler og tegner fem rektangler som går fra x-aksen og opp til grafen (figur 25). Arealet av disse rektanglene er da en grov tilnærming av arealet A. De fortsetter med å si at hvert rektangel har grunnflate $\Delta x = \frac{6-1}{5} = 1$ og høyden $f(1), f(2), f(3), f(4)$ og $f(5)$. Summen av arealene, S_5, blir da regnet ut som summen av de fem grunnflatene ganget med høydene i hvert av rektanglene. Etter dette dobler de antallet rektangler under grafen (figur 26) og ser at $\Delta x = \frac{6-1}{10} = 0{,}5$ og at man nå får ti funksjonsuttrykk, ett for hver av høydene til rektanglene. Så finner de S_{10} på tilsvarende måte som ved fem. Videre generaliserer de ved å si hva om man deler området opp i n rektangler, da blir $\Delta x = \frac{6-1}{n}$ og høyden blir funksjonsverdien til den tilsvarende x-verdien. Da



Figur 25 Summen av fem rektangler



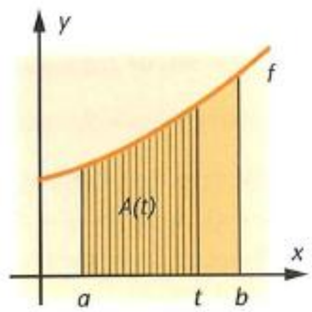
Figur 26 Summen av ti rektangler

vil $S_n = f(x_1) * \Delta x + f(x_2) * \Delta x + f(x_3) * \Delta x + \ldots + f(x_n) * \Delta x$. De har brukt en datamaskin til å regne ut $S_{50} \approx 9.06,\ S_{100} \approx 9.09, S_{1000} \approx 9.13\ og\ S_{10000} \approx 9.13$, og påpeker at det ser ut som om arealet nærmer seg 9.13.

"når $n \to \infty$, nærmer S_n seg en grenseverdi som vi kaller det bestemte integralet til f. Vi skriver $\int_1^6 f(x)dx = lim_{n\to\infty} S_n$"(Oldervoll, 2008, p. 24).

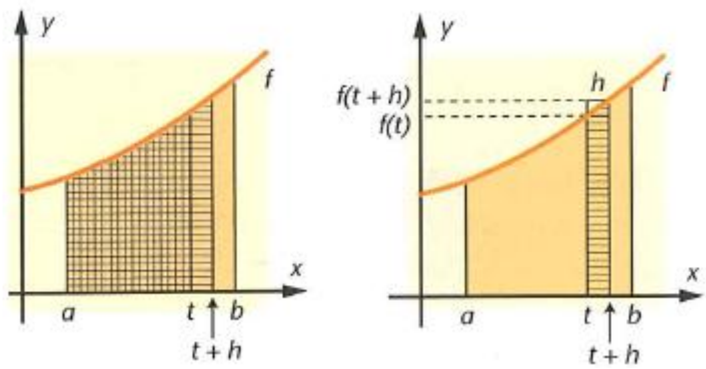
De definerer tallet 1 som den nedre integrasjonsgrensen og 6 som den øvre integrasjonsgrensen. Så ser de på den generelle funksjonen f som er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og i starten skal den også være positiv på dette intervallet. For å finne arealet avgrenset av x-aksen, linja $x = a$, linja $x = b$ og grafen til f deler man opp i rektangler som tidligere. Nå blir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og S_n regnes ut som tidligere. Det bestemte integralet til f fra a til b defineres da som $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$. De forklarer at dette er arealet man skulle finne, og at ved negative funksjonsverdier er arealet $-\int_a^b f(x)dx$.

Neste delkapittel omhandler bestemt integral, og starter med en definisjon på dette der de kaller F en antiderivert til f, da er $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Dette er jo den første de to delene som brukes for å definere hovedteoremet i kalkulus, det mangler bare en litt bedre definisjon på hvordan f og F må være for at dette skal gjelde. Etter et eksempel på dette innfører de notasjonen $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Så følger et bevis for at $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.



