Symbolregner i 3MX

En analyse av en 3MX-klasses bruk av symbolregner, med vekt på logaritmefunksjoner

Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk

av

Dag-Erik Møller

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Universitetet i Oslo

Mai 2006

Forord

Jeg begynte å arbeide som matematikklærer i videregående skole i Oslo i 1993. Jeg var da adjunkt fra Universitetet i Oslo med matematikk, musikk, livssyn og etikk og praktisk pedagogikk. Senere studerte jeg religionshistorie og mer matematikk ved siden av lærerjobben, og i 2003 begynte jeg å arbeide som forlagsredaktør for matematikklæremidler til videregående skole.

Da jeg begynte som lærer i 1993, brukte enkelte av elevene mine grafisk lommeregner, selv om dette ikke var tillatt hjelpemiddel til eksamen. Året etter kom Reform-94, som medførte at det ble obligatorisk å bruke grafisk lommeregner i matematikkursene på de allmennfaglige studieretningene. Jeg opplevde altså overgangen fra "forbud" til påbud, og brukte mye tid på å sette meg inn i denne nye teknologien.

I starten var bruken av grafisk lommeregner stort sett begrenset til bruk av verditabeller, grafopptegninger og grafavlesninger. Jeg opplevde ikke at konsekvensene for innlæring og oppgavetyper var dramatiske. Det ble noe mindre graftegning på papir og en viss dreining fra analytiske til numeriske løsninger i funksjonslære og algebra. Nye lommeregnermodeller utvidet bruksområdet noe. For eksempel ble lommeregneren viktig innenfor regresjon og statistikk og sannsynlighetsregning.

Selv med denne bakgrunnen fikk jeg en nærmest sjokkartet opplevelse av funksjonaliteten til symbolbehandlende verktøy på slutten av 1990-tallet, i form av deltakelse på et kurs der lommeregneren TI-92 og dataprogrammene Mathematica og Maple ble demonstrert. Jeg begynte umiddelbart å interessere meg for hvilke konsekvenser bruk av slike kraftige verktøy kunne få for læring og undervisning i matematikk. Slik jeg så det, sto vi her overfor hjelpemidler som burde få oss til å reise grunnleggende spørsmål om innhold og arbeidsmåter i matematikkfaget.

Jeg ønsket å ta et matematikkrelatert hovedfag knyttet opp mot skolen, og valgte i 2000 å begynne på realfagdidaktikk/matematikkdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. I matematikkdidaktikk spør man *hva* man skal lære i matematikk, *hvordan* man skal lære det og *hvorfor* man skal lære det. Bruk av symbolbehandlende verktøy kan potensielt påvirke svarene på alle disse tre spørsmålene, og jeg bestemte meg for å ha slik bruk som emne for hovedoppgaven.

Lærererfaringene har altså direkte påvirket valg av emne. Jeg ønsket å skrive en skolenær hovedoppgave, og bestemte meg for å gjennomføre et forsøk med bruk av symbolbehandlende lommeregner i egen klasse. Jeg samlet inn data i 3MX-klassen jeg hadde i skoleåret 2000/2001.

Takk til veilederen min, Gunnar Gjone, for god oppfølging og støtte gjennom en lang prosess. Takk også til Kjell Skajaa/Casinus for utlån av lommeregnere.

Det har tatt lang tid å fullføre, men problemstillingen oppgaven reiser, er likevel aktuell: I det arbeidet avsluttes, er det mye som tyder på at symbolbehandlende verktøy er på vei inn i videregående skole.

Oslo, mai 2006
Dag-Erik Møller

Innhold

1. Innledning

1.1 Problemstilling

En *symbolregner* er en lommeregner som i tillegg til numeriske og grafiske funksjoner (operasjoner) også har symbolbehandlende funksjoner. Disse tilleggsfunksjonene skiller en symbolregner fra en ordinær grafisk lommeregner.

Symbolregnere har, i motsetning til grafiske lommeregnere, ikke vært tillatt hjelpemiddel ved eksamen i Norge. Dermed har de normalt heller ikke vært brukt i innlæringssituasjoner og ved lokale prøver.

De symbolbehandlende funksjonene utfordrer mange grunnleggende manuelle ferdigheter innen for eksempel tallregning, bokstavregning, likningsløsning, derivasjon og integrasjon. En symbolregner kan relativt enkelt gi svaret på de fleste oppgaver innen disse områdene, og reiser dermed spørsmålet om slik teknologi skal brukes, og i så fall hvordan?

Med denne hovedoppgaven forsøker jeg å finne ut noe om elevenes bruk av og holdninger til denne teknologien. Oppgavens omfang setter begrensninger på emneutvalget, slik at når det gjelder selve det matematikkfaglige, har jeg valgt å begrense meg til *logaritmefunksjoner*.

Problemstilling:

> *Hvordan bruker elevene symbolregner i emnet logaritmefunksjoner, og hvordan viser de matematisk kompetanse? Hva slags holdninger har de til bruken?*

Spørsmålene i problemstillingen besvares innenfor rammen av ordinær, norsk videregående skole, ved at data er samlet fra en 3MX-klasse skoleåret 2000/2001. Jeg var forsøksklassens lærer.

1.2 CAS: Computer Algebra System

De symbolbehandlende funksjonene kalles internasjonalt for *CAS*-funksjoner. CAS står for *Computer Algebra System*. På norsk kunne et CAS for eksempel kalles "symbolbehandlende dataprogram", "system for automatisk algebraregning", "algebraprogram" eller liknende. I mangel av et anerkjent norsk begrep, brukes "CAS" i denne oppgaven.

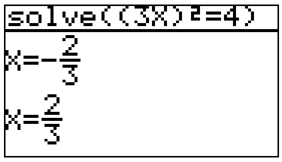
Her følger seks eksempler på CAS-funksjoner og bruk av dem. Ingen av disse resultatene kan fås på en vanlig grafisk lommeregner:

Trekke sammen uttrykk

$\frac{(2a)^3}{a} + a^2$ blir $9a^2$

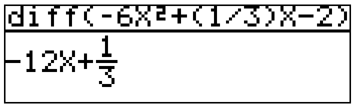
Løse likninger eksakt, med alle løsninger

$(3x)^2 = 4$ har løsningene $x = -\frac{2}{3}$ og $x = \frac{2}{3}$



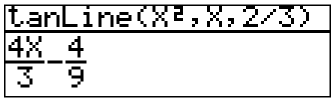
Finne deriverte funksjoner

$f(x) = -6x^2 + \frac{1}{3}x - 2$ gir $f'(x) = -12x + \frac{1}{3}$



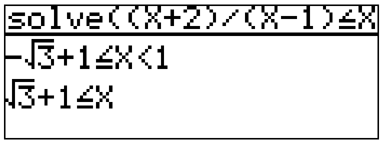
Finne tangentlikninger

Likningen for tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet $\left(\frac{2}{3}\ ,\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$, er $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$



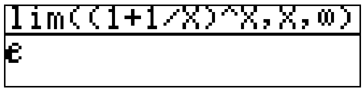
Løse ulikheter

$\frac{x+2}{x-1} \le x$ har løsningsmengden $\left[1-\sqrt{3}\ ,1\right\rangle \cup \left[1+\sqrt{3}\ ,\rightarrow\right\rangle$



Finne grenseverdier

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$



Vedlegg 11.1 inneholder en lengre liste med eksempler på bruk av CAS-funksjoner som er relevante i videregående skole.

Den første utviklingen av CAS-teknologien begynte tidlig på 1960-tallet. Kommersielle CAS-programmer for datamaskin har eksistert siden 1980-tallet, med *Mathematica* (lansert i 1988) som det mest kjente. Etter *Mathematica* har flere slike programmer kommet til, for eksempel *Maple*, *Derive*, *MathCad* og *TI Interactive.*

CAS-funksjoner ble i løpet av 1990-årene også lagt inn i grafiske lommeregnere, og slike maskiner kaller vi altså symbolregnere. Eksempler er Texas Instruments *TI-92* og *TI-89*, Hewlett Packard *HP49G* og Casio *Algebra FX 2.0* og *ClassPad 300*.

I streng forstand er et CAS et verktøy som bare kan utføre symbolbehandlende operasjoner. Men alle kommersielle produkter som inneholder CAS-funksjoner, har også standard numerisk og grafisk funksjonalitet. Det er derfor blitt konvensjon å kalle verktøy med numerisk, grafisk og symbolbehandlende funksjonalitet for *CAS-verktøy*. En symbolregner er altså et håndholdt CAS-verktøy. I denne oppgaven fokuseres det på elevenes bruk av CAS-funksjoner, og ikke symbolregnerens øvrige funksjonalitet.

1.3 Oppgavens struktur

I kapittel 2 presenteres først noen teoretiske perspektiver som er relevante for å besvare problemstillingen, og deretter utvalgte resultater fra CAS-forskningen.

Kapittel 3 redegjør for forskningsmetoden.

Empirien presenteres og analyseres i kapitlene 4–7:

- Kapittel 4 omhandler startfasen i forsøket.
- Kapittel 5 utgjør tyngdepunktet i oppgaven og omhandler forsøksklassens arbeid med logaritmefunksjoner.
- Kapittel 6 tar for seg elevenes holdninger, slik de kommer til uttrykk i svar på spørreskjemaer.
- Kapittel 7 omhandler forsøksklassens spesialtilpassede eksamen.

Kapittel 8 gir en konkluderende oppsummering av forsøket.

I det avsluttende kapittel 9 gis noen generelle betraktninger omkring bruk av CAS-verktøy i skolen.

Kapittel 10 og 11 er litteraturliste og vedlegg.

2. Teoretiske perspektiver og tidligere forskning

I verdensmålestokk kan vi ikke si at CAS-teknologi har slått gjennom som hjelpemiddel i matematikkopplæringen, verken på det nivået som tilsvarer norsk videregående skole eller på andre nivåer. Men siden 1980-tallet har det har vært gjennomført en del studier av mindre klasseromsforsøk og også enkelte større nasjonale studier. CAS-forskningen domineres av arbeid produsert i USA, Frankrike, Australia, Storbritannia og Østerrike.

Et utvalg av resultater fra CAS-forskningen presenteres i dette kapitlet, etter først å ha presentert teoretiske perspektiver innen matematikkdidaktikk som jeg vurderer som relevant bakgrunn for analysene i forsøksklassen.

2.1 Matematisk kompetanse

I Niss og Højgaard (2002) presenteres et forslag til kompetansebeskrivelse av matematisk faglighet. En av hensiktene med en slik beskrivelse er å utfordre det tradisjonelle synet at matematisk faglighet er identisk med "pensumbeherskelse", et syn de mener innebærer en reduksjon av forestillingen om hva faglighet er. Matematisk kompetanse er altså noe mer enn konkret viten og ferdigheter innen matematiske emner. Det er også å forstå, utøve, anvende og ta stilling til.

Niss og Højgaard deler opp matematisk kompetanse i åtte deler. Det understrekes at det er flytende overganger mellom kompetansene, men at denne åttedelingen like fullt er meningsfull og nyttig. Kompetansene er matematikkspesifikke, men uavhengige av konkret matematisk stoff eller trinn i utdanningssystemet. Denne inndelingen er også utgangspunkt for kompetanse-beskrivelsene i PISA-undersøkelsen fra 2003 (OECD 2003) og for de nasjonale prøvene i Norge (Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen 2004).

De fire første kompetansene kategoriseres under overskriften *Å kunne spørre og svare:*

1 *Tankegangskompetanse.* Å vite hva som er matematiske spørsmål og svar og å kunne vurdere slike. Tankegangskompetanse angår altså selve bevisstheten om hva som karakteriserer matematisk tankegang, ikke selve de konkrete spørsmålene og svarene. I tankegangskompetanse ligger også begrepsforståelse og begrepsanvendelse og det å kunne skjelne mellom definisjoner, setninger, bevis og enkelttilfelleutsagn.
2 *Problemløsningskompetanse.* Å kunne oppstille og løse problemer. Et problem er en oppgave som krever en matematisk undersøkelse, og som dermed ikke kan angripes med rutineferdigheter. Et problem er et personrelativt begrep, ved at det som er et problem for én, ikke behøver å være det for en annen.
3 *Modelleringskompetanse.* Å kunne tolke eksisterende modeller og utføre aktiv modellbygging. Strukturere, matematisere, avmatematisere og behandle. I tillegg å kunne vurdere en modells formål og relevans og å kunne kommunisere om modellen. Anvendelser av matematikk ligger innenfor modelleringskompetanse.
4 *Resonnementskompetanse.* Å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement eller bevis og selv kunne utføre slike resonnementer og bevis. I dette ligger for eksempel å vite hva et moteksempel er. Resonnementskompetanse kan vi kalle den "juridiske" matematikkompetansen, ved at resonnementer ved hjelp av logikk bedømmes som riktige eller gale.

De fire siste kompetansene kategoriseres under overskriften *Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper:*

5 *Representasjonskompetanse.* Å forstå forskjellige slags representasjoner av matematiske objekter og å kunne oversette mellom forskjellige representasjoner. Et matematisk objekt kan for eksempel representeres algebraisk, geometrisk, tabellmessig eller ved en gjenstand. Representasjonskompetanse innebærer også å forstå forbindelsene mellom de forskjellige representasjonsformene og å velge passende representasjon.
6 *Symbol- og formalismekompetanse.* Å kunne bruke og avkode matematisk symbolspråk og kunne oversette fram og tilbake mellom symbolspråk og naturlig språk. I tillegg beherske matematisk formalisme som ikke nødvendigvis er på symbolsk form, jf. euklidsk "verbal" geometri. Symbol- og formalismekompetanse innebærer å ha en syntaktisk innsikt i reglene for symbolbehandling, som for eksempel å beherske reglene for regnerekkefølge.
7 *Kommunikasjonskompetanse.* Å kunne tolke andres matematiske ytringer og selv å kunne uttrykke seg matematisk for forskjellige kategorier mottakere. I kommunikasjonskompetanse ligger også bevisstheten om å ta hensyn til de kommuniserendes forutsetninger, og dermed kunne kommunisere på forskjellige nivåer.
8 *Hjelpemiddelkompetanse.* Å ha kjennskap til matematiske hjelpemidler, kunne bruke dem og vite om begrensningene. Det kan for eksempel dreie seg om lommeregner, datamaskin, tabeller, regnestav, passer og linjal.

Alle kompetansene har både en *produktiv* side, med vekt på hva man selv kan gjennomføre, og en *undersøkende* side, med vekt på forståelse og bedømming av allerede eksisterende prosesser/produkter. Intuisjon og kreativitet er ikke plassert som egne kompetanser, men kan plasseres i mange av de åtte kompetansene.

Man kan snakke om tre "dimensjoner" i besittelsen av hver av de åtte kompetansene:
1 Kompetansens dekningsgrad. I hvor høy grad er de aspekter som karakteriserer kompetansen dekket?
2 Kompetansens aksjonsradius. I hvor mange sammenhenger kan man aktivere kompetansen?
3 Kompetansens tekniske nivå. På hvor avansert nivå teknisk og begrepsmessig kan kompetansen aktiveres?

Men innenfor disse tre dimensjonene er det ikke meningsfullt å rangere på tvers av emner. Det gir for eksempel ikke mening å måle dekningsgrad i sannsynlighetsregning opp mot dekningsgrad i algebra. Dimensjonene er altså ikke-kvantifiserbare størrelser.

I tillegg til de åtte matematikkfaglige kompetansene beskriver Niss og Højgaard tre typer "overblikk" angående matematikk som samlet, samfunnsmessig fagområde:
1 Matematikkens anvendelser i andre fag- og praksisområder. Altså matematiske modeller i bred samfunnsmessig forstand.
2 Matematikkens historisk-kulturelle utvikling. I dette ligger ikke bare det snevrere perspektivet "matematikkens historie", men matematikkens historiske plass i kulturen, i stadig vekselvirkning med resten av samfunnet.
3 Matematikkens karakter som fag. Hva som karakteriserer matematikken som fag. Likheter og ulikheter med andre fagområder.

Kompetansene og "overblikkene" kan aldri besittes fullt ut. Det fins ingen grense for kompleksitet innenfor hver av de åtte kompetansetypene. Men anvendt på konkrete matematiske emner, kan kompetansene deles opp i mindre beherskelsesnivåer, for eksempel ved utarbeiding av læreplanmål. Kompetansene kan altså brukes normativt, for eksempel ved oppgaveproduksjon og læreplanutarbeiding. De kan også brukes deskriptivt, for å beskrive og vurdere en gitt matematikkundervisning og matematikklæring. I tillegg kan kompetansene brukes metakognitivt ved at læreren bruker dem i planlegging og gjennomføring av undervisning, ved kollegasamarbeid og ved samtaler med elevene om hva som faktisk foregår i klasserommet.

Ved læreplanutarbeiding og andre beslutninger om stoffutvalg, kan det faglige stoffet ikke direkte utledes av kompetansene, men man kan motsatt "måle" et emne ut fra i hvilken grad det kan trekke inn de forskjellige kompetansene. I tillegg kan konkrete klasseromsaktiviteter vurderes opp mot kompetansene, og vurderingsmåter kan tilpasses kompetansene.

I løsningen av én konkret matematikkoppgave vil man som regel måtte ta i bruk mange av kompetansene, noe som vanskeliggjør direkte vurdering av nøyaktig én matematisk kompetanse. I PISA-undersøkelsen har man derfor beskrevet tre *kompetanseklasser* (clusters) (PISA 2003, Olsen 2004). Hver enkelt oppgave kan da plasseres innen én av disse kompetanseklassene, og helhetlig matematisk kompetanse søkes vurdert gjennom å sørge for at et oppgavesett inneholder oppgaver fra alle de tre klassene. Hver kompetanseklasse har igjen beskrivelser på kompetansenivå, slik at alle de åtte kompetansene Niss og Højgaard beskriver, samlet sett blir vurdert i et oppgavesett.

De tre kompetanseklassene er:
Kompetanseklasse 1: Reproduksjon. Bruk av faktakunnskaper og enkeltstående standardprosedyrer.
Kompetanseklasse 2: Sammenheng. Standard modellering og problemløsning. Bruk av flere standardprosedyrer i samme oppgave.
Kompetanseklasse 3: Refleksjon. Kompleks modellering og problemløsning. Bevis. Original angrepsvinkel. Bruk av flere komplekse prosedyrer i samme oppgave.

Normalt sett (men ikke nødvendigvis) vil en oppgave fra en høyere kompetanseklasse være vanskeligere enn en oppgave fra en lavere klasse.

De tre kompetanseklassene gir en god mulighet for deskriptivt å kategorisere oppgavetyper, og vil derfor bli brukt i denne oppgaven. For å besvare problemstillingens spørsmål om hvordan elevene i forsøksklassen viser matematisk kompetanse ved bruk av symbolregner, vil jeg analysere oppgavene og elevenes besvarelser i forhold til de tre kompetanseklassene.

De tre "overblikkene" angående matematikk som samlet, samfunnsmessig fagområde, og matematikkompetansenes tre "dimensjoner" (dekningsgrad, aksjonsradius og tekniske nivå), vil bare berøres i mindre grad. Det viktigste analyseverktøyet vil altså være de tre kompetanseklassene.

For øvrig: Analyse av elevenes *hjelpemiddelkompetanse* knyttet til bruken av CAS-verktøyet er jo et hovedpoeng, og vil gjennomsyre hele oppgaven.

2.2 Matematiske prosesser og objekter

Man vil ofte kunne beskrive konkret matematikk fra to forskjellige synsvinkler: en prosessuell og en konseptuell. For eksempel kan "2 + 3" betraktes både som en addisjonsprosess (vi starter med 2 og legger til 3) og som et tall (tallet 5). Tilsvarende kan "$a : b$" betraktes som en prosess (divisjonen "a delt på b") eller som objekt (det rasjonale tallet a / b).

Gray og Tall (1994) mener at den mentale overgangen fra prosess til objekt er essensiell for elevens progresjon. Sfard (1991) skriver at det som er prosesser på ett nivå, kan bli objekter på høyere nivå. Disse objektene kan da brukes i nye prosesser, som igjen kan gi opphav til nye objekter. Matematikk er "komprimerbar" i den forstand at når noe først er forstått, så tar det "liten plass" mentalt sett, og kan ofte lett hentes opp igjen for videre læring.

Gray og Tall skriver at når eleven har god forståelse for objektene/begrepene, så innebærer dette mulighet for fleksibel bruk også prosessuelt. For eksempel kan en elev med et godt utviklet tall-begrep betrakte objektet 5 både som 2 + 3, som 6 – 1, som 10 / 2 osv. Siden denne forståelsen både innbefatter et prosessaspekt og et begrepsaspekt, velger de å bruke ordet *procept* ("process + concept") om denne sammensetningen.

En "procept"-forståelse hos en elev gjør den videre matematikklæringen radikalt lettere enn om eleven bare hadde arbeidet prosessuelt. En del elever automatiserer prosedyrer uten at objektfor-ståelsen er på plass, og for disse er det mye vanskeligere å komme videre. De bruker lang tid og er avhengig av mye bruk av hukommelsen. Det er snakk om en kvalitativ mental forskjell fra disse elevene og til de som ikke har problem med å se dobbeltheten prosess/objekt, og som derfor kan arbeide mye mer fleksibelt og dermed raskere. Disse siste kan lett bevege seg fram og tilbake mellom prosess- og objektforståelse når de arbeider med et matematisk problem. Tall (1996) skriver at procepts gjør at elevene ikke bare kan *utføre*, de kan også *tenke* matematisk, og da gir abstraksjonen enkelhet.

Gray og Tall (1994) refererer undersøkelser som viser at bruk av IKT for å utføre prosesser kan styrke begrepsinnlæringen. Når et program kan utføre en del prosesser, kan eleven fokusere på andre aspekter. Gjone (2004) skriver at med CAS-bruk blir det viktig å arbeide med utviklingen fra prosedyre til strukturelt objekt, slik at elevene kan veksle mellom når det er best med en strukturell synsvinkel og når det er best med en prosedyresynsvinkel. CAS lager ofte overgangen fra prosess til objekt direkte, uten at elevene må arbeide konseptuelt.

Man kan tenke seg mulige positive konsekvenser av CAS-bruk i forhold til prosess/objekt-diskusjonen. Elevene kan komme seg raskere til objektet og dermed ikke bli hengende igjen i kompliserte prosedyrer. Dette kan åpne for ny forståelse. Drijvers (2003) skriver (med bakgrunn i Monaghan og Heid) at matematiske uttrykk har en tendens til å anta en mer strukturell karakter når elevene bruker CAS. Prosessaspektet ved uttrykket er da fjernere enn ved penn-og-papir-behandling. CAS har derfor potensiale for å lette overgangen fra prosess til objekt.

Det er også mulig at CAS-bruk i startfaser, altså før innlæring av manuelle prosedyrer, kan hjelpe elevene med begrepsforståelsen, selv om dette er motsatt av vanlig innlæringsrekkefølge (Heid 2003). Men motsatt kan man tenke seg negative konsekvenser, ved at CAS-bruk "forstyrrer" den normale utviklingen fra prosess til objekt, og dermed at elevene lett mister forståelsen for objektets bakenforliggende prosesser.

Jeg vil undersøke forsøkselevenes bruk av symbolregner med bakgrunn i prosess/objekt-perspektivet presentert her.

2.3 Hvit boks/svart boks-prinsippet

I den ofte siterte artikkelen "Should Students Learn Integration Rules?" (1990) legger Bruno Buchberger fram et forslag til hvordan man kan integrere Computer Algebra Systems i under-visningen. Han skriver at det er vanskelig å se noen grense for hva slags symbolmanipulasjon CAS-teknologien kan klare å utføre på sikt. Til og med en del bevisførsel kan takles av CAS. Buchberger kaller slike områder i matematikken for *trivialiserte* områder. Som eksempler nevner han aritmetikk med naturlige tall, geometrisk bevisførsel og funksjonsintegrering (som artikkel-tittelen viser til). Disse områdene regner han som trivialiserte, fordi det fins programmerbare algoritmer som løser alle problemer innenfor områdene. Spørsmålet er da: Skal elever lære integrasjonsregler? Og videre: Skal de lære grunnleggende aritmetikk og algebra, skal de lære geometrisk bevisførsel, skal de lære likningsløsning, skal de lære derivasjonsregler, …? Med andre ord: Skal elever lære trivialiserte områder av matematikken?

Buchberger avviser de ytterliggående svarene på dette spørsmålet. Han avviser svaret "nei, elever ikke skal lære trivialiserte områder, fordi denne matematikklæringen er overflødiggjort av teknologien". Dette fordi arbeidet med disse emnene gir elevene generell matematisk innsikt og problemløsningskompetanse, som ikke må mistes. Han avviser også svaret "ja, elevene skal lære trivialiserte områder, og de skal lære det uten bruk av CAS". Han mener at disse områdene skal læres, men at man med CAS-bruk drastisk kan øke antall emner elevene kan behandle på en gitt tid. De kan dermed nå avanserte emner tidligere enn uten CAS-bruk.

Buchberger bruker metaforen "svart boks" om det å bruke et matematisk IKT-verktøy som et rent "input-output"-verktøy, der det ikke er et krav å reflektere over de forskjellige trinnene i overgangen fra input til output. Det er da "svarte deler" i resonnementet, altså deler som er skjult. Motsatt brukes "hvit boks" om resonnementer uten slike skjulte deler, der alle trinn på veien løses manuelt.

Han mener at når et trivialisert emne er nytt for elevene, må CAS normalt ikke brukes. Elevene skal da arbeide manuelt, med algoritmene, eksemplene og bevisene som "hvite bokser". Når emnet er grundig studert manuelt, og eleven ikke lærer noe nytt konseptuelt eller prosedyremessig ved å fortsette å arbeide manuelt med emnet, så bør CAS-bruk oppmuntres. Da kan CAS brukes som "svart boks". Altså kan oppgaver fra tidligere emner behandles ved CAS, mens det nye skal innlæres uten CAS-bruk. Han mener at oppgaver skal løses for hånd til de er blitt rutine, men ikke lenger. Innlæring av ethvert emne med programmerbare algoritmer innen matematikken kan dermed sies å ha en "hvit boks"-fase og en "svart boks"-fase. Ved hvilket tidspunkt denne overgangen mellom fasene skal foretas, vil være definert av det matematiske innholdet, og overgangstidspunktet vil derfor variere fra elev til elev.

Buchberger mener at dette *"hvit boks"/"svart boks"-prinsippet* vil åpne for mer problemløsning og mer interessante oppgaver. For eksempel kan "svart boks"-bruk i integralregning åpne for mer interessante differensiallikningsoppgaver. Også med "svart boks"-bruk skal elevene *i prinsippet* kunne løse de algoritmiske oppgavene manuelt, men *i praksis* bør man på et bestemt tidspunkt droppe det, for å lære mer om det ikke-algoritmiske som oppstilling av oppgavene og tolkning av resultater.

I denne oppgaven vil Buchbergers prinsipp diskuteres i lys av elevenes CAS-bruk.

2.4 Teknologi som herre, tjener, partner eller kroppsdel

Goos mfl. (2003) beskriver et forsøk med australske matematikklasser der elevers og læreres interaksjon med datateknologi i vid forstand ble studert. I tillegg til grafisk lommeregner ble det brukt PC-er med graftegner og regneark. Klassene hadde til enhver tid mulighet for projisering av skjermbilder på lerret. Forsøket viser at teknologi kan forsterke samarbeidslæring, både i smågrupper og i hel klasse, ved at skjermobjekter på lommeregner eller datamaskin kan fungere som et felles utgangspunkt for diskusjon. Teknologi legger til rette for multiple representasjoner, dvs. at det samme matematiske innholdet kan framstilles på forskjellige måter, og teknologien kan dermed kvalitativt endre den matematiske tenkningen. Goos skriver at teknologiske innretninger kan endre interaksjonen mellom lærere og elever, og innretningene er dermed ikke nøytrale. Lærere oppfordres til å integrere teknologien i praksisen sin, ikke bare beherske den rent teknisk. Felles utforskning i klasserommet bør være et mål.

I dette forsøket ble ikke Computer Algebra Systems brukt. Grunnen til at studien likevel behandles her, er at forskerne setter fram fire interessante metaforer for elevers og læreres interaksjon med teknologien: Teknologi som "herre", "tjener", "partner" eller "kroppsdel". Disse metaforene er uavhengig av type IKT-verktøy, og vil derfor bli brukt i denne oppgaven. Her følger en beskrivelse av de fire metaforene:

For elevene innebærer *teknologi som herre* at teknologibruken er begrenset til et snevert område med operasjoner. Ensidig bruk av disse "knappeprosedyrene" kan medføre manglende begrepsforståelse. Elevene er underlegne teknologien, fordi de ikke har evne til å vurdere svarene som gis. De kan stoppe helt opp i en aktivitet fordi teknologien ikke mestres, og de ser heller ikke begrensningene i teknologien. For lærerne innebærer teknologi som herre at de har veldig liten ekspertise i bruken. De er motvillige og føler seg tvunget til å ta teknologien i bruk. Kanskje må de lene seg på "ekspertelever".

For elevene innebærer *teknologi som tjener* at teknologien brukes som rask erstatter for penn og papir, som en slags "intelligent" og effektiv hjelper. Verktøyene sikrer riktige svar, men det er ingen kreativitet knyttet til teknologibruken. For læreren innebærer teknologi som tjener at teknologien bare støtter de fra før av foretrukne undervisningsmetodene, og bidrar ikke med noe kvalitativt nytt.

For elever og lærere innebærer *teknologi som partner* at teknologibruken medfører nye angrepsmåter, noe som kan styrke elevenes læring. Teknologien brukes kreativt, og den kan bidra til samarbeidslæring, for eksempel ved at elever viser sine resultater på lerretet og andre kommenterer og kommer med forslag. Elever som står fast, kan få støtte i medelevers skjermresultater.

For elever og lærere innebærer *teknologi som kroppsdel* (eller "forlengelse av en selv") at teknologien er en helt naturlig og selvfølgelig del av ens matematiske repertoar. Dette er det mest sofistikerte nivået. Teknologi av forskjellig slag kan komme inn når det er behov for det i den matematiske argumentasjonen. Teknologien fungerer "ekspanderende", som en slags ny kroppsdel som gjør en bedre i stand til å utføre matematiske aktiviteter.

2.5 Noen funn fra tidligere CAS-studier

Zbiek (2003) foretar en gjennomgang av CAS-forskningen fram til 2003. Hun skriver at denne forskningen er minimal og fragmentert. Det er få store empiriske studier med sikre funn. Det er vanlig at forsøk der CAS brukes, innebærer endringer av læreplanmål og vurderingsformer, og at resultatene derfor ikke kan brukes direkte for tilsvarende elevgrupper som ikke bruker CAS. Det er også store forskjeller i teoretisk kontekst forsøkene i mellom. En del forsøk har klare empiriske mangler, for eksempel ved at de ikke skiller klart nok mellom det grafiske og det symbolbehandlende. Likevel har forskningen gitt oss en del kunnskap og hypoteser.

Zbieks gjennomgang i stikkordsform:

Ingen studier viser signifikante endringer i elevenes holdninger til matematikk som resultat av CAS-bruk. Annen forskning viser at for elevene er det *læreren* som er den viktigste påvirkningsfaktoren når det gjelder holdninger, ikke hjelpemidlene.

Ingen studier viser signifikante endringer i elevenes problemløsningskompetanse som resultat av CAS-bruk. Igjen er det læreren som påvirker mest.

Elever har potensiale til å bli fleksible CAS-brukere. Hvis man avviser bruk av CAS-verktøy fordi man antar at de er for vanskelige å bruke, har man altså ikke støtte i forskningen.

Når manuelle ferdigheter vurderes på prøver der elevene ikke har CAS-tilgang, er det ingen studier som viser at elever med CAS-tilgang ellers i opplæringen skårer lavere enn elever som ikke har brukt CAS. Tvert i mot er det forskning som tyder på at elever kan lære manuelle ferdigheter raskere hvis læreren først har introdusert algebraiske ideer ved hjelp av CAS. Dette innebærer at innlæringen av de manuelle ferdighetene kan forsinkes noe på grunn av konseptuelle introduksjoner, men at ferdighetene så i etterkant læres bedre.

Studier tyder på at CAS kan bedre elevenes resultater på modelleringsoppgaver og på oppgaver som krever begrepsforståelse.

Det er en liten tendens til at jenter vil favoriseres ved CAS-bruk. (Tilsvarende er vist for grafiske lommeregnere.)

Det er indikasjoner på at elever som er svake i manuelle ferdigheter, kan oppnå bedre resultater i kommende kurs hvis de bruker CAS.

Elevenes matematiske forståelse blir påvirket av at de bruker CAS-verktøy, og er også avhengig av hvilket CAS-verktøy de bruker. Slik forståelse kan være noe annerledes enn lærernes forståelse. Forståelse og verktøy er altså knyttet sammen.

CAS kan legge til rette for multiple representasjoner, dvs. at det samme matematiske innholdet kan framstilles og angripes på forskjellige måter.

Vi bør kreve at elevene skriver ned CAS-kommandoer når de gjør oppgaver. Krav om slik føring øker læringsutbyttet.

Mange lærere har en affinitet til enten grafiske eller symbolmanipulerende undervisnings-metoder. Slikt lærerfokus reflekteres i elevenes resultater.

Lærernes tids- og ressurssituasjon for arbeid med teknologien, matematikken og pedagogikken er essensielt for elevenes læringsutbytte.

2.6 Vanskeligheter som kan oppstå som følge av CAS-bruk

Ut fra det teoretiske rammeverket "realistisk matematikkundervisning" skisserer Drijvers (1999) tre mulige typer positive og tre mulige typer negative konsekvenser av CAS-bruk. Konkrete negative konsekvenser undersøkes så gjennom et klasseromsforsøk.

De tre mulige typene positive konsekvenser han skisserer er *økt horisontal matematisering*, dvs. bedre anledning for å arbeide med realistiske matematiske modeller, *økt vertikal matematisering*, dvs. bedre anledning for matematisk dybdeforståelse gjennom utforskning, og *fleksibel integrering av forskjellige representasjoner*, dvs. bedre anledning til å veksle mellom represen-tasjoner som grafer, tabeller og formler.

De tre mulige typene negative konsekvenser han skisserer er *redusert motivasjon*, ved at elevene opplever sitt kraftige CAS som at "alt ligger der" og at utforskning dermed er unyttig, *uventede resultater*, ved at et CAS er en "svart boks" som ikke forklarer metodene resultatene oppnås ved, og *syntaktiske problemer*, ved at et CAS ofte ikke følger vanlig matematisk notasjon og har strenge krav til inntasting.

I klasseromsforsøket Drijvers refererer til, ble følgende fem konkrete vanskeligheter/hindringer ved CAS-bruk avdekket:

1. Forskjellen på hva eleven vurderer som et "enkelt" uttrykk og den formen CAS oppgir det samme uttrykket på. CAS kan i blant gi "forenklede" svar på en form som eleven ikke opplever som det enkleste. Elevene kan bli nødt til å vurdere om to "kandidater" til "forenklet uttrykk" er ekvivalente, noe som krever matematisk innsikt.

2. Forskjellen på avrundede og eksakte svar. Et CAS kan gi svar både avrundet og eksakt, og det kan være svarinnstillinger knyttet til dette, som "alltid eksakt", "alltid avrundet" eller "automatisk". Eleven kan misforstå CAS-svar på grunn av manglende bevissthet om dette.

