Note sur les représentations intégrales des formes linéaires complexes

Bent Hirsberg

Introduction.

Le but de la note présente est de présenter un développement supplémentaire d'un théorème de Hustad [3] en utilisant les idées fondamentales de [3].

Nous montrons:

Théorème. Soient X un espace compact séparé et $A \subseteq C(X)$ un sous-espace vectoriel fermé, séparant les points de X et tel que $\mathbb{1} \in A$. Soit l une forme linéaire continue sur A, alors il existe une mesure de Radon complexe m sur X telle que

(i) $l(a) = \int_X a\, dm \qquad \forall a \in A$

(ii) m est une mesure maximale sur X.

(iii) $\|l\| = |m|(X)$.

Remarque. La différence entre le théorème mentionné ci-dessus et le théorème de Hustad est la propriété (ii) qui remplace l'annoncé moins fort de [3] que " m est pseudo-portée par la frontiére de Choquet".

Voir [2] pour une application du théorème ci-dessus.

Préliminaires et démonstration.

Soient X un espace compact séparé et $A \subseteq C(X)$ un sous-espace vectoriel fermé, séparant les points de X et tel que $\mathbb{1} \in A$.

L'ensemble des états de A

$$S = \{p \in A^* \mid p(\mathbb{1}) = \|p\| = 1\}$$

est une face de la boule-unité K de A^* , fermée pour la topologie $\sigma(A^*,A)$.

Puisque A sépare les points de X , nous avons une homéomorphisme injective $\varphi\colon X \to S$ définie par

$$\varphi(x)(a) = a(x) \qquad \forall a \in A .$$

En imitant [3] nous définirons une application $\Phi\colon \Gamma \times X \to K$ par

$$\Phi(\lambda,x) = \lambda\varphi(x) ,$$

où Γ désigne le cercle-unité.

Définissons aussi $L\colon C(X) \to C(\Gamma \times X)$ par

$$Lf(\lambda,x) = \lambda f(x) \qquad \forall f \in C(X)$$

Si μ est une mesure de Radon réelle ou complexe sur $\Gamma \times X$ et $f \in C(X)$, alors

$$[P\mu](f) = \int_{\Gamma\times X} f(x)d|\mu|(\lambda,x)$$

définira une mesure positive $P\mu$ sur X , et il suit de [3] que $P\mu - |L^*\mu|$ est une mesure positive sur X .

Une mesure $\mu \in M(X)$ est dite maximale par rapport à A si et seulement si $|\varphi\mu|$ est une mesure maximale sur S pour l'ordre de Choquet.

Rappelons qu'une mesure $\mu \in M(X)$ est une mesure maximale par rapport à A si et seulement si $|\mu|$ est une mesure maximale pour l'ordre déterminé par le cône max-stable engendré par les parties réelles des fonctions de A , c' est-à-dire le cône

$$C = \{\mathrm{Re}\, a_1 \vee \ldots \vee \mathrm{Re}\, a_n \mid a_i \in A,\ i = 1, \ldots n\}$$

On voit qu'une mesure maximale par rapport à A est pseudo-portée par la frontière de Choquet [1,I.5.22].

Si Q est un ensemble convexe compact et $f: Q \to \grave{R}$ est une fonction bornée l'enveloppe supérieure $\hat{f}$ de f est définie par

$$\hat{f}(q) = \inf\{a(q) \mid a \geq f\ ,\ a \in A(Q)\}$$

Ici $A(Q)$ désigne l'espace des fonctions réelles continues et affines sur Q .

Démonstration du théorème: Nous appliquerons la méthode de Hustad pour construire la mesure m .

Soit $l_o \in A^*$ et supposons que $\|l_o\| = 1$. Alors $l_o \in K$, et nous pouvons appliquer le théorème de Choquet pour représenter l_o par une mesure-probabiliste maximale μ_o sur K .

Puisque $\mathrm{Supp}(\mu_o) \subseteq \Phi(\Gamma \times X)$, nous pouvons considérer μ_o comme une mesure sur $\Phi(\Gamma \times X)$. Maintenant il suit de [3] que la mesure m_o definie par

$$m_o = L^* \Phi^{-1} \mu_o$$

satisfait aux conditions (i) et (iii), et il reste à prouver que m_o satisfait à la condition (ii).