Figur 27 Arealet A(t) under grafen

De starter med en kontinuerlig, positiv funksjon f på intervallet $[a, b]$. Det bestemte integralet $\int_a^b f(x)dx$ er da arealet A under grafen. Først ser man på arealet $A(t)$ som er avgrenset av grafen, linjene $x = a$ og $x = t$ og x-aksen (figur 27). Arealet er avhengig av hvor man trekker linja $x = t$ og dermed en funksjon av t. Vi kan ved hjelp av definisjonen på den deriverte finne at $A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h}$. Videre forutsettes at $h > 0$ og at f er voksende nær $x = t$. Men tilsvarende resonnement kan gjøres om $h < 0$ og f er synkende nær $x = t$. Figur 28 viser de to arealene $A(t + h)$ og $A(t)$. Differansen $A(t + h) - A(t)$ fra telleren i uttrykket over vises i figuren til høyre. Figuren viser at dette flatestykket er større enn et rektangel med bredde h og høyde $f(t)$, men mindre enn et rektangel med bredde h og høyde $f(t + h)$. Så man kan skrive $f(t) * h < A(t + h) - A(t) < f(t + h) * h$. Hvis man dividerer med det positive tallet h får man $f(t) < \frac{A(t+h)-A(t)}{h} < f(t + h)$. Hvis vi lar $h \to 0$ så vil $f(t + h) \to f(t)$. Siden uttrykket $\frac{A(t+h)-A(t)}{h}$ ligger mellom $f(t + h)$ og $f(t)$ så må også dette nærme seg $f(t)$ når $h \to 0$. Dermed er $A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(t)$. Vi ville fått samme resultat om man hadde valgt f som synkende,



Figur 28 Arealene under grafen

om $h < 0$ og om f hadde vært negativ i intervallet. Funksjonen $A(t)$ er dermed en antiderivert til $f(t)$. Hvis $F(t)$ er en annen antiderivert kan man skrive $A(t) = F(t) + C$. Vi vet at $A(a) = 0$ og bruker dette til å finne C, der $A(a) = 0 \implies F(a) + C = 0 \implies C = -F(a)$. Dermed er $A(t) = F(t) - F(a)$, og spesielt kan man si at $A(b) = F(b) - F(a)$. Siden $A(b) = \int_a^b f(x)dx$ så har vi bevist at $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Resten av kapittelet går ut på å bruke dette, ved å finne areal under og mellom grafer, samlet resultat over et gitt tidsrom og volumet av en gjenstand og en omdreiningsgjenstand.

7.4.2 Kapittel 7: Integrasjonsmetoder

Kapittelet har som mål at eleven skal kunne:*"*

- *beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon*
- *tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer*
- *derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner"*(Oldervoll, 2008, p. 280)

Kapittelet starter ved å gi integrasjonsformlene for de trigonometriske funksjonene ved å si at derivasjonsformlene gir dette. Deretter ser de på integralet $\int \cos \pi x \, dx$ og viser at dette ikke kan være $\sin \pi x + C$ siden dette derivert blir $\pi * \cos \pi x$. De ser at man må ha med $\frac{1}{\pi}$ i svaret på integralet for at de skal bli riktig, og får dermed $\int \cos \pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C$. Dette er da et eksempel på den generelle formelen $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, der F er en antiderivert til f og a og b er konstanter. Formelen bevises ved å derivere høyre side og se at vi får integranden.

Etter dette kommer et delkapittel om integrasjon ved variabelskifte. De starter ved å si at den forrige formelen kan generaliseres slik at det ikke lenger er bare for kjerner som er lineære, men at det da blir litt mer komplisert.

"La f være en funksjon som har F som antiderivert. Med u som variabel blir da $F'(u) = f(u)$. Da er $\int f(u)\, du = F(u) + C$. Vi tenker oss at u er en funksjon av x og skriver $u = u(x)$. Funksjonen F blir dermed en sammensatt funksjon som vi kan derivere med hensyn på x ved hjelp av kjerneregelen. $\left(F\big(u(x)\big)\right)' = F'\big(u(x)\big) * u'(x) = f\big(u(x)\big) * u'(x)$. Etter definisjonen av det ubestemte integralet er da $\int f\big(u(x)\big) * u'(x)\, dx = F\big(u(x)\big) + C = F(u) + C$. Vi har to integraler som begge er $F(u) + C$. De to integralene må være like.
$\boxed{\int f\big(u(x)\big) * u'(x) = \int f(u)\, du, der\ u = u(x)}$"(Oldervoll, 2008, pp. 282-283).