3. Begrensninger ved CAS-verktøyet. For eksempel at løsbare likninger eller ulikheter ikke blir løst. Elevene mangler ofte de algebraiske strategiene som skal til for å "hjelpe" maskinen til å overvinne begrensningene.
4. Manglende evne til å avgjøre når og hvordan CAS-bruk er nyttig. Elevene klarer ikke alltid å nyttiggjøre seg mulighetene CAS gir. Og motsatt kan de forvente for mye av verktøyet.
5. Problemer med CAS-verktøys fleksible bruk av variable og parametre. "For maskinen er alle bokstaver like". Det krever algebraisk innsikt av elevene å beherske dette.

Drijvers skriver at å overkomme disse fem hindringene krever både matematisk og teknologisk innsikt, og læreren bør gjennom sin undervisning hjelpe elevene med å oppnå dette. Han presiserer også at denne listen på fem ikke må betraktes som uttømmende, andre hindringer kan også forekomme. Det er viktig at når elever arbeider med CAS, må de føle at de arbeider med et *hjelpemiddel*, ikke et "orakel".

Data fra forsøksklassen vil analyseres med bakgrunn i disse vanskelighetene.

2.7 RIPA - et forslag til føringsregler ved CAS-bruk

Basert på erfaringer med CAS-bruk i Australia, legger Ball og Stacey (2003) fram et forslag til begrunnede, praktiske regler for hvordan elever bør besvare oppgaver skriftlig når de bruker CAS. Et av målene er å prøve å motvirke at elevene utvikler holdningen om at for en del oppgavetyper behøver man knapt å skrive noe som helst, siden CAS-verktøyet "løser alt". Ball og Stacey skriver at det man vil oppnå med en skriftlig besvarelse, er dels å utvide kapasiteten til korttidsminnet, dvs. selvhjelp for å holde tråden i resonnementet, og dels å kommunisere hvordan oppgaven er løst. Kommunikasjonsaspektet er det ofte ikke tatt tilfredsstillende hensyn til.

Mye av det som tradisjonelt føres ved en manuell løsning er ikke relevant å ta med når elevene bruker CAS. Og hva skal de skrive da? Ball og Stacey håper at denne ustabiliteten som CAS-introduksjon skaper når det gjelder føring, kan gi grobunn for nye normer, der kommunikasjon er det sentrale. De håper at CAS-bruk kan vende fokuset bort fra de elevenes vanlige "innfor-ståtte" detaljsvar, og over til svar som gir oversikt og vektlegger resonnering. Dette kan også styrke den matematiske tenkningen hos elevene. Ball og Stacey kaller sitt forslag til et slikt normsett for *RIPA*: *reasons*, *information*, *plan* og *answers*.

Data fra de skriftlige prøvene i forsøksklassen vil analyseres ut fra dette normsettet.

RIPA-reglene i kortform:

1 (R, reasons) *Skriv ned alle begrunnelser.* Dette vil styrke det kommunikative. Men det er også viktig å være bevisst på at hva som regnes som en god forklaring, vil variere med hva som har skjedd i klasserommet, det er altså sosialt konstruert. Og det vil ofte være en tendens til at elevene skriver mindre etter hvert, fordi de mener at mer og mer er underforstått i forhold til personen som skal foreta vurderingen. Denne utfordringen må lærere og oppgaveforfattere ta. De må være klar over hva de forventer og ev. spørre eksplisitt om dette.

2 (I, information) *Skriv ned all informasjon og verktøyinput.* Dette innebærer å skrive ned for eksempel funksjoner, tall og likninger som brukes i løsningen, og også å skrive ned CAS-kommandoer som *solve, diff* osv. Leseren skal ikke behøve å kjenne spørsmålet for å forstå svaret. Det presiseres at elevene skal bruke matematisk terminologi, og ikke "CAS-terminologi" (maskininput). Det som skrives ned av CAS-bruk skal være teknologiuavhengig, med andre ord at eleven ikke skal skrive ned tastetrykk eller kommandoer som er særegent for et spesielt CAS-verktøy.

3 (P, plan) *Vær sikker på at planen er oversiktlig.* CAS-bruk øker antallet mulige veier fram til svaret i en oppgave, og besvarelsene blir da mer uforutsigbare for den som vurderer. Da er det viktig at elevene kommuniserer hvordan de planlegger løsningen. For eksempel kan en del "lite elegante" metoder være helt OK med CAS-tilgang, pga. regnekraften. Planleggingen bør presenteres underveis, og ikke i starten av oppgavebesvarelsen. Eleven bør se over hele besvarelsen til slutt og forsikre seg om at planen er oversiktlig. En annen elev bør kunne bruke planen til å løse en tilsvarende oppgave.

4 (A, answers) *Skriv ned bare de viktigste mellomresultatene.* Hvis begrunnelsene, planen, informasjon og maskininput er oversiktlig, er det lite behov for mellomresultater som oppgis av maskinen. Nedskriving av mellomresultater er tidkrevende, og det blir også lett skrivefeil. Elevene bør derfor være kritiske til hva de skriver ned av slike resultater. Oppgaveprodusenten må eventuelt eksplisitt spørre etter mellomresultater. Slike eksplisitte mellomresultatspørsmål kan også være et poeng å bruke for lettere å kunne bedømme svar som *delvis* riktige, noe som kan by på problemer i en CAS-setting. Når det gjelder sluttsvaret i oppgaven, bør eleven uansett skrive ned en tolkning.

2.8 Eksamensvurdering med CAS – erfaringer fra AP calculus

Cannon og Madison (2003) og McMullin (2003) presenterer erfaringer og synspunkter basert på eksamensvurdering i "Advanced Placement calculus" (AP calculus), et omfattende, verdensomspennende pre-college-program som administreres fra USA. Symbolregner har vært tillatt hjelpemiddel i dette programmet siden 1999.

Det må understrekes at synspunktene tar utgangspunkt i *ett* konkret program, med de begrensningene i generaliserbarhet som ligger i dette. Likevel vurderer jeg momentene som relevante, da dette programmet er meget omfattende og har elever fra hele verden.

Mye av det som beskrives, kan leses direkte ut av RIPA-reglene til Ball og Stacey fra kapittel 2.7, og gjentas derfor ikke her. I tillegg presenteres disse (her i stikkordsform):

Det er krevende å lage CAS-tilpassede eksamensoppgaver. Det vanskeligste er å lage oppgaver der CAS-bruk er en forutsetning for å løse oppgaven. Det er enklere å lage oppgaver som tilpasses "negativt", ved å nøytralisere (overflødiggjøre) CAS-verktøyene. Dette kan for eksempel gjøres ved å beskrive funksjoner på en ikke-analytisk måte som ved tabeller eller grafer, eller ved å oppgi ikke-analytiske egenskaper som kontinuitet og monotoni, og så lage spørsmål ut fra dette. Man kan også lage oppgaver som legger opp til en kombinasjon av CAS-bruk og manuell symbolmanipulasjon med visning av mellomregninger.

CAS-verktøy har forskjellig grad av avansert funksjonalitet. Bruk av forskjellige typer verktøy kan dermed skape ulikheter mellom elevene. For eksempel har noen av verktøyene stor mulighet for *interoperabilitet*, dvs. mulighet for å bruke flere CAS-funksjoner i samme kommandolinje, noe som effektiviserer utregningene og reduserer feilmulighetene.

Elevene bruker CAS-verktøy i forskjellig grad og på forskjellig måte. Noen vil bruke denne teknologien for mye, og noen vil unngå den. Vi vil altså se at noen elever vil ha problemer med å avgjøre når det er passende å bruke CAS.

Elevbesvarelsene kan bli vanskeligere å vurdere. De vil være mindre forutsigbare, de vil ofte mangle den "kanoniske strukturen" tradisjonelle manuelle metoder gir, og de vil være mer avhengig av elevens personlige språkføring.

Flere av eksamensoppgavene vil kreve økt begrepsforståelse, og oppgavesettene vil derfor kunne bli vanskeligere for mange elever. Å beherske algebraiske prosesser uten tilhørende begrepsforståelse er en strategi som nå vil gi meget liten uttelling.

De teknologiske ferdighetene elevene forventes å skulle mestre, bør formuleres eksplisitt, de bør inngå i undervisningen og de bør testes.

Man bør vurdere å ha todelt eksamen. Enkelte fakta og ferdigheter kan da vurderes uten at elevene har tilgang til teknologi. Resten av eksamen kan avholdes uten at det settes teknologiske begrensninger når det gjelder matematisk funksjonalitet. Slik todeling av eksamen bør også føre til todeling av prøver underveis i skoleåret. Oppgaver som uten CAS-tilgang krever manuell symbolmanipulasjon, kan testes uten bruk av CAS en viss periode, for å bedre elevenes forståelse. Slike oppgaver gis senere bare i CAS-delene av prøvene. Det som er forbudt på én prøve eller i ett kurs, kan altså tillates lenger ut i opplæringsløpet. (Dette er også i tråd med Buchbergers "hvit boks/svart boks-prinsipp", jf. kapittel 2.3. For øvrig begrunnes ikke synspunktene angående todelt eksamen nærmere.)

Elever vil kunne bli svakere i manuell algebra og tallbehandling, og vil kanskje lære seg mindre utenat. Dette kan gjelde selv om man praktiserer todelt eksamen, fordi elevene vil kunne få mindre mengdetrening i de manuelle prosedyrene. Når elevene har CAS-tilgang, vil for eksempel trigonometriske identiteter og derivasjonsformler kunne leses direkte fra maskinen.

Det vil lett oppstå diskusjoner om hva som skal regnes som riktig format på et skriftlig svar. CAS-verktøy vil relativt ofte presentere et svar i et format som ikke følger matematisk konvensjon som "enkleste svar". Det vil også være forskjeller mellom hvordan ulike CAS-verktøy gir svaret på samme oppgave.

Data fra de skriftlige prøvene i forsøksklassen vil analyseres med bakgrunn i erfaringene og synspunktene presentert ovenfor.

Her i kapittel 2 har jeg presentert et utvalg av teoretiske perspektiver og resultater fra CAS-forskningen som jeg mener utgjør en relevant bakgrunn for analysene i forsøksklassen. Dette innholdet vil tas med inn i kapittel 4–7, der funn fra forsøket behandles.

I det kommende kapittel 3 presenteres forskningsmetoden. Jeg redegjør da for rammene for forsøket og hvordan data er valgt ut og analysert.

3. Metode

3.1 Rammer

3.1.1 Deltakere

Kvalitativ metode er brukt i forsøket. Data ble samlet inn i løpet av skoleåret 2000/2001, i egen 3MX-klasse ved Oslo Handelsgymnasium. Klassen hadde 17 elever, med 3 jenter og 14 gutter. Forsøket var initiert av meg.

Det var to 3MX-klasser ved skolen dette skoleåret, og eksistensen av symbolregnerforsøket hadde ingen innflytelse på fordelingen av elever mellom de to klassene. Forsøket ble heller ikke kommunisert til elevene på forhånd. Det var altså ingen spesiell søkning til forsøksklassen, og elevene visste ikke at de var valgt ut til forsøket før ved første matematikktime.

Det var stor spredning i elevenes faglige nivå, som denne tabellen over standpunktkarakterene og eksamenskarakterene ved det aktuelle skoleårets slutt viser:

Elev	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	Gjennomsnitt
Standpunkt 3MX	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	4,1
Eksamen 3MX	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	5	5	6	3,9

Jeg vurderer denne spredningen som en styrke, da den kan danne utgangspunkt for hypoteser om mulige sammenhenger mellom faglig nivå og CAS-bruk. Men spredningen var altså ikke tilsiktet.

Forsøket var godkjent av ledelsen ved skolen. Andre lærere og elever ved skolen var ikke tilknyttet forsøket. Jeg samarbeidet med den andre 3MX-klassens lærer angående årsplan og terminprøver, og her kom problemstillinger angående forsøksklassens bruk av symbolregner inn, men bare i liten grad. Skolens øvrige matematikklærere ble informert om forsøket på et møte i starten av skoleåret og én gang underveis.

Ledelsen og jeg vurderte det slik at det å delta i forsøket ikke kom til å innebære en så stor belasting for elevene at det skulle være forhåndspåmelding til forsøksklassen. Det var dessuten et poeng forskningsmessig at klassen skulle være så vanlig som mulig. Hvis klassesammensetningen hadde vært resultat av bevisste valg hos elevene, ville funnene vært mindre valide.

Likevel hadde jeg en avtale med ledelsen om at hvis elever ønsket overflytting til den parallelle 3MX-klassen, og årsaken var forsøket, så skulle vi akseptere dette hvis det var praktisk mulig. Denne avtalen ble ikke kommunisert til elevene, da den potensielt kunne skape negative holdninger til forsøket. (For øvrig beskrives status for elevenes holdninger halvveis ut i skoleåret i kapittel 6.1.)

Elevene ble forsikret om at de ville få tett oppfølging gjennom skoleåret, og at merarbeidet ved bruk av symbolregner ville bli kompensert, ved at vi ville legge noe mindre vekt på enkelte læreplanmål, og ved at de ville få ha med et hjelpehefte om bruk av symbolregneren på alle prøver og på eksamen.

3.1.2 Valg av symbolregner

Jeg valgte å bruke symbolregneren *Casio Algebra FX 2.0*. Begrunnelsen for dette var todelt:

1. Dette var da en relativt ny maskin, og det hadde ikke vært gjennomført forsøk med den før i Norge. Generelt mener jeg at det er et poeng at forskjellige typer læringsteknologi utprøves i klasserommet, for å unngå at spesielle teknologiske løsninger får en for framtredende plass. Læreplaner og eksamensoppgaver bør være teknologiuavhengige. Tidligere og parallelt med mitt forsøk, ble det ved andre skoler utført forsøk med symbolregnerne Texas Instruments TI-89 og TI-92. Disse forsøkene var drevet av Eksamenssekretariatet/Læringssenteret. Mitt forsøk kunne dermed supplere disse, bl.a. ved å bruke en annen maskin. I år 2000 var det så vidt meg bekjent ikke andre symbolregnere på markedet enn Casio Algebra FX 2.0 og TI-89/92 som kunne være aktuelle for forsøket.
2. Elevene i 3MX-klassen var vant til å bruke Casio grafiske lommeregnere fra 1MA og 2MX, så det ville innebære lite merarbeid for dem å bruke den nye maskinen. De ville måtte lære seg et visst antall symbolregnende funksjoner, og resten var likt det de var vant til fra før, selv om tasteoppsettet var noe forandret. Hadde jeg valgt en maskin som var mer forskjellig fra den de var vant til, måtte jeg vært forberedt på motforestillinger fra elevene angående merarbeidet dette ville innebære.

Casioimportøren i Norge, Casinus AS, lånte oss et klassesett med symbolregnere, uten økonomisk kompensasjon eller andre betingelser. I tillegg fikk jeg en spesiell lærermaskin med tilhørende transview for bruk med overhead-prosjektor. Ved skoleårets slutt kunne elevene velge om de ville kjøpe maskinen de hadde brukt gjennom skoleåret av Casinus. At de ville få denne muligheten, fikk de vite ved skoleårets start. De fikk maskinen til sterkt redusert pris: kr 700, mens veiledende butikkpris var kr 2300. 9 av de 17 elevene kjøpte symbolregneren. De øvrige maskinene ble levert inn og oppbevart på skolen til bruk for ev. interesserte lærere og elever.

Valget av symbolregner begrenser ikke verdien av resultatene. De aller fleste av funnene i forsøket er generaliserbare til andre CAS-verktøy, både håndholdte og datamaskinbaserte. CAS-funksjonene som ble brukt i løpet av skoleåret, er standard både på andre symbolbehandlende lommeregnere og på CAS-dataprogrammer.

3.1.3 Behov for CAS-tilpasset eksamen

Lommeregnere med CAS-funksjoner var det aktuelle skoleåret ikke tillatt brukt ved eksamen i matematikkursene i videregående skole. Sitat fra informasjon fra Eksamenssekretariatet om regler for bruk av lommeregner ved eksamen, gjeldende f.o.m. våren-99 (SUE/Vg-98-36): "Lommeregneren må ikke kunne utføre operasjoner med symboler."

Det var ikke gitt begrunnelser for dette forbudet, men det er nærliggende å anta at man ikke kunne forutsi konsekvensene av fri CAS-bruk, og dermed ville vurdere dette nærmere etter at man hadde foretatt forsøk. De ordinære eksamensoppgavene dette skoleåret ble altså laget under den forutsetningen at symbolregnerbruk ikke var tillatt.

Selv om det helt fra starten av forsøket var klart at CAS-funksjoner først og fremst ville bli brukt i funksjonslæredelen av 3MX, var det et poeng at symbolregneren skulle brukes gjennom hele skoleåret. Da kunne eventuell CAS-bruk innen andre emner også registreres, og elevene ville slippe å forholde seg til mer enn én lommeregner. Jeg valgte å henstille elevene om å legge bort den grafiske lommeregneren de hadde brukt skoleåret i forveien, og bare bruke symbolregneren. Dette rådet ble fulgt.

En forutsetning for henstillingen om å legge bort den gamle maskinen, var at elevene kunne bruke symbolregner på eksamen. Forsøket hadde sannsynligvis ikke blitt gjennomført uten denne muligheten. Det ville blitt en for stor belastning for elevene og ville også kunne svekke troverdigheten til funnene. Den vanlige praksisen med at hjelpemiddelreglene på eksamen også bestemmer hvilke hjelpemidler som tillates på prøver, ble altså fulgt.

Søknad til Læringssenteret/Eksamenssekretariatet om at mitt forsøk kunne assosieres til deres symbolregnerforsøk, ble godkjent. (Se vedlegg 11.4.) Godkjenningen innebar mulighet for å lage en spesialtilpasset eksamen, basert på det ordinære eksamenssettet og med anledning til å inkludere egenproduserte oppgaver og oppgaver laget til eksamenssett i parallelle symbolregner-forsøk.

For øvrig skrev jeg parallelt med forsøket en rapport på oppdrag fra Læringssenteret, med vurdering av senterets symbolregnerforsøk i 3MX/3MY våren 2000 (Møller 2001).

Bortsett fra bruk av symbolregner og et hjelpehefte om bruken, fulgte klassen ordinære regler for hjelpemidler på eksamen. Disse reglene ble også brukt på prøver. Allerede fra starten av skoleåret gjorde jeg det klart for elevene at vi ikke kom til å operere med "lommeregnerfrie områder". Det ble altså ikke lagt begrensninger på når de kunne bruke symbolregneren. Jeg var interessert i å undersøke konsekvenser av fri CAS-bruk ved innlæring og prøver, og ikke av en todelt løsning der én del av prøvene ble avholdt uten CAS-tilgang og én med.

3.1.4 Læreplan og læreverk

Skoleåret 2000/2001 ble det undervist etter 3MX-læreplanen vedtatt i 1994, til Reform-94. (Denne læreplanen ble det første gang undervist etter i 1996/1997. Skoleåret 2001/2002 var siste gang det ble undervist etter denne planen. Fra 2002/2003 overtok den nye 3MX-planen vedtatt i 1999.)

Forsøket innebar ingen mulighet for endring av læreplanmål. Vi var altså forpliktet på den eksisterende læreplanen. Generelt kan det argumenteres for at CAS-teknologi kan påvirke selve innholdet i læreplanene. At læreplanmålene ikke var CAS-tilpasset kan da kanskje svekke funnene i forsøket? Men jeg verken kunne eller ville endre dette: Elevene skulle ha det ordinære 3MX-kurset som resten av kullet, bare med en tilpasning på eksamen, og det ville heller ikke ha vært riktig å endre kursinnholdet når elevene selv ikke hadde valgt å delta i forsøket.

Vi brukte læreverket "Matematikk 3MX" fra Aschehoug forlag, skrevet av Gunnar Erstad, Ivar Bjørnsgård, Odd Heir og Hans Bie Lorentzen i 1996. Skolen brukte hele læreverkserien fra disse forfatterne, og jeg fant ingen grunn til å fravike dette. Elevene var vant til verkets faglige framstilling, og lærersamarbeidet var tett knyttet til dette verket. Undervisningen i forsøksklassen ble lagt opp rundt læreboka, men med nødvendige CAS-tilpasninger. Generelt sett ønsket jeg å endre færrest mulig rammefaktorer.

3.2 Data

3.2.1 Datatyper

Jeg valgte å følge vanlig praksis ved skolen når det gjaldt årsplan, valg av læreverk og prøveomfang. Hensikten var å isolere CAS-bruk som eneste endrede faktor, for å styrke funnenes validitet.

Kvalitative data av følgende typer er brukt for å forsøke å besvare problemstillingen:

- *Elevbesvarelser på prøver og eksamen.*
  Dette er datatypen som dominerer. Vi avholdt åtte prøver i løpet av skoleåret. Seks av dem var mindre emneprøver på ca. 100 minutter, mens de to andre var oppsummerende terminprøver på henholdsvis 2,5 timer og 5 timer. I tillegg kom eksamen. Tre av prøvene og eksamen inneholdt oppgaver med logaritmefunksjoner.

- *Elevbesvarelser på spørreskjemaer.*
  Elevene besvarte spørreskjemaer fire ganger i løpet av skoleåret. Her ønsket jeg at elevene skulle vurdere sin egen bruk av symbolregner. De skulle også vurdere om disse maskinene burde bli brukt i videregående skole, og i så fall hvordan. Tanken var at elevholdninger er viktige å få tak i for å få kunnskap om et verktøy er effektivt for læring. Slike holdninger er ikke lett å lese ut fra skriftlige prøveresultater og derfor ønsket jeg å supplere prøvedata med data fra spørreskjemaer.

- *Elevbesvarelser på et utforskende opplegg.*
  Disse dataene skiller seg fra prøvedataene ved at de ikke er produsert i en formell vurderingssituasjon, men i en eksperimenterende innlæringssituasjon. Hensikten var å forsøke å finne ut noe om symbolregnerens eventuelle bidrag til innledende begrepsinnlæring innen logaritmefunksjoner.

Der det er relevant, er det også inkludert analyser av valg foretatt angående læreplan, lærebokoppgaver til bruk i klasserommet og eksamensoppgaver. Det ble også tatt klasseromsnotater, men bare i situasjoner der spesielt interessant symbolregnerbruk fant sted hos elevene. Det er viktig å understreke at hoveddataene er elevbesvarelser på prøver og eksamen, altså data fra skriftlige vurderingssituasjoner, og elevenes svar på spørreskjemaer. Oppgaven fokuserer altså på det elevene produserer, og i liten grad på lærerens tilrettelegging.

3.2.2 Datainnsamling

Alle data er innsamlet av meg. Spørreskjemaer og utforskende opplegg er samlet inn i sin helhet. Fra besvarelsene på prøver og eksamen er de delene der CAS-funksjoner brukes, samlet inn.

Oversikt over de skriftlige datainnsamlingspunktene i skoleåret, når klasseromsnotater holdes utenom:

22.08.00	Spørreskjema 1. Innledende holdninger og vurderinger.
19.09.00	100-minutters prøve. Vektorregning.
16.10.00	Utforskende opplegg 1: Introduksjon av e og ln.
24.10.00	100-minutters prøve. Vektorregning og logaritmefunksjoner.
07.11.00	Utforskende opplegg 2: En eksponentiell modell for fallskjermhopping.

21.11.00	100-minutters prøve. Eksponentialfunksjoner.
06.12.00	2,5-timers terminprøve. Vektorregning, logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner og integralregning.
13.12.00	Spørreskjema 2. Holdninger og vurderinger basert på et halvt skoleårs CAS-bruk.
23.01.01	100-minutters prøve. Integralregning.
14.02.01	Programmeringsprosjekt på symbolregneren (7 elever).
06.03.01	100-minutters prøve. Integralregning og kjeglesnitt.
04.04.01	5-timers terminprøve. Vektorregning, logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner, integralregning, kjeglesnitt og sannsynlighetsregning.
10.05.01	100-minutters prøve. Statistikk.
15.05.01	Spørreskjema 3. Holdninger og vurderinger basert på et helt skoleårs CAS-bruk.
16.05.01	Spørreskjema 4. Vurdering av forskjellige eksamensformer.
01.06.01	5-timers offentlig eksamen. CAS-tilpasset. Alle læreplanens mål.

3.2.3 Datautvalg og analyse

Alt datautvalg er foretatt av meg. Etter kapittel 4, som omhandler presentasjonen av forsøket for elevene og elevenes respons, presenteres arbeidet med logaritmefunksjoner i kapittel 5. Presentasjonen er kronologisk i forhold til skoleårets gang, med denne rekkefølgen:

- analyse av arbeidet tilknyttet klasserommet, inkludert utvelging og produksjon av øvings-oppgaver til elevene
- analyse av elevsvar på det utforskende opplegget
- analyse av relevante oppgavebesvarelser på prøver og eksamen.

Som sagt er oppgavebesvarelser den datatypen som dominerer. Prøveoppgavene og innskannede prøvebesvarelser blir presentert fortløpende og i relevante deler, og ikke som hele prøver eller hele besvarelser, som ville tatt uforholdsmessig mye plass.

Også analysene av elevenes spørreskjemabesvarelser plasseres tilnærmet kronologisk. De kapitlene som gjennomgår empirien (4–7), gir dermed til en viss grad en framstilling av skoleåret som en helhet, til tross for den kraftige emnebegrensningen.

Data ble samlet gjennom hele skoleåret, med tanke på eventuelle funn innen alle 3MX-emner. Analysene og beslutningen om avgrensning til logaritmefunksjoner, ble foretatt etter at skoleåret var ferdig. Det er altså samlet inn betraktelig mer data enn det som blir analysert. Alle data oppbevares. Den emnemessige avgrensningen til logaritmefunksjoner ble delvis gjort av omfangshensyn, delvis ut fra en interesse for hvordan CAS-bruk vil innvirke på "indrematematiske" emner. Logaritmefunksjoner er ikke så relevante som modellfunksjoner i videregående skole, så arbeidet med dette emnet får gjerne karakter av "ren" matematikk. Med bruk av CAS-verktøy i dette emnet kan man derfor forvente konsekvenser for eksempel for elevenes symbol- og formalismekompetanse.

Funnene analyseres både uavhengig og med bakgrunn i det utvalget av teoretiske perspektiver og tidligere CAS-forskning som ble presentert i kapittel 2.

Kriterier for utvalget av hvilke data som analyseres:

- Oppgaver der elevens mulighet for CAS-bruk påvirker måten oppgaven formuleres på. Eksempler som er typiske for materialet, velges ut. (Gjelder oppgaver i klasserommet og på prøver/eksamen.)
- Besvarelser der bruk av CAS-funksjoner markerer en markert endring av løsningsmetode framfor tradisjonelle metoder. Eksempler som er typiske for materialet, velges ut. (Gjelder oppgaver i klasserommet og på prøver/eksamen.)
- Oppgaver der bruk av CAS-funksjoner brukes av få eller ingen, men der de opplagt kunne vært utnyttet i større grad. (Gjelder oppgaver på prøver/eksamen.)
- Eksempler på besvarelser der CAS-bruk kan antas ha virket hemmende på læringen. Enkelttilfeller eller mønstre. (Gjelder oppgaver på prøver/eksamen.)
- Det utforskende opplegget: Her analyseres svarene på alle delspørsmål, for alle elever.
- Spørreskjemabesvarelsene: Her analyseres svarene på alle delspørsmål, for alle elever.

For hver prøve- eller eksamensoppgave der besvarelser analyseres, opplyses det om *poengoppnåelse*, et prosenttall som framkommer ved

$$\text{poengoppnåelse} = \frac{\text{antall poeng oppnådd av alle elever}}{\text{maksimalt antall poeng}} \cdot 100\ \%$$

Dette tallet gir et omtrentlig mål for hvordan oppgaven slo ut, altså hvor vanskelig den var for elevene i denne klassen. Poengoppnåelse 100 % betyr at alle elevene fikk maksimalt antall poeng på denne oppgaven. Poengoppnåelse 50 % betyr at i gjennomsnitt oppnådde elevene halvparten av de mulige poengene på oppgaven. Poengoppnåelse måler vanskelighetsgraden til en oppgave, for akkurat denne klassen på det gitte tidspunktet.

Her i kapittel 3 har jeg redegjort for forskningsmetoden. Jeg har beskrevet rammene for forsøket og hvordan data er valgt ut og analysert. I de kommende kapitlene 4–7 presenteres og analyseres empirien som er framskaffet ved hjelp av de beskrevne metodene. Bakgrunn for analysene er de teoretiske perspektivene og eksemplene på tidligere forskning fra kapittel 2.

4. Presentasjonen av forsøket. Innledende elevholdninger

I dette kapitlet gir jeg først, i 4.1, en kort presentasjon av startfasen i forsøket rent praktisk. Deretter vil jeg i 4.2 ta for meg elevenes innledende holdninger, slik de kom til uttrykk gjennom besvarelser på et spørreskjema tidlig i skoleåret.

4.1 De første timene

I den første timen fikk elevene symbolregnerne og en skriftlig orientering om forsøket. Orienteringen inneholdt:

- begrunnelser for forsøket
- eksempler på bruk av symbolregneren
- informasjon om hvordan skoleåret var tenkt lagt opp

I tillegg fikk elevene noen innledende oppgaver de skulle løse på symbolregneren. Disse oppgavene var hentet fra 1MA og 2MX.

Orienteringen og oppgavene er plassert som vedlegg 11.2.1 og 11.2.2.

Orienteringen og oppgavene ble laget for raskt å sette elevene inn i de pedagogiske problemstillingene rundt symbolregnerbruk, og for å sørge for at de med en gang fikk erfare hvilke muligheter symbolregneren gir som ikke grafisk lommeregner gir. Både den muntlige og den skriftlige informasjonen ble forsøkt holdt i en engasjert, men nøytral tone, dvs. uten å komme med vurderinger om denne teknologien burde tillates eller ikke.

Årsplanen ble presentert i den tredje timen. Den var felles med den andre 3MX-klassen ved skolen, en klasse som ikke var en forsøksklasse. Jeg vurderte det slik at kommunikasjonen mellom de to lærerne og mellom de to klassenes elever, var viktigere enn eventuelle fordeler knyttet til at forsøksklassen skulle ha en annen årsplan. Elevene ble også informert om at vi kom til å ha to terminprøver der de ble evaluert i alle læreplanmål klassen hadde arbeidet med, og i tillegg omtrent tre mindre prøver pr. termin.

Jeg informerte om at de emnene der vi kom til å bruke CAS-funksjoner mest, nok var logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner og integralregning. Disse emnene var plassert i andre halvdel av første termin og i starten av andre termin. Samtidig sa jeg at det ville være interessant hvis CAS-funksjoner også kunne brukes innen andre emner.

Elevenes reaksjoner i den første timen var klart mest positive, men det kom også skeptiske spørsmål om de kom til å få mer å gjøre enn den andre 3MX-klassen. Jeg opplyste om at vi skulle prøve å få det til slik at den ekstra tiden klassen måtte bruke på å lære seg å bruke CAS-funksjonene, ville bli oppveid med at det var andre områder vi ikke behøvde å behandle så nøye som den andre klassen, pga. hjelpemidlet vårt. I tillegg sa jeg at de kom til å få tett oppfølging og spesiallaget instruksjonsmateriell til maskinene.

4.2 Holdninger: Elevenes startvurdering (spørreskjema 1, 28.08.00)

I den tredje timen besvarte elevene et spørreskjema. De behøvde ikke å skrive navn, men to gjorde det. To av de 17 svarte ved et senere tidspunkt og dermed ikke anonymt.

4.2.1 Skjemaet

Følgende spørsmål ble besvart:

> Du har nå fått en presentasjon av prosjektet og gjort noen enkle oppgaver på symbolregneren.
>
> 1 Er du blitt godt nok informert om prosjektet eller er det noe informasjon du savner?
>
> 2 Hva er din holdning til å være med på et slikt prosjekt?
>
> 3 Foreløpig har du bare fått et lite innblikk i mulighetene som ligger i bruken av symbolregner. Har du allerede nå noen tanker om hva som kan være positive og/eller negative konsekvenser av bruk av slike lommeregnere?
>
> 4 Annet?

4.2.2 Begrunnelse

Bruken av spørreskjema gjør det lettere å oppdage ev. mangler ved den informasjonen som er gitt elevene, ved at det er store forskjeller på i hvor stor grad elever gir muntlig respons. Derfor inkluderte jeg spørsmål 1.

Jeg var interessert i å undersøke holdningsutviklingen gjennom hele skoleåret, og tok derfor med spørsmål 2 og 3. (Jf. problemstillingen i kapittel 1.1.) Disse spørsmålene går igjen på de to spørreskjemaene elevene besvarte etter at halve og hele skoleåret var gått. (Se kapittel 6.)

Jeg mente det var viktig at elevene så raskt som mulig skulle bli tvunget til å reflektere rundt bruken av symbolregner og deltakelse i forsøket. Da var det større sannsynlighet for å unngå at mulige ureflekterte positive eller negative holdninger kunne få "sette seg". Jeg ville bidra til et "dialogisk klasserom", en åpen tone der elevene følte at deres erfaringer og holdninger ble lyttet til og tatt hensyn til.

4.2.3 Analyse

Her følger en gjennomgang av de 17 elevenes svar. Elevenes ordrette svar eller forskjellige typer svar er satt i kursiv.

<u>Spørsmål 1</u>
"Er du blitt godt nok informert om prosjektet eller er det noe informasjon du savner?"

Godt nok informert: 13 elever
Mer info om hvordan eksamen vil bli: 1 elev
Mer om undervisningsmetoden i forhold til det tradisjonelle 3MX-kurset: 1 elev
Hvordan formuleres prøvene? 1 elev
Bedre informasjon burde gis andre lærere, f.eks. fysikklæreren: 1 elev
Mer info om bruk av lommeregneren: 1 elev
Eksempel på hva slags oppgaver vi vil få: 1 elev
Hvilke konkrete forskjeller det vil bli: 1 elev

Svarene på spørsmål 1 tyder på at informasjonen generelt sett var god nok. Men noen få elever ville allerede på dette tidlige tidspunktet i skoleåret gjerne ha mer detaljert informasjon om oppgaver, prøver, undervisning og eksamen. Dette er et forståelig ønske, men vi hadde ikke kommet så langt i prosessen at dette kunne besvares godt da. Tanken var at svar på slike spørsmål ville komme etter hvert, når vi så hvordan symbolregneren påvirket klasseromsarbeidet og vurderingssituasjonene. Generelt sett bør ønsker om slik informasjon møtes med velvilje, da det tyder på engasjement og ønske om forutsigbarhet fra eleven, og jeg forsøkte da også å møte informasjonsbehovet så langt jeg kunne.

Spørsmål 2
"Hva er din holdning til å være med på et slikt prosjekt?"