Il suit de [1,I.4.5] qu'il suffit de montrer que

$$(*) \qquad \int_S (\hat{f}^S - f)\,d|\varphi m_o| = 0 \qquad \forall f \in C_R(S)$$

Ici on peut supposer que f est strictement positive. Donc la fonction $\bar{f}: K \to \grave{R}$ donnée par

$$\bar{f}(l) = \begin{cases} f(p) & \text{si} \quad l = \lambda p \text{ , } (\lambda,p) \in \Gamma \times S \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} ,$$

est bien définie, et possède les propriétés suivantes:

(a) $\bar{f}$ est s.c.s.

(b) $\hat{\bar{f}}^k(\lambda p) = \hat{\bar{f}}^k(p) \qquad \forall (\lambda,p) \in \Gamma \times S$

(c) $\hat{\bar{f}}^k(p) = \hat{f}^s(p) \qquad \forall p \in S.$

<u>Vérification</u>: Puisque f est strictement positive, (a) est évidente.

Soit $(\lambda_o, p_o) \in \Gamma \times S$. Si $\epsilon > 0$ il existe une fonction $a \in A(K)$ telle que

$$\hat{\bar{f}}^k(\lambda_o p_o) + \epsilon \geq a(\lambda_o p_o) \quad , \qquad a \geq \bar{f}$$

Définissons $a_{\lambda_o} \in A(K)$ par

$$a_{\lambda_o}(l) = a(\lambda_o l) \qquad \forall \, l \in K$$

Donc,

$$a_{\lambda_o}(p_o) \leq \hat{\bar{f}}^k(\lambda_o p_o) + \epsilon \quad , \qquad a_{\lambda_o} \geq \bar{f}$$

et par conséquent

$$\hat{\bar{f}}^k(p_o) \leq a_{\lambda_o}(p_o) \leq \hat{\bar{f}}^k(\lambda_o p_o) + \epsilon$$

De plus,

$$\hat{\bar{f}}^k(p_o) \leq \hat{\bar{f}}^k(\lambda_o p_o)$$

En raisonnant comme ci-dessus avec $1/\lambda_o$ au lieu de λ_o nous obtiendrons

$$\hat{\bar{f}}^k(\lambda_o p_o) \leq \hat{\bar{f}}^k(p_o)$$

ce qui achève la démonstration de (b).

Puisque S est une face fermée de K , il suit de [1,I.3.6] que pour tout $p \in S$:

$$\hat{f}^k(p) = \sup\{\mu(\bar{f}) \mid \mu \in M_p^+(K)\}$$

$$= \sup\{\mu(f) \mid \mu \in M_p^+(S)\} = \hat{f}^s(p)$$

Retournons maintenant à la démonstration du théorème, ça veut dire à la démonstration de (*):

En utilisant [1,I.4.5] on aura:

$$0 \leq \int_S (\hat{f}^s - f)d|\varphi m_o| = \int_S (\hat{f}^s - f)d\,\varphi|m_o|$$

$$= \int_X (\hat{f}^s - f)\circ\varphi d\,|m_o| = \int_X (\hat{f}^s - f)\circ\varphi d\,|L^*\Phi^{-1}\mu_o|$$

$$\leq \int_X (\hat{f}^s - f)\circ\varphi d\,P(\Phi^{-1}\mu_o) = \int_{\Gamma\times X} [(\hat{f}^s - f)\circ\varphi](x)\,d\,\Phi^{-1}\mu_o(\lambda,x)$$

$$= \int_{\Gamma\times X} [\hat{f}^k(\varphi(x)) - \bar{f}(\varphi(x))]\,d(\Phi^{-1}\mu_o)(\lambda,x)$$

$$= \int_{\Phi(\Gamma\times X)} (\hat{f}^k - \bar{f})d\mu_o = \int_K (\hat{f}^k - \bar{f})d\mu_o = 0$$

Le théorème est démontré.

Bibliographie

[1] E.M. Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals, Ergebnisse der Mathematik, 57, Springer Verlag, 1971.

[2] B. Hirsberg, M-ideals in complex function spaces and algebras, (à paraître).

[3] O. Hustad, A normpreserving complex Choquet theorem, Math. Scand. 29, 1971.

University of Oslo,
Oslo, Norway.