Denne metoden er ganske ulik Newtons måte å regne med uttrykk hvor man bytter ut kjernen med en ny variabel som er avhengig av x. Som vi husker så løste Newton dette ved å innføre en ny variabel z og finne dennes fluxion. Deretter ville han ha regnet seg videre med dette og kommet tilbake til et uttrykk der y igjen er avhengig av x. Men selv om metodene ser svært ulike ut så er det egentlig det samme som gjøres. Man foretar et variabelskifte for å forenkle regningen før man igjen går tilbake til de opprinnelige variablene.

Boken viser så hvordan man kan bruke skrivemåten Leibniz brukte for den deriverte for å forenkle regnemåten på en måte som alltid gir riktig resultat. Dette gjøres ved å sette $\frac{du}{dx} = u'$ for så å gange med dx på begge sider. Da får man en formel for du som man kan sette rett inn i integralet man foretar et variabelskifte på. Det er bare viktig å passe på at ingen av integralene inneholder både u og x.

Neste delkapittel omhandler en annen integrasjonsmetode, nemlig delvis integrasjon. Her bruker de seg av den kjente formelen $(uv)^{'} = u^{'}v + uv'$. Ved å integrere høyre side får vi at $\int(u^{'}v + uv^{'})dx = \int(uv)'\,dx = uv + C$. Ved å integrere høyre side leddvis og flytte over får man at $\int uv'\,dx = uv + C - \int u'v\,dx$. Ved det siste integralet får man en ny ubestemt konstant, så man kan droppe C. Dermed blir formelen: $\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$.

Så kommer en del om delbrøkoppspalting, der elevene læres hvordan man deler opp brøker slik at integralet blir lettere å regne. Etter dette kommer man til det siste delkapittelet, som omhandler funksjonsdrøfting. Her bruker man bare eksempler for å vise elevene hvordan man kan drøfte funksjonene man får oppgitt. De har allerede lært derivasjon og fortegnslinje, så det nye er å finne arealer og volumer til funksjonene.

7.4.3 Diskusjon av Sinus R2

Kurset R2 er ment å skulle være teoretisk og fokusere på abstrakt matematikk. Det er også det vanskeligste kurset på videregående skole i Norge, og det eneste som har integrasjon med i læreplanen. Boken Sinus R2 er bygd opp på en slik måte at hvert delkapittel og hvert kapittel går fra det som regnes for å være det enkleste innenfor dette emnet til det vanskeligste. Dette kan hjelpe elever som sliter litt med å finne de delene som er viktigst å øve på til prøver, men det kan også føre til at flinkere elever velger å droppe beviser og liknende for de vet de vil få en grei karakter uten å lære seg dette.

Sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon blir umiddelbart introdusert i boken. Elevene har lært i et tidligere kurs at fart er den deriverte til strekningsgrafen, og dette brukes for å innføre det boken i starten kaller den antideriverte. Et slikt dagligdags eksempel kan være med på å hjelpe elevene å forstå hvordan dette kan brukes i hverdagen. Integrasjon blir så forsiktig introdusert som en funksjon som har den opprinnelige funksjonen som derivert. Denne blir presentert uten at elevene får mulighet til å forsøke å finne den selv, noe som kunne gitt elevene større forståelse for sammenhengen på et tidligere tidspunkt. Men man viser at selv om et uttrykk kan ha mange antideriverte så er det av og til bare en som er riktig svar på oppgaven.

Veldig mange av formlene og reglene som blir introdusert i løpet av kapitlene kommer på en litt tilsvarende måte. Enten velger man en funksjon som man vet hva den deriverte er og finner den integrerte av denne funksjonen ved å se hva man må gange med for å få et rett uttrykk. Eller så gir de bare regelen og beviser den ved å derivere sluttproduktet og vise at man får integranden. Dette er en vanlig måte å gjøre det på, siden det ikke er en grei definisjon på den integrerte hvor man bare kan sette inn og regne, i motsetning til den deriverte.