Positiv holdning: 14 elever
Sitater:
- *Morsomt og spennende.*
- *Noe nytt. Kanskje mer fremtidsrettet. Mindre ensidig undervisning.*
- *Gøy. Ivrig lærer gjør det morsommere å lære.*
- *Interessant.*
- *Lærer å bruke ny teknologi før andre.*
- *Litt utenom det vanlige.*
- *Veldig positiv. Tror prosjektet vil øke interessen for matte, samt bidra til større forståelse.*
- *Håper at det kan føre til økt motivasjon. Jeg har tro på at variasjon kan virke positivt på elevene.*
- *Vi er heldige som får prøve noe nytt.*
- *Kan være interessant.*
- *Jeg liker prosjektet mye og er glad for å være heldig nok til å delta.*

Fra negativ til noe skeptisk holdning: 3 elever
Sitater:
- *Det skaper litt skepsis med tanke på min læring og forståelse av faget. Mitt mål er å lære det som skal læres, ikke å komme fortest mulig igjennom kurset.*
- *Litt usikkerhet angående nivået på fremtidige prøver.*
- *Jeg tviler på om bruk av denne kalkulatoren er for mitt beste.*

Svarene på spørsmål 2 viser at de fleste elevene er positive til å være med på forsøket. Begrunnelsene går stort sett ut på at de er glade for å være med på noe nytt. Variasjon og nyhetens interesse teller positivt. Én elev er skeptisk med tanke på de kommende prøvene. To elever er gir ganske negative svar: Én har en generell tvil om bruk av symbolregneren er for denne elevens beste, mens én mistenker at bruken vil virke negativt på matematikklæringen. I klassen forsøkte jeg da i etterkant å gjenta en del av informasjonen fra første time. Jeg forsikret at de ville få god oppfølging og sa at det ikke var noe i veien for at man kunne lære seg stoffet på en tradisjonell måte også, selv om man gikk i en forsøksklasse.

Spørsmål 3
"Foreløpig har du bare fått et lite innblikk i mulighetene som ligger i bruken av symbolregner. Har du allerede nå noen tanker om hva som kan være positive og/eller negative konsekvenser av bruk av slike lommeregnere?"

Ingen tanker foreløpig: 3 elever

Positive konsekvenser nevnt av 13 elever. Sitater::
- *Ting går raskere, kan konsentrere seg mer om selve problemet enn mellomregninger.*

- *Mulighet for å regne mer avanserte stykker og jobbe med mer spennende oppgaver fordi regneoperasjoner kan gå fortere.*
- *Slipper å regne tunge uttrykk, og kan konsentrere oss mer om forståelsen av matte.*
- *Nyttig verktøy i matte. Det blir lettere å regne med symboler.*
- *Bruker mye mindre tid.*
- *Man "henger med" i tiden og legger mer vekt på oppgaver som kalkulatoren ikke kan løse.*
- *Mindre krevende regning går raskere og man får mer tid til det som kan være vanskeligere. Et bindeledd fra skolen til teknologien.*
- *De stykkene som symbolregneren er unik om å løse, tror jeg at er stykker som det ofte er lett å få slurvefeil på. Dette unngår vi lettere når bruk av nevnte maskin er tillatt. Vi får i tillegg muligheten til å bruke tid på det som har med løsning av problemer å gjøre.*
- *Man kan gå ett hakk videre i matematikken.*
- *Man kan konsentrere seg mer om å lære resten av pensum. Man slipper å bruke mye tid på emner som tilsynelatende virker noe unødvendig, i og med at man kan gjøre oppgavene på kalkulatoren.*
- *Slipper å bruke tid på enkle regneoperasjoner.*
- *Det kommer til å føre til at matematikken blir mer avansert og teoretisk. Det er meningsløst å forby teknologi som kommer til å bli brukt mer og mer i fremtiden og som vi kommer til å bruke etter skolen uansett.*

Negative konsekvenser nevnt av 10 elever. Sitater:
- *Risikerer å ikke lære alt på egenhånd.*
- *Lærer kanskje ikke godt nok å regne algebra på papir, muligens blir det et problem senere.*
- *Vi lærer dårligere det som ligger bak matten: Det å regne ut uttrykkene selv, og ikke la kalkulatoren gjøre det for oss.*
- *Bruken av slike lommeregnere.*
- *Lærer vi hele prosessen?*
- *Det er ikke lov å bruke symbolregneren i de fleste fasilitetene for høyere utdanning. Vi må passe på å ikke bli for avhengig av den, slik at vi uten problem kan gå uten.*
- *Man glemmer hvordan det løses for hånd.*
- *Kan glemme gamle utregningsmetoder og det kan være vanskelig for læreren å se om eleven har skjønt problemstillingen.*
- *Prosjektet er nytt og det finnes lite erfaring på området: Dette kan by på overraskelser.*
- *Vi får lite trening i å utføre forskjellige regneoperasjoner. Man får mindre forståelse for matematikk.*
- *Symbolregner gjør algebra, derivasjon og likninger lett. Kunnskaper på disse områdene kan bli svekket ved bruk av symbolregneren.*

På dette spørsmålet skulle altså elevene komme med mulige positive eller negative konsekvenser av bruk av symbolregner. Her kunne de svare uten at svaret nødvendigvis ga uttrykk for deres egne meninger. Spørsmålsstillingen gjorde at de ble ledet til å se saken fra flere sider. De fleste elever har svart på spørsmålet, og vi ser her en mye jevnere fordeling mellom positive og negative svar enn på det mer personlige spørsmål 2.

Positive svar på spørsmål 3 kan oppsummeres slik:
- Mindre fokus på det regnetekniske, mer tid til forståelse og til problemløsning
- Mer virkelighetsnært. Teknologi som er i bruk i samfunnet.
- Åpner for større andel læring som går utover dagens læreplan.

Negative svar på spørsmål 3 kan oppsummeres slik:
- Mindre forståelse. Man blir avhengig av teknologien.
- Problemer i høyere utdanning.
- Usikkerhet pga. lite erfaring med bruken.

Spørsmål 4
"Annet?"

Sitater:
1 elev: *Jeg synes at man kan bruke lommeregner i 1. og 2. og symbolregner i 3.*
1 elev: *Kule sølv-funksjonsknapper.*
1 elev: *Jippi!!*

Få hadde behov for å skrive noe utover spørsmål 1, 2 og 3. Det lille som ble skrevet på spørsmål 4, viser engasjement og positiv holdning.

Jeg syntes svarene på spørreskjemaet var oppløftende. Det var tydelig at forsøket hadde hatt en god start. Spesielt ble jeg imponert over svarene på spørsmål 3. En så stor grad av seriøsitet og et så bra refleksjonsnivå tidlig i skoleåret ga et godt grunnlag for arbeidet vi skulle i gjennom det kommende skoleåret. Det var tydelig at det i denne klassen var mange elever som kunne gi gode bidrag til problemstillingens spørsmål om holdninger.

Analysen av elevenes svar på spørsmål 2 og 3 vil bli utdypet i kapittel 6, der svarene på tilsvarende spørsmål halvveis ut i skoleåret og ved skoleårets slutt blir behandlet. På den måten ser jeg på elevenes holdningsutvikling gjennom forsøksperioden.

Det neste kapitlet, kapittel 5, utgjør tyngdepunktet i oppgaven og omhandler forsøksklassens arbeid med logaritmefunksjoner.

5. Logaritmefunksjoner

Kap. 5 er det mest sentrale empirikapitlet i oppgaven. Etter å ha presentert selve grunnlaget for elevenes arbeid, nemlig de aktuelle læreplanmålene, behandles forsøksklassens arbeid med logaritmefunksjoner: først i klasserommet (kapittel 5.2), og så på prøver og eksamen (kapittel 5.3).

Jeg minner om kriteriene for utvalget av hvilke data som analyseres (se kapittel 3.2.3):

- Oppgaver der elevens mulighet for CAS-bruk påvirker måten oppgaven formuleres på. Eksempler som er typiske for materialet, velges ut. (Gjelder oppgaver i klasserommet og på prøver/eksamen.)
- Besvarelser der bruk av CAS-funksjoner markerer en markert endring av løsningsmetode framfor tradisjonelle metoder. Eksempler som er typiske for materialet, velges ut. (Gjelder oppgaver i klasserommet og på prøver/eksamen.)
- Oppgaver der bruk av CAS-funksjoner brukes av få eller ingen, men der de opplagt kunne vært utnyttet i større grad. (Gjelder oppgaver på prøver/eksamen.)
- Eksempler på besvarelser der CAS-bruk kan antas ha virket hemmende på læringen. Enkelttilfeller eller mønstre. (Gjelder oppgaver på prøver/eksamen.)
- Det utforskende opplegget (kapittel 5.2.1): Her analyseres svarene på alle delspørsmål, for alle elever.

5.1 Læreplanmål

Følgende hovedmomenter fra læreplanen omhandlet logaritmefunksjoner, direkte eller indirekte:

> Elevene skal
>
> 3a kjenne eksponential- og logaritmefunksjoner med vilkårlig grunntall
>
> 3b kunne derivere eksponential- og logaritmefunksjoner
>
> 3c kjenne bruken av eksponential- og logaritmefunksjoner i naturfag, teknologi og samfunnsfag
>
> 3d kunne bruke grafiske, regnetekniske og eksperimentelle verktøy basert på informasjonsteknologi i funksjonslæren
>
> 3e kunne bruke Newtons metode til å finne nullpunkter og skjæringspunkter

5.2 I klasserommet

I midten av oktober var klassen ferdig med vektorregning og skulle begynne på de emnene der CAS-funksjonene virkelig kunne komme til å bli brukt mye, nemlig logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner og integralregning. Det var nå viktig at elevene ble fortrolig med symbolregneren, slik at ikke usikkerhet om lommeregnerbruken skulle virke negativt inn på tilegnelsen av fagstoffet.

Elevene fikk et hefte om bruk av symbolregneren. Heftet inneholdt teori og oppgaver. Første emne var grafiske løsninger. Dette var stort sett repetisjon fra 1MA og 2MX. Så kom en gjennomgang av de viktigste CAS-funksjonene, som faktorisering (*rFactor)*, løsning av likninger og ulikheter (*solve*), derivering (*diff*), avrunding (*approx*) og grenseverdier (*lim*). Til slutt oppgaver. Alle eksemplene og oppgavene var hentet fra stoff elevene hadde vært innom før, det meste var fra 2MX.

Tanken var at dette både skulle fungere som en innføring i den nye teknologien og som en repetisjon av stoff som var viktig for 3MX. Heftet var laget med tanke på selvstudium. Etter at elevene hadde arbeidet seg gjennom heftet tok vi som en kontroll i plenum nye eksempler på derivering, sammentrekning, faktorisering og løsning av likninger og ulikheter. Det var viktig å få formidlet at elevene nå sannsynligvis hadde vært innom mesteparten av det de trengte for å beherske symbolregneren i 3MX-kurset. Vi tok det rolig for å motvirke at noen allerede nå ville føle teknologien som et hinder.

Så startet vi med logaritmestoffet. Først repeterte vi 10-logaritmer fra 2MX (utklipp fra læreboka):

$$10^x = p \quad \Leftrightarrow \quad x = \log p$$

Deretter definerte vi den generelle logaritmefunksjonen:

Vi lar a være et positivt tall forskjellig fra 1.

a-logaritmen til et positivt tall p er det tallet vi må opphøye a i for å få p.

Dette betyr at

$$a^{\log_a p} = p \qquad (1)$$

Og vi repeterte logaritmereglene fra 2MX:

$$\log(p^n) = n \cdot \log p$$
$$\log(p \cdot q) = \log p + \log q$$
$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

Nå var vi klare for å innføre tallet e og etter det innføre den naturlige logaritmen ln som logaritmen med e som grunntall. Kunne symbolregneren hjelpe elevene i denne innlæringsprosessen?

5.2.1 Utforskende opplegg: Introduksjon av e og ln

For å undersøke hva slags bidrag symbolregneren kunne gi i innlæringsprosessen knyttet til e og ln, lagde jeg et utforskende opplegg i form av et ark med tre åpne oppgaver. Elevene skrev rett på arket og leverte inn. De fikk velge om de ville arbeide alene eller i par. De fleste arbeidet alene, fire elever arbeidet i par. Begrunnelsen for å gi dem valget mellom å arbeide alene eller i par er at en del elever arbeider bedre og med større åpenhet og selvsikkerhet når arbeidet inkluderer muntlig aktivitet. Opplegget ble altså gjennomført før de hadde lært noe om e eller ln. Det var 14 elever til stede.

Oppgave 1

Oppgaveteksten:

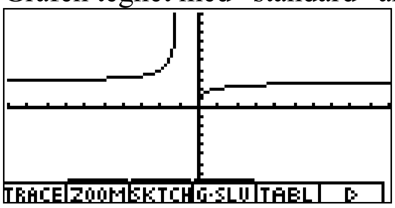
Hva kan du finne ut om funksjonen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$?

Noter ned på denne siden det du finner ut og framgangsmåten du bruker. Noter også resultater du ikke forstår. Bruk ev. baksiden.

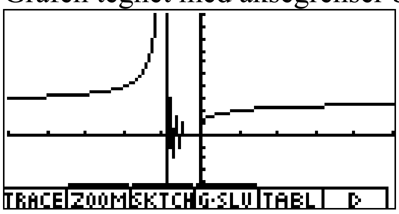
Elevenes svar (13 av 14 elever svarte):

Alle 13 tegnet grafen til funksjonen på symbolregneren, og for de fleste var dette det første de gjorde. Det var altså meget tydelig at grafen var en naturlig innfallport når en funksjon skulle undersøkes.

Grafen tegnet med "standard" aksegrenser, dvs. x og y fra –10 til 10:

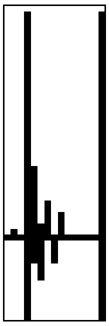


Grafen tegnet med aksegrenser bedre tilpasset funksjonen, her x fra –5 til 5 og y fra –6 til 10:



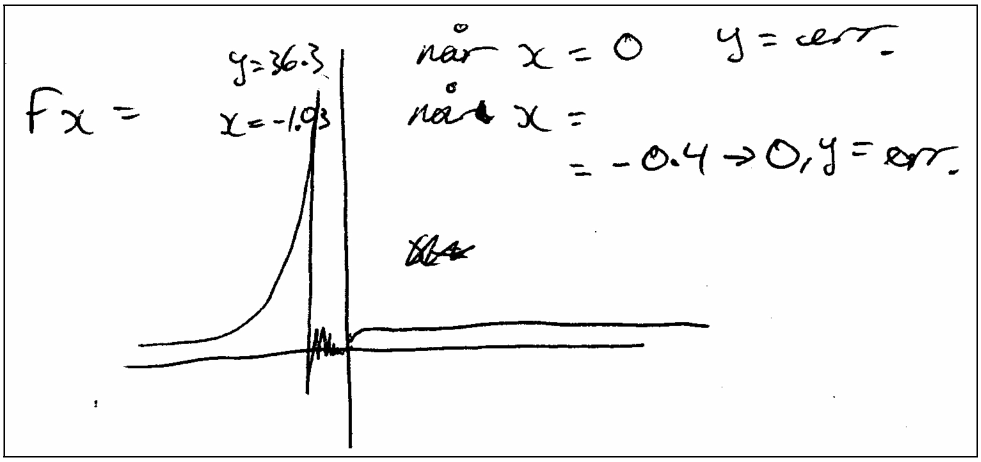
Vi ser at en endring av akseinnstillingen faktisk gir forskjellige typer opptegninger av grafen! På det siste bildet tegnes grafen opp i området $\left[-1\ ,\ 0\right\rangle$, noe som ikke gjøres på det første bildet. Og det som tegnes opp i dette intervallet er ganske uoversiktlig. De av elevene som har et grafisk bilde av en slik type, får potensielt mange elementer å undersøke.

8 av elevene undersøkte noe omkring intervallet $\left[-1\ ,\ 0\right\rangle$: De prøvde å finne ut om funksjonen hadde nullpunkter her, om den var definert i intervallet og hva det følgende grafutsnittet kunne bety:



Tre eksempler på elevsvar her:

1. når $-1 < x \leq 0$ er $y = \text{error}$

2. 

3. Udefinert ved −1 og 0.
Skifter mellom definert og udefinert mellom −1 og 0?
Ved $\lim_{x \to -1}$ stiger grafen til det u endelige.
Table: fra −1 til 0, Range 0.01
Hver 0,04 verdi er definert dvs. −0,96, −0,92, −0.88
Annenhver definerte verdi er positiv og negativ!

Disse tre eksemplene viser en økende grad av utforskning av hva som skjer i intervallet $[-1\ ,\ 0\rangle$. Det siste eksemplet viser den av elevene som hadde gått dypest inn i dette. Ingen av de 13 elevene brukte CAS-funksjoner spesifikt for å undersøke funksjonsegenskaper i dette intervallet.

Seks elever brukte CAS-funksjoner i utforskningen av funksjonen. De som ble brukt var deriveringsfunksjonen *diff*, likningsløseren *solve* og grenseverdifunksjonen *lim*:

Tre elever deriverer eller dobbeltderiverer funksjonen med symbolregneren uten å gjøre noe mer ut av det. Resultatene bare skrives opp uten oppfølging. Eksempel:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+1\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) - \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x-1}}{x}$$

Det følgende elevparet har gått videre med den deriverte og dobbeltderiverte for å finne eventuelle ekstremalpunkter og vendepunkter:

DIFF Derivert: $\left(\frac{1}{x}+1\right)^x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x-1}}{x}$

SOLVE INGEN TOPP- OG BUNNPUNKTER

SOLVE ⇒ DIFF(ANS) " VENDEPUNKTER

Elevene konkluderer her med at funksjonen $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ikke har ekstremalpunkter eller vendepunkter, fordi den deriverte eller dobbeltderiverte funksjonen ikke kan få verdien 0. De kan altså finne ut dette uten grafiske betraktninger eller manuell regning. (Strengt tatt er ikke slutningen gyldig, da en funksjon kan ha ekstremalpunkter og vendepunkter også uten at den deriverte eller dobbeltderiverte er 0. Men en slik drøfting av ekstremalpunkter og vendepunkter også relatert til kontinuitet og deriverbarhet, lå utenfor 3MX-kurset.)

Hovedmålet med oppgaven var å se om elevene fant ut at funksjonen gikk mot en grenseverdi når *x* gikk mot uendelig, og at symbolregneren skulle gi dem svaret **e** når de prøvde å finne denne grenseverdien. Seks av elevene arbeidet med dette. Her følger tre eksempler:

1. Når x er større enn 0 øker den raskt i starten, men får etterhvert så liten økning, at den så og si stagnerer på y-aksen.

2. Tegnet graf x_{max} 250 grenseverdi ca. 2,72

3. Den vil øke når x går mot uendelig Hvor mye? går mot $\underline{\underline{e}}$? kalk

De to første er grafiske betraktninger, mens det siste eksemplet viser at eleven har brukt CAS-funksjonen *lim* og fått "det uforståelige" **e** som svar. Fire av de 14 elevene fant ut dette. De har da regnet ut $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, slik:

```
lim((1+1/X)^X,X,∞)
e
```

Tanken var at dette svaret skulle vekke nysgjerrighet ("Hva er nå **e** for et svar?") og gi motivasjon for at oppgave 2 og 3 ville klargjøre noe. (Men oppgave 1 alene kunne i teorien gi mulighet for at eleven identifiserte **e** som et *tall*, med tilnærmingsverdi på for eksempel 2,7.)

Vi legger merke til at elevene umiddelbart kan bruke CAS-funksjoner for å undersøke egenskaper ved funksjonen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. De kan finne eksakte grenseverdier, skjæringspunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter uten å måtte gå gjennom noen manuelle regneprosesser. Disse CAS-manipulasjonene kan altså elevene gjennomføre uten å ha prosessuell kunnskap om funksjonen (Gray og Tall, 1994). Elevene bruker symbolregneren som en "tjener", dvs. som en rask erstatter for penn og papir. "Tjeneren" tar seg av det prosessuelle. (Se kapittel 2.4.)

Oppgave 2

Oppgaveteksten:

> Hva kan du finne ut om funksjonen $f(x) = \log x$?
>
> Noter ned på denne siden det du finner ut og framgangsmåten du bruker. Noter også resultater du ikke forstår. Bruk ev. baksiden.

Elevenes svar (10 av 14 elever svarte):

Tre elever finner at funksjonen ikke er definert for $x \le 0$. Eksempel:

regner graf på kalk. ikke def for ~~x~~ under ~~0~~ eller 0.

To elever kommer inn på grenseverdibetraktninger:

1.
- Bruker CAS for å finne asymptotene til funksjonen:

① CALC → lim → (logx, x, 0) → når x går mot 0
svar: $-\infty$
② CALC → lim → (logx, x, ∞ → når x går mot ∞
svar: ∞

2.
Grafen stiger veldig sakt, taster jeg inn i tabellen x = 100 000 får jeg y = 5

At funksjonen ikke går mot en grense når *x* går mot uendelig, og at funksjonen har en asymptote for $x = 0$, må sies å være sentrale egenskaper.

Fem elever deriverer funksjonen ved CAS. Tre av disse bruker den deriverte til å si noe om ekstremalpunkter, stigning eller vendepunkter. To eksempler:

1. Diff : $(\log x)' = \frac{1}{\ln(10) \cdot x}$

Solve $(\log x)' = 0$ har ingen løsning. Dvs ingen topp/bunnpunkt. (Selvfølgelig.)

2. $f'(x) = \frac{1}{\ln(10) \cdot x}$ ikke kan ha en x-verdi = 0, heller ikke 2-deriverte, 3 deriverte osv. Stigningstallet er synkende ~~er~~ x under brøktegn.

Tre elever har altså fått opp ln på symbolregneren sin, slik: diff(log X) $\frac{1}{\ln(10) \cdot X}$. Men ingen av dem kommenterer eller spør hva dette "ln" kan være for noe. De bruker det de kan fra før om hva den deriverte forteller til å gå videre i utforskningsarbeidet, selv om de ikke vet hva ln står for.

Vi ser at den deriverte funksjonen blir brukt for videre behandling, selv om elevene ikke har prosessuell eller konseptmessig kunnskap om den. Disse elevene er ikke fortrolig med skrivemåten "ln", men siden de vet hva de skal *bruke* den deriverte til, stopper det dem ikke i utforskningen.

Oppgave 2 var ment som en bro til oppgave 3, ved at egenskaper ved den kjente funksjonen $f(x) = \log x$ i oppgave 2, kunne kombineres med det eventuelt "nyoppdagede" tallet **e** fra oppgave 1.

Oppgave 3

Oppgaveteksten:

> Hva kan du finne ut om funksjonen $f(x) = \ln x$? (Dette er en funksjon som er ny for deg. Du skal lære mye om den etter hvert.) Noter ned på denne siden det du finner ut og framgangsmåten du bruker. Noter også resultater du ikke forstår. Bruk ev. baksiden.

Elevenes svar (7 av 14 elever svarte):

Det er få og tynne svar på denne oppgaven. Elevene er innom nullpunktet, definisjonsmengden, derivering, dobbeltderivering og sammenlikning med grafen til $f(x) = \log x$ (grafen fra forrige oppgave).

Eksempel:

- tegner funksjonen på GRAPH/TABLE
- x= 0 gir y= ERROR
- X >0
- x = 1 gir y= 0
- kan finne asymptoter
- likner på f(x)= log x

(Kommentar: Utydelig skrift. I det femte punktet står det "kan finne asymptoter". I det sjette punktet står det "likner på $f(x) = \log x$".)

Dette er relevante funn, ved at felles egenskaper med $f(x) = \log x$ identifiseres. Men eleven kommer ikke videre herfra.

Et annet eksempel:

CAS -> Solve(ln x) -> x=1

diff(ln x) = $\frac{1}{x}$

dobbdderiven = $-\frac{1}{x^2}$

Denne eleven finner den deriverte og den dobbeltderiverte funksjonen. Men uten videre utforskning er vel læringsutbyttet bak besvarelsen lite.

I tillegg til de to eksemplene ovenfor, er det en elev som er innom det som var kjernepunktet for hele oppgavearket:

ln x , ln e = 1 Prøvde på tull...

dvs.

$\log_e$

Denne eleven er i nærheten av å formulere sammenhengen mellom oppgave 1, 2 og 3, nemlig at $f(x) = \ln x$ er en logaritmefunksjon som den velkjente $f(x) = \log x$ fra 2MX (oppgave 2), men med den forskjellen at grunntallet nå ikke er 10, men tallet e, som framkom ved grenseverdibetraktning i oppgave 1. Dette skriver eleven korrekt $\log_e$, som betyr det samme som $\ln$.

Oppsummering og vurdering

Alle elevene bruker lommeregneren som hjelpemiddel for å besvare spørsmålene, men generelt sett blir ikke mulighetene som CAS-funksjonene gir, utnyttet godt. En del elever arbeider mest med grafiske og numeriske metoder.

Tanken bak opplegget var at elevene ved CAS-bruk ville forstå at grenseverdien $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, som numerisk er ca. 2,72, kalles e og at $f(x) = \ln x$ er en logaritmefunksjon som har nettopp dette tallet e som grunntall. I tillegg ville det vært spesielt bra hvis noen hadde kommet fram til at en definisjon av dette tallet e faktisk er en forutsetning for å derivere $f(x) = \log x$, en funksjon som er kjent for elevene fra før. Dette er et sentralt resultat som kunne binde sammen det kjente med det ukjente. Bare én av de 13 elevene var i nærheten av dette, og også den besvarelsen var tynn.

Men når vi i plenum oppsummerte hva elevene hadde funnet på hver av oppgavene 1, 2 og 3, fikk vi i *sum* fram mye viktig. Selv om ingen av elevene kom særlig langt i den første delen av læringsprosessen, der de arbeidet alene eller i par, så kan et slikt opplegg likevel virke positivt når alle elevenes funn blir oppsummert og diskutert i plenum.

Utforskende oppgaver som har teoriutvikling som mål, er ikke lette å plassere innenfor de tre kompetanseklassene (se kapittel 2.1). Men opplegget beskrevet her, kan passe inn i kompetanseklasse 2, der elevene skal se sammenhenger og bruke flere standardprosedyrer i samme oppgave for å komme til resultatet. Kanskje kan vi også si at opplegget tenderer mot kompetanseklasse 3, pga. åpenheten i oppgaveformuleringene.

Hva slags matematisk kompetanse viser så elevene gjennom arbeidet med opplegget? Først: Enkeltoppgavene er så åpne at det blir vanskelig å snakke om riktige og gale svar. Graden av åpenhet gjør at vi kan si at den produktive siden av kompetansene dominerer over den undersøkende i disse oppgavene. Den intenderte "oppdagelsen" har man som produsent av åpne oppgaver ingen garanti for at blir utført. Derfor kan vi vel heller ikke kalle disse oppgavene "problemer", selv om løsningen av dem i likhet med problemer ikke følger standardalgoritmer.

Tanken var at elevene gjennom noe kjent (log-funksjonen og CAS-erfaring) skulle oppdage en sentral matematisk sammenheng som var ny for dem. Oppgavene samlet sett krever dermed en høy grad av resonnementskompetanse. Faktisk måtte de klare å følge helt spesielle resonnementer som var "skjult" for dem. Slik kompetanse viser elevene i meget liten grad.

Men noen av elevene viser en relativt høy dekningsgrad for representasjonskompetanse i besvarelsene. De tre funksjonsuttrykkene behandles vekselvis med grafiske, numeriske og symbolbehandlende metoder, og representeres dermed på forskjellige måter. Grafavlesningsfunksjoner som *trace* og *root* kombineres med bruk av verditabeller og bruk av CAS-funksjoner som *solve* og *diff*.

Opplegget viser at elever godt kan arbeide med objekter de har mangelfulle kunnskaper om, og likevel komme fram til riktige resultater. For eksempel brukte noen elever *diff* og *solve* for å bestemme eventuelle ekstremalpunkter, selv om de ikke hadde forutsetninger for å tolke det deriverte funksjonsuttrykket. Slike CAS-manipulasjoner kan altså elevene gjennomføre uten å ha prosessuell kunnskap om funksjonen. Spørsmålet er om slike manipulasjoner styrker elevenes oppfatning av funksjonsegenskapene som *objekter*? Ved for eksempel å trykke *diff* og få den deriverte funksjonen som et raskt CAS-resultat, har jo eleven umiddelbart en mulighet for å betrakte den deriverte som et objekt, og ikke bare som et resultat av manuell utregning. Men på den annen side kan vi ikke si at dette vil innebære en "procept"-forståelse, da en slik forståelse må innebære konseptuelt arbeid utover ren "knappetrykking".

CAS-bruk i slike introduksjonsfaser vil innebære en reversering av den normale innlæringsrekkefølgen "fra prosess til objekt", men kan kanskje for noen elever ha den effekten at de "vet hvor de skal". De kan få en anelse av hva slags matematisk landskap de går inn i. Målet er jo uansett en dyp strukturell kunnskap, og kanskje kan et godt alternativ til "fra prosess til objekt" være å gå veien "fra objekt til prosess til objekt"?

Om en slik alternativ vei passer for alle, må undersøkes i hvert enkelt tilfelle. Utforskende opplegg kan lett føre til en del "blindspor" hos mange elever, altså at det de finner ut, ikke er relevant for det videre arbeidet med stoffet. Graden av åpenhet i problemstillingen og antatt tidsbruk for gjennomføringen bør nok vurderes nøye, for å forsøke å unngå at slike opplegg virker demotiverende.

Elevenes bruk av CAS-funksjoner i dette opplegget kan i høy grad karakteriseres som "svart boks"-bruk. Elevene behøver ikke å reflektere over hva som foregår i symbolregnerens overgang fra input til output for å besvare oppgaven. I følge Buchbergers (1990) hvit boks/svart boks-prinsipp skal slik teknologibruk henvises til en fase der operasjonene er blitt manuelle rutiner. Vårt tilfelle er jo langt unna slik bruk, i og med at elevene i startfasen ikke har forutsetninger for å kunne utføre operasjonene manuelt. Man kunne ut fra dette avvise det utforskende opplegget og mene at slik CAS-bruk bør utsettes. Men det er en forskjell mellom på den ene siden å bruke symbolregneren systematisk og gjennomgående som svart boks for å drøfte stadig nye og fremmede funksjonstyper, og på den andre siden å bruke den som svart boks i utforskende introduksjonsfaser. Sett fra denne synsvinkelen kan vi si at opplegget ikke bryter med Buchbergers prinsipp.

Det utforskende opplegget kan sees på som et forsøk på å bruke teknologien som "partner" (Goos 2003). Intensjonen var at symbolregneren skulle brukes kreativt for å angripe de tre funksjonene på forskjellige måter. Maskinen har da en større rolle enn bare å være en "tjener" som utfører rask regning. Men vi kan ikke si at elevenes resultater viser noe slikt "partnerskap". Snarere virker det som om symbolregnerbruken for mange elever fører til at de stopper opp i aktiviteten. Svarene blir ofte ikke vurdert eller fulgt opp, og derfor vil det være mer passende å si at de brukte teknologien som "herre". Slik manglende evne til å nyttiggjøre seg CAS-teknologien beskrives også av Drijvers (1999) som én av fem CAS-relaterte vanskeligheter.

Elevenes oppgaveløsninger var meget knappe, og kan på ingen måte sies å oppfylle RIPA-reglene til føring (Ball og Stacey 2003). Men i en slik uformell "hva kan du finne ut"-setting kan man kanskje ikke forvente noe annet enn skisser. I utforskende faser vil det som skrives ned være mer til hjelp for egen resonnering enn for kommunikasjon. En mulig oppfølging av opplegget kunne være at skissene seinere kunne bindes sammen og skrives ned med tanke på en leser.

Den vellykkede plenumsoppsummeringen kan indikere at sammenhengene opplegget skulle forsøke å få elevene til å oppdage, kanskje kunne vært formidlet like bra og raskere med et mer tradisjonelt, lærerledet undervisningsopplegg. Da kunne de "skjulte" resonnementene raskere kommet opp. For en del av elevene var nok opplegget ikke så effektivt læringsmessig.

Elevenes besvarelser kan tyde på at funksjonsutforskning ved CAS bør suppleres med en grafisk komponent. *Alle* elevene begynner utforskningen med å studere funksjonsgrafen. Det å se grafen gir raskt mye informasjon om funksjonen og gjør det sannsynligvis enklere for elevene å stille de beste utforskningsspørsmålene. Men opplegget viser også at graftegnere kan gi vesensforskjellige opptegninger bare på grunn av akseinnstillinger, noe som kan gi grobunn for misoppfatninger eller lede det utforskende arbeidet inn på spor som gir lite uttelling læringsmessig.

Tall (2000) skriver at matematisk utforskning med teknologiske hjelpemidler har potensiale til å gi uformell, teknisk innsikt i formelle teorier, slik at den senere rekonstruksjonen av teorien kan falle lettere. Men dette krever god tilrettelegging teknisk og undervisningsmessig.

Om det utforskende opplegget presentert her førte til lettere rekonstruksjon av teorien hos elevene, er ikke målbart. Men i tråd med Tall ser jeg i ettertid at opplegget burde vært litt mindre åpent, slik et instruksjonstillegg som det følgende kunne bidratt til:

> Generelt tips til oppgavene: "Bruk bl.a. *lim*, *diff*, *solve* og andre CAS-funksjoner. Tegn funksjonene med standard akseinnstilling."
> Oppgave 1: "Bare bruk positive x-verdier."
> (Oppgave 2 og 3: Ingen endring.)

Med en slikt variant hadde kanskje flere av elevene på egen hånd nærmet seg en forståelse av hva den naturlige logaritmen er.

5.2.2 Likninger med $\ln x$

Etter innføringen av e og ln skulle vi ta fatt på likninger med $\ln x$. Her sto vi for første gang i skoleåret oppe i en situasjon der symbolregnerens regnekraft i stor grad kunne påvirke hva vi skulle arbeide med. Det viste seg nemlig fort at symbolregneren kunne løse *alle* typer likninger med $\ln x$ som vi kom bort i, ved direkte inntasting.

Oppgavene var basert på ekvivalensen $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$, kombinert med algebraferdigheter fra tidligere trinn.

Her følger to eksempler fra læreboka med tilhørende inntasting på symbolregneren:

1.

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0 \qquad x > 0$$

$$\ln x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \ln x = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} \quad \vee \quad x = e^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \sqrt{e} \quad \vee \quad x = \frac{1}{e}$$

$$L = \left\{\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right\} = \{0{,}368\ ,\ 1{,}649\}$$

```
solve(2(ln X)²+ln X-1=0)
X=e^-1
X=√e
```

2.

$$\ln 2x + \ln x^2 = \ln \frac{8}{x} \qquad (5)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln 2 + \ln x + 2\ln x = \ln 8 - \ln x$$

$$\Updownarrow$$

$$4\ln x = \ln 8 - \ln 2 = 1{,}3863$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln x = \frac{1{,}3863}{4} = 0{,}3466$$

$$\Updownarrow$$

$$x = e^{0{,}3466} = 1{,}414$$

$$L = \{1{,}414\}$$

Løs likning (5) ved å sette $\ln 2x + \ln x^2$ lik $\ln 2x^3$.

```
solve(ln (2X)+ln X²=ln (8/X))
X=√2
```

Vi ser at svarene gis direkte.

I det siste eksemplet står det i petit at eleven skal løse likningen ved å sette $\ln 2x + \ln x^2 = \ln 2x^3$. En tradisjonell penn-og-papir-løsning av denne oppgaven kunne da for eksempel være slik (min utregning):

$$\ln 2x + \ln x^2 = \ln \tfrac{8}{x} \qquad x > 0$$
$$\ln 2x^3 = \ln \tfrac{8}{x}$$
$$2x^3 = \tfrac{8}{x}$$
$$2x^4 = 8$$
$$x^4 = 4$$
$$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm 4^{\frac{1}{4}} = \pm\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = \pm 2^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}$$

Så måtte elevene forkaste den negative løsningen og ende opp med $\sqrt{2}$. Vi ser at også dette siste trinnet utføres på symbolregneren. Det virker altså som om man kan stole på at symbolregneren ikke gir falske løsninger på logaritmelikninger. Følgende oppgave styrker denne antakelsen. Vi tar bort de to første linjene fra forrige utregning og får dette:

$$2x^3 = \tfrac{8}{x}$$
$$2x^4 = 8$$
$$x^4 = 4$$
$$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm 4^{\frac{1}{4}} = \pm\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = \pm 2^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}$$

```
solve(2X^3=8/X)
X=-√2
X=√2
```

Vi ser at symbolregneren får med seg begge løsningene.