8. Diskusjon

8.1 Likheter og forskjeller mellom dagens kalkulus og kalkulusen til Newton og Leibniz

Som vi har sett har kalkulusen utviklet seg mye fra de endelige utgavene til Newton og Leibniz og frem til dagens lærebøker i matematikk. Den største og viktigste forandringen har foregått i det fundamentale konseptet som man opererer med. Oppfinnelsen av funksjoner, der en variabel blir valgt ut slik at alle andre avhenger av denne, var svært viktig innen utviklingen av kalkulus, og førte med seg en stor forandring i forhold til den tidligere utgaven. Newton og Leibniz arbeidet med variabler og implisitte funksjoner som inneholder disse variablene. Variabler kunne selvsagt være avhengig av andre variabler, men ikke på samme måte som ved funksjoner hvor en spesiell variabel blir valgt ut. Variablene er under konstant forandring, og ofte er det tiden som variablene forandrer seg etter. Spesielt for Newton er en tidsavhengig variabel viktig, og i starten det eneste han bruker, men senere utvider han konseptet til en hver variabel i forandring (any flowing quantity). Dette kommer nok av at Newton i stor grad tenkte på fysiske fenomener og det at en variabel er tidsavhengig nok er den mest naturlige fysiske tolkningen.

Overgangen til funksjoner og introduksjonen av grenseverdibegrepet har også vært viktig for utviklingen og strengheten innen kalkulus. Under Newton og Leibniz opererte man med uendelig små tillegg til de variable, kalt infinitesimaler og fluxioner/moments, som man regnet med og til slutt kunne ta bort fordi de er uendelig små sammenliknet med resten. Det var ingen strengt matematiske byggverk for disse infinitesimalene og fluxionene/moments og dermed regnet man med konsepter som man bare antok var riktige. Og selv om Robinson i den senere tid har vist at man kan regne med infinitesimaler på en strengt matematisk korrekt måte så betyr ikke dette at Newton og Leibniz hadde denne innsikten selv. Man kan si at disse opererte på en måte som intuisjonistene i den senere tid har argumentert for, nemlig at det er arbeidsmåten til matematikeren, hvor han er veldig oppmerksom på definisjoner og metoder for bevis, som intuitivt vil veilede ham til å unngå motsigelser. Funksjoner og grenseverdibegrepet førte til at kalkulus ikke lenger baserte seg på regning med infinitesimaler, og etter noen utviklinger fra første forsøk så fikk den et strengt matematisk grunnlag. Dermed hadde man endelig et fundament for kalkulus som det ikke var usikkerhet rundt. Dette har ført til at lærebøkene vi har sett på har et solid fundament for sine kapitler som omhandler forskjellige deler av kalkulus. Likevel er det visse formuleringer, for eksempel "så lar vi h nærme seg null. Intervallet $[2,2+h]$ vil da krympe og etter hvert bare inneholde punktet $x=2$" (Sinus S1), som er nærmere formuleringene til Newton og Leibniz enn en god formulering med grenseverdier.

Den største likheten finner vi når vi ser på skrivemåten som ble utviklet av Leibniz og skrivemåten som brukes i skolen i dag. Notasjonen som Leibniz utviklet er nesten enerådende innenfor matematikken i dag. Hans viktigste symboler, som integraltegnet, d for å vise at det er derivasjon og oppsettet for hele integralet, har i det store og det hele overlevd de forskjellige overgangene som kalkulus har gjennomgått fra Leibniz' tid. Derimot er det nesten ingen steder hvor man vil finne Newtons notasjon i dagens matematikk. Spesielt innen den videregående skolen er alt borte, og det er også svært få andre steder man finner notasjonen i dag, med unntak av bruken av $\dot{x}$ for den tidsderiverte innen fysikken og noen deler av matematikken.