Et eksempel til, fra læreverkets oppgavesamling:

Løs likningene

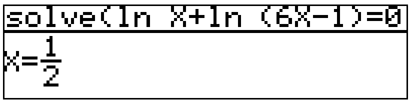
*a) $\ln x + \ln(6x - 1) = 0$

Her følger oppgavesamlingas håndskrevne ferdigløsning og symbolregnerens løsning. Igjen ser vi at diskusjon omkring eventuelle falske løsninger (løsninger utenfor likningens grunnmengde) er unødvendig ved slik bruk av symbolregneren:

$$\ln x + \ln(6x-1) = 0 \qquad x > \frac{1}{6}$$
$$\ln[x(6x-1)] = 0$$
$$x(6x-1) = 1$$
$$6x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{12}$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{12}$$
$$x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Da x må være større enn $\frac{1}{6}$, får vi

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$



Disse eksemplene viser at vi i klassen sto overfor følgende problemstilling: *Skulle* vi bruke tid på denne typen oppgaver, og i så fall, hvordan skulle vi arbeide med dem?

I denne situasjonen avgjorde jeg at vi skulle legge meget liten vekt på manuell løsning av logaritmelikninger i klassen. Begrunnelsen var at vi burde tone ned oppgaver som kan løses direkte på symbolregneren. Det hadde hele tiden vært meningen at forsøket skulle innebære mer enn bare å fortsette med tradisjonelle problemstillinger, og der det eneste nye var at elevene hadde rask tilgang til fasitsvarene ved å bruke symbolregneren. Jeg mente at dette ikke var å ta teknologien på alvor. Jeg ønsket altså at elevene skulle få nye typer problemstillinger, bedre tilpasset CAS-teknologien. Da kunne vi ikke bruke like mye tid som en vanlig klasse på prosedyrer som symbolregneren overflødiggjør. Derfor fikk elevene beskjed om at logaritmelikninger var et emne der de ikke kom til å bli vurdert på en tradisjonell måte, dvs. med oppgaver der det ble forventet manuelle løsninger. Vi så på noen eksempler på likninger, men brukte ikke tid på oppgaveregning. Hvis det ville være behov for å løse en logaritmelikning som en del av en større oppgave, så kunne elevene bruke symbolregneren og få svaret direkte.

Jeg valgte altså bevisst i undervisnings- og vurderingssammenheng å bruke symbolregneren som en "svart boks" når det gjaldt logaritmelikninger. (Men de av elevene som ønsket det, kunne selvfølgelig løse slike likninger manuelt.) Dette står i motsetning til Buchbergers hvit boks/svart boks-prinsipp som sier at elevene i svartboksfasen prinsipielt skal kunne løse oppgavene manuelt. Men min begrunnelse for "svart boks-bruken" var altså praktisk: Forsøket skulle fokusere bredest mulig på konsekvenser av CAS på oppgavetyper og læring. Jeg hadde derfor også valgt å ikke bruke todelt vurdering, dvs. å ikke inkludere vurderingssituasjoner uten CAS-tilgang. Innenfor forsøkets rammer måtte da noen tradisjonelle manuelle metoder utgå.

Valget om å ekskludere manuelle metoder innenfor logaritmelikninger gjorde det samtidig vanskelig å inkludere oppgaver fra kompetanseklasse 1 (reproduksjon), i og med at reproduksjon i denne settingen bare ville være den elementære hjelpemiddelkompetansen å kunne bruke riktige CAS-funksjoner. Målet var å fokusere på kompetanseklasse 3 (refleksjon) og 2 (sammenheng).

Man kunne tenke seg at symbolregnerens raske løsning av logaritmelikninger kunne medføre økt sannsynlighet for at elevene kunne betrakte slike likninger som objekter, og ikke bare som et utgangspunkt for prosessuell manipulering. Man kunne for eksempel tenke seg analyse av sammenhenger mellom forskjellige klasser av likninger og deres tilhørende løsninger, noe som kan gjøres vesentlig mer effektivt med CAS enn uten. Slike problemstillinger ble ikke undersøkt i forsøket.

5.2.3 Derivasjon av logaritmefunksjoner

Etter å ha gjennomgått derivasjonsreglene $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ og $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$, sto vi på nytt i en valgsituasjon. Skulle vi bruke tid på derivering av logaritmefunksjoner? Her følger tre derivasjonseksempler fra læreverket med symbolregnerens løsninger ved siden av:

Vi vil derivere $g(x) = \ln 3x^2$.

- Vi bruker kjerneregelen med $3x^2$ som kjerne.

$g(x) = \ln 3x^2 = \ln u$ der $u = 3x^2$

$g'(x) = (\ln u)' \cdot u'$

$$g'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot 6x = \frac{1}{3x^2} \cdot 6x = \frac{2}{x}$$

```
diff(ln 3X²)
2
X
```

Vi vil derivere $f(x) = 2(\ln x)^3 - 5\ln x$.

$$f'(x) = 2 \cdot 3\,(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x} = (6\,(\ln x)^2 - 5) \cdot \frac{1}{x}$$

```
diff(2(ln X)^3-5ln X
6·(ln(X))²  5
──────────-─
    X       X
```

$f(x) = x \cdot \ln(x^2+2x)$

Vi bruker produktregelen og kjerneregelen og får

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x^2+2x) + x \cdot \frac{1}{x^2+2x} \cdot (2x+2)$$

$$= \ln(x^2+2x) + \frac{x(2x+2)}{x(x+2)}$$

$$= \ln(x^2+2x) + \frac{2x+2}{x+2}$$

```
diff(Xln (X²+2X))
ln(X²+2X)+(2X+2)X
          ───────
           X²+2X
```

I de to første eksemplene gir maskinen svaret på en akseptabel form. I det andre eksemplet er det enkelt å trekke sammen de to brøkene (manuelt eller ved CAS-bruk).

Men i det tredje eksemplet skulle vi gjerne ha forkortet brøken i svaret maskinen gir. Det viser seg at ingen av CAS-kommandoene brukt på hele den deriverte funksjonen klarer å få til dette. Denne brøken bør jo gå greit å forkorte uten lommeregner, men hvis man likevel ønsker å bruke maskinen, så må man trekke ut brøken

```
(2X+2)X
───────
 X²+2X
```

og forkorte den, for eksempel med kommandoen *rFactor*.

Vi ser at elevene får de deriverte funksjonene så å si direkte uten å behøve å forholde seg til regelen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ eller derivasjonsreglene fra 2MX, som kjernereglen og $(u \cdot v)'$-regelen. *Skulle* da elevene i forsøksklassen måtte derivere logaritmefunksjoner for hånd?

Jeg valgte å besvare dette spørsmålet med *nei*. Jeg ville heller ta utgangspunkt i *hva* den deriverte forteller og hva vi kan *bruke* den deriverte til. (Dette gjaldt funksjonslæra i 3MX-kurset under ett, og ikke bare logaritmefunksjoner.) Slik jeg så det, ville et krav om manuell derivasjon innebære at CAS-verktøyets funksjonalitet ikke ble tatt på alvor. Jeg var ikke interessert i at elevene skulle bruke symbolregneren som et rent "fasitverktøy", der maskinen kun ble brukt for å sjekke de manuelle utregningene. (Dessuten vil et krav om å skrive ned alle mellomregninger ved derivering i en vurderingssituasjon, sannsynligvis på sikt bare bli møtt med CAS-programmer som *gir* brukeren disse mellomregningene, og dette gir ikke mer læring enn å skrive ned bare svaret. Se også kapittel 9.1 om trinnvise løsninger og programmering med CAS-funksjoner.)

Vi gjennomgikk noen eksempler og repeterte derivasjonsreglene fra 2MX, men på samme måte som for likninger med $\ln x$, så avtalte vi at de ikke skulle få rene derivasjonsoppgaver på prøve. Tankegangen var at de kunne derivere på symbolregneren hvis de i en oppgave hadde *behov* for den deriverte.

Igjen ser vi at et valg om å redusere tradisjonelle manuelle ferdigheter fører til at oppgaver må ta utgangspunkt i kompetanseklassene 2 og 3, og ikke 1. Vi ser også at CAS-bruk potensielt åpner for mer strukturelt arbeid i forhold til prosessuelt arbeid. Dette kan for eksempel innebære å undersøke sammenhenger mellom klasser av logaritmefunksjoner og deres deriverte funksjoner.

Beslutningen om at elevene i forsøksklassen skulle ha CAS-tilgang i alle vurderingssituasjoner, førte til at vi i emnet logaritmefunksjoner ikke arbeidet tradisjonelt med ferdighetstrening innen likningsløsning og derivering.

5.2.4 *Ulikheter med ln x*

Når symbolregneren løser likninger med $\ln x$ og deriverer logaritmefunksjoner direkte, så forventet vi det samme for *ulikheter* med $\ln x$. Men det viste seg snart at her var det en kraftig teknologisk begrensning. Symbolregneren klarte rett å slett ikke å løse slike oppgaver!

Slike begrensninger i CAS-verktøy er beskrevet av Drijvers (1999) som en mulig type negativ konsekvens av CAS-bruk. (Se kapittel 3.6.)

Eksempel (fra læreboka):

Vi skal løse ulikheten $\ln(2x+6) < \ln 16$.
$\ln(2x+6)$ er definert for $2x+6>0$. Derfor må $x \in \langle -3\,,\rightarrow\rangle$.

$$\ln(2x+6) < \ln 16$$
$$\Updownarrow$$
$$2x+6 < 16$$
$$\Updownarrow$$
$$x < 5$$

Løsningsmengden for ulikheten er altså $\langle -3\,,5\rangle$.

Symbolregneren gir her bare ulikheten tilbake på en litt annen form:

```
solve(ln (2X+6)<ln 16)
ln(2X+6)-4·ln(2)<0
```

Skal vi bruke maskinen i løsningsprosessen her, så må vi gå veien om den tilsvarende *likningen*, $\ln(2x+6)=\ln 16$. Denne tar symbolregneren uten problemer, slik vi har sett før:

```
solve(ln (2X+6)=ln 16)
X=5
```

Men likevel kommer vi ikke utenom drøfting av grunnmengden til ulikheten og fortegnssjekking på begge sider av $x=5$. Hvis eleven vil utføre grunnmengdedrøftingen på symbolregneren, kan det gjøres enkelt, ved

```
solve(2X+6>0)
-3<X
```

(Vi ser at førstegradsulikheter ikke er noe problem for maskinen.) I tillegg kommer altså fortegnssjekk i intervallene $\langle -3\,,5\rangle$ og $\langle 5\,,\rightarrow\rangle$, før man ender med $\langle -3\,,5\rangle$ som svar.

Er dette en teknologisk begrensning vi finner hos flere CAS-verktøy? Jeg prøvde å løse den samme ulikheten på symbolregneren Texas Instruments TI-89 og på dataprogrammet Derive:

TI-89 ga dette svaret:

```
olve(ln(2·x + 6) < ln(16), x)
        ln(x + 3) < 3·ln(2)
```

(Kommentar: Det første ordet skal være "solve".)
Vi ser at TI-89 heller ikke løser oppgaven.

Derive ga dette svaret:

```
SOLVE(LN(2·x + 6) < LN(16), x)
                                        -3 < x < 5
```

Vi ser at Derive løser oppgaven helt ut.

Dette eksemplet viser at det er viktig å sammenlikne forskjellige CAS-verktøy. Samme CAS-funksjon (her *solve*) kan fungere forskjellig på forskjellige verktøy.

På grunn av de teknologiske begrensningene på vår symbolregner regnet elevene en "vanlig" mengde oppgaver med ulikheter med $\ln x$. Disse oppgavene ble løst tradisjonelt, bortsett fra at elevene av og til byttet ut ulikhetstegnet med likhetstegn og brukte *solve* på den tilsvarende *likningen*, som i eksemplet over. CAS-funksjoner ble altså bare brukt i mindre deler av ulikhets-løsningene. Se kapittel 5.3.1 (oppgave 7) og 5.3.2 for analyser av prøveoppgaver med logaritme-ulikheter.

Denne gjennomgangen av logaritmeulikheter gir et eksempel på at elever kan komme i situa-sjoner der de må vise fleksibel hjelpemiddelkompetanse, dvs. være klar over hjelpemidlenes begrensning og klare å overkomme dem. Når et hjelpemiddel ikke gir den forventede hjelpen, bør andre løsningsmetoder brukes.

5.2.5 *Drøfting av sammensatte ln-funksjoner*

I klassen hadde vi nå de verktøyene som skulle til for å drøfte logaritmefunksjoner, som en naturlig avslutning av emnet. Vi arbeidet med en del forskjellige logaritmefunksjoner og brukte CAS-funksjoner på denne måten:

Deloppgave i drøftingen:	**CAS-funksjon brukt i løsningen av deloppgaven:**
Definisjonsmengde	*solve* (med ulikhet)
Nullpunkter	*solve* (med likning)
Monotoni og ekstremalpunkter	*diff* og *solve* (derivere og sette den deriverte lik 0)
Krumning og vendepunkter	*diff*, men av 2.grad
Asymptoter	*lim*
Likninger	*solve*
Ulikheter	*solve* (med den tilsvarende *likningen*)

I og med at symbolregneren forenklet en god del av regnearbeidet, fikk vi mer tid til muntlig aktivitet rundt oppgavene. Jeg stilte kontrollspørsmål mens elevene arbeidet. Dette for å bidra til elevenes begrepsforståelse. Elevene kunne løse flere oppgaver enn hvis de ikke hatt CAS-tilgang, noe som gjorde at de oftere møtte begrepene (som *nullpunkt* osv.).

Jeg presiserte at også med CAS-bruk er det viktig å forklare hvordan man kommer fram til svaret. Man må for eksempel skrive at man bruker *diff* hvis man deriverer på symbolregneren (jf. RIPA-reglene fra kapittel 2.7). Jeg presiserte også at med symbolregneren er det enda viktigere å være oppmerksom på forskjellen på eksakte og avrundede svar, i og med at den normalt gir alle svar eksakt (jf. kapittel 2.6).

Når vi innenfor emnet logaritmefunksjoner sammenlikner manuelle algoritmer og CAS-algoritmer innen likningsløsning, derivering og ulikhetsløsning, ser vi at CAS-algoritmene stort sett er delmengder av de manuelle. Dvs. at en del av trinnene i de manuelle algoritmene fjernes, fordi CAS-verktøyet gjør dem overflødige. Vi har sett at ved ulikhetsløsning fjernes det færre trinn enn ved likningsløsning og derivering.

Ved dette tidspunktet i skoleåret var planen at elevene skulle ha brukt det de hadde lært også på virkelighetsnære problemstillinger, dvs. modelleringsaktiviteter der oppstilling av oppgaver og tolkning av svar ville stått i fokus. Men det viste seg at det var vanskelig å finne eller lage gode, "realistiske" problemstillinger med logaritmefunksjoner med ln. Selv et omfattende søk etter ferdige oppgaver eller informasjon jeg kunne lage oppgaver rundt, førte ikke fram. Konsekvensen ble at vi holdt oss til "indrematematisk" bruk.

I tillegg var jeg innenfor dette emnet ikke i stand til å lage oppgaver som var CAS-unike, dvs. oppgaver som pga. formalistisk kompleksitet eller antatt tidsbruk ikke ville vært gitt i en CAS-fri setting. Slike CAS-unike oppgaver er nok krevende å produsere, og det er per i dag få eksempler å hente inspirasjon fra. (Se også kapittel 2.8.)

Jeg har her i kapittel 5.2 redegjort for arbeidet knyttet til opplæringssituasjonene innenfor emnet logaritmefunksjoner. I kapittel 5.3 analyseres elevenes besvarelser på skriftlige prøver og eksamen i emnet.

5.3 Prøver og eksamen

Dette kapitlet inneholder en gjennomgang av relevante prøveoppgaver og elevenes besvarelser av disse. Kriteriene for hvilke oppgaver som er valgt ut for analyse er beskrevet i kapittel 3.2.3.

Innsamlingspunktene:

24.10.00:	100-minutters emneprøve med hovedvekt på logaritmefunksjoner
06.12.00:	Oppsummerende terminprøve. Én oppgave med logaritmefunksjoner
04.04.01:	Oppsummerende terminprøve. Én oppgave med logaritmefunksjoner
01.06.01:	Skriftlig eksamen. Én oppgave med logaritmefunksjoner

Til en del oppgaver er mine løsningsforslag skrevet inn. Dette er de originale løsningene som ble delt ut til elevene i etterkant av prøvene. Løsningene er tatt med for å kontrastere CAS-løsninger og manuelle løsninger, og for å kunne sammenlikne elevbesvarelser med korrekte løsninger. Mine løsningsforslag er altså ikke ment som "eksemplariske" CAS-løsninger. Det er for eksempel ikke nødvendigvis slik at løsningene følger RIPA-reglene fra kapittel 2.7. (Og flere av løsningsforslagene har mangler, fordi de er laget under tidspress.)

5.3.1 Fra prøve 24.10.00

24.10.00 hadde klassen en 100-minutters prøve der hovedvekten var lagt på logaritmefunksjoner. Dette var første skriftlige vurderingssituasjon innen dette emnet. 14 elever deltok. Her følger en gjennomgang av relevante oppgaver med diskusjon rundt elevenes CAS-bruk.

Oppgave 2a

Oppgave 2
Gitt funksjonene $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ og $g(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$.
a) Bestem størst mulig definisjonsmengde til de to funksjonene.

(Poengoppnåelse 86 %, kompetanseklasse 1.)

Oppgaven kan løses enkelt med *solve*. Her er inntastingene og mitt løsningsforslag:

```
solve(X²-3X>0)
X<0
3<X
```

```
solve(X²-4X+4>0)
X<2
2<X
```

solve$(x^2 - 3x > 0)$ gir $\underline{\underline{D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle}}$
solve$(x^2 - 4x + 4 > 0)$ gir $\underline{\underline{D_g = R \setminus \{2\}}}$ (Symbolregneren gir $x < 2$ og $2 < x$, på hver sin linje.)
Dette fordi det vi tar ln av, må være positivt.

I denne sammenhengen kan vi legge merke til maskinens svar $\boxed{\begin{matrix} x < 2 \\ 2 < x \end{matrix}}$ når definisjonsmengden til $g(x)$ skulle finnes. Dette er ikke en konvensjonell skrivemåte for alle reelle tall unntatt 2.

Bare 3 av de 9 som hadde fått til oppgaven, brukte CAS. De andre løste oppgaven tradisjonelt, ved å løse ulikhetene ved regning, selv om det er mer tidkrevende og mer komplisert. Dette må vi kunne si viser manglende hjelpemiddelkompetanse. Når disse 6 elevene vet at de må finne hvilke x-verdier som gir positiv verdi i parentesene, burde de ha løst ulikhetene på enkleste måte, dvs. ved CAS. En mulig årsak kan være at elevene brukte lærebokas CAS-frie metode som mal for løsningen. Og den metoden bygger igjen på løsning av andregradsulikheter ved regning, som elevene kjenner fra 2MX. Kanskje er det slik at gamle, manuelle prosedyrerutiner ble hentet fram, og at flere elever ville valgt CAS-løsning hvis de hadde brukt symbolregner også i 2MX?

En av elevene som brukte CAS har tastet riktig, men har skrevet svarene som dobbeltulikheter som ikke følger vanlig konvensjon:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ (x^2-3x) må være større enn null

$x^2 - 3x > 0$

Løste ved hjelp av kalk. : CAS-meny, solve funksjon, inequa.

D_f: $\underline{3 < x < 0}$

$g(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$

$x^2 - 4x + 4 > 0$ Løste på samme måte som ovenfor.

D_g: $\underline{2 < x < 2}$

Dette kommer trolig av måten symbolregneren gir svarene på i disse oppgavene (se ovenfor). Det er vanskelig ut fra besvarelsen å avgjøre om eleven har forstått hva symbolregnerens svar innebærer. En prosedyre som "Identifiser uttrykket det skal tas logaritmen av, tast *solve*(uttrykket > 0) og skriv opp svaret symbolregneren gir" kan godt læres og reproduseres uten at eleven har forståelse for hva svaret innebærer matematisk.

Vi kan si at symbolregnerens skrivemåte $\boxed{\begin{array}{c} x < 2 \\ 2 < x \end{array}}$ er et eksempel på et potensielt syntaktisk problem, slik det beskrives av Drijvers (1999). Eksemplet viser at det bør være viktig i undervisningen å bevisstgjøre elevene på hva som er verktøyets spesielle notasjon, og hva som er korrekt matematisk notasjon. Utgangspunktet bør være fortrolighet med den matematiske notasjonen. Elevene bør da vurdere verktøysvarene og reformulere dem med korrekt notasjon. Eksempler som elevbesvarelsen ovenfor kan brukes i verktøyopplæringen, slik at elevene kan reflektere over hva som er galt. Man kan også vise eksempler fra flere verktøy, så elevene ser at verktøyene har forskjellige måter å gi svar på.

Hvis vi ser på elevbesvarelsen ovenfor med bakgrunn i RIPA-reglene for føring (kapittel 2.7), ser vi at reglene stort sett er fulgt, med unntak nettopp av at "CAS-terminologi" er brukt i stedet for matematisk terminologi. For øvrig ser vi at en så enkel oppgave ikke krever omfattende føring. Eleven har kort forklart hva som skal gjøres og også vist hvilken CAS-funksjon som brukes. Det er sluttsvaret, dvs. tolkningen av "CAS-terminologien", som må kritiseres.

Oppgave 4

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = (\ln x)^2 - 1 \qquad D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

a) Finn eventuelle nullpunkter til $f(x)$ eksakt.

b) Finn eventuelle asymptoter. (Du kan f.eks. bruke grenseverdifunksjonen på symbolregneren.)

(4a: Poengoppnåelse 82 %, kompetanseklasse 1.
4b: Poengoppnåelse 50 %, kompetanseklasse 1.)

4a: Igjen er oppgaven enkel å løse ved CAS, som hos denne eleven:

Nullpunkter:

Solve $(\ln x)^2 - 1$

$x = e$

$x = e^{-1}$

Vi ser nok et eksempel på at manuell likningsløsning med logaritmelikninger blir overflødiggjort når CAS brukes. Kommandoen *solve* $(\ln x)^2 - 1$ gir svaret direkte. Likevel: Bare tre elever løser oppgaven slik. Åtte elever løser oppgaven tradisjonelt. Dette er da også en likning som er enkel å løse manuelt. Vi kan vel faktisk regne med at flinke elever vil kunne løse likningen ved inspeksjon, dvs. uten skriftlig støtte. I slike oppgavetyper er forskjellene i tidsbruk små mellom CAS-løsning, manuell skriftlig løsning og løsning ved inspeksjon.

For øvrig kan vi legge merke til at det ved likningsløsning på vår symbolregner er underforstått at uttrykket skal settes lik 0. $(\ln x)^2 - 1$ er jo ikke en likning, i og med at likhetstegn og høyreside mangler. Igjen ser vi et potensielt syntaktisk problem (Drijvers 1999), men eventuelle konsekvenser av denne syntaksen er ikke undersøkt i forsøksklassen.

Vi finner også grafiske løsninger på oppgaven. Disse gir her ikke eksakt svar, og er derfor ikke fullgode svar på oppgaven. Eksempel:

$f(x) = (\ln x)^2 - 1 \quad D_f \langle 0, \to \rangle$ Graph ->, G-solv - Y-> ')cal

$(\ln x)^2 - 1 = 0$

$x = 0{,}367 \quad \vee \quad x = 2{,}718$

$y = 0 \qquad\qquad y = 0$

nullpunktene er $(0{,}37, 0) \vee (2{,}72, 0)$

Poenget med å inkludere "eksakt" i oppgaveformuleringen var nettopp at elevene skulle bli tvunget til å vise forståelse for forskjellen mellom eksakte og avrundede svar. Her grupperer CAS-løsninger og manuelle løsninger seg på den ene, "eksakte" siden, mens vi finner grafiske og numeriske løsninger på den andre, "tilnærmede" siden. Vi innarbeidet som konvensjon i forsøks-klassen at når ordet "eksakt" var med i oppgaveteksten, så skulle ikke grafiske eller numeriske metoder brukes i besvarelsen.

4b: I denne oppgaven fikk elevene hintet "Du kan f.eks. bruke grenseverdifunksjonen på symbolregneren", og det er mulig at dette hjalp mange til å bruke CAS. Hintet ble gitt fordi asymptoter og CAS-funksjonen *lim* ikke hadde blitt behandlet så grundig i klassen.

Eksempel på besvarelse:

En asymtope sett fra grafen er x0.
Jeg skrev inn ligningen i GRAPH
og så i Cas lim (Y1, x, 0) og fikk
svaret ∞ som indikerer en ~~grenseverdi~~ asymtope

En tradisjonell besvarelse av denne oppgaven kunne for eksempel sett slik ut:

$$x \to 0 \Rightarrow \ln x \to -\infty \Rightarrow (\ln x)^2 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \text{, altså er } x = 0 \text{ loddrett asymptote.}$$

En slik besvarelse krever mer forståelse enn tilsvarende CAS-løsning, fordi eleven må kjenne til noen av funksjonens egenskaper. Ved en CAS-løsning kan man komme raskere til svaret, ved å bruke kommandoen *lim*(Y1,X,*a*) direkte, der Y1 er funksjonsuttrykket og *a* er verdien man undersøker loddrett asymptote for. Verdien *a* må eleven komme fram til på egen hånd. Som regel vil *a* være et endepunkt for et definisjonsmengdeintervall. Se besvarelsen ovenfor.

Man kan innvende at verken den manuelle løsningen eller CAS-løsningen gir god nok mulighet for eleven til å vise forståelse for begrepet asymptote. Kanskje man burde be elevene gjøre rede for en annen representasjon også, for eksempel at grafen og asymptoten skulle skisseres i et koordinatsystem?

I ettertid ser jeg at denne typen oppgaver (4a og 4b) bør utvides når elevene har CAS-tilgang. Isolert sett gir ikke besvarelsene ovenfor god informasjon om elevenes begrepsforståelse. Man kunne for eksempel tenke seg at nullpunkter og asymptoter ble undersøkt med symbolregneren for et større antall funksjoner, for så å stille spørsmål ang. generalisering. CAS-bruk kan medføre en raskere vei for generaliseringer, og bør da også medføre økt krav om tekstlig utdyping. (Jf. RIPA-regelen om begrunnelser i kapittel 2.7 og Niss' og Højgaards beskrivelse av kommunikasjonskompetanse fra kapittel 2.1.) Dette vil samtidig dreie oppgavene bort fra kompetanseklasse 1 og over til 2, dvs. fra "reproduksjon" til "sammenheng". En hypotese er da at dette også vil kunne styrke elevenes oppfatning av funksjoner og funksjonsegenskaper som objekter, ikke bare prosesser, og dermed bidra til en "procept"-forståelse (se kapittel 2.2).

Oppgave 5

Oppgave 5

Etterspørselen etter en vare er gitt ved $E(p) = 900 \ln \frac{100}{p}$, der p er prisen per vare i kroner og $E(p)$ er antall varer som selges. $E(p)$ er da et helt tall. Funksjonen er definert for priser mellom 5 kr og 70 kr.

a) Hva blir etterspørselen hvis prisen er 22 kr. per vare?

b) Hva må prisen være hvis etterspørselen er 1900 varer?

Siden prisen er p kroner per vare, blir inntekten lik $p \cdot E(p)$. Vi kaller denne inntektsfunksjonen for $I(p)$.

c) Vis at vi da får $I(p) = 900p \ln \frac{100}{p}$.

d) Hvor stor blir inntekten hvis prisen er 30 kr per vare?

e) Finn $I'(p)$. Bruk denne deriverte funksjonen til å svare på hvilken pris som gir maksimal inntekt.

f) Hvor stor blir den maksimale inntekten?

CAS blir brukt av elever i oppgave b) og e), men også i disse oppgavene er manuelle løsningsmetoder er vanligere. Jeg ser nærmere på 5b) og 5e).
(5b: Poengoppnåelse 81 %, kompetanseklasse 1.
5e: Poengoppnåelse 59 %, kompetanseklasse 2.)

I 5b skal likningen $900 \cdot \ln\left(\frac{100}{p}\right) = 1900$ løses. Her kreves ikke eksakt svar (det er en varepris!), så den *numeriske solve*-funksjonen kan like gjerne brukes som *CAS-solve*-funksjonen. Men dette er det ingen elever som gjør. Bruker man CAS, må man trekke ut høyresiden (av likningen som gir det eksakte svaret) med *getright* og så runde av med *approx*. Man må altså gå en unødvendig vei fra eksakt til tilnærmet verdi.

En elev besvarer slik:

b) $E_p = 900 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$

$1900 = 900 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$ (solve $(1900 = 900 * \ln\left(\frac{100}{x}\right)$

$p = 100\sqrt[9]{e^{-19}}$ setright aprox ans

$p \approx 12$

varen må koste 12 kroner

Løser man likningen med lommeregner, er det altså her lettere å bruke numeriske metoder enn CAS. Det må karakteriseres som manglende hjelpemiddelkompetanse når *ingen* av elevene ser dette. Mellomsvar som $100\sqrt[9]{e^{-19}}$ virker litt fremmede i en numerisk, praktisk kontekst. Skulle oppgaven vært løst manuelt, ville riktignok elevene endt opp med dette svaret (eller $\frac{100}{e^{\frac{19}{9}}}$), og tastet det inn for å få en tilnærmingsverdi, men med tilgang til symbolregner bør kanskje elevene i større grad vise kompetanse i å velge en løsningsmetode som er tilpasset oppgaven?

For øvrig er det forskjeller mellom forskjellige CAS-verktøy når det gjelder innstillinger for eksakte og tilnærmede verdier. Texas TI-89 kan for eksempel være innstilt på "approximate", dvs. avrundede svar, også når CAS-funksjoner brukes.

Et annet moment er om eleven *i prinspippet* bør kunne løse denne logaritmelikningen manuelt. Med direkte overgang fra likningen $1900 = 900 \cdot \ln\frac{100}{p}$ til svaret $100\sqrt[9]{e^{-19}}$, brukes symbolregneren som en "svart boks", der sammenhengen mellom likning og svar er vanskelig å forstå uten å ha arbeidet med manuell løsning av logaritmelikninger. I følge Buchberger (1990) gjelder det her å finne et passende overgangstidpunkt mellom en "hvit boks"-fase med manuell manipulasjon og en "svart boks"-fase med effektiv CAS-bruk. Og med Goos (2003) kan man hevde at det å få svar som $100\sqrt[9]{e^{-19}}$ uten å ha vært gjennom opplæring i manuelle steg, innebærer å bruke "teknologien som herre", da elevene vanskelig kan vurdere svaret maskinen gir.

Slike problemstillinger tvinger oppgaveprodusenter til å klargjøre formålet med oppgavene. Er for eksempel formålet med oppgave 5b bare å finne hva prisen må være når etterspørselen er 1900 varer, uavhengig av metode? Eller er formålet å løse likningen $1900 = 900 \cdot \ln\frac{100}{p}$ grafisk eller numerisk på lommeregneren? Eller er det egentlig manuell likningsløsning som er formålet?

I 5e bruker en del av elevene CAS-funksjoner, men det er bare denne besvarelsen som gir full uttelling:

e $J'(p) = 900\left(\ln\frac{1}{p} + 2\ln 10 - 1\right)$

- bruker diff(900x ln(100/x), simplify, rfac

$\ln\frac{1}{p} + 2\ln 10 - 1 = 0$

$p = 100e^{-1}$ - bruker solve(ln(1/x) + 2ln10 - 1 = 0

p-linje $100e^{-1}$

900

$\ln\frac{1}{p} + 2\ln 10 - 1$ 0

$J'(p)$ 0

$p = 100e^{-1} \approx 37,80$

R: For å få maks. inntekt må pris pr. vare være ca. 37,80kr

Her viser eleven tydelig hvilke CAS-funksjoner som er brukt i de forskjellige delene av besvarelsen. Vi ser at besvarelsen er har de samme elementene i samme rekkefølge som en tradisjonell manuell framstilling, men symbolregneren tar seg av deriveringen, faktoriseringen av den deriverte og løsningen av likningen vi får når den deriverte settes lik 0. Utregningene er eksakte helt ned til nest siste linje, der $100e^{-1}$ rundes av til 37,80.

Hvis formålet med denne oppgaven var at eleven skulle vise at vi finner prisen som gir maksimal inntekt ved å drøfte fortegnet til den deriverte, så har besvarelsen ovenfor like stor verdi som en tradisjonell besvarelse. Men hvis formålet samtidig var å teste manuell derivasjon, faktorisering og likningsløsning, så vil ikke en CAS-løsning kunne gi dette.

Oppgave 6

Oppgave 6 er den eneste oppgaven på prøven der elevene bruker CAS mer enn manuelle metoder:

Oppgave 6

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 \ln x$.

a) Finn $f''(x)$ og bruk svaret til å avgjøre om grafen vender den hule siden opp eller ned for x-verdien $\frac{1}{4}$.

a) Bruk $f''(x)$ til å finne vendepunktet på grafen til *f*. Svaret skal gis med eksakte koordinater.

(6a: Poengoppnåelse 50 %, kompetanseklasse 2.
6b: Poengoppnåelse 40 %, kompetanseklasse 2.)

Mitt løsningsforslag:

6a

Bruker $diff(X \wedge 3\ln X, X, 2)$ og får $f''(x) = 6x\ln x + 5x$

$f''\left(\frac{1}{4}\right)$ blir tilnærmet $-0,83$, altså hul side ned

6b

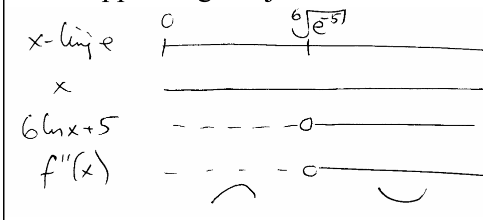
Faktoriserer den dobbeltderiverte:

rFactor gir $f''(x) = x(6\ln x + 5)$

Finner når den dobbeltderiverte er 0:

solve$(6\ln X + 5 = 0)$ gir $x = \sqrt[6]{e^{-5}}$

Setter opp fortegnsskjema:



$f\left(\sqrt[6]{e^{-5}}\right) = \dfrac{-5\sqrt{e^{-5}}}{6}$

$\left(\text{Bruker } \sqrt[6]{e^{-5}} \to A, \text{ og regner ut } f\left(\sqrt[6]{e^{-5}}\right) \text{ ved } A^3 \cdot \ln A\right)$

Vendepunkt: $\left(\sqrt[6]{e^{-5}}\ ,\ \dfrac{-5\sqrt{e^{-5}}}{6}\right)$

Tanken bak oppgave a var at den andrederiverte skulle brukes til å avgjøre om grafen hadde hul side opp eller ned i ett bestemt punkt. Da var elevene nødt til å forstå at de måtte finne et *tall* for den andrederiverte for den oppgitte *x*-verdien, og så besvare oppgaven ut fra fortegnet til dette tallet. Dette for å lage en vri på standardoppgaven "finn ved regning hvor grafen vender den hule siden opp og ned", en oppgave med tradisjonell, algoritmisk fortegnsdrøfting av den andre-deriverte. Derfor har jeg også plassert oppgaven i kompetanseklasse 2, selv om den er enkel.