8.2 Hovedteoremet i kalkulus

For Newton var hovedteoremet først og fremst en måte å finne arealet under eller stigningsfarten til en gitt kurve. Oppdagelsen av at de er inverse opperasjoner gav ham muligheten til å regne om mellom disse to konseptene, og dette er hovedgrunnen til at han, sammen med Leibniz, blir regnet som oppdageren av kalkulus. Etter å ha sett denne sammenhengen fant han raskt at metoden gav de funnene man tidligere hadde kommet frem til gjennom metoder utviklet spesielt for et problem, for eksempel at arealet under x^n er $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, og motsatt. Newton utelukket konsekvent den ubestemte konstanten ved integrasjon slik at alle hans integrerte kurver gikk gjennom origo.

Også for Leibniz var hovedteoremet først og fremst en metode som viste den inverse sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon. Med dette kunne han gjøre om arealproblemer til inverse tangentproblemer, med andre ord for å finne arealet under en kurve med ordinat z behøvde han altså nå å finne en annen kurve med ordinat y som oppfylte $\frac{dy}{dx} = z$. Leibniz regnet generelt med kurver som går gjennom origo, og dermed kommer han ikke opp i problemet med den ubestemte konstanten ved integrasjon.

Hovedteoremet i kalkulus er ikke behandlet i andre lærebøker enn for kurset R2, og dermed blir det denne som blir behandlet i dette delkapittelet. Den inverse sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon blir presentert umiddelbart i boken, og dette gjøres med et eksempel plukket fra hverdagen. Eksempelet er et problem fra fysikken og benytter en funksjon som gir farten til et legeme avhengig av tiden. En tidsavhengig variabel i en fysisk kontekst er jo nettopp hva Newton vanligvis regnet med, spesielt i starten, og dermed er eksempelet et lite bindeledd til tidligere utgaver av kalkulus (selv om boken selvsagt bruker en funksjon og ikke fluxioner slik som Newton). Om forfatterne av boken hadde dette i tankene når de laget eksempelet er heller tvilsomt, men det viser at Newtons måte å tenke på er holdbar også i dag. Eksempelet benytter seg av kjennskapen elevene har fra tidligere om at den deriverte til en avstandsfunksjon er en funksjon for farten til legemet for å finne avstandsfunksjonen når de vet hva fartsfunksjonen er. Dette gjøres i starten bare ved å prøve seg frem til et uttrykk som derivert gir fartsfunksjonen, og dette kan hjelpe elevene med å forstå sammenhengen mellom opperasjonene.

Gjennom hele bokens gjennomgang av integrasjon benytter man, på en måte, hovedteoremet, siden de fleste regler og bevis blir gitt ved å vise at når man deriverer dem så får man integranden igjen. Likevel blir hovedteoremet aldri gitt eksplisitt i boken, det nærmeste man kommer er definisjonen ”F en antiderivert til f, da er $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$”. Men denne mangler både en forklaring på begrensningene til f og F, og den andre delen som hovedteoremet som regel blir gitt ved, nemlig $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. En bedre definisjon på hvordan hovedteoremet fungerer kunne vært med på å hjelpe elevene til å forstå den inverse sammenhengen bedre, etter at det intuitive var vist ved eksempler i starten.

8.3 Strengheten i lærebøkene

Lærebøkene som har blitt omtalt i denne oppgaven har i stor grad hatt varierende matematisk strenghet for sine regler og bevis. Den største forskjellen ser man mellom bøkene som er laget for den samfunnsfaglige matematikken og bøkene som er laget for den abstrakte matematikken. Det er en stor forskjell på måten de ulike delene blir introdusert og ikke minst bevist i de to gruppene av bøker. For de samfunnsfaglige bøkene holder det som regel med et eksempel som "bevis" for setninger og regler som blir gitt. Den vanligste metoden for å innføre et nytt begrep på er å se på et konkret eksempel hvor dette blir benyttet, for så direkte å generalisere ved å gi den generelle regelen uten å vise noe til den matematiske strengheten som ligger bak. Man ser det spesielt i boken Matematikk S1 hvor elevene ikke en gang blir gitt definisjonen på den deriverte. I stede for bruker de enkle eksempler for å gi elevene de ulike regnereglene innen derivasjon. Dette kan raskt føre til at elever får en følelse av at temaet mangler en strengt matematisk basis, og at det heller er en metode man kan benytte for å finne svaret og som ofte gir den korrekte løsningen. Definisjonen er satt opp som et kriterium for elevene i læreplanen, og regnes dermed som et viktig konsept for elevene som tar denne studieretningen. Definisjonen er viktig for å gi hele derivasjonskapittelet et fundament hvor elevene kan se strengheten som ligger bak konseptet, selv om det ikke blir benyttet til å bevise alt som blir tatt opp i kapittelet.

Dette gjøres mye bedre i boken Sinus S1, som er for samme gruppe elever, hvor definisjonen på den deriverte blir introdusert og forklart på en god måte uten at man gjør det for vanskelig for elevene å forstå. Og dette er en viktig balansegang for disse bøkene. De er laget for elever som tar den enkle versjonen av matematikken og dermed kan ikke forfatterne gjøre stoffet så tungt at elevene ikke forstår det. Strengt matematiske beviser blir derfor ofte for vanskelige å ta med for denne elevgruppen, for de krever som regel gode matematiske kunnskaper. Likevel er ikke dette en god nok grunn til selv å velge noe bort fra læreplanen, slik som Matematikk S1 har valgt å gjøre med definisjonen på den deriverte.

Bøkene som er skrevet for den mer abstrakte delen av matematikken har mye større vekt på beviser, og en oppbygging som viser det matematiske byggverket bak regnereglene. Starten av delkapitlene er ofte lik starten på bøkene for samfunnsfaglig matematikk, med eksempler som blir etterfulgt av reglene som elevene skal lære i løpet av sidene. Men i motsetning til de enklere bøkene så avsluttes delkapitlene med et bevis for de foregående reglene. Bevisene som presenteres for derivasjon går ofte ut på å sette utgangspunktet inn i definisjonen på den deriverte og regne med dette til man kommer frem til det man skulle bevise. Et unntak er regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$ hvor man ikke benytter definisjonen, men heller andre derivasjonsregler med visse forutsetninger. Dette gjøres nok fordi elevene ikke har den matematiske kunnskapen som er nødvendig for å kunne følge et slikt argumentsbevis, og beviset som føres i boken er ikke feilaktig, det er bare ikke helt fullstendig.

Sinus R2, den eneste boken som omtaler integrasjon, har en litt annen måte å føre sine beviser på. Starten på delkapitlene er relativt lik starten på de andre bøkene, med et eksempel og så en generalisering til en generell regel. Men bevisene er ofte derivasjon av høyre side for å vise at man da kommer tilbake til integranden. Et unntak er beviset for bestemte integral, nemlig $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, som er mye mer omfattende, men likevel inneholder mye argumentasjon med derivasjon. Å argumentere for at en integrasjonsregel er korrekt ved å derivere den er ganske vanlig innen matematikken, av den enkle grunn at det ikke finnes noen definisjon på den integrerte på samme måte som den deriverte. Det er også en strengt matematisk korrekt måte å gjøre det på og det er relativt enkelt for elevene å følge resonnementet. Boken er skrevet med tanke på elever som velger den vanskeligste utgaven av matematikken på videregående i Norge, og forfatterne har dermed en mye større mulighet til å benytte seg av den teoretiske delen av matematikken. Boken har derfor en mye større vekt på å vise det strengt matematiske byggverket bak kalkulus, slik at elevene forstår de reglene de regner med.

8.4 Pedagogiske fordeler og ulemper

Når man ser på utviklingen av kalkulus fra utgaven til Newton eller Leibniz og frem til i dag så finnes det mange store ulikheter, men har alle disse vært til det bedre for en elev på den videregående skolen? Overgangen til å bruke eksplisitte funksjoner i stede for implisitte funksjoner av uavhengige variabler var en stor forandring. I forhold til Leibniz er det blant annet ikke lenger noen usikkerhet rundt differensialene. Ved Leibniz' kalkulus måtte man velge progresjonen til variablene for å finne hvilken differensial man skulle utvikle ut fra, det var derfor mange måter å regne et problem på hvor noen ofte var mye enklere enn andre. Dermed var det opp til matematikeren som regnet oppgaven å bestemme hvilken metode som vil være best til det oppgitte problemet, og dette krever ofte en stor innsikt i emnet. Dette er ikke noe man kan forvente av en elev ved den videregående skolen, så en slik metode ville skapt problemer for mange. Innføringen av funksjoner som konseptet innen kalkulus har løst problemet, siden funksjoner har spesifiserte uavhengige variabler. Dermed kan man si at på dette punktet har det vært en forbedring i utviklingen hvis man ser i forhold til en pedagogisk bedre kalkulus.