I oppgave b var tanken at symbolregneren skulle hjelpe elevene til å finne ganske kompliserte, eksakte koordinater til et vendepunkt. Et vendepunkt med slike koordinater hadde man nok ikke bedt om eksakte løsninger til hvis man ikke hadde hatt CAS-verktøy tilgjengelig. Her utnyttes symbolregnerens mulighet for eksakt tallregning med rotuttrykk og potenser. Manuell utregning av andrekoordinaten til dette vendepunktet er kompleks og tidkrevende, og ikke så aktuelt som prøveoppgave.

Det viser seg at elevene normalt *ikke* bruker "standardkommandoen" for derivering, dvs.

diff(uttrykk,X,derivertgrad), her $\mathit{diff}\,(X\,\hat{}\,3\ln X, X, 2)$

Nesten alle elevene klarer å finne den andrederiverte på symbolregneren, men med ett unntak bruker de ikke standardkommandoen, men i stedet den sammensatte kommandoen

diff(*diff*(uttrykk)), her $\mathit{diff}\,(\mathit{diff}\,(X\,\hat{}\,3\ln X))$

Vi ser her et eksempel på *interoperatibilitet*, dvs. at to eller flere operasjoner settes sammen til én. Grunnen til sammensetningen kan kanskje være at man slipper syntaksen med "X,derivertgrad"? Å spesifisere derivertgrad er ikke nødvendig når man skal finne den første-deriverte på denne symbolregneren, som vist ovenfor. Eller kanskje grunnen kan være at "diffdiff" er en rask og uformell måte å uttrykke dobbeltderivering på? Uansett er det verdt å legge merke til forskjellen på CAS-dobbeltderivering og manuell dobbeltderivering: Ved manuell dobbeltderivering finner man først den deriverte og deretter den andrederiverte, mens

CAS-bruk åpner for at man kan komme direkte til den andrederiverte, uten å ha vært innom den førstederiverte på veien.

For øvrig var "diffdiff" blitt det foretrukne begrepet blant elevene i klasserommet: "Å ta diffdiff" ble et kjapt uttrykk for å dobbeltderivere. Vi ser her at maskinens operasjonsnavn, *diff*, og maskinens "alternative" syntaks, *diff*(*diff*(uttrykk)), påvirket elevene til å innføre et nytt navn for operasjonen dobbeltderivering!

Oppgave 7

I oppgave 7 skulle elevene løse en logaritmeulikhet eksakt:

Løs ulikheten $\dfrac{\ln x}{2-\ln x} \le 0$ eksakt

(Poengoppnåelse 25 %, kompetanseklasse 2.)

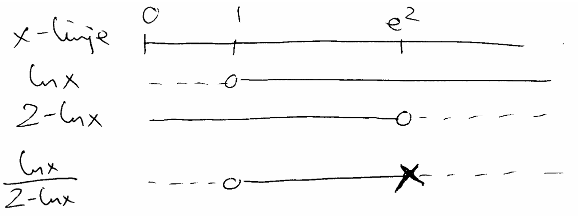
Man hadde lite bruk for CAS-funksjoner her. Mitt løsningsforslag:

Løser likningen $\dfrac{\ln x}{2-\ln x} = 0$ ved

solve$(\ln x/(2-\ln x)=0)$, som gir $\underline{x=1}$

Undersøker om nevneren er 0 for noen x-verdier:

solve$(2-\ln x=0)$ gir $\underline{x=e^2}$



$\underline{\underline{L=\langle 0\,,1] \cup \langle e^2\,,\rightarrow\rangle}}$

Det første trinnet, å finne når brøken er 0, kunne egentlig lett vært løst ved bare å se på telleren $\ln x$. For at den skal bli 0, må jo x være 1. Da kan det virke overdrevent å bruke *solve* på symbolregneren. Det samme kan man si om det andre trinnet, det å undersøke om nevneren kan bli null. En god del elever vil nok kunne løse likningen $2-\ln x=0$ bare ved inspeksjon. Man kunne derfor gått rett til fortegnsskjemaet. Min løsning ovenfor (gitt til elevene i etterkant av prøven) viser derfor noe ukritisk hjelpemiddelbruk. På den annen side: En løsning til utdeling skal kunne forstås av flest mulig elever, og man bør vel derfor normalt unngå å bruke *for* raske og "elegante" metoder. En utdelt løsning må vurderes annerledes enn en elevbesvarelse.

Hadde ikke oppgaven eksplisitt bedt om eksakt løsning, kunne elevene ha løst likningen grafisk på lommeregneren, og fått løsningen $L=\langle 0\,,1] \cup \langle 7{,}4\,,\rightarrow\rangle$. Man kunne da kanskje forvente høyere poengoppnåelse? Dette ble ikke undersøkt.

Generelt kan vi si at CAS-metoder og manuelle metoder har det til felles at de fokuserer på eksakte løsninger, i motsetning til grafiske metoder og andre numeriske metoder. Oppgave 6b og 7 ovenfor er eksempler på oppgaver der det bes om eksakte løsninger. I 6b vil tilgang til CAS påvirke kompleksiteten i løsningen i stor grad, mens i 7 vil det ikke det.

5.3.2 Fra prøve 06.12.00

Dette var en terminprøve der elevene fikk oppgaver innenfor alle emner de hadde arbeidet med. 16 elever deltok. Én oppgave omhandlet logaritmeregning:

Oppgave 2c

Løs ulikheten eksakt: $\dfrac{3-\ln x}{\ln x} \geq 3$

(Poengoppnåelse 53 %, kompetanseklasse 2.)

Igjen ser vi en oppgave som spør etter eksakt svar. Uten ordet "eksakt" i oppgaveteksten hadde man måttet godta tilnærmingsløsninger, for eksempel framkommet ved at elevene hadde brukt grafiske metoder.

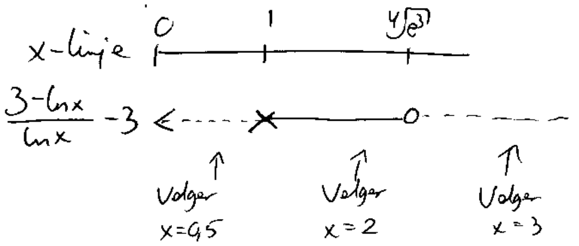
Oppgaven er ganske lik oppgave 7 beskrevet ovenfor, men vi ser at poengoppnåelsen har økt, kanskje fordi elevene ved dette tidspunktet i skoleåret hadde fått mer trening i CAS-bruk, og at emnet dermed hadde modnet mer?

Mitt løsningsforslag:

Løser $\dfrac{3-\ln x}{\ln x} = 3$ ved $solve((3-\ln \mathrm{X})/\ln \mathrm{X}) = 3)$ og får $\underline{x = \sqrt[4]{e^3}}$

Sjekker om nevneren kan være 0: $\quad \ln x = 0$ gir $\underline{x = 1}$

Vet at $x > 0,$ fordi $\ln x$ bare er definert for positive tall. Får:



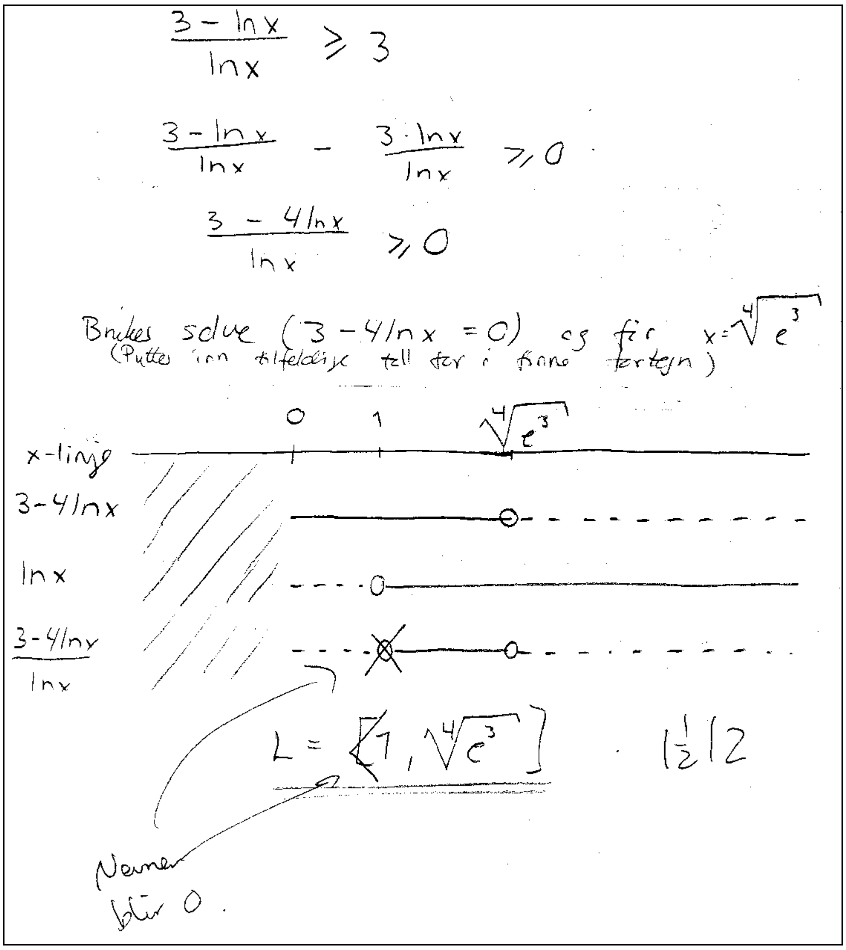
$L = \langle 1\, ,\ \sqrt[4]{e^3}\,]$

Symbolregneren kan her bare brukes for å finne løsningen på ulikhetens tilsvarende likning.

Legg for øvrig merke til at tilnærmingsløsninger som $L = \langle 1,\ 2{,}12]$ ikke ville blitt akseptert som riktig svar, da 2,12 ikke er eksakt intervallgrense, men bare en avrunding av $\sqrt[4]{e^3}$.

Vanlig strategi for elevene var først å klargjøre ulikheten for fortegnsdrøfting ved å flytte over 3 og trekke sammen til én brøk. Så lages fortegnsskjema med separate linjer for teller og nevner.

Her følger en typisk elevbesvarelse blant de riktige eller nesten riktige:

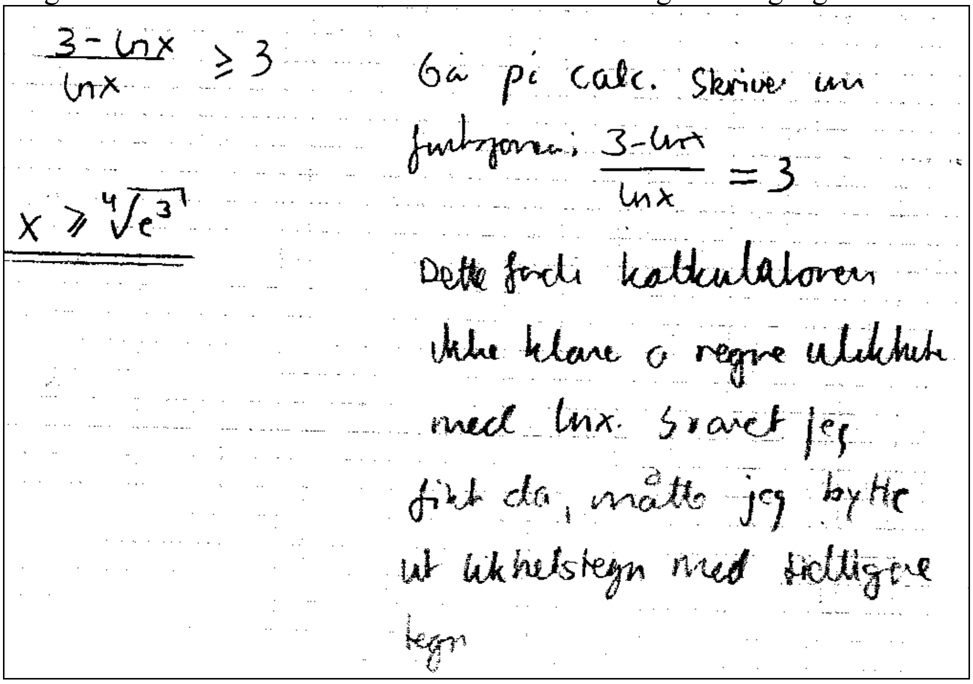


(Kommentar: Lærers retting og poenggiving inkludert nederst.)

Elevene utnytter her ikke CAS-potensialet som ligger i å løse likningen $\frac{3-\ln x}{\ln x}=3$ direkte, men omformer ulikheten først, slik at CAS bare blir brukt til å finne nullpunktet til telleren $3-4\ln x$. De bruker altså en tradisjonell metode, supplert med CAS-løsning av en enkel logaritmelikning. Men selv om min metode i løsningsforslaget har et noe mindre omfang, er den ikke radikalt annerledes enn elevenes metode, og heller ikke enn den tradisjonelle metoden der også likningen $3-4\ln x=0$ blir løst på papir. Vi ser at denne oppgavetypen ikke blir sterkt påvirket av bruk av vår symbolregner. Det å avgjøre grunnmengde for ulikheten, og å sette opp og tolke et fortegns-skjema, må regnes som mer krevende enn omformingen av ulikheten og løsningen av $3-4\ln x=0$.

For øvrig minner jeg om at den teknologiske begrensningen ved klassens symbolregner når det gjelder logaritmeulikheter ikke nødvendigvis gjenfinnes på andre CAS-verktøy. (Se kapittel 5.2.4.) Det er altså godt mulig at en oppgave som den ovenfor, vil kunne løses helt ut ved bruk av et annet verktøy.

Følgende besvarelse viser CAS-bruk kombinert med gal tankegang:



$\frac{3 - \ln x}{\ln x} \geq 3$

$x \geq \sqrt[4]{e^3}$

Gå på calc. Skriver inn funksjonen: $\frac{3-\ln x}{\ln x} = 3$

Dette fordi kalkulatoren ikke klare å regne ulikhet med lnx. Svaret jeg fikk da, måtte jeg bytte ut likhetstegn med riktigere tegn

Eleven har her løst likningen $\frac{3 - \ln x}{\ln x} = 3$ direkte på symbolregneren, men så bare byttet ut likhetstegnet med det ulikhetstegnet som sto i oppgaven. Og begrunnelsen er "fordi kalkulatoren ikke klare å regne ulikheter med $\ln x$". Et slikt verdiløst svar kunne vi også fått hvis eleven hadde brukt manuelle metoder, og for eksempel løst den tilsvarende likningen ved regning. Men vi kan kanskje regne med at hvis eleven hadde arbeidet manuelt også med logaritme*likninger* (ikke bare logaritme*ulikheter*), så ville det vært mindre sannsynlig at eleven hadde gjort en slik feil? Kanskje kan symbolregnerens begrensning når det gjelder logaritmeulikheter vanskeliggjøre løsningen? Uansett er besvarelsen et eksempel på svak hjelpemiddelkompetanse. Eleven har fått med seg at symbolregneren ikke takler logaritmeulikheter, men tolker det som at man bare kan bytte tilbake ulikhetstegnet når den tilsvarende likningen er løst. Eleven viser altså ikke forståelse for hvordan man kan gå videre med svaret $\sqrt[4]{e^3}$, og heller ikke for forskjellen mellom en likning og en ulikhet. I tillegg vises det ikke forståelse for hvor på tallinja tallet $\sqrt[4]{e^3}$ er plassert. Slik ukritisk CAS-bruk er også beskrevet av Drijvers (1999). (Se kapittel 2.6.)

5.3.3 Fra prøve 04.04.01

Dette var en omfattende terminprøve (årsprøve) der elevene fikk oppgaver innenfor alle emner de hadde arbeidet med. 16 elever deltok. Én oppgave omhandlet logaritmeregning:

Oppgave 1a

Finn likningen til tangenten til funksjonen $f(x) = (x^2 - 4) \ln (x - 2)$ i funksjonens nullpunkt.

(Poengoppnåelse 65 %, kompetanseklasse 1 eller 2 (utdypes nedenfor).)

Mitt løsningsforslag:

Legger inn $\mathrm{Y1} = (\mathrm{X}^2 - 4)\ln(\mathrm{X} - 2)$ på lommeregneren.

solve$(\mathrm{Y1} = 0)$ gir $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$.

Men vi ser at $D_f = \langle 2\ ,\rightarrow\rangle$, så bare $x = 3$ er nullpunkt.

tanLine$(\mathrm{Y1},\mathrm{X},3)$ gir $5x - 15$.

$\underline{\underline{y = 5x - 15}}$

Dette var første oppgave på prøven, og den var med hensikt laget slik at den åpnet for utstrakt CAS-bruk.

Med en CAS-fri metode kunne løsningen for eksempel sett slik ut:

Definisjonsmengde:

$D_f = \langle 2\ ,\rightarrow\rangle$, fordi i $\ln(x-2)$ må $x-2$ være positivt.

Nullpunkt:

$(x^2 - 4)\ln(x-2) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \ \vee\ \ln(x-2) = 0$

$x^2 = 4 \ \vee\ x - 2 = e^0 = 1$

$x = -2 \ \vee\ x = 2 \ \vee\ x = 3$

Da -2 og 2 er utenfor D_f, er nullpunktet $\underline{x = 3}$.

Den deriverte:

$$f''(x) = 2x \cdot \ln(x-2) + (x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x-2} = 2x \cdot \ln(x-2) + \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \underline{2x \cdot \ln(x-2) + x + 2}$$

Stigningstallet til tangenten i nullpunktet:

$f'(3) = 2 \cdot 3 \cdot \ln(3-2) + 3 + 2 = \underline{5}$

Likningen for tangenten:

$y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$y - 0 = 5(x-3)$

$\underline{\underline{y = 5x - 15}}$

Vi ser at CAS-funksjoner radikalt forenkler oppgaven. Bruk av symbolregner overflødiggjør en rekke operasjoner og avgjørelser:

- å finne nullpunktet ved regning, som her bl.a. innebærer å bruke produktregelen og å løse en andregradslikning og en logaritmelikning
- å vite at man skal derivere funksjonen, og å faktisk utføre dette, som her bl.a. innebærer å bruke $(u \cdot v)'$ -formelen og å forkorte en brøk ved faktorisering av et andregradsuttrykk
- å vite at stigningstallet til tangenten er gitt ved å sette punktets *x*-verdi inn i den deriverte, og å faktisk utføre denne regneoperasjonen
- å forstå at man skal bruke ettpunktsformelen for å finne likningen for tangenten, og å utføre dette, så man ender opp med sluttsvaret

Det eleven uansett hjelpemiddel må forstå, er at nullpunktene må finnes først. Vi ser at symbolregneren gir nullpunktene –2, 2 og 3. Dette er galt, da det bare er 3 som er et nullpunkt for funksjonen. Maskinen gir her faktisk feil svar. Det er tydelig at den begrensede grunnmengden til uttrykket $\ln(x-2)$ ikke påvirker hvilke andre løsninger maskinen gir. Denne feilen kan korrigeres av eleven ved å finne definisjonsmengden og å se hvilke av de tre mulige verdiene som ligger innenfor denne mengden.

Det ser dermed i første omgang ut som om elevene må finne definisjonsmengden uavhengig av om oppgaven løses med CAS eller ikke. Men hva hvis man bare forsøker å finne tangentlikningene suksessivt for de tre mulige *x*-verdiene –2, 2 og 3, uten å komme med definisjonsmengdebetraktninger? For de to verdiene –2 og 2 ville man fått hhv. at tanLine(Y1,X,–2) gir et svar som inkluderer den imaginære enheten **i**, og at tanLine(Y1,X,2) gir "Undefined". Dette innebærer at eleven faktisk kunne forkastet disse mulige løsningene uten å vurdere definisjonsmengden i det hele tatt! En elev besvarer oppgaven på en slik måte:

a) $(x^2-4)\cdot\ln(x-2) = 0$ ("solve" i CAS-meny)

$x = -2$
$x = 2$
$x = 3$

① "tanLine$((x^2-4)\cdot\ln(x-2), x, -2)$" = ingen løsning

② "tanLine$((x^2-4)\cdot\ln(x-2), x, 2)$" = "undefined"

Begrunn.

③ "tanLine$((x^2-4)\cdot\ln(x-2), x, 2)$" = $5x-15$

Likningen til tangenten til $f(x)$ i funksjonens nullpunkt er: $\underline{\underline{y = 5x-15}}$ (R) $2|2\frac{1}{2}$

(Kommentar: Lærers retting "Begrunn" til høyre.)

I denne besvarelsen viser ikke eleven forståelse for hvorfor det ikke kan være tangenter for *x*-verdiene –2 og 2. Eleven bare forkaster to av løsningene fordi maskinen gir feilmelding. (Derfor ble det gitt noe trekk for manglende begrunnelse.)

De følgende to eksemplene viser hvordan grafiske løsninger og CAS-løsninger kan inngå på forskjellige steder i oppgaveløsningen. Den første eleven finner nullpunktet ved CAS, men tangentlikningen grafisk, mens den andre finner nullpunktet grafisk og tangentlikningen ved CAS:

Elev1:

$f(x) = (x^2-4)\ln(x-2)$

$f(x) = 0$

bruker CAS, solve(f(x)=0), får da

$\underbrace{x=-2 \quad \vee \quad x=2}_{}$ $\quad \vee \quad x=3$

f(x) er ikke definert for x=-2 og x=2

Går inn på GRAPH, SKTCH, tangnt, x=3, y=0, EXE,

får tangentlikningen: $y = 5x - 15$

Elev 2:

$f(x) = (x^2-4)\ln(x-2)$

Går inn på Graph. Skriver inn funksjonen.

For å finne nullpunkt går jeg på G-solv, og velger Root. Svaret ble da:

x=3 y=0 (3,0) er altså nullpunktet

Går deretter på Calc. Velger calc -> tanline -> Skriver inn funksjonen: tanline((x²-4) ln(x-2),x,3

Svaret som kom ut ble:

5x - 15

y= 5x - 15 er altså likningen til tangenten til funksjonen f(x)=(x²-4)ln(x-2) i funksjonens nullpunkt.

I denne siste besvarelsen er "y=" tilføyd av lærer ved rettingen. Eleven har altså svart $5x-15$, som er symbolregnerens svar. At svaret skal oppgis som funksjonsuttrykk/likning på formen "y=", må eleven selv vite. Dette er et eksempel på at symbolregneren ikke alltid gir svaret i et format som er matematisk korrekt, og at dette kan påvirke elevenes måte å gi svar på.

Vi ser at i en oppgave som denne, åpner symbolregneren opp for flere mulige løsningsstrategier, der CAS-funksjoner kan inngå forskjellige steder i løsningen. Elevenes besvarelser på oppgaven dekker hele spekteret fra maksimal CAS-bruk, som i mitt løsningsforslag, over forskjellige varianter med manuell regning kombinert med CAS-metoder og/eller grafiske metoder, som vist ved elev 1 og elev 2, og helt til løsninger gjennomført uten bruk av lommeregner i det hele tatt.

Disse eksemplene viser at med bruk av symbolregner vil vi i noen oppgaver få større variasjon i elevbesvarelsene. Dette harmonerer med funn fra AP calculus, beskrevet i kapittel 2.8.

Til slutt en besvarelse som viser minimal forståelse for oppgaven. Eleven bruker forskjellige CAS-funksjoner, men klarer ikke å kommunisere hensikten med dem:

Finnen likningen til tangenten til

$f(x) = (x^2-4)\ln(x-2)$ i funksjonens nullpunkt:

Tasten inn i CAS:

- $\text{diff}((x^2-4)\ln(x-2) \rightarrow \frac{x^2-4}{x-2} + 2x\cdot\ln(x-2)$
- $\text{simplify}(\text{Ans} \rightarrow 2x\cdot\ln(x-2) + x + 2$
- $\text{solve}(x^2-4)\ln(x-2) \rightarrow x=-2,\ x=2,\ x=3$

Likningen for funksjonens tangent i nullpunktet er

$2x\cdot\ln(x-2) + x + 2 = k \quad k \in \{-2, 2, 3\}$

Det virker som om eleven "prøver ut" noen mulige kommandoer, uten at forståelsen er på plass. Både deriveringen og likningsløsningen er jo relevante deler av en korrekt løsning av oppgaven, så eleven har kanskje en vag forestilling om hvilke prosedyrer som skal følges, men vet tydeligvis ikke hvorfor disse skal brukes. Denne typen strategi er velkjent for lærere også i løsninger der CAS ikke brukes, og kan dermed ikke knyttes til CAS-bruk alene.

Oppsummering av oppgaven

I denne oppgaven ser vi at CAS-funksjonen *tanLine* (likningen for en tangent) overflødiggjør hele forståelsen for at en tangent har noe med den deriverte å gjøre. En ting er at også den *manuelle* algoritmen for å finne likningen for en tangent godt kan følges uten forståelse, men man må i hvert fall finne den deriverte funksjonen og bruke den til å finne stigningstallet til tangenten. På den måten blir den deriverte og tangentlikningen alltid knyttet sammen for eleven.

Vi ser løsningen av en slik tradisjonell funksjonsoppgave, en oppgave som forutsetter en viss oversikt over prosedyrer innen derivasjonsregning og en del ferdigheter innen algebra, kan bli radikalt forenklet ved bruk av symbolregneren. Oppgavens opplysninger om at det dreier seg om nullpunkt og tangentlikning er nesten nok til å finne fram til riktige CAS-funksjoner og ut fra det løse oppgaven relativt enkelt.

Vi kan si at symbolregnerbruk i denne oppgaven åpner for å betrakte den avledete tangentlikningen mer som objekt enn som resultat av regneprosesser. Med en så rask overgang til objekt som vist i mitt løsningsforslag, kan man spørre seg om det er hensiktsmessig å gi en slik oppgave i en CAS-setting. Det virker ikke rimelig å anta at denne typen besvarelser indikerer "procept"-forståelse av tangentlikningsbegrepet. Besvarelsen har mer preg av "svart boks", ved at CAS-kommandoene for å finne tangentlikninger lett kan innlæres mekanisk, uten forståelse.

Ut fra resonnementene over vil jeg si at CAS-bruk medfører at denne oppgaven flyttes fra kompetanseklasse 2 (sammenheng) til kompetanseklasse 1 (reproduksjon). Med symbolregner er oppgaven rutinepreget, mens den uten symbolregner krever en del forståelse for begrepene *den deriverte* og *tangent*, og også krever at man bruker flere standardprosedyrer i riktig rekkefølge.

5.3.4 Fra eksamen 01.06.01

17 elever deltok. Én oppgave omhandlet logaritmefunksjoner:

Oppgave 1b

Bestem eksakt for hvilke verdier av x grafen til funksjonen $g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$ vokser eller minker.

(Poengoppnåelse 54 %, kompetanseklasse 1 eller 2.)

Vi forutsetter igjen at formuleringen "Bestem eksakt" innebærer at oppgaven skal løses uten bruk av grafiske eller numeriske tilnærmingsmetoder. Man har da valget mellom tradisjonell, manuell løsning eller løsning ved bruk CAS-funksjoner. Eventuelt kan man bruke kombinasjoner av manuelle metoder og CAS-metoder, slik vi ofte så i forsøksklassen. En slik forståelse av begrepet "eksakt" i en oppgavetekst var kommunisert til elevene i klassen. (Se for øvrig diskusjon om eksakte verdier knyttet til flere oppgaver i kapittel 5.3.1 og 5.3.2.)

Mitt løsningsforslag:

Finner definisjonsmengden D_g :

Finner når $x^2 + \dfrac{x}{3} > 0$ ved *solve*(X^2+X/3 > 0), og får $D_g = \langle \leftarrow , -\tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle 0 , \rightarrow \rangle$

Finner $g'(x)$:

Bruker *diff* på symbolregneren og får $g'(x) = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3}}$

Finner når $g'(x)$ er større enn 0 og mindre enn 0:

solve(ANS > 0) gir at $x \in \langle -\tfrac{1}{3} , -\tfrac{1}{6}\rangle \cup \langle 0 , \rightarrow \rangle$, men $\langle -\tfrac{1}{3} , -\tfrac{1}{6}\rangle$ ligger utenfor D_g.

solve(ANS < 0) gir at $x \in \langle \leftarrow , -\tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle -\tfrac{1}{6} , 0\rangle$, men $\langle -\tfrac{1}{6} , 0\rangle$ ligger utenfor D_g.

Finner hvor grafen vokser eller minker:

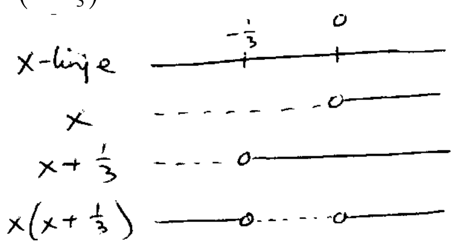
Grafen vokser i $\langle 0 , \rightarrow \rangle$ og minker i $\langle \leftarrow , -\tfrac{1}{3}\rangle$.

Uten bruk av symbolregner måtte følgende operasjoner blitt utført manuelt:

- Løsningen av ulikheten $x^2 + \frac{x}{3} > 0$:

$x^2 + \frac{x}{3} > 0$

$x\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0$



$x^2 + \frac{x}{3} > 0$ har løsningen

$\langle \leftarrow, -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

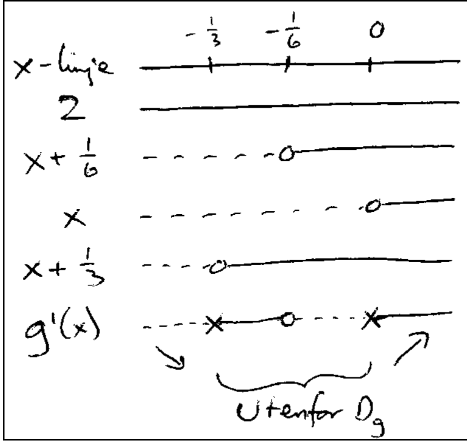
Vi ser at bruk av CAS radikalt forenkler denne deloppgaven. Felles for metodene med og uten CAS er at oppgaven krever forståelse for *at* man må finne definisjonsmengden.

- Deriveringen av funksjonen:

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{x}{3}} \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\left(x + \frac{1}{6}\right)}{x\left(x + \frac{1}{3}\right)}$$

Deriveringen for hånd krever kjennskap til kjerneregelen og til derivasjonsregelen $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}$. Dette er det ikke behov for ved derivering på symbolregneren.

- Drøftingen av den deriverte (igjen min håndskrift):

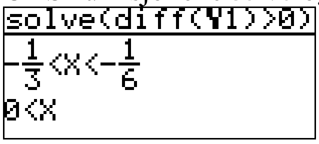


Denne manuelle drøftingen krever at den deriverte er faktorisert og at fortegnsskjema lages. I tillegg må siste linje i fortegnsskjemaet tolkes riktig, dvs. at intervallene der grafen vokser og minker må identifiseres, og at *x*-verdier utenfor definisjonsmengden ikke må tas hensyn til. Tilsvarende CAS-løsning av denne deloppgaven innebærer å løse ulikhetene $g'(x) > 0$ og $g'(x) < 0$, og igjen unngå å ta med *x*-verdier utenfor definisjonsmengden. Se ovenfor. Faktoriseringen og fortegnsskjemaet åpner for mange feil, så CAS-løsningen er betraktelig enklere enn den manuelle.

Ser vi oppgaven under ett, har vi igjen et eksempel på en oppgave der bruk av CAS-verktøy kan medføre store forenklinger i forhold til manuell løsning.

Litt mer om CAS-bruk knyttet til oppgaven, før vi ser på elevenes besvarelser:

I løsningsforlaget ovenfor kunne man faktisk gått enda lenger i CAS-bruk, og bare bedt om å få løst ulikheten "Når er den deriverte større enn null?". Dette kunne man gjort ved å kombinere CAS-funksjonene *solve* og *diff*. Symbolregneren hadde da gitt svaret slik:



Dette er et eksempel på interoperabilitet, altså flere funksjoner slått sammen til en sammensatt kommando. Her kan man altså faktisk finne monotoniegenskapene til funksjonen uten noensinne å se den deriverte funksjonen, og langt mindre drøfte fortegnet dens. (Se også kapittel 2.8, der interoperabilitet i forbindelse med AP calculus nevnes.)

Slik interoperabilitet kan tilsløre de forskjellige prosedyrene i resonnementet fram mot svaret. Å bruke kommandoen *solve*(*diff*(funksjonsuttrykk)>0) for å vise hvor en funksjon vokser, innebærer en meget forenklet metode i forhold til en tradisjonell, manuell drøfting.

Drøfting av den deriverte kan også *programmeres* på en del CAS-verktøy. For eksempel kunne man laget et program som først ba eleven skrive inn et funksjonsuttrykk. Dette kunne bli lagret på en funksjonplass, en minneplass for funksjoner. Så kunne programmet gi valgene "Finn når den deriverte er positiv" og "Finn når den deriverte er negativ". (Eller for å gå enda lengre: "Finn når grafen stiger" og "Finn når grafen synker".) Da ville eleven kun måtte huske å sjekke definisjonsmengden i de tilfellene den kan være begrenset, for eksempel ved logaritme-funksjoner og kvadratrotfunksjoner. Men faktisk er det også mulig å lage programmer som overflødiggjør regningen ved slike definisjonsmengdevurderinger. Da kunne hele oppgaven ovenfor vært løst uten en gang å bruke de riktige CAS-funksjonene *solve* og *diff*, og maskinen ville fungert som en svart boks av "svarteste type". Enkelte CAS-verktøy tillater programmering med CAS-funksjoner, for eksempel symbolregneren Texas TI-89, mens andre ikke gjør det, for eksempel Casio Algebra FX 2.0, som var symbolregneren forsøksklassen brukte. Se også kapittel 9.1, som omhandler trinnvise løsninger og CAS-programmering.

Så over til elevenes besvarelser av oppgaven:

Bare én av elevene som deriverte funksjonen, gjorde det manuelt. Alle de andre brukte CAS-funksjonen *diff*. Vi ser altså at her mot slutten av skoleåret var *diff* meget godt etablert som den foretrukne deriveringsmetoden i klassen.

Noen elever løser det meste riktig, men tar ikke hensyn til definisjonsmengden når sluttsvaret gis. Dette kan skje både med og uten bruk av CAS i drøftingen av fortegnet til den deriverte.