Når det kommer til notasjon så har Leibniz' skrivemåte stort sett blitt beholdt på den måten som han benyttet seg av på slutten av sitt arbeid med kalkulus. Dette betyr også at Newtons notasjon har gått nesten fullstendig bort. Leibniz arbeidet aktivt for å gjøre sin kalkulus enklest mulig å forstå for andre matematikere som ønsket å benytte seg av den nye regnemåten og han videreutviklet i flere omganger notasjonen for å gjøre den enklere. Newton utviklet sin notasjon mer for seg selv uten å tenke på hva som vil gjøre det lettest for andre. Dette førte til at matematikere som benyttet seg av Leibniz' utgave hadde et enklere symbolspråk og dermed en bedre forutsetning for å komme med nye oppdagelser innen emnet. Slik ble Newtons notasjon i det lange løp bakstreversk og den gikk ut av bruk, selv om noen, spesielt britene, holdt på skrivemåten i lang tid. Historien har vist at Leibniz' notasjonsmåte er lettere å forstå og regne med enn den til Newton. Så at det er Leibniz' som blir benyttet i dagens lærebøker er derfor bedre pedagogisk enn om man hadde beholdt det av Newton opp gjennom tiden.

Den tidlige kalkulusen var basert på infinitesimaler, uendelig små tall som man regnet med, og som man av og til benyttet som virkelige tall og andre ganger kunne ta bort siden de er uendelig mye mindre enn resten. Ingen visste hva disse infinitesimalene var og hvorfor man kunne regne med dem, men de gav det rette svaret. Denne uvissheten ble etter hvert borte når man gjorde fundamentet til kalkulus om til funksjoner og grenseverdier. Dermed fikk man et strengt matematisk korrekt fundament slik at emnet ikke lenger bar preg av regnemåter og opperasjoner som man ikke kunne gjøre rede for hvorfor var lovlig å utføre. Denne overgangen gjør at alt som læres bort innen kalkulus i matematikken i dagens skole er strengt matematisk korrekt. Det at en lærer kan si til elevene med sikkerhet at dette er en korrekt måte å løse oppgavene på er selvfølgelig veldig viktig, og pedagogisk sett er det også viktig at stoffet som undervises har en solid og udiskutabel basis. Det er likevel slik at en del av den tidlige måten å regne på kan være enklere å forstå og følge for elever som møter emnet for første gang. For eksempel vil Leibniz' "bevis" for produktregelen, $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$ for så å ta bort $dx\,dy$ siden dette er uendelig mye mindre enn resten, nesten være selvforklarende og enkelt å følge, mens dagens bevis der man setter inn i definisjonen på den deriverte og regner med dette kan være mer komplisert og vanskeligere for en som er ny innen stoffet å regne med. Men selv om visse deler av regnemåtene er mer intuitivt enkle å følge for elevene så veier ikke dette opp for manglende matematisk strenghet. Derfor er også overgangen fra infinitesimaler til funksjoner med grenseverdier et steg som har ført til en bedre pedagogisk kalkulus.

9. Konklusjon

De forskningsspørsmålene jeg valgte i innledningen og som jeg ønsker at min oppgave skal svare på var:

1. Hvilke likheter og forskjeller kan man finne mellom de historiske kalkulusene til Newton og Leibniz og dagens lærebøker?
2. Har kalkulus utviklet seg til et bedre pedagogisk matematisk emne fra Newton og Leibniz og frem til i dag, og i tilfelle på hvilken måte?

Newton og Leibniz oppdaget og utviklet kalkulus. De kom frem til et nytt matematisk felt som i konsept var likt, men som i utforming og regnemåter på flere områder hadde store forskjeller. Leibniz benyttet seg av infinitesimaler i sine definisjoner og bevis, og utviklet en pedagogisk god regnemåte for sin nye matematikk. Den karakteristiske trekanten som Leibniz innfører og benytter seg av er viktig for å forstå hans tenkemåte og hvordan han finner frem til de ulike infinitesimalene som blir viktige for hans oppdagelse av kalkulus. Newton benyttet seg i starten av tidsavhengige variabler som beveger seg langs en kurve, en fysisk tolkning som han senere utvidet til en hver variabel i forandring. Han så på fluxioner og moments, som er et uendelig lite tillegg til variabelen, og hvordan en innføring av disse kan gi muligheten for å regne seg frem til svaret på diverse oppgaver. Felles for både Newton og Leibniz er at de baserte sin kalkulus på uendelig små tillegg, infinitesimaler og fluxioner/moments, som de ikke kunne gi noen forklaring for hvorfor de fungerte eller om de var lovlig å benytte seg av.

I dagens lærebøker til den videregående skolen er den viktigste forskjellen fra Newton og Leibniz' kalkulus funksjonene. Bøkene benytter seg av funksjoner og ikke implisitte funksjoner av uavhengige variable, og funksjonene har et strengt matematisk fundament basert på grenseverdier. Den største likheten man finner er notasjonen, som stort sett er beholdt slik den var da Leibniz var ferdig med å utvikle den.

Regnemåtene man benyttet har også utviklet seg i takt med utviklingen av konseptene. Argumentasjonsmetodene til Newton og Leibniz med uendelig små størrelser som man kan regne med er erstattet av grenseverdibegreper og strengt matematiske regnemetoder. Dette har ført til at noe av det man tidligere så på som umiddelbart intuitivt riktig har blitt erstattet av mer kompliserte regler og bevis som er vanskeligere å følge. Disse er på den andre siden strengt matematisk korrekte, og det å miste noe av det intuitive er en ting man har måttet godta for å oppnå et solid fundament for emnet.

Utviklingen som kalkulus har gått gjennom siden tiden til Newton og Leibniz er på flere områder stor, og den har gått mot et matematisk emne som er bedre pedagogisk sett. Mye av grunnen til dette kommer av at kalkulus har fått et strengt matematisk fundament slik at lærere og elever nå med sikkerhet kan vite at opperasjonene de utfører er matematisk ”lovlige”. En annen positiv utvikling pedagogisk sett er måten Leibniz' notasjon har blitt nærmest enerådende over Newtons. Leibniz' skrivemåte er mye enklere å forstå og benytte for matematikere på alle nivåer og dermed er det positivt pedagogisk sett at det er denne som benyttes i skolen i dag.

10. Referanser

Aiton, E. J. (1985). *Leibniz: a biography*. Bristol: Adam Hilger.

Bos, H. J. M. (1993). *Lectures in the history of mathematics*. [London]: American Mathematical Society.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1989). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag.

Heir, O. (2007). *Matematikk S1*. [Oslo]: Aschehoug.

Kleiner, I. (1991). Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective. *Mathematics Magazine, 64*(5), 291-314.

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2/3), 137-174.

Leibniz, G. W., Gerhardt, C. I., & Child, J. M. (1920). *The Early mathematical manuscripts of Leibniz*. Chicago: The Open Court Pub.

Lindstrøm, T. (1996). Uendelige små og store tall - og litt om hva de kan brukes til. *Nordisk Matematisk Tidskrift, 44*(2), 71-91.

Oldervoll, T. (2007a). *Sinus R1: grunnbok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen.

Oldervoll, T. (2007b). *Sinus S1: lærebok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen.

Oldervoll, T. (2008). *Sinus R2: grunnbok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen.

Rickey, V. F. (1987). Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics. *The College Mathematics Journal, 18*(5), 362-389.

Struik, D. J. (1986). *A Source book in mathematics, 1200-1800*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Westfall, R. S. (1980). *Never at rest: a biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.

Whiteside, D. T. (1970). The mathematical principles underlying Newton's 'Principia mathematica'. *Journal for the History of Astronomy*, 116-138.

Whiteside, D. T. (1982). Review: Newtonian Motion. *Isis, 73*(1), 100-107.

Whitrow, G. J. (1989). Newton's Role in the History of Mathematics. *Notes and Records of the Royal Society of London, 43*(1), 71-92.