Først et eksempel *med* slik CAS-bruk:

$g'(x) = \dfrac{6x+1}{3x^2+2x}$ CAS → DIFF[g(x)] → SIMPLFY ANS

$\dfrac{6x+1}{3x^2+2x} > 0$

CAS → SOLVE

$-\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{6}$

$0 < x$

$\dfrac{6x+1}{3x^2+2x} < 0$

$x < -\frac{1}{3}$ CAS → SOLVE

$-\frac{1}{6} < x < 0$

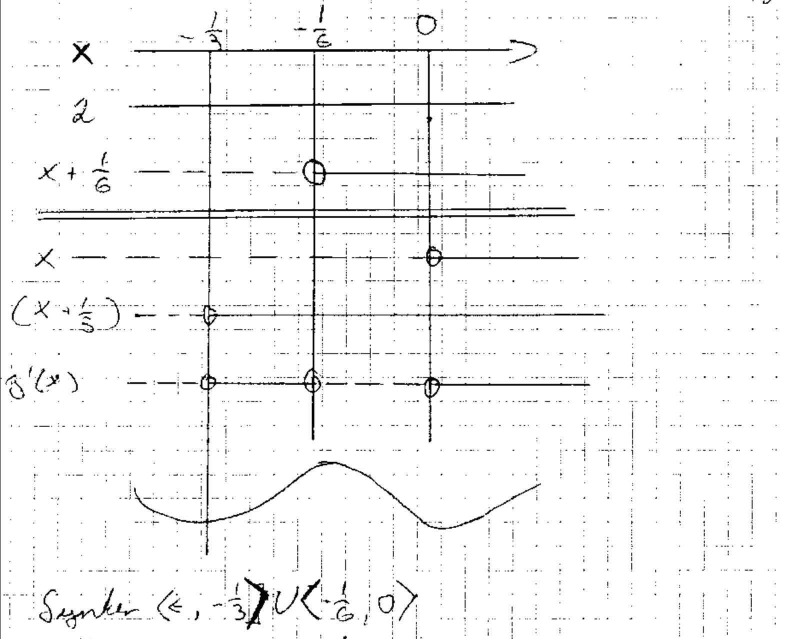
Grafen til g(x) øker når $-\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{6}$ og når $x > 0$.

Grafen til g(x) minker når $x < -\frac{1}{3}$ og når $< x < 0$.

Så et eksempel *uten* slik CAS-bruk:

Bruker CAS diff g(x) og får ; $g'(x) = \dfrac{2x+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{2x}{3}}$

↳ r-factor ans og får; $g'(x) = \dfrac{2(x+\frac{1}{6})}{x(x+\frac{1}{3})}$



Synker $\langle \leftarrow, -\frac{1}{3}] \cup \langle -\frac{1}{6}, 0\rangle$

Vokser $\langle -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$

Dette er som forventet, da vi jo har vist tidligere at CAS-funksjonene *diff* og *solve* i dette tilfellet ikke tar hensyn til definisjonsmengden til funksjonen $\ln\left(x^2 + \frac{x}{3}\right)$. Bruk av CAS-funksjoner på forsøksklassens symbolregner er dermed ikke til hjelp for å unngå denne feilen.

En del elever bruker fortegnsskjema selv om fortegnet til den deriverte kan drøftes på symbolregneren. Generelt utnytter ikke elevene CAS-potensialet fullt ut. Dette er også beskrevet av Drijvers (se kapittel 2.6).

En elev bruker CAS, finner $g'(x)$, og setter dette uttrykket lik 0. Svaret $x = -\frac{1}{6}$ brukes ikke videre. Deretter følger det riktige svaret på oppgaven, men da tydeligvis løst ved grafiske metoder (Trace på grafbildet):

$g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$

$g'(x) = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3}}$ Bruker CAS, CALC, diff

diff(g(x), x)

$g'(x) = 0$ Bruker SOLVE under CAS, TRM

$x = -\frac{1}{6}$ solve(g'(x) = 0, x)

g(x) vokses i området <0, →> Bruker Trace på graf

g(x) minker i området <←, $-\frac{1}{3}$>

Besvarelsen viser at eleven forstår hva det vil si at en graf stiger eller synker, og eleven kan også finne dette grafisk. Men besvarelsen viser ikke om eleven forstår sammenhengen mellom disse grafegenskapene og den deriverte. Kanskje eleven prøver "litt av hvert" som en strategi, for å få "i hvert fall noe riktig"?

En annen elev har en tilsvarende feil, men går ikke over til noen grafisk løsning:

$g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$

bruker diff på CAS

$g'(x) = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3}}$

bruker solve $g'(x) = 0$

$x = -\frac{1}{6}$

Og en tredje elev konkluderer galt ut fra likningsløsningen $x = -\frac{1}{6}$:

b)

$g(x) = \ln\left(x^2 + \frac{x}{3}\right)$

$g'(x) = \frac{6x+1}{3x^2+x}$

* Fant $g'(x)$ ved å gå på Cas, calc, diff, og uttrykket.
* Satte solve $g'(x)=0$, da ble $x = -\frac{1}{6}$

x-linje $-\frac{1}{6}$

$g'(x)$

Grafen synker: $\langle \leftarrow, -\frac{1}{6} \rangle$

Grafen stiger: $\langle -\frac{1}{6}, \rightarrow \rangle$

Noen elever har mangelfull begrunnelse for at grafen ikke er definert i $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$. De bare slår det fast uten begrunnelse, som her:

Grafen har ingen verdier mellom: $[-\frac{1}{3}, 0]$

Dette tyder igjen på at grafiske eller numeriske metoder er brukt, uten at det er gjort rede for i besvarelsen. Begrunnelser for trinnene i løsningen mangler.

I det følgende eksemplet ser vi at en elev blander sammen monotoniegenskaper med fortegnet til funksjonen. Og igjen er det sannsynlig at uuttalte grafiske betraktninger ligger bak konklusjonen:

Bruker Cas, setter inn. Solve $g(x) = 0$ og får de eksakte verdiene:

$x = \frac{-\sqrt{37}}{6} - \frac{1}{6}$

$x = \frac{\sqrt{37}}{6} - \frac{1}{6}$

Grafen vokser for x verdier fra $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$ og utover

$\left\langle \frac{\sqrt{37}-1}{6}, \rightarrow \right\rangle$

Grafen minker for x verdier:

$\left\langle \leftarrow, \frac{-\sqrt{37}-1}{6} \right\rangle$

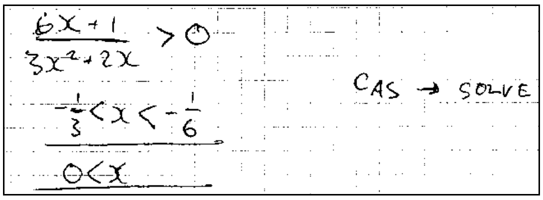
h: $\left\langle \leftarrow, \frac{-\sqrt{37}-1}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{37}-1}{6}, \rightarrow \right\rangle$

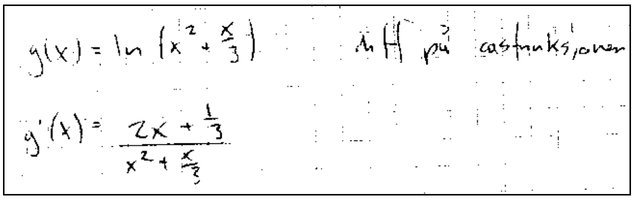
Eleven ville nok gjort samme feil også hvis oppgaven hadde vært løst uten bruk av symbolregner, forutsatt at likningen $g(x) = 0$ med de to "stygge" nullpunktene hadde blitt løst riktig, som her:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + \tfrac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \tfrac{x}{3} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + \tfrac{x}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{37}-1}{6} \vee x = \frac{-\sqrt{37}-1}{6}$$

Man kan spekulere over om det at CAS-verktøy gir så raske og "kraftige" svar, kan gjøre at eleven reflekterer mindre over svarene? Kanskje en mer tidkrevende, manuell metode for noen elever vil bidra til å forebygge noen feil, ved at eleven får tid til å tenke seg grundigere om og reflektere rundt prosessene som utføres? Jf. prosess/objekt-teorien (Gray & Tall, 1994), der prosessuelt arbeid sees på som en forutsetning for "procept"-forståelse. Men man kan motsatt tenke seg at den tiden CAS-bruken frigjør, kan brukes til reflekterende aktiviteter, som dermed kan styrke begrepsforståelsen. Dette er hypoteser som ikke er undersøkt i forsøksklassen. Men uansett viser eksemplene på elevbesvarelser gitt her i kapittel 5.3 at symbolregnerens "palett" av kraftige funksjoner meget lett kan brukes uten den nødvendige refleksjonen. Det å velge en CAS-funksjon som *solve* uten å kunne begrunne det, kan sammenliknes med det å velge en innøvd, manuell algoritme uten å kunne begrunne den.

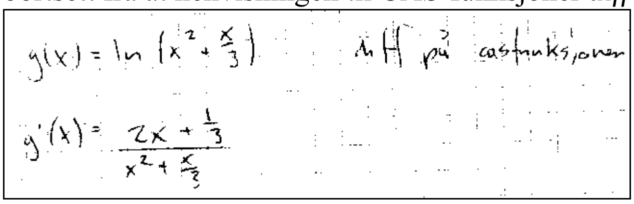
Tilbake til oppgave 1b:
Det er mange eksempler blant besvarelsene på meget sparsom føring når det gjelder valg av CAS-funksjon og begrunnelser for disse valgene. Følgende to besvarelser viser hvor knapt det kan bli:

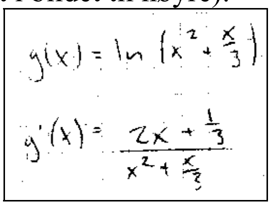




Her skriver elevene kun opp hvilken CAS-funksjon som er brukt (*solve* eller *diff*). Elevene kommuniserer ikke hvorfor akkurat denne er valgt, og ikke hvordan det er tastet inn på symbolregneren. Hvis en elev ender opp med galt svar med en slik føring, har læreren liten mulighet for å finne ut hva eleven har gjort eller tenkt. Besvarelsene bryter med RIPA-regelen om begrunnelser (se kapittel 2.7).

Man kan også spørre seg om læreren skal godta føring helt uten henvisning til CAS-funksjoner, for eksempel om de følgende to besvarelsene skal vurderes likt (dette er identiske besvarelser, bortsett fra at henvisningen til CAS-funksjoner *diff* er klippet bort i bildet til høyre):





En mulig konsekvens er at man i størst mulig grad bør stille kontrollspørsmål, for å gi eleven anledning til å vise virkelig forståelse for det resultatet eleven har kommet fram til. Man kan også kreve utdypninger av hvorfor eleven velger de aktuelle metodene. Generelt kan vi si at CAS-teknologien åpner for en dreining mot begrunnelser, fordi selve det regnetekniske blir sterkt forenklet.

Igjen ser vi et eksempel på at CAS-bruk medfører at en oppgave flyttes fra kompetanseklasse 2 (sammenheng) til kompetanseklasse 1 (reproduksjon). Med symbolregner er oppgave 1b rutinepreget, mens den uten symbolregner krever en forståelse for sammenhengen mellom den deriverte og grafen, og også krever at man bruker flere standardprosedyrer (som derivering, faktorisering og drøfting ved fortegnsskjema) i en bestemt rekkefølge.

Her i kapittel 5 har elevenes arbeid med logaritmefunksjoner i klasserommet og på prøver og eksamen blitt behandlet. Kapittel 6 ser nærmere på elevholdninger, slik de kommer til uttrykk gjennom besvarelser på spørreskjemaer, og kapittel 7 tar for seg forsøksklassens CAS-tilpassede eksamen.

6. Holdninger: Elevenes skriftlige vurdering av forsøket

Elevene i forsøksklassen besvarte fire spørreskjemaer:

> Skjema 1: I starten av skoleåret. Innledende holdninger til forsøket og til bruk av symbolregner.
>
> Skjema 2: Halvveis ut i skoleåret. Vurderinger av forsøket, av sin egen bruk av symbolregner og generelt om bruk av symbolregner i videregående skole.
>
> Skjema 3: Ved slutten av skoleåret. Stort sett samme innhold som skjema 2, for å kunne undersøke ev. holdningsutvikling.
>
> Skjema 4: Ved slutten av skoleåret. Om holdninger til eksamensordning. Ikke vurdering av forsøket som sådan.

Skjema 2 og 3 behandles her. Skjema 1 er behandlet i kapittel 4.2 og skjema 4 behandles i kapittel 7.2.

6.1 Elevenes vurdering halvveis (spørreskjema 2, 13.12.00)

6.1.1 Skjemaet

Omtrent da første halvdel av skoleåret var gjennomført, besvarte elevene følgende spørsmål:

1. Hvor godt synes du undervisningen og prøvene er blitt tilrettelagt for bruk av symbolregneren? (Hva er bra og hva kunne vært bedre?)

2. Med den erfaringen du nå har, hvordan vurderer du *din* bruk av symbolregneren i forhold til vanlig grafisk lommeregner? Ta altså utgangspunkt i *dine egne* positive erfaringer (om noen) og negative erfaringer (om noen).

3. Hvordan vurderer du bruk av symbolregner i videregående skole *generelt*? Gi argumenter *for* symbolregner (i den grad du har slike argumenter) og *mot* symbolregner (i den grad du har slike argumenter).
   Har du noen mening om disse maskinene bør tillates eller ikke? Har din eventuelle holdning til dette spørsmålet endret seg i løpet av denne høstterminen?

4. Snakker du med andre (utenom klassen) om prosjektet? I så fall: Hvem snakker du med, hvordan legger du det fram og hva slags reaksjoner får du?

5. Er det noe du er betenkt over når det gjelder gjennomføringen av prosjektet?
   Det kan f.eks. være spørsmål knyttet til
   - min mulighet for å sikre din anonymitet i hovedoppgaven
   - den spesialtilpassede eksamenen
   - forholdet til den andre 3MX-klassen
   - det at du ikke ble spurt om å være deltaker i prosjektet
   - annet?

6. Jeg ønsker å gjennomføre noen intervjuer med noen elever (3-5 stk.) i klassen. Disse vil bli innspilt, men svarene blir anonymisert. Kun jeg og ev. veilederen min vil høre på intervjuene, og etter at det jeg anser som det viktigste fra intervjuet er notert ned, vil opptaket bli slettet.
Jeg regner med at intervjuet vil ta 20-40 minutter, og tidspunktet vil avtales i samarbeid med deg. Vi kan ta det i en felles fritime eller vi kan ordne fri fra en annen time. Er du positiv eller negativ til å være med på et slikt intervju?

6.1.2 Begrunnelse

Hensikten med spørreskjemaet var todelt:

1 Å gi alle elevene mulighet for å tilbakemelde hva de mente om forsøket. En skriftlig vurdering sikrer at alle kommer til orde. I og med at vi hadde halve skoleåret igjen, kunne gjennomføringen bli justert når det gjaldt undervisning og prøver. Elevene fikk også her en anledning til å komme med ev. alvorlige innvendinger mot forsøket og indirekte en mulighet for å trekke seg. På denne måten ble også et etisk aspekt ved forsøket forsøkt ivaretatt. (Skjemaet og elevenes besvarelser kan dermed også sees på som en forlengelse av kapittel 3.1, der rammene for forsøket er beskrevet.)

2 Å skaffe data om elevenes holdninger til bruken av symbolregner, som et supplement til dataene fra de skriftlige prøvene. Jeg var ute etter elevenes holdninger til sin egen bruk og holdninger til generell bruk i videregående skole.

Skjemaet ble ikke besvart anonymt. Ikke-anonymitet ble valgt for bedre å kunne følge opp elever som hadde eventuelle innvendinger, og for å følge opp skriftlige svar i eventuelle intervjuer.

6.1.3 Analyse

Alle de 17 elevene var tilstede og svarte. Elevenes ordrette svar eller forskjellige typer svar er satt i kursiv.

<u>Spørsmål 1</u>
"Hvor godt synes du undervisningen og prøvene er blitt tilrettelagt for bruk av symbolregneren? (Hva er bra og hva kunne vært bedre?)"
Godt tilrettelagt: 13 elever
Positivt med eget hefte til bruk på prøver og ellers: 3 elever
Vi burde hatt en systematisk skrivemåte for føring ved bruk av symbolregner: 1 elev
Negativt at vi må føre så nøye: 1 elev
Noen prøveoppgaver blir for enkle: 1 elev
Det burde vært lagt mer vekt på forståelse: 1 elev
Savner mer regning for hånd: 1 elev
Negativt at bøkene ikke er tilpasset symbolregner: 1 elev
Ved sykdom er det vanskelig å lære seg nye funksjoner på symbolregneren selv: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Fint med oppgaver som ikke bare går på utregning.*

Svarene på spørsmål 1 tyder på at den relativt omfattende hjelpen i bruken av symbolregner, i form av instruksjonshefte og nøye felles gjennomgang, ble positivt mottatt. Det var heller ingen store motforestillinger mot hvordan prøvene var lagt opp, bortsett fra noen innvendinger ang. føring og angående savn av flere oppgaver som vektlegger forståelse.

Spørsmål 2
"Med den erfaringen du nå har, hvordan vurderer du *din* bruk av symbolregneren i forhold til vanlig grafisk lommeregner? Ta altså utgangspunkt i *dine egne* positive erfaringer (om noen) og negative erfaringer (om noen)."

Positive erfaringer:
Slipper å gjøre mye utregninger / Slipper regelpugging / Sparer tid: 11 elever
Uspesifiserte positive svar: 5 elever
Enklere å bruke enn grafisk lommeregner: 2 elever
Slipper slurvefeil: 1 elev
Har lært nye måter å utføre beregninger på: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Jeg har blitt glad i symbolregneren min.*

Negative erfaringer:
Blir passiv i faget: 3 elever
Gir mangel på basiskunnskap: 2 elever
Tendens til å bruke CAS for mye: 1 elev
Skaper avhengighet: 1 elev
CAS gir noen ganger veldig lange uttrykk: 1 elev
Urettferdig at noen har laget programmer for å sjekke svar: 1 elev
Komplisert å bruke symbolregneren: 1 elev
Kan utelate småting i inntastingen, som ødelegger beregningen: 1 elev
Litt å sette seg inn i: 1 elev
Batteriet blir fort brukt opp: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Prøvene fokuserer på tolkninger mer enn beregninger. Man får inntrykket av at man blir behandlet som en som ikke vet hva man har regnet ut.*

Svarene på spørsmål 2 viser en overvekt av positive erfaringer, der en gjenganger er den reduserte tidsbruken ved rutineoperasjoner. Det regnes som positivt at denne sparte tiden kan brukes for å gå videre med stoffet. Men det også en del negative erfaringer, der de viktigste går på at symbolregneren passiviserer og ikke gir dyp nok kunnskap. Det er nok en tendens til at en del elever føler at det er noe i matematikken de går glipp av når det ikke er lagt begrensninger på CAS-bruken.

Det utvalgte positive sitatet kan tyde på en holdning til maskinen som "partner", eller kanskje "forlengelse av egen kropp"? Det utvalgte negative sitatet kan uttrykke en holdning om at beregninger er det viktigste i matematikken, og at tolkningskrav nærmest innebærer en undervurdering av eleven.

Spørsmål 3

"Hvordan vurderer du bruk av symbolregner i videregående skole *generelt*? Gi argumenter *for* symbolregner (i den grad du har slike argumenter) og *mot* symbolregner (i den grad du har slike argumenter).
Har du noen mening om disse maskinene bør tillates eller ikke? Har din eventuelle holdning til dette spørsmålet endret seg i løpet av denne høstterminen?"

(Det er underforstått i dette spørsmålet at "tillatelse" betyr tillatelse på *eksamen*. Det ble ikke problematisert at eksamensreglene i høy grad vil være bestemmende for hjelpemiddelbruken gjennom skoleåret.)

Argumenter *for* symbolregner:

Sparer tid, og kan dermed gå videre i matematikken: 6 elever
Mer likt verktøy man vil møte i "det virkelige liv": 5 elever
Gjør deler av matematikken enklere: 3 elever
Gir mer plass til tolkning og forståelse: 2 elever

Argumenter *mot* symbolregner:

Gir mindre forståelse: 5 elever
Kan skape avhengighet, også ved enkle stykker: 3 elever
Bør ikke brukes hvis man ikke kan bruke den i videre studier: 1 elev
Matematikken skal hovedsakelig være matematisk, ikke teknisk: 1 elev
Det kan være stykker det er viktig å kunne regne for hånd: 1 elev

Antall som mener symbolregner bør tillates: 12
Antall som mener symbolregner ikke bør tillates: 3

Bare to elever svarte på spørsmålet om ev. endringer av holdninger til tillatelse i løpet av terminen: Én elev fra negativ til nøytral og én fra positiv til negativ.

Utvalgt sitat:

> *Læreren må være flink til å vise hvordan oppgavene skulle vært gjort uten symbolregneren.*

Svarene på spørsmål 3 viser en klar positiv holdning til at symbolregner skal brukes i videregående skole. Hovedargumentene er at man sparer tid, og dermed får mulighet for å lære mer, og at bruk av symbolregner gjør skolen mer virkelighetsnær.

Men vi ser også at tre av elevene fortsatt vil ha forbud mot symbolregner, og en god del elever kommer med argumenter mot bruken. Hovedargumentene her er at symbolregnerbruk kan medføre mindre matematisk forståelse og større uselvstendighet.

Det utvalgte sitatet er fra en symbolregnerpositiv elev, men tyder på en uro over at man kan gå glipp av sentrale poenger og prosedyrer ved bruk av symbolregneren. Sitatet tyder på at eleven ikke ønsker symbolregneren brukt som en "svart boks" i innlæringsfasen.

Vi kan vel regne med en viss skjevhet i retning av positive svar på spørsmål 2 og 3, i og med at symbolregneren jo var "deres" hjelpemiddel dette skoleåret. Et forsøksprosjekt fører vel ofte til forsterkning av positive holdninger. Svarene må sees i lys av en slik mulig effekt.

Sammenlikner vi med spørreskjema 1 (kapittel 4.2), ser vi ingen klar tendens til at elevene har endret holdninger i løpet av det første halvåret. Elevene skriver ned mange av de samme argumentene for og i mot CAS-bruk som de gjorde i august, men nå mer konkret formulert.

Spørsmål 4

"Snakker du med andre (utenom klassen) om prosjektet? I så fall: Hvem snakker du med, hvordan legger du det fram og hva slags reaksjoner får du?"

Hensikten med dette spørsmålet var dels å få innblikk i hvor engasjerte elevene var i forsøket, dels å få korrektiver på den mulige overvekten av positive holdninger man kunne forvente fra elevene selv.

Kort oppsummering av svarene: De fleste snakker med noen om prosjektet. Svarene tyder på at mange er ganske engasjert i forsøket. De får en del positive reaksjoner, typisk angående virkelighetsnærhet, og en del negative reaksjoner, typisk angående faren for mindre forståelse. Andre elever reagerer ofte med misunnelse.

Utvalgt sitat:

> *Sier til venner: "Dritkult i matte. Har fått kalkulator som gjør alt arbeidet for meg. Trenger ikke å gjøre noe. Skikkelig enkelt."*
> *De sier: "Heldige jævel. Skulle ønske vi kunne bruke sånt."*
> *Sier til foreldre: "Er med på prøveprosjekt i matte. Tar i bruk ny teknologi som tillater oss å utvide pensum og lære matte mer effektivt."*
> *De sier: "Så flott, da. Fint at du får denne muligheten."*

Bedre enn dette utvalgte sitatet kan vel knapt spennet i holdninger til symbolregnerbruk synliggjøres. Elevens ironiske og morsomme spissformuleringer tyder på høy grad av refleksjon rundt de mulige konsekvensene av bruken.

Spørsmål 5

"Er det noe du er betenkt over når det gjelder gjennomføringen av prosjektet?
Det kan f.eks. være spørsmål knyttet til
- min mulighet for å sikre din anonymitet i hovedoppgaven
- den spesialtilpassede eksamenen
- forholdet til den andre 3MX-klassen
- det at du ikke ble spurt om å være deltaker i prosjektet
- annet?"

Ikke betenkt over noe: 9 elever
Usikkerhet ang. eksamen: 3 elever
Betenkt over hvordan dette vil påvirke videre utdanning der matematikk inngår: 3 elever
Betenkt over ikke å ha blitt spurt: 3 elever
Betenkt over forholdet til den andre 3MX-klassen: 2 elever

Disse svarene viser at over halvparten av elevene ikke hadde betenkeligheter. Usikkerheten ang. eksamen ble tatt opp av meg i klassen, der jeg understreket at de ikke ville få overraskelser i oppgavetyper i forhold til prøveoppgavene de hadde hatt gjennom skoleåret. Betenkeligheten angående deltakelse og den parallelle 3MX-klassen ble tatt opp ved at jeg understreket at det var mulig å bytte klasse. Ingen av elevene valgte å gå videre med dette. Betenkeligheten ang. framtidig utdanning var det vanskeligere å møte, i og med at det er ulik praksis ved forskjellige universiteter og høyskoler nasjonalt og internasjonalt. Her kunne jeg ikke underslå at dette var en relevant betenkning.

Spørsmål 6

"Jeg ønsker å gjennomføre noen intervjuer med noen elever (3-5 stk.) i klassen. Disse vil bli innspilt, men svarene blir anonymisert. Kun jeg og ev. veilederen min vil høre på intervjuene, og etter at det jeg anser som det viktigste fra intervjuet er notert ned, vil opptaket bli slettet.
Jeg regner med at intervjuet vil ta 20-40 minutter, og tidspunktet vil avtales i samarbeid med deg. Vi kan ta det i en felles fritime eller vi kan ordne fri fra en annen time. Er du positiv eller negativ til å være med på et slikt intervju?"

Fra svakt positiv til udelt positiv: 14 elever
Fra svakt negativ til udelt negativ: 3 elever

Bakgrunnen for spørsmålet var at jeg opprinnelig hadde planlagt å gjennomføre intervjuer. I etterkant vurderte jeg det slik at spørreskjemadataene og prøvedataene var utfyllende nok, så ingen intervjuer ble avholdt.

6.2 Elevenes sluttvurdering (spørreskjema 3, 15.05.01)

6.2.1 Skjemaet

1. Hvor godt synes du undervisningen og prøvene er blitt tilrettelagt for bruk av symbolregneren? (Hva er bra og hva kunne vært bedre?)
2. Med den erfaringen du nå har, hvordan vurderer du *din* bruk av symbolregneren i forhold til vanlig grafisk lommeregner? Ta altså utgangspunkt i *dine egne* positive erfaringer (om noen) og negative erfaringer (om noen).
3. Hvordan vurderer du bruk av symbolregner i videregående skole *generelt*? Har du noen mening om disse maskinene bør tillates eller ikke? Har din eventuelle holdning til dette spørsmålet endret seg i løpet av dette skoleåret?
4. Mener du at den læreboka vi bruker er godt tilpasset bruk av symbolregner?
5. Mener du at den eksisterende læreplanen i 3MX er godt tilpasset bruk av symbolregner?
6. Er det noe annet du vil skrive? Ordet er fritt:

6.2.2 Begrunnelse

Noen av spørsmålene var overlappende med spørreskjema 2, for å kunne sammenlikne responsen på tilsvarende spørsmål over tid. Det at det hadde gått et halvt år mellom hvert skjema, ville forsterke troverdigheten til funnene.

Tanken var at elevene etter et helt skoleårs bruk, skulle få anledning til å komme med mer generelle vurderinger, som kanskje kunne være av verdi for andre i utdanningssystemet. Det gjaldt spørsmål om tilpasning av undervisning og prøver, om læringsutbytte, CAS-tillatelse og om CAS vs. lærebok og læreplan. Mer detaljert undersøkelse om foretrukket eksamensform ble utsatt til spørreskjema 4 (se kapittel 7.2).

6.2.3 Analyse

16 av elevene var til stede. Alle besvarte.

Spørsmål 1

"Hvor godt synes du undervisningen og prøvene er blitt tilrettelagt for bruk av symbolregneren? (Hva er bra og hva kunne vært bedre?)"

Identisk spørsmål som på skjema 2.

Godt tilrettelagt: Alle 17 elever
Positivt med egen hefte til bruk på prøver og ellers: 3 elever
Savner repetisjon. Glemmer lett hvilke funksjoner som kan brukes hvor: 1 elev
Man burde bruke en bestemt måte å forklare utregningene på med CAS: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Jeg føler at på prøver gir bruken av symbolregner oss tid til å arbeide mer med teorien og anvendelser bak matten, i stedet for å bruke mye tid på lang utregning.*

Svarene på spørsmål 1 er meget positive og også viser en klar bedring i forhold til spørreskjema 2. Dette indikerer at det innenfor en slik elevgruppe og med slike matematiske emner er mulig å tilrettelegge undervisning og prøver i forhold til CAS-bruk. Det var tydelig at nå helt på slutten av skoleåret hadde CAS-bruken virkelig "satt seg" hos elevene.

Spørsmål 2

"Med den erfaringen du nå har, hvordan vurderer du *din* bruk av symbolregneren i forhold til vanlig grafisk lommeregner? Ta altså utgangspunkt i *dine egne* positive erfaringer (om noen) og negative erfaringer (om noen)."

Dette spørsmålet ble også gitt på skjema 2, halvveis i skoleåret.

Positive erfaringer:
Slipper å gjøre mye utregninger / Slipper regelpugging / Sparer tid: 14 elever
Større nøyaktighet, slipper småfeil: 2 elever
Fører til bedre forståelse: 1 elev
Like enkelt å bruke som grafisk lommeregner: 1 elev
Symbolregneren gjør det raskt og enkelt å drøfte en funksjon: 1 elev
Inspirerende, morsommere: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Veldig greit å bruke symbolregner for å hoppe over tunge og kjedelige utregninger som bare krever at man pløyer gjennom et sett med regler.*

Negative erfaringer:
Blir passiv i faget: 2 elever
Gir mangel på basiskunnskap: 2 elever
Tidkrevende å måtte skrive opp hvordan man bruker CAS på prøver: 2 elever
Mye å holde styr på: 2 elever
Blitt mer avhengig av kalkulator: 1 elev

Utvalgt sitat:

> *Man får gjort unna ting lettere, samtidig som man "går glipp" av den grunnleggende matten, noe man tar for gitt når man bruker symbolregner.*

Svarene på spørsmål 2 er meget like det de var et halvt år tidligere, men man kan kanskje lese ut en liten tendens til enda mer positive svar enn sist. Vi ser altså fremdeles en meget positiv holdning, kombinert med en viss bekymring for at symbolregnerbruken medfører at det er noe man ikke lærer.

<u>Spørsmål 3</u>

"Hvordan vurderer du bruk av symbolregner i videregående skole *generelt*? Har du noen mening om disse maskinene bør tillates eller ikke? Har din eventuelle holdning til dette spørsmålet endret seg i løpet av dette skoleåret?"

Dette spørsmålet ble også gitt på skjema 2, men da i en noe lengre versjon.

Argumenter *for* symbolregner:

Sparer tid, og kan dermed gå videre i matematikken: 3 elever
Mer likt verktøy man vil møte i "det virkelige liv": 2 elever
Slipper slurvefeil: 1 elev

Argumenter *mot* symbolregner:

Gir mindre forståelse: 2 elever
Nok en overflødig "ting" i samfunnet: 1 elev
Man kan ha todelte prøver for å holde hodetrimmen ved like: 1 elev
Kommer an på behov videre oppover i utdanningssystemet: 1 elev

Antall som mener symbolregner bør tillates: 12
Antall som mener symbolregner ikke bør tillates: 3
Antall usikre: 1

Holdningsendring i løpet av skoleåret: Bare én elev svarer på dette, med endring fra negativ til svakt positiv.

Også svarene på spørsmål 3 har endret seg lite på det halve året siden forrige skjema. Igjen ser vi at en klar overvekt er positive til at symbolregner skal brukes i videregående skole. Hovedargumentene er som sist at man sparer tid, og dermed får mulighet for å lære mer, og at bruk av symbolregner gjør skolen mer virkelighetsnær. Argumenter mot bruken går på usikkerhet ang. hva man egentlig bør lære i matematikk og usikkerhet angående krav fra høyere utdanning.

<u>Spørsmål 4</u>

"Mener du at den læreboka vi bruker er godt tilpasset bruk av symbolregner?"

Antall negative svar: 11
Antall positive svar: 3
Antall nøytrale svar: 2

Utvalgt sitat:

> *Skal man begynne med symbolregnere på skolen, er det absolutt nødvendig å ta i bruk bøker som er laget for det formålet.*

Et klart flertall mener altså at boka ikke er godt tilpasset bruk av symbolregner. Instruksjonsmaterialet som kontinuerlig ble laget gjennom skoleåret, blir trukket fram av flere som en helt nødvendig støtte til læreboka.

Spørsmål 5

"Mener du at den eksisterende læreplanen i 3MX er godt tilpasset bruk av symbolregner?"

Antall nøytrale svar: 7
Antall positive svar: 6
Antall negative svar: 3

Utvalgt sitat:

> *Over en lengre periode vil man kunne utvide pensum.*

Dette sitatet er fra den eneste eleven som faktisk følger opp tidsbesparingsargumentet fra spørsmål 2 og 3.

Svarene på spørsmål 5 viser først og fremst manglende bevissthet rundt læreplanen. Svarene er jevnt over lite reflekterte og kommenteres derfor ikke nærmere her.

Spørsmål 6

"Er det noe annet du vil skrive? Ordet er fritt:"

Det var få svar på dette spørsmålet.

Utvalgt sitat:

> *Selv om bruk av symbolregner bør inkluderes i undervisning, bør det legges begrensninger på lovlige programmer som kan brukes.*

Dette sitatet viser en bevissthet om mulige negative konsekvenser ved bruk av CAS-programmer. (Denne eleven hadde arbeidet en del med programmering på symbolregneren.) Selv om symbolregneren stort sett gjennomfører enkeltprosedyrer ved noen enkle tastetrykk (kompetanseklasse 1), vil det i mange oppgaver være nødvendig å sette flere enkeltprosedyrer i en sammenheng for å løse en oppgave (kompetanseklasse 2). Til slike sammensatte oppgaver vil det med flere CAS-verktøy være mulig å lage programmer som hjelper elevene gjennom de forskjellige trinnene på en måte som gjør det vanskelig å vurdere om det som er skrevet er elevens egne resonnementer, eller om det er output fra et program. Jf. diskusjonen om interoperabilitet i kapittel 5.3.1 (oppgave 6) og om CAS og trinnvise løsninger i kapittel 9.1.

Oppsummert kan vi si at elevene i forsøksklassen gjennom spørreskjemabesvarelsene generelt sett viste positive holdninger til egen bruk av symbolregner og til generell bruk i videregående skole. De mente at CAS-bruken gjør at en sparer tid og dermed kan gå dypere inn i stoffet, og at bruk av symbolregner gjør matematikkopplæringen mer virkelighetsnær. Elevene var godt fornøyd med den praktiske tilretteleggingen knyttet til klasseromsarbeid og prøver. De klareste negative holdningene er en bekymring blant noen av elevene for om det er noe grunnleggende i matematikken de mister ved å bruke symbolregner uten noen form for begrensning. Noen mener at bruken passiviserer og kan medføre mindre forståelse.

7. CAS-tilpasset eksamen

Når et klasseromsforsøk går over et helt skoleår, og det aktuelle faget avsluttes med eksamen, må man vurdere om forsøket vil ha noe å si for innholdet i og gjennomføringen av eksamen. I vårt tilfelle var det gjennom hele skoleåret klart at eksamen ville bli tilpasset elevenes bruk at CAS-verktøy.

Kapittel 7.1 omhandler forsøksklassens CAS-tilpassede eksamen, mens 7.2 tar for seg elevenes holdninger til eksamensform.

Med kapittel 7 avsluttes empiridelen av oppgaven.

7.1 Eksamen i forsøksklassen. Gjennomføring og analyse

7.1.1 Om CAS-tilpasningen av eksamenssettet

I kapittel 3.1.3 er rammene for forsøksklassens CAS-tilpassede eksamen beskrevet. Elevene skulle ha en eksamen som var mest mulig lik det ordinære eksamenssettet, men der oppgaver som ikke var tilpasset symbolregnerbruk, var tatt ut og erstattet med nye oppgaver. Denne tilpasningen var det jeg som gjorde, og det var også klart at jeg kom til å være sensor. Elevene var klar over dette. Disse unntakene fra normal prosedyre ved eksamensavviklingen ble begrunnet med forsøksvirksomheten: For det første var jeg den eneste som kunne tilpasse eksamenssettet til den opplæringen elevene hadde hatt, og for det andre var det nødvendig å presentere prinsippene for opplæringen for den andre sensoren. Et annet unntak fra normal prosedyre var at alle de 17 elevene ble tatt ut til eksamen. (Dette var *ikke* kjent for elevene.) Selve sensureringen gikk bra, med stor overensstemmelse mellom meg og medsensor. Det ble også godt samsvar mellom standpunktkarakterer og eksamenskarakterer (se kapittel 3.1.1).

Her følger først en oversikt over det ordinære eksamenssettet og av hvilke oppgaver som ble tatt ut. Så kommer begrunnelser for hvorfor disse oppgavene ble tatt ut, fulgt av presentasjoner av og begrunnelser for de alternative, CAS-tilpassede oppgavene. Jeg understreker at de nye oppgavene ble laget ut fra den tankegangen at de ikke skulle skille seg mye fra de opprinnelige når det gjaldt emneområde og vanskelighetsgrad. Dette av rettferdighetshensyn i forhold til elevene. Derfor viser ikke settet en "ideell CAS-eksamen", men kun en tilpasning til eksisterende eksamenssett. Elevsvar er ikke analysert. Fokus er altså her på oppgavetyper.

Oversikt over emnefordelingen i det ordinære eksamenssettet:

Oppgave 1	Fem uavhengige deloppgaver innen derivasjon, integrasjon, kjeglesnitt og sannsynlighetsregning.
Oppgave 2	Sannsynlighetsregning
Oppgave 3	Differensiallikninger og eksponentialfunksjon
Oppgave 4	Vektorregning
Oppgave 5	Integrasjon og kjeglesnitt

Av disse oppgavene fjernet jeg 1a), 1b) og 1d), mens oppgavene 1c) ble justert litt. Vi ser altså at store deler av det ordinære eksamenssettet var godt tilpasset bruk av CAS, i den forstand at bruk av symbolregner ikke ville medføre store endringer i løsningsmåter.

Vi ser nå på de oppgavene som jeg valgte å fjerne og på de nye CAS-oppgavene. Disse CAS-tilpassede oppgavene var fra emnene eksponentialfunksjoner, logaritmefunksjoner, integral-regning og kjeglesnitt, så her går vi altså litt utover problemstillingens logaritmefunksjon-perspektiv:

7.1.2 De CAS-tilpassede oppgavene

Oppgave 1a

<u>1a, opprinnelig:</u>

Deriver funksjonene f og g gitt ved

1) $f(x) = e^{3x}$

2) $g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$

Slike rene derivasjonsoppgaver har meget liten verdi med et CAS-verktøy. (Se kapittel 5.2.3.) Dette kan vises ved å sammenlikne følgende tradisjonelle løsninger med hva symbolregneren gir som svar direkte:

1) $f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = \underline{\underline{3e^{3x}}}$

2) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \frac{x}{3}} \cdot (x^2 + \frac{x}{3})' = \dfrac{1}{x^2 + \frac{x}{3}} \cdot (2x + \frac{1}{3}) = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{6x+1}{3x^2 + x}}}$

1) diff(e(3X))

$3e^{3X}$

2) diff(ln (X²+X/3))

$\dfrac{2X+\frac{1}{3}}{X^2+\frac{X}{3}}$

For øvrig kunne symbolregneren gjerne faktorisert den deriverte i oppgave 2), som her:

rFactor(Ans

$\dfrac{2\left(X+\frac{1}{6}\right)}{X\left(X+\frac{1}{3}\right)}$.

Jeg ønsket å erstatte 1a) med en oppgave bedre tilpasset CAS, og lagde denne:

1a, ny, CAS-tilpasset:

Gitt funksjonen $f(x) = 3e^{-\frac{x}{5}}$ $\quad D_f = R$

1) Bestem eksakt det punktet på grafen til *f* der stigningstallet til tangenten er –1.

2) Tegn en skisse av grafen til *f* med tangenten fra oppgave a)1) inntegnet.

3) Bruk $f'(x)$ til å forklare hvorfor funksjonen er synkende i hele definisjonsmengden.

Tanken var her at i stedet for bare å derivere en funksjon, noe som med CAS-verktøy bare er en enkel tasteoperasjon, skulle elevene vise forståelse for den indrematematiske *bruken* av den deriverte. Det vil først og fremst si å kjenne til den deriverte som stigningstallet til en tangent og å vise forståelse for sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte og grafens monotoniegenskaper.

Om 1a1: Her ønsket jeg å tvinge elevene til å bruke CAS eller manuelle metoder framfor grafiske metoder, ved å legge inn ordet *eksakt*.

Mitt løsningsforslag:

$f(x) = 3e^{-\frac{x}{5}}$ $\quad D_f = R$

Legger $f(x)$ inn på Y1.

$solve(diff(\mathrm{Y1}) = -1)$ gir $x = 5\ln\frac{3}{5}$

$substitute(\mathrm{Y1}, \mathrm{X} = getright(eqn(39)))$ gir $y = 5$

Punktet er $\underline{\underline{\left(5\ln\frac{3}{5}, 5\right)}}$

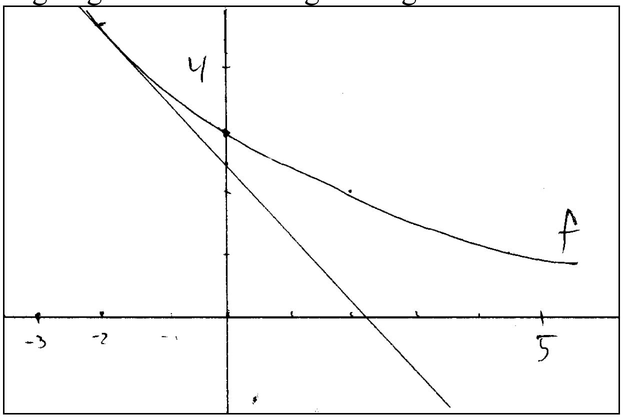
(Kommentar: *eqn*(39) står her for likningen $x = 5\ln\frac{3}{5}$. *getright* trekker ut høyresiden i likningen.)

Løsningen ovenfor viser relativt avansert CAS-bruk, bl.a. med funksjonen *substitute* og høy grad av interoperabilitet. Legg spesielt merke til at den deriverte funksjonen ikke vises eksplisitt. Oppgaven kan altså løses uten "å derivere", dvs. å finne den deriverte funksjonen. Den deriverte inngår bare som en del av en sammensatt kommando $solve(diff(\mathrm{Y1}) = -1)$.

For øvrig kan vi tenke oss en ytterligere utvidelse av interoperabiliteten, ved å slå sammen alle kommandoene til én, når *y*-verdien skulle finnes:
$substitute(\mathrm{Y1}, \mathrm{X} = getright(solve(diff(\mathrm{Y1}) = -1)))$
Da ville også problemstillingen i oppgaven være velegnet for CAS-programmering, på de verktøyene der dette er mulig. Nå viser det seg at kommandoen ovenfor ikke aksepteres på Casio Algebra 2.0, men det er mulig tilsvarende kommandoer aksepteres på andre verktøy. Generelt sett bør CAS-verktøys grense for interoperabilitet og programmerbarhet kartlegges.

Oppgaven er klart vanskeligere uten CAS-tilgang enn med, og ville nok ikke ha blitt plassert som første oppgave på en CAS-fri eksamen. Hensikten med oppgaven var altså ikke å teste manuell derivasjon og likningsløsning, men å fokusere på sammenhengen mellom den deriverte og stigningstallet til tangenten.

Om 1a2: Her måtte elevene vise at de forsto begrepet tangent, at de kunne finne tangeringspunktet fra forrige oppgave på skissen sin, og at de kunne tegne inn tangenten med riktig stigningstall. Mitt løsningsforslag:



Tanken var at elevene her skulle få mulighet for å vise at de virkelig forsto hva de hadde funnet i oppgave 1a1.

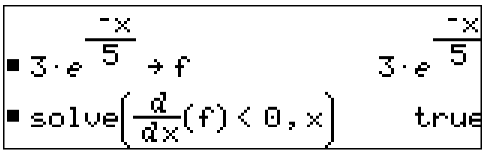
Om 1a3: I denne deloppgaven måtte elevene bruke egenskaper ved den deriverte funksjonen for å forklare hvorfor funksjonen er synkende i hele definisjonsmengden. Med andre ord skulle de forklare hvorfor den deriverte alltid er negativ, for eksempel slik:

diff (Y1) gir $\dfrac{-3\sqrt[5]{e^{-x}}}{5}$, som kan skrives $-\dfrac{3}{5}e^{-\frac{x}{5}}$.

$-\dfrac{3}{5}$ er alltid negativ, og $e^{-\frac{x}{5}}$ er alltid positiv.

Da er $f'(x)$ alltid negativ, dvs. at f synker i hele definisjonsmengden.

Her skulle elevene vise forståelse for sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte og monotoniegenskapene. Selve utregningen av den deriverte var overlatt til symbolregneren, mens hensikten var at fortegnsdrøftingen skulle utføres manuelt. Ved å spesifisere i oppgaveteksten at elevene skulle *bruke den deriverte*, var altså intensjonen at elevene skulle drøfte fortegnet manuelt, ved å se på fortegnet til hver faktor. Dette gikk også greit i forsøksklassen med vår symbolregner. Teknisk sett hadde ikke elevene noe valg her. Men i ettertid ser jeg at andre CAS-verktøy med større mulighet for interoperabilitet vil kunne gi også *dette* svaret uten at man behøver å finne den deriverte funksjonen eksplisitt. Bildet nedenfor er fra symbolregneren Texas TI-89:



I første linje legges funksjonsuttrykket inn på funksjonsminneplassen f. I andre linje har vi en sammensatt kommando som først deriverer funksjonen og så løser ulikheten "når er den deriverte mindre enn 0?". Svaret "true" viser at ulikheten alltid er sann, dvs. at den deriverte alltid er negativ. Dermed *har* man brukt den deriverte til å vise at funksjonen er synkende i hele definisjonsmengden, selv om den deriverte funksjonen aldri har framkommet eksplisitt på papiret eller på skjermen. En sammensatt kommando av den typen som er vist ovenfor, er ikke syntaktisk mulig på Casio Algebra FX 2.0, forsøksklassens maskin. Konklusjonen blir at oppgaveteksten ikke er verktøyuavhengig, noe som bør være et mål.

Oppgave 1b

1b, opprinnelig:

> Bestem integralet
>
> $$\int \left(e^x + \frac{4}{x} - 1\right) dx$$

Igjen ser vi en ren algoritmisk oppgave. Som i forrige oppgave sammenlikner vi en tradisjonell løsning med hva symbolregneren gir som svar direkte:

$$\int \left(e^x + \frac{4}{x} - 1\right) dx = \underline{\underline{e^x + 4\ln|x| - x + C}}$$

`∫(eX+4/X-1,X,C)` / `4·ln(|X|)-X+e^X+C`, eventuelt `∫(eX+4/X-1)` / `4·ln(|X|)-X+e^X` uten integrasjonskonstant.

Jeg valgte å fjerne denne oppgaven, da den i en CAS-setting bare måler elevenes evne til inntasting slik bildene ovenfor viser, noe jeg mente ikke hadde noen verdi.

Oppgaven er interessant, fordi den heller ikke krever mellomregninger når eleven *ikke* har CAS-verktøy tilgjengelig. Her er det nok at eleven finner fram til riktige formler i formelsamlinga og i tillegg setter riktige fortegn og husker integrasjonskonstanten. Man kan stille spørsmål om slike oppgaver bør gis i det hele tatt, altså uavhengig av hvilke hjelpemidler elevene har tilgjengelig.

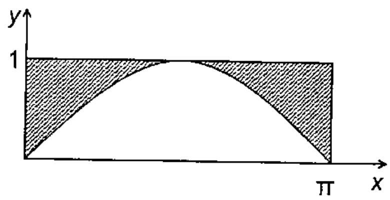
1b, ny, CAS-tilpasset:
Her lagde jeg følgende oppgave, som er behandlet i kapittel 5.3.4:

> Bestem eksakt for hvilke verdier av x grafen til funksjonen $g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$ vokser eller minker.

Oppgave 1c

1c, opprinnelig:

> Det skraverte området på figuren er avgrenset av grafen til $y = \sin x$ og $y = 1$, y-aksen og linjen $x = \pi$.
>
> Finn arealet av det skraverte området.



Her satte jeg bare inn ordet *eksakt*, så siste setning lød "Finn eksakt arealet av det skraverte området". Dette for å unngå grafiske/numeriske tilnærmingsløsninger.

Tradisjonell, manuell løsning:

Vi oppfatter området som et område A mellom to grafer. Ettersom grafen til $y = 1$ er øverst i hele intervallet, har vi

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \sin x)\, dx = [x + \cos x]_0^{\pi} = (\pi + \cos \pi) - (0 + \cos 0) = \pi - 1 - 1 = \underline{\underline{\pi - 2}}$$

CAS-løsning:

Vi oppfatter området som et område A mellom to grafer. Ettersom grafen til $y=1$ er øverst i hele intervallet, har vi

$A=\int_0^{\pi}(1-\sin x)\,dx=\underline{\underline{\pi-2}}$ Vi får svaret ved $\int(1-\sin \mathrm{X,X,0,}\pi)$ på symbolregneren.

Symbolregneren vil vise utregningen slik:

```
∫(1-sin X,X,0,π)
π-2
```

Selv om den manuelle prosedyren med antiderivering, innsetting av grenser og utregning her har blitt overflødiggjort av CAS-bruk, kan oppgaven rettferdiggjøres isolert sett. Dette fordi det å sette opp riktig integrand må ses på som en meget sentral del av oppgaven. Elevene må også forstå at de må oppgi eksakt svar, og ikke bruke grafiske eller andre tilnærmingsmetoder og få svar som 1,14.

I integralregningen må man generelt sett ta stilling til om manuell utregning av integraler (ubestemte og bestemte) er en ferdighet man mener elevene bør beherske, jf. Buchbergers (1990) artikkeltittel "Should students learn integration rules?". Det kan uansett være vanskelig å måle slike ferdigheter på prøver der elever har tilgang til CAS-verktøy. Dette er sammenliknbart med forsøksklassens arbeid med derivasjon av logaritmefunksjoner, beskrevet i kapittel 5.2.3. CAS-verktøy integrerer sannsynligvis alle funksjoner på videregående skole-nivå. Man kan også tenke seg CAS-programmer som automatisk gir eksakt svar på slike arealproblemer som eksamens-oppgave 1c er eksempel på.

Oppgave 1d

1d, opprinnelig:

Likningen til en ellipse er gitt ved

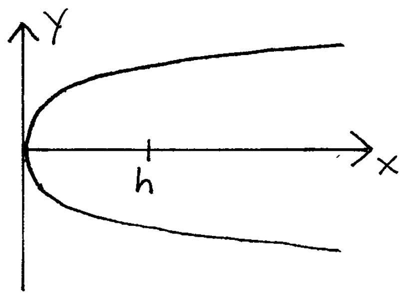
$16x^2+25y^2-96x+100y=156$

Finn sentrum og halvaksene til ellipsen.

Denne oppgaven kunne godt ha blitt stående, men jeg ønsket å lage en oppgave innenfor samme emne (kjeglesnitt) som var mer tilpasset CAS-bruk. Jeg lagde derfor følgende oppgave, som kombinerer kjeglesnitt med integralregning:

1d, ny, CAS-tilpasset:

Gitt parabelen $y^2 = 2px$



1) Forklar at den øvre delen av parabelen er gitt ved funksjonen $f(x) = \sqrt{2px}$.

2) Når grafen til *f* roteres 360° om *x*-aksen får vi et omdreiningslegeme som kalles *paraboloide.* Vis at volumet av en paraboloide er gitt ved $V = \pi ph^2$, når $x \in [0, h]$. (*h* er høyden i paraboloiden. Se figur.)

Løsningsforslag til 1d1:

$y^2 = 2px$

Får *y* alene: $y = \pm\sqrt{2px}$

Vi får to funksjoner: $y_1 = \sqrt{2px}$ og $y_2 = -\sqrt{2px}$

$y_1 = f(x) = \sqrt{2px}$ gir positive funksjonsverdier og er dermed den øvre delen av parabelen.

Denne deloppgaven løses enklest uten lommeregner, selv om overgangen til *y* på eksplisitt form gjerne kan utføres på symbolregneren, slik:

```
solve(Y²=2PX,Y)
Y=-√2PX
Y=√2PX
```

Kommentar: Bildet ovenfor gir et eksempel på CAS-verktøyenes fleksible bruk av variable. Likningen $y^2 = 2px$ løses her enkelt med hensyn på *y*. Løsning med hensyn på *x* eller *p* går like greit.

Løsningsforslag til 1d2:

$$V = \int_0^h \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^h \pi\sqrt{2px}^2 dx = \underline{\underline{\pi ph^2}}$$

Vi får svaret πph^2 ved $\int\left(\pi\left(\sqrt{\ }(2\text{PX})\right)^2,\text{X},0,\text{H}\right)$ på symbolregneren.

Symbolregneren vil vise utregningen slik:

```
∫(π(√(2PX))²,X,0,H)
πH²P
```

En manuell løsning av denne oppgaven kunne ha sett slik ut:

$$V = \int_0^h \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^h \sqrt{2px}^2 dx = \pi\int_0^h 2px\, dx = 2\pi p\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^h =$$

$$2\pi p\left(\tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 2\pi p\cdot\tfrac{1}{2}h^2 = \underline{\underline{\pi ph^2}}$$

Her var tanken at elevene skulle få bruke symbolregnerens regnekraft til å komme fram til en enkel og for dem ukjent formel. Oppgaven er en noe uvanlig kombinasjon av to av 3MX-planens emner: integralregning og kjeglesnitt. Denne oppgaven kunne gjerne ha vært gitt også til elever som ikke har tilgang til CAS-verktøy, men sannsynligvis hadde vi da sett færre riktige svar, pga. av manuelle feil i utregningene. Jeg mente at det viktige med oppgaven ikke var selve utregningen av det bestemte integralet, men det å kunne sette opp riktig integral. Deloppgave d1 skulle gjøre dette enklere, ved at selve funksjonsuttrykket var kjent. Jeg så det som et pedagogisk poeng at CAS-bruk av og til kan gjøre enkle og "fine" resultater i matematikken tilgjengelig for en større andel av elevene, ved at det regnetekniske blir nedtonet. Dette er et generelt argument for bruken av symbolbehandlende verktøy.

For øvrig er inntastingen på symbolregneren komplisert i denne oppgaven, med tre sett parenteser å holde styr på i tillegg til at man må taste inn variabelangivelsen og integrasjonsgrensene riktig. Så på den ene siden forenkles de manuelle utregningene, men på den andre siden kan man forvente syntaktiske problemer knyttet til CAS-verktøyet.

Jeg har her presentert forsøksklassens eksamenssett, i form av beskrivelse av hva som måtte til for å tilpasse det ordinære settet til elevenes bruk av symbolregner. Som sagt var store deler av det ordinære eksamenssettet godt tilpasset CAS, i den forstand at bruk av symbolregner ikke ville medføre store endringer i løsningsmåter. Noen få uegnede oppgaver ble byttet ut med oppgaver bedre tilpasset symbolbehandlende verktøy. Men det er viktig å fastslå at dette ikke er et generelt argument for at bruk av CAS-funksjoner vil ha en minimal påvirkning på eksamensoppgaver. Det var forsøkets rammer som satte den begrensningen at avstanden fra ordinær eksamen til CAS-tilpasset eksamen skulle være liten. Med et friere utgangspunkt for eksamensoppgaveproduksjonen kan man for eksempel godt tenke seg en betydelig andel CAS-unike oppgaver, dvs. oppgaver som tar denne teknologien på alvor ved at de pga. formalistisk kompleksitet eller antatt tidsbruk ikke ville vært gitt i en CAS-fri setting.

7.2 Holdninger: Elevenes vurdering av eksamensform (spørreskjema 4, 16.05.01)

Ved slutten av skoleåret besvarte elevene et spørreskjema der de ble spurt om foretrukne hjelpemiddelregler og oppgavetyper ved eksamen. De skulle gi prinsipielle svar, da disse reglene for klassens del jo var avklart allerede ved starten av skoleåret.

Utfyllingen av skjemaet måtte gjennomføres før elevene hadde hatt sin egen eksamen, fordi det praktisk sett ville ha vært vanskelig å samle elevene på et senere tidspunkt.

7.2.1 Skjemaet

Om eksamensform ved skriftlig eksamen i 3MX:

1. Kryss av for den eksamensformen du mener er den riktige. Kun ett kryss.
(Hvis du vil begrunne valget ditt, kan du f.eks. gjøre det på baksiden av arket.
Hvis du mener det er vanskelig å sette bare ett kryss, så begrunn hvorfor du vil svare annerledes.)

☐ Eksamen uten bruk av symbolregner.

☐ Bruk av symbolregner. Vanlig eksamen som i dag, men der oppgavene er bedre tilpasset symbolregneren (dvs. den type eksamen dere får 1. juni).

☐ Bruk av symbolregner. Vanlig eksamen som i dag, men der det er presisert at en del oppgaver skal løses ved regning, dvs. med tradisjonelle penn-og-papir-metoder.

☐ Todelt eksamen, der den ene delen er uten tekniske hjelpemidler og den andre delen er med symbolregner.

☐ Annen eksamensform. Forklar.

2. Har du noen tanker om hva ditt valg av eksamensform (foregående spørsmål) vil kunne føre til når det gjelder undervisning, prøver gjennom året, lærebøker, læreplaner, din matematikklæring, ... ?

7.2.2 Begrunnelse

Reglene for hjelpemidler til eksamen kan få meget store konsekvenser for matematikkfaget. Potensielt kan slike regler få konsekvenser for læreplaner, og dermed læremidler. For undervisningsmetoder og det løpende vurderingsarbeidet har de utvilsomt konsekvenser. Det ville derfor være interessant å undersøke hva elevene i forsøksklassen mente ville være den beste eksamensformen når det gjaldt hjelpemiddelbruk.

Jeg valgte et lukket svarformat (flervalg) for å klargjøre alternativene for elevene. I og med at eksamensordning ikke hadde vært oppe som noe tema i løpet av skoleåret, så jeg det som urealistisk at elevene selv kunne få overblikk over utfallsrommet av mulige ordninger. For å åpne for eventuelle andre varianter enn de jeg formulerte, la jeg til et åpent sistevalg i spørsmål 1. For utdypning la jeg til et åpent spørsmål 2.

7.2.3 Analyse

15 elever var tilstede. Alle besvarte.

<u>Spørsmål 1</u>

Fordelingen mellom elevenes svar på de forskjellige alternativene ble slik:

0 elever: *Alternativ 1:* Eksamen uten bruk av symbolregner.

7 elever: *Alternativ 2:* Bruk av symbolregner. Vanlig eksamen som i dag, men der oppgavene er bedre tilpasset symbolregneren (dvs. den type eksamen dere får 1. juni).

3 elever: *Alternativ 3:* Bruk av symbolregner. Vanlig eksamen som i dag, men der det er presisert at en del oppgaver skal løses ved regning, dvs. med tradisjonelle penn-og-papir-metoder.

5 elever: *Alternativ 4:* Todelt eksamen, der den ene delen er uten tekniske hjelpemidler og den andre delen er med symbolregner.

0 elever: *Alternativ 5:* Annen eksamensform. Forklar.

Av elevene i forsøksklassen er det altså ingen som ønsker eksamen uten symbolregner (alternativ 1). Dette passer ikke med at tre av elevene ved besvarelsen av spørreskjema 3 mente at symbolregneren ikke burde brukes i videregående skole i det hele tatt. Ved nærmere ettersyn har to av disse nå svart "todelt eksamen", mens den tredje var fraværende da skjema 4 ble besvart.

Ut fra dette kan man sette opp en hypotese om at todelt eksamen vil kunne redusere elevers motforestillinger mot bruk av symbolregner.

Alternativ 2 velges av sju elever. Vi kan nok forvente en viss overhyppighet av dette alternativet, i og med at dette var forsøksklassens eksamensform. Man kan tenke seg en viss motstand når det gjelder å "velge bort" en eksamensform man er innstilt på, og som er gjeldende ved ens egen eksamen noen uker senere. Likevel: Dette alternativet er det som velges hyppigst. Disse elevene har altså ikke i løpet av skoleåret fått motforestillinger mot at det er mulig å lage CAS-tilpassede fulle eksamenssett.

Alternativ 3 velges av tre elever. Dette alternativet kan på sikt være vanskelig å gjennomføre, pga. den teknologiske utviklingen. Det kan bli meget vanskelig å skille mellom hva som er et resultat av elevens eget tanke- og skrivearbeid, og hva som er avskrift av trinnvise løsninger presentert av CAS-verktøy som er mer avanserte enn forsøksklassens symbolregner (se kapittel 9.1). Slike argumenter hadde ikke disse tre elevene forutsetninger for å se, og det er derfor ikke overraskende at noen mente dette er den beste eksamensformen.

Alternativ 4 velges av fem elever. Ut fra at dette var et alternativ som ikke var diskutert i klassen i det hele tatt, må tallet sies å være relativt høyt. Som sagt er det en mulighet for at denne eksamensformen kan få CAS-skeptiske elever til å akseptere bruken. Det er vel også grunn til å tro at motforestillingene mot symbolregnerbruk som en del elever kommer med på skjema 2 og 3, dvs. bekymring for manglende forståelse og basisferdigheter, vil kunne møtes med denne eksamensformen.

<u>Spørsmål 2</u>

Det var ikke mye tilleggsinformasjon i besvarelsene her, men to eksempler på svar velges ut:

En elev som valgte alternativ 2 på spørsmål 1, skriver:

> *Hvis pensum forandres, bør også hele undervisningen forandres til bruk av symbolregner. Kanskje det særlig bør legges mindre vekt på derivasjon og integralregning. … Derivasjon er jo en veldig mekanisk prosess …*

Denne eleven mener at bruk av CAS-verktøy bør medføre endring av hvilke emner det arbeides med i skolen. Det algoritmiske, "mekaniske" bør vektlegges mindre. Eleven mener at det er mulig å tilpasse eksamen til fri CAS-bruk, men at dette nok vil få konsekvenser.

En elev som svarte alternativ 4 (todelt eksamen), skriver:

> *Etter mitt valg må elevene lære å utføre grunnleggende matematiske funksjoner/ operasjoner manuelt. Slik tror jeg elevene får bedre innsikt i hva de driver med. Bruk av symbolregneren vil medføre at elevene <u>også</u> kan løse større, mer avanserte oppgaver, som uten symbolregner ikke ville vært aktuelle.*

Denne eleven mener at todelt eksamen både vil sikre manuelle ferdigheter, noe han mener fører til bedre forståelse, og det vil sikre en utvidelse av den tilgjengelige matematikken.

Det de to svarene har til felles, er en holdning om at bruk av CAS-verktøy *har* innvirkning på rammer og oppgaver for eksamen. Denne holdningen delte de høyst sannsynlig med resten av forsøksklassen: Det var ingen skriftlige eller muntlige utsagn fra elevene som tilsa at noen mente det er en god løsning å bruke CAS-verktøy uten å foreta noen form for eksamenstilpasning.

8. Konklusjoner

Kapittel 8 og 9 avslutter oppgaven. Her i kapittel 8 gir jeg en konkluderende oppsumming av funnene fra forsøket, mens kapittel 9 inneholder noen generelle betraktninger om bruk av CAS-verktøy i skolen.

Først tilbake til problemstillingen fra kapittel 1.1:

> *Hvordan bruker elevene symbolregner i emnet logaritmefunksjoner, og hvordan viser de matematisk kompetanse? Hva slags holdninger har de til bruken?*

Jeg har underveis i de kapitlene som omhandler empirien (kap. 4–7) forsøkt å besvare denne problemstillingen. Empirien ble analysert med bakgrunn i mitt utvalg av teoretiske perspektiver og tidligere forskning (kap. 2).

I dette kapitlet gir jeg en samlet oversikt over konklusjonene og klargjør samtidig noen nye forskningsspørsmål.

8.1 Elevenes bruk av symbolregneren

Elevene brukte CAS-funksjonene lite på den første prøven der dette var relevant (24.10.00). Flere oppgaver kunne her løses mye raskere ved CAS enn ved tradisjonell regning. En sannsynlig forklaring er at elevene løste oppgavene ved å bruke metoder de kjente fra før. I mange sammenhenger i forsøket var det klart at det var en hindring for effektiv CAS-bruk at elevene ikke hadde hatt symbolregner i 2MX. Dette gjaldt spesielt det første halvåret. De hadde lært manuelle metoder i 2MX, og det var naturlig for mange elever å fortsette å bruke disse. (Se kapittel 5.3.1 og 5.3.2.)

Det er mange eksempler på at elevene ikke utnytter potensialet ved CAS-funksjonene. De kan for eksempel bruke CAS i en mindre del av en oppgave, selv om CAS kunne ha vært brukt i større grad. Vi ser altså at manuelle metoder "henger igjen". Trolig var elevenes automatiserte, manuelle løsningsmetoder et hinder i starten for fleksibel og effektiv CAS-bruk. Det skjedde en viss endring på dette området i løpet av skoleåret, men selv på terminprøva 04.04.01 (kapittel 5.3.3) ser vi flere eksempler på manglende CAS-utnytting. I en CAS-setting vil det være viktig at elevene har god hjelpemiddelkompetanse, på den måten at de bruker det mest passende og effektive hjelpemiddelet til den aktuelle oppgaven som skal løses.

I arbeidet med logaritmefunksjoner er det CAS-funksjonene *solve* og *diff* som brukes desidert mest. Dette framgår av nesten samtlige eksempler på elevbesvarelser i kapittel 5.2 og 5.3. Terskelen var meget lav når det gjaldt å beherske disse to funksjonene. Vi ser også noe bruk av *lim*, *approx* og *tanLine*, men ellers bruker elevene så godt som ingen andre CAS-funksjoner. *solve* brukes til likningsløsning og også til enkle ulikheter med polynomuttrykk. *diff* brukes til derivering og dobbeltderivering. *lim* brukes for å finne grenseverdier i forbindelse med asymptoter, *approx* brukes for å finne tilnærmingsverdier for eksakte svar og *tanLine* brukes for å finne likningen for en tangent. I tillegg bruker elevene symbolregneren ved eksakt regning med potenser og rotuttrykk. Her brukes direkte inntasting, og ikke spesielle CAS-kommandoer.

CAS blir mye brukt ved operasjoner som å derivere eller løse enkle likninger, men blir mindre brukt ved ulikheter og i oppgaver som krever sammensetninger av flere CAS-funksjoner. Elevene utnytter i meget liten grad symbolregnerens mulighet for interoperabilitet, dvs. at to eller flere operasjoner settes sammen til én. Det eneste utbredte eksemplet er *diffdiff* for dobbelt-derivering. Mine løsningsforslag viser flere eksempler på interoperabilitet, for eksempel i den alternative løsningen til eksamensoppgave 1b i kapittel 5.3.4 og (spesielt) i den CAS-tilpassede versjonen av oppgave 1a1 i kapittel 7.1.2.

Det er ingenting i dataene som tyder på at innskrivingssyntaksen for CAS-funksjonene medførte spesielle vanskeligheter. Det er heller ikke funn som tilsier at funksjonalitetsutvidelsen fra den kjente grafiske lommeregneren over til symbolregneren medførte vesentlig merarbeid for elevene. Som sagt kommer man langt bare med å kunne bruke *solve* og *diff*. Det bør også nevnes at innskrivingssyntaksen for *solve* og *diff* på forsøksklassens symbolregner er spesielt enkel, ved at den ikke krever variabelangivelse når variabelen er *x*. Man kan for eksempel skrive $solve(\ln X^2 = 6)$ der andre CAS-verktøy krever syntaks som $solve(\ln X^2 = 6, X)$.

Vi ser at bruk av CAS-funksjoner kan ha en sterk effekt på det regnetekniske innen emnet logaritmefunksjoner. Det gjelder først og fremst problemstillinger som innebærer å løse logarit-melikninger eller å derivere logaritmefunksjoner, der maskinen konsekvent overflødiggjør manuell utregning. (Se kapittel 5.2.2 og 5.2.3.)

8.2 Grafiske og numeriske metoder vs. CAS-metoder

I funksjonslæren er *grafen* en naturlig innfallsport for elevene i mange oppgaver. Det er tydelig at de ønsker en grafisk representasjon av funksjonen også når de har CAS-teknologi tilgjengelig. Dette kan tyde på at funksjonsutforskning ved CAS bør suppleres med en grafisk komponent. (Se kapittel 5.2.1 og 5.3.3.)

En del CAS-funksjoner har en numerisk eller grafisk ekvivalent på forsøksklassens maskin. Det gjelder for eksempel *solve*, der det både fins en "CAS-*solve*" og en "numerisk *solve*", med store forskjeller i inntasting, i hvilke svar som gis og i hva slags formater svarene har. Ved bruk av "numerisk *solve*" bruker forsøksklassens CAS-verktøy Newtons metode for å finne tilnærmings-verdier til en funksjons nullpunkter. Det innebærer bl.a. at man ikke alltid kan få eksakte løsninger, man kan ikke vite om man har funnet alle løsningene, man kan ikke løse ulikheter, man må selv omforme likningen slik at høyresiden blir 0, og man kan ikke behandle likninger med mer enn en variabel, som f.eks. ved omforming av formler. I tillegg har Newtons metode flere begrensninger. Vi ser altså at denne numeriske *solve*-funksjonen er meget begrenset i funksjonalitet forhold til den symbolregnende *solve*-funksjonen. Det bør nok være et mål at elevene lærer seg forskjellen i virkemåte for slike par av funksjoner og "CAS-*solve*" og "numerisk *solve*", og at de bruker den som passer for den aktuelle oppgaven.

Vi ser at grafiske og numeriske løsninger brukes en del i skjul, dvs. at de brukes uten at eleven kommuniserer dette direkte. Det er eksempler på at løsninger som ut fra det som skrives er framkommet ved manuelle metoder eller CAS-metoder, lener seg på grafiske og numeriske metoder. (Se kapittel 5.3.4.) I de tilfellene der oppgaveteksten ikke krever eksakte svar eller svar "ved regning", så kan det være en fordel at elevene har forskjellige metoder å velge blant, men det er viktig at de forstår forskjellen på en eksakt løsning og en numerisk/grafisk løsning.

I praktiske modelleringsoppgaver bør elevene bruke tilnærmede svar. Her kan CAS-bruk være mer tungvint enn bruk av tilsvarende numeriske funksjoner. Det kan også hende at elevene skal løse likninger som ikke er mulig å løse analytisk. Da er man avhengig av numeriske tilnærings-verdier, for eksempel ved å bruke numerisk *solve* eller grafiske løsninger. I slike oppgaver kan

CAS-bruk være unødig komplisert og svarene maskinen gir, kan virke forvirrende på elevene. Ideelt sett bør numeriske funksjoner, CAS-funksjoner og grafavlesningsfunksjoner (som *trace*, *root* og *x-calculate*), velges ut fra oppgavens egenart.

8.3 Teknologiske begrensninger

Den kraftigste teknologiske begrensningen vi møtte i emnet logaritmefunksjoner, var at symbolregneren ikke løste *logaritmeulikheter*, noe vi ville forvente. Denne begrensningen varierer fra CAS-verktøy til CAS-verktøy. (Se kapittel 5.2.4.) Her måtte vi gå veien om tilsvarende logaritme*likning*, men likevel innebar oppgavene at elevene måtte finne grunnmengden til ulikheten, og de måtte foreta fortegnsdrøfting. På grunn av den teknologiske begrensningen måtte elevene enten bruke rene manuelle løsningsmetoder, eller supplere de manuelle metodene med enkelte CAS-funksjoner i deler av løsningene. Vi ser eksempler på et denne teknologiske begrensningen medfører feil i elevbesvarelser, feil som nok ikke ville oppstått hvis manuelle metoder hadde vært brukt fullt ut, eller hvis symbolregneren ikke hadde hatt denne begrensningen. (Se kapittel 5.3.2.)

I likningsløsning så vi at symbolregneren kunne gi gale løsninger når likningen inneholdt logaritmeuttrykk med begrensede grunnmengder, for eksempel uttrykk som $\ln(x-2)$. Det er tydelig at den begrensede grunnmengden til slike uttrykk ikke påvirker hvilke andre løsninger maskinen gir. Elevene måtte altså kunne ta stilling til om det var områder der uttrykk ikke var definert, selv om de brukte symbolregner. (Se kapittel 5.3.3.)

Vi så eksempel på at forkorting av brøksvar når brøken var del av et sammensatt uttrykk, ikke ble foretatt som forventet av symbolregneren. Å forenkle svaret mest mulig ble da relativt komplisert. (Se kapittel 5.3.2.)

Enkelte av symbolregnerens svarformater følger ikke vanlig matematisk notasjon. Trolig bør elevene derfor være fortrolig med riktig notasjon før symbolregnerens notasjon blir presentert. Dette for å vurdere kritisk de svarene maskinen gir, og for å motvirke en mulig utvikling av "maskinnotasjon" som erstatning for korrekt matematisk notasjon. Vi ser eksempler på slik uavkodet "maskinnotasjon" i elevenes besvarelser. Vi ser også eksempler på "mellomformer" mellom maskinens notasjon og korrekt notasjon. (Se kapittel 5.3.1.)

Inntasting på symbolregneren følger ikke alltid vanlig matematisk notasjon. For eksempel kan likninger løses ved *solve* uten at det skrives noe likhetstegn. Høyresiden regnes da som null. Et annet eksempel er tangentlikninger som vises uten "$y =$". Slik bruk ser vi eksempler på i forsøksklassen (Se kapittel 5.3.3.) En hypotese er at teknologiske "begrensninger" som dette kan svekke forståelsen hos elevene. Dette er det ikke sett nærmere på i forsøket.

CAS-verktøyet kan ha begrensninger som gjør at en del manuelle metoder må brukes på emner der en ikke ville forventet det. Dette opplevde forsøksklassen ved at deres symbolregner ikke løste logaritmeulikheter. Hvis det innenfor et emne må veksles mellom manuelle metoder og CAS-metoder av tekniske årsaker, kan det øke kompleksiteten for eleven. (Se kapittel 5.3.2.) I noen tilfeller kan det da kanskje være best å behandle emnet helt uten CAS, eventuelt innføre CAS-metoder på slutten av emnets opplæringsløp, og ikke nødvendigvis for alle elever. Vi ser altså at et CAS-verktøys teknologiske begrensninger direkte kan virke inn på hvordan man arbeider med et emne.

8.4 Matematisk kompetanse

Hvordan viser elevene matematisk kompetanse når de har fri tilgang til symbolregner? Her følger en oppsummering av CAS-bruken i forsøksklassen sett i lys av matematisk kompetanse slik den er beskrevet av Niss og Højgaard (2002). Først en repetisjon av de åtte kompetansene:

"Å kunne spørre og svare":
Tankegangskompetanse, problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse og *resonnementskompetanse.*

"Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper":
Representasjonskompetanse, *symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse.*

Man kan sette opp hypoteser om at CAS-bruk kan slå ut både positivt og negativt når det gjelder elevers *resonnementskompetanse*. Positivt ved at det kan bli kortere vei fra premiss til konklusjon, og dermed lettere å få oversikt over et resonnement. Negativt ved risikoen for at algebraiske deler av resonnementet ikke blir forstått, og at resonnementet dermed har hull som eleven kanskje ikke er i stand til å fylle manuelt. Noen kraftige CAS-funksjoner (som f.eks. *tanLine*) kan redusere forståelsen for matematiske resonnementer, ved at eleven ikke behøver å forholde seg til begreper som ved en manuell metode brukes på veien mot svaret. (Se kapittel 5.3.3.) Det samme gjelder ved komplekse kommandoer som setter sammen flere CAS-funksjoner (interoperabilitet). I slike tilfeller er det altså ikke bare snakk om overflødiggjøring av manuelle regneferdigheter, men også overflødiggjøring av forståelse for hvordan matematiske begreper henger sammen. (Og i sin ytterste konsekvens kan slike operasjoner programmeres på en del CAS-verktøy, så eleven ikke en gang behøver å forholde seg til CAS-funksjonene!) Eksempler er bruk av *lim* for å finne asymptoter og bruk av *solve*(*diff*(uttrykk)>0) for å finne hvor en funksjon er voksende.

Disse eksemplene viser en klar fare for svekking av elevenes resonnementskompetanse. Riktignok ser vi ingen klare eksempler på slik bruk i forsøksklassen, men vi kan ikke utelukke at dette dels kan tilskrives en viss tilbakeholdenhet hos elevene når det gjelder å utnytte potensialet til symbolregneren fullt ut, dels at det ikke ble undervist spesielt i bruk av sammensatte kommandoer. Det kan også være vanskelig metodisk sett å kartlegge den ev. manglende resonnementskompetansen bak en konkret skriftlig bruk av en kraftig, sammensatt kommando eller et CAS-program. Konklusjonen fra forsøket blir her at vi ikke har noen klare funn, men har identifisert et område som bør undersøkes nærmere. Generelt sett bør CAS-verktøys grense for interoperabilitet og programmerbarhet kartlegges.

Et annen moment knyttet til resonnementskompetanse er at symbolregneren i noen tilfeller kan gi feilmeldinger som viser at en oppgave eller deloppgave ikke har løsninger. Slike meldinger kan føre til at slike løsninger bare forkastes uten nærmere resonnement, og eleven får da ikke vist forståelse for hvorfor de ikke er løsninger. (Se kapittel 5.3.3.)

Det er indikasjoner på at bruk av symbolregner gir bidrag til elevenes *representasjonskompetanse*, ved at både grafiske, numeriske og symbolbehandlende funksjoner brukes ved løsningen av sammensatte oppgaver. (Se kapittel 5.2.1.)

Det er innlysende at *symbol- og formalismekompetanse* kan bli svekket ved bruk av CAS-verktøy. Symbolbehandling er jo selve "kjernevirksomheten" til et CAS. I en setting uten restriksjoner på CAS-bruk, kan elevene lett få redusert syntaktisk innsikt i reglene for symbolbehandling. Ett av mange eksempler er at CAS-verktøy overflødiggjør kjennskap til alle derivasjonsreglene. (Se kapittel 5.2.3.) Men det er ikke målbart innenfor forsøkets rammer å avgjøre om elevenes symbol- og formalismekompetanse ville vært høyere hvis de ikke hadde brukt symbolregner.

I forlengelsen av påpekningen om faren for svekket symbol- og formalismekompetanse, kommer spørsmålet om dette *er* negativt. Det vil jo alltid være en avveining mellom hvilke kompetanser som skal vektlegges i matematikkopplæringen. CAS-bruk vil kunne medføre vektforskyvninger mellom kompetansene, og da må kriterier settes opp for hvilke av disse forskyvningene som er ønskelige. For eksempel er det av og til ikke selve utregningene som er det sentrale, men det å kunne sette opp riktig uttrykk ut fra en problemstilling og så finne løsningen på problemet. Dette kan kanskje av og til gjøre enkle og "fine" resultater i matematikken tilgjengelig for en større andel av elevene. (Se kapittel 7.1.2, CAS-tilpasset oppgave 1d1.) Det er et betimelig spørsmål om elevene innimellom bør få anledning til å vise resonnements-, modellerings- og hjelpemiddelkompetanse uavhengig av dekningsgraden for symbol- og formalismekompetanse.

CAS-bruk utfordrer oppgaveprodusentene til å klargjøre hva en oppgave skal måle. Hvis målet i en oppgave kun er å vise en korrekt vei fram til riktig svar, kan CAS-verktøy være meget effektive hjelpemidler. Men hvis målet også er at eleven skal vise resonnementskompetanse og symbol- og formalismekompetanse i forhold til alle trinn fra oppgave til løsning, så viser mange av eksemplene fra forsøksklassen at slike kompetanser i gitte situasjoner kan være vanskelig å måle når elevene har tilgang til et CAS-verktøy. Forsøket fokuserte på logaritmefunksjoner, men her er sannsynligvis overføringsverdien til andre emner innen algebra og funksjonslære stor.

CAS-bruk bør nok medføre økt krav til *kommunikasjonskompetanse*. I forsøksklassen er det flere eksempler på mangelfull føring av oppgavebesvarelser, ved at kraftige CAS-funksjoner brukes uten tekstlig utdyping. (Se kapittel 5.3.4.) Bruk av CAS overflødiggjør ofte en del manuelle løsningstrinn, noe som gjør at besvarelsene lett kan bli meget knappe og vanskelige å tolke. Her kan RIPA-reglene (kapittel 2.7) være et godt utgangspunkt for operasjonalisering av den skriftlige kommunikasjonskompetansen. Vi ser også eksempler på manglende *hjelpemiddelkompetanse*, for eksempel ved at symbolregnerens måte å gi svar på ikke oversettes til korrekt matematisk notasjon. For øvrig viser dataene at verktøyopplæringen ikke behøver å være vanskeligere med symbolregner enn med grafisk lommeregner.

Dataene fra klassen gir ikke grunnlag for å si noe om eventuelle konsekvenser av CAS-bruk når det gjelder *problemløsningskompetanse*. Man kunne tenke seg at bruk av symbolregner ville kunne føre til økt problemløsningskompetanse, ved at rutinearbeidet går fortere så man kan konsentrere seg om det kreative. Med unntak av det utforskende opplegget (kapittel 5.2.1), som gir en svak støtte for et slikt syn, er ikke dette undersøkt. Heller ikke ev. konsekvenser for elevenes *modelleringskompetanse* er undersøkt, da emnet logaritmefunksjoner ikke er godt egnet for dette.

CAS-verktøy kan gjøre det tydeligere for elevene hvilke deler av matematikken som kan programmeres (dvs. er algoritmisk) og hvilke som ikke kan programmeres. Det var mitt inntrykk at elevene ved slutten av skoleåret hadde innsikt i hvilke deler av læreplanen som ble mest påvirket av CAS-bruk, men her har jeg ikke data å støtte meg på. Slik innsikt kan sies å være en del av *tankegangskompetansen* og *resonnementskompetansen*.

Drijvers (2003) anbefaler at lærere innenfor et emne underviser parallelt i det tekniske, det mentale og det manuelle. Han mener at disse tre feltene kan "befrukte" hverandre. Lærere kan for eksempel spørre elevene når de arbeider med CAS, om hvordan de ville løst den aktuelle oppgaven manuelt, og omvendt. Feil CAS-bruk kan indikere feil i begrepsforståelsen. I følge Drijvers kan en slik bruk av CAS-verktøy sammen med fokus på det manuelle og det mentale potensielt gi større bredde i den matematiske kompetansen. Dette ble ikke undersøkt i forsøksklassen.

Oppgavene elevene besvarte på prøver og eksamen innen logaritmefunksjoner, tilhørte kompetanseklasse 1 og 2. Det viste seg at symbolregneren trivialiserte mange av disse oppgavene, ved at en del oppgaver som i en manuell setting hadde blitt plassert i kompetanseklasse 2, nå hørte mer hjemme i klasse 1, og at oppgaver som i en manuell setting hadde blitt plassert i kompetanseklasse 1, ofte ble overdrevent enkle når elevene kunne bruke symbolregner.

Forsøket viser at det med fri tilgang til CAS-verktøy i arbeidet med emnet logaritmefunksjoner er lite hensiktsmessig å inkludere mange oppgaver fra kompetanseklasse 1, dvs. bruk av faktakunnskaper og reproduksjon av standardprosedyrer. Slike oppgaver i en CAS-setting vil bare kunne måle riktig valg av CAS-funksjon, riktig syntaksbruk og riktig angivelse av svar. Disse ferdighetene må som regel betraktes som meget enkle, og ikke nødvendigvis knyttet til noen god forståelse for hvilke matematiske prosesser eller objekter elevene arbeider med.

8.5 Matematiske prosesser og objekter

I arbeidet med logaritmelikninger og derivasjon av logaritmefunksjoner ble det lagt opp til at elevene ikke behøvde å bruke manuelle metoder. Symbolregneren ga her mulighet for direkte behandling av objekter, ved at mange av prosedyrene (derivasjonsregler og regler for likningsløsning) ble gjort overflødige. (Se kapittel 5.3.3.)

Gray og Tall (1994) skriver at overgangen prosess-objekt er essensiell for elevenes forståelse. Min beslutning om fri CAS-bruk gjorde det nok vanskeligere å realisere denne overgangen, spesielt i arbeidet med logaritmelikninger. (Se kapittel 5.2.2.) Ved slik likningsløsning brukes mange prosesser som er kjent for elevene fra tidligere kurs, men det er også nye prosesser som er knyttet direkte til emnet, som for eksempel bruk av ekvivalensen $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$. Kanskje manuelle metoder burde ha vært brukt i startfasen og opp til et visst punkt, selv om elevene hadde symbolregner? Man kunne kanskje forvente at en "procept"-forståelse er lettere å oppnå med en slik rekkefølge? Men her er det ingen klare funn fra forsøket.

Når et matematisk uttrykk kan CAS-manipuleres enkelt og direkte, for eksempel det å derivere en funksjon, kan det innebære at CAS-prosedyrene som blir brukt, ikke sikrer forståelse. Man kan innvende at dette også gjelder ved manuelle metoder: Også en del manuelle prosedyrer kan utføres "mekanisk", uten god forståelse, men likevel kan vi si at løsningsalgoritmene ofte blir radikalt enklere når CAS brukes. Det er til dels stor forskjell i kompleksitet mellom å velge "*diff*(funksjonsuttrykk)" på CAS-verktøyet og det å gjennomføre en manuell derivering, og man kan stille spørsmål om hvilke konsekvenser dette har for forståelsen. Men igjen: Det er her vanskelig å konkludere ut fra dataene, men forsøket har her i hvert fall klarlagt et forskningsspørsmål.

Sammenlikner vi tradisjonelle metoder og forsøksklassens CAS-metoder innen likningsløsning, derivering og ulikhetsløsning med logaritmer, ser vi at CAS-metodene er delmengder av de tradisjonelle. Dvs. at en del manuelle trinn fra de tradisjonelle løsningsmetodene blir erstattet av svar gitt av maskinen. På den måten blir andelen prosessuelt arbeid redusert, noe som igjen kan ha konsekvenser for forståelsen.

Forsøket viser at CAS-bruk har potensiale for å åpne opp for mer strukturelt arbeid, for eksempel ved raskt å undersøke sammenhenger mellom klasser av logaritmefunksjoner og deres deriverte funksjoner. Generelt kunne man tatt objektperspektivet i større grad, og laget opplegg der elevene skulle analysere sammenhenger mellom "oppgave" og "svar" på systematiske måter. Man kunne da prøvd å finne ut noe om hva slags konsekvenser dette ville få for elevenes begrepsforståelse. Denne typen opplegg ble ikke prøvd ut i forsøksklassen.

Den sammensatte kommandoen *diffdiff* er eksempel på at avstanden fra oppgave til løsning kan gjøres enda kortere enn når enkeltkommandoer brukes. Arbeid som inkluderer slike reduksjoner i prosessuelt arbeid kan potensielt styrke elevenes objektsoppfatning, men trolig bare hvis det utføres i tilknytning til (før eller etter) at elevene arbeider prosessuelt med det samme stoffet. Det springende punkt er ved hvilket tidspunkt i opplæringen man kan overlate det prosessuelle til CAS-verktøyet. (Se også kapittel 8.6 om "svart boks"-bruk.)

Ved CAS-bruk i introduksjonsfaser kan elevene lett arbeide med matematiske objekter uten å ha god forståelse for de strukturene de arbeider med. Men kanskje dette kan være en vei inn til stoffet som er et alternativ til "fra prosess til objekt"? Det utforskende opplegget antyder at en slik vei fra "objekt til prosess til objekt" bør prøves ut. En hypotese er at en slik rekkefølge vil kunne medføre bedre læring for en del elever, fordi man får et bilde av helheten før man dykker ned i de enkelte prosessene. Kanskje man ved å inkludere CAS-verktøy i opplæringen bedre vil kunne treffe elever med en "holistisk læringsstil"?

Konklusjonen på denne diskusjonen om prosess/objekt blir at det er vanskelig ut fra forsøket å si noe om hvordan symbolregneren påvirket elevenes "procept"-forståelse, men forsøket har klarlagt noen forskningsspørsmål.

8.6 Hvit boks/svart boks og "teknologi som herre"

I følge Buchberger (1990) skal "svart boks"-bruk av teknologien henvises til en fase der operasjonene er blitt manuelle rutiner. Dette prinsippet ble *ikke* fulgt i forsøket, ved at det ikke var CAS-frie deler i opplærings- og vurderingssituasjonene. Eksempler er derivasjon av logaritmefunksjoner og løsning av logaritmelikninger, der elevenes symbolregnerbruk fikk karakter av "svart boks", uten at de hadde vært gjennom noen "hvit boks"-fase. (Se kapittel 5.2.2/5.2.3.)

Det er mange eksempler på at elevene i forsøksklassen ikke klarer å nyttiggjøre seg CAS-teknologien på en god måte. I en del sammenhenger blir symbolregneren brukt som "herre", dvs. at teknologien gjør at elevene stopper opp i resonnementene sine eller leder resonnementene inn på galt spor, og at teknologien dermed faktisk kan være et hinder. (Se kapittel 5.3.2.) I de fleste andre sammenhenger blir maskinen brukt som "tjener", dvs. som en rask erstatter for penn og papir, en maskin som tas i bruk på utvalgte steder i ellers tradisjonelle løsningsmetoder og overflødiggjør ett eller flere trinn. CAS-bruk som kunne karakteriseres som "teknologi som partner" eller "teknologi som kroppsdel" er det få tegn til i forsøksklassen. Et tema for videre forskning kunne være å undersøke hva som skal til for å få til en virkelig god integrering av CAS-verktøy i opplæringen, en integrering der elevenes interaksjon med teknologien kunne karakteriseres som "partner" eller "kroppsdel".

En effekt av "svart boks"-bruken var at antall oppgaver elevene kunne løse innen et gitt tidsrom, ble større enn hvis de ikke hatt CAS-tilgang, noe som gjorde at de rent kvantitativt møtte de matematiske begrepene (som for eksempel *nullpunkt*) oftere. Om denne effekten virket positivt eller negativt, er vanskelig å si. Noen elever mente at de fikk arbeidet mer med begrepsforståelse. (Se kapittel 6.2.3.)

En del svar kan eleven vanskelig vurdere rimeligheten av når teknologien brukes som en "svart boks". Dette åpner lett for en bruk som kan karakteriseres som "teknologi som herre". Elevene burde nok ha hatt opplæringssekvenser med manuelle metoder ("hvit boks"-faser) før CAS-funksjoner ble tatt i bruk.

8.7 Elevenes holdninger til bruk av symbolregner

Elevene i forsøksklassen brukte altså symbolregneren som eneste teknologiske hjelpemiddel gjennom hele 3. skoleår; fem timer i uka på skolen og i tillegg arbeid utenom timene. Fra 1. og 2. klasse hadde de vært vant til bruk av grafisk lommeregner. Elevene hadde derfor et meget godt grunnlag for å vurdere bruken av CAS-verktøy, både i forhold til egen læring og i forhold til videregående skole generelt. De ga gode og reflekterte svar på de fire spørreskjemaene. (Se kapittel 4.2, 6.1, 6.2 og 7.2.)

Tilbakemeldingene på spørreskjemaene og den daglige lærererfaringen viser at det ikke var praktisk vanskelig å tilrettelegge for bruk av symbolregner i klassen. Elevene følte ikke teknologien som noen hindring. Skrittet fra bruk av grafisk lommeregner og opp til symbolregner var ikke langt når det gjaldt mestring av teknologien. Elevenes svar tyder likevel på at elever bør ha tilgang til spesiallaget instruksjonsmateriell, enten som en integrert del av læreboka/læremidlet, eller som en egen ressurs.

Elevene satte pris på at det blir mindre fokus på det regnetekniske, og de mente at CAS-teknologi bør inn i skolen, fordi det er en del av "verden der ute": virkelighetsnærhet var et argument for CAS-bruk som gikk igjen. De mente også at bruk av symbolregner åpner for mer effektiv læring, og at man derfor kan behandle flere emner på samme tid. Generelt sett viste elevene positive holdninger til bruk av symbolregner.

Noen elever mener bruken av symbolregner passiviserer og ikke gir god nok forståelse, og noen savner klarere regler for hvordan oppgaver bør føres når man bruker et slikt hjelpemiddel.

Holdningene til bruk av symbolregner endret seg lite gjennom skoleåret.

Et klart flertall av elevene mener symbolregner bør kunne brukes på eksamen. Mange mener at klassens eksamensform med CAS-tilpasning av enkelte oppgaver og fri CAS-bruk, er den beste eksamensformen. En del mener eksamen bør være todelt, der det er tillatt med CAS-verktøy i én del, og der den andre delen er uten teknologiske hjelpemidler.

8.8 Sammenfatning av funnene

Elevene i forsøksklassen behersket raskt de mest nyttige CAS-funksjonene som *solve* og *diff*. Men det tok tid før CAS-bruk var godt integrert i oppgavebesvarelsene. Vi ser flere eksempler på at elevene brukte manuelle, grafiske og numeriske metoder også i situasjoner der CAS-funksjoner kunne vært utnyttet.

Forsøket avdekket noen mindre teknologiske begrensninger og én kraftig begrensning. Den kraftige begrensningen var knyttet til logaritmeulikheter, og fikk store konsekvenser for arbeidet med dette emnet.

Det viste seg at det var vanskelig å måle elevenes symbol- og formalismekompetanse innen logaritmefunksjoner når de hadde tilgang til symbolregner. Videre avdekket forsøket farer for svekking av resonnementskompetanse. Det er indikasjoner på at CAS-bruk kan styrke representasjonskompetansen.

Forsøket viser at CAS-bruk kan påvirke hvilken kompetanseklasse en oppgave plasseres i. Det er en tendens til at oppgaver som i en manuell setting hører hjemme i kompetanseklasse 2 (sammenheng), ville blitt plassert i kompetanseklasse 1 (reproduksjon) i en CAS-setting. Og det er eksempler på at oppgaver som i en manuell setting hører hjemme i kompetanseklasse 1, ikke ville måle annet enn helt elementær hjelpemiddelkompetanse hvis de ble gitt i en CAS-setting.

Bruk av symbolregner har et potensiale for kraftig reduksjon av elevenes arbeid med manuelle prosesser. Forsøket har klarlagt noen forskningsspørsmål knyttet til matematiske prosesser og objekter, men har ikke her gitt noen klare funn.

Elevenes symbolregnerbruk hadde ofte karakter av "svart boks" innen noen emner. Her burde det vært lagt opp til innledende opplæring med manuelle metoder ("hvit boks"-faser).

Symbolregneren brukes som regel som en "tjener", dvs. en rask erstatter for manuelle metoder. Vi ser også eksempler på at maskinen blir brukt som "herre", og at den da er til hinder for elevenes resonnementer.

Elevene kunne bruke symbolregneren uten noen begrensninger. Elevene viste i overveiende grad positive holdninger til slik fri bruk, men noen mener at bruken passiviserer og ikke gir god nok forståelse.

9. CAS-verktøy i skolen. Noen betraktninger

Dette avsluttende kapitlet inneholder noen generelle betraktninger og hypoteser om bruk av CAS-verktøy i skolen i videre forstand. Det er viktig å understreke at selv om erfaringene fra forsøksklassen danner en generell bakgrunn for betraktningene, så går jeg her utover problemstillingen i oppgaven. Betraktningene kan derfor ikke sees på som direkte resultater av forsøket, og kan altså ikke begrunnes med bakgrunn i empiri fra forsøksklassen. Det er altså en markert subjektiv komponent i dette kapitlet. I betraktningene kan det også ligge emner for videre forskning.

9.1 CAS og trinnvise løsninger

Mange matematikkoppgaver kan løses både grafisk/numerisk og ved manuelle løsningsmetoder. Bruken av grafiske lommeregnere i norsk skole har ført til at man har bevisst har begynt å bruke formuleringer som "ved regning" eller "regn ut" når man ønsket at elevene skulle bruke en manuell metode. Man har da kunnet vurdere de ønskede regneferdighetene på prøvene.

Man kunne tenke seg denne praksisen også når elevene hadde tilgang til CAS-verktøy. Slike verktøy gjør jo at elevene har rask tilgang til fasitsvar på regneoppgaver innen for eksempel derivering, integrering og likningsløsning. En mulig strategi er da å kreve trinnvise løsninger, dvs. mellomregninger, i besvarelsene, slik at CAS-verktøyet bare fungerer som en fasitgenererer.

Men teknologisk sett er det uproblematisk å lage CAS-programmer som viser alle trinn på veien for standard algoritmiske oppgaver. Slike programmer kan like gjerne være brukerprogrammer som ferdige fabrikkapplikasjoner. Tõnisson (1999) gir en oversikt over CAS-verktøy med mulighet for slik trinnvis løsning. Ved bruk av slike programmer har sensor ofte ingen mulighet for å vurdere om det er maskinen eller eleven som har produsert løsningen.

Enkelte symbolregnere tillater programmering med CAS-funksjoner, for eksempel Texas TI-89, mens andre ikke gjør det, for eksempel Casio Algebra FX 2.0, som var forsøksklassens maskin. I forsøksklassen ble altså CAS-programmer med mellomregninger ikke brukt.

For å eksemplifisere hva et CAS-program med trinnvise løsninger kan innebære, kan vi se på en typisk algoritmisk oppgave innen logaritmefunksjoner:

"Bestem eventuelle ekstremalpunkter for $f(x) = x^3 \ln x$ ved regning."

Jeg har laget et program på symbolregneren Texas TI-89 som ber brukeren om å sette inn u og v. Programmet gir da utregningen fram til den deriverte funksjonen, med mellomregninger, og gir meget god støtte for å løse oppgaven ovenfor. Programkoden til dette enkle programmet (42 linjer) er vist i vedlegg 11.3. Her vises kjøringen av programmet på funksjonen $f(x) = x^3 \ln x$:

```
u=
?
x^3
v=
?
ln(x)
```

```
u derivert er
3·x^2
v derivert er
1/x
```

```
mellomregning:
3·x^2
*
ln(x)
+
x^3
*
1/x
```

```
svar:
3·x^2·ln(x) + x^2
```

```
svaret faktorisert:
x^2·(3·ln(x) + 1)
```

```
den deriverte er null for
x = e^(-1/3)
```

$x = 0$ tas automatisk ikke med som løsning, fordi ln x ikke er definert for x mindre enn eller lik 0.

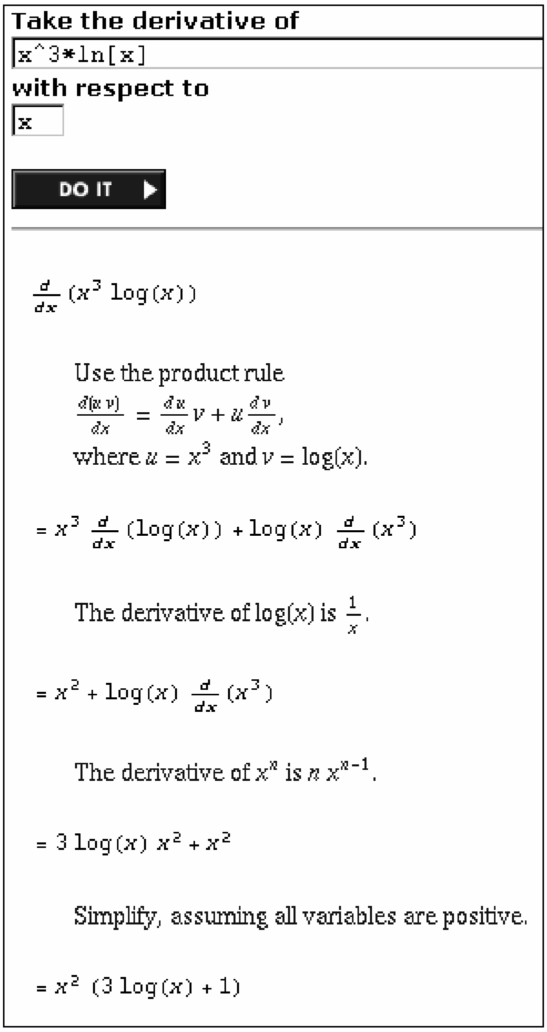
Programmet kunne også ha vært utvidet slik at også y-verdiene til ev. bunn-, topp- eller terrassepunkter ble funnet. Slike y-verdier kunne bli funnet ved å legge inn en linje som dette i programkoden:

$$u \cdot v \mid x = \text{right}(q) \qquad \frac{-e^{-1}}{3}$$

Her står "right(q)" for høyresiden i linje q, som i vårt tilfelle var likningen $x = e^{-\frac{1}{3}}$. Se ev. programkoden i vedlegg 11.3.

Man kan også tenke seg utvidelser som at brukeren får valg som "Finn når den deriverte er positiv" og "Finn når den deriverte er negativ". Eller for å gå enda lengre: "Finn hvor grafen stiger" og "Finn hvor grafen synker". Da vil mange oppgaver kunne løses uten at elevene en gang behøver å ta stilling til riktig bruk av CAS-funksjoner som *solve* og *diff*. Maskinen vil da fungere som en "svart boks" av "svarteste type".

I eksemplet ovenfor måtte eleven selv velge programmet som bruker "*u* ganger *v*"-formelen, og videre identifisere *u* og *v*. Den følgende nettressursen for derivering overflødiggjør også denne typen vurderinger. Igjen er det $f(x) = x^3 \ln x$ som er lagt inn:



(Kilde: www.calc101.com/webMathematica/MSP/Calc101/WalkD)

Dette programmet gir en relativt grundig begrunnelse for hvert trinn. Løsningen har i høy grad et manuelt preg. Det kan altså by på problemer å kontrollere om de "manuelle ferdighetene" vist på en prøve, ikke i virkeligheten kommer fra en maskin.

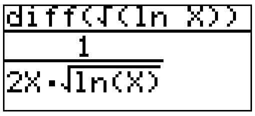
Det fins også mer "pedagogiske" CAS-programmer for trinnvise løsninger. Et eksempel er Texas Instruments *Symbolic Math Guide* (SMG), som fungerer slik at elevene først må velge hvilken regel som skal brukes. Maskinen regner så ut ett enkelt steg i følge den gitte regelen. Her er det altså ikke noen automatisk generering av en full trinnvis løsning, som vist ovenfor, men et program som sørger for riktige utregninger ut fra elevens valg av metode. Bruk av slike programmer er for eksempel beskrevet av Child (2001). Pedagogiske CAS-programmer kan i større grad møte elevene og være tilpasset læring, og er ikke bare "supermaskiner" som gir raske og kraftfulle svar.

Buchberger (1990) mener at man i et CAS bør kunne velge mellom en svart boks-innstilling eller en hvit boks-innstilling. Ved hvit boks-innstillingen løses oppgavene gradvis, med mellom-regninger og ev. med mulighet for grafisk visualisering av trinnene. I tillegg mener han det bør finnes en interaktiv "hjelp"-funksjon for de forskjellige trinnene.

En konklusjon på denne betraktningen om CAS og trinnvise løsninger er at lærere og oppgaveforfattere bør ha grundig kjennskap til de teknologiske mulighetene og en høy bevissthet om hva hver oppgave skal måle. CAS-programmer kan potensielt påvirke algoritmiske oppgavetyper i meget stor grad, og i vurderingssituasjoner bør det nok av rettferdighetshensyn forhindres at enkelte elever har tilgang til slike programmer, og andre ikke. Det ville vært interessant med forskning, også i en norsk kontekst, omkring bruk av "pedagogiske" CAS-programmer og andre CAS-programmer som kan gi trinnvise løsninger.

9.2 CAS og læreplanutvikling

I læreplanen for 3MX fra 1994 står det at elevene skal *kunne derivere logaritmefunksjoner*. Da denne planen ble iverksatt, var det nok en felles forståelse for at dette innebar å derivere *ved regning*, dvs. uten teknologisk hjelp. Med et CAS-verktøy tilgjengelig er det ikke lenger klart om formuleringen innebærer et slikt krav. Med for eksempel en inntasting som *diff*(√(ln X)) *viser* jo eleven kompetanse i å "derivere logaritmefunksjoner", dvs. å vite om en metode for å finne den deriverte funksjonen:



Dette eksemplet trekker opp en omfattende diskusjon om hva som bør være nødvendige manuelle ferdigheter, og også om det skal kreves forskjellig grad av manuelle ferdigheter mellom forskjellige elevgrupper / forskjellige kurs. Jeg mener det bør formuleres klart i læreplanene hva som skal være krav til manuelle ferdigheter og hva som kan overlates til teknologien (jf. Herget mfl., 2000). Beslutninger om læreplanmål bør sees i sammenheng med vurdering av hjelpemiddelbruk og eksamensordning. I matematikkfaget er det ikke heldig med en læreplanutvikling der man ikke samtidig vurderer hvilken type teknologi som skal hjelpe elevene til å nå målene. Noss & Hoyles (1996) skriver at kunnskapsområder og verktøy bør forholde seg dialektisk til hverandre, altså ved en gjensidig, dynamisk påvirkning.

CAS-verktøy vil nok påvirke læreplanutviklingen forskjellig innenfor de ulike matematiske emnene. For eksempel vil nok læreplanmål innen algebra, derivasjon og integrasjon bli vesentlig mer påvirket av CAS-bruk enn mål innen sannsynlighetsregning og vektorregning. Man kan også tenke seg at bruk av CAS vil kunne påvirke emneutvalget og omfanget av læreplanen.

Hvordan *bør* så mål innenfor en CAS-tilpasset læreplan se ut? Bør utforskning, begrunnelser og anvendelser få mer fokus, på bekostning av det regnetekniske? Bør bruk av bevis få en større plass? Bør muntlige ferdigheter og "mental matematikk" vektlegges mer? Bør læreplanen fokusere mer på å utvikle elevenes tankegangskompetanse, representasjonskompetanse og kommunikasjonskompetanse? Her er det mange videre forskningsspørsmål.

9.3 CAS, modellering og eksakt matematikk

I modelleringsoppgaver i funksjonslære er eksakte svar sjeldent nødvendig. Da vil grafiske løsninger og CAS-løsninger være like gode og omtrent like raske. I tillegg til modelleringsoppgaver bør det være plass for oppgaver uten kontekst, og der det forventes eksakte svar. Dette har å gjøre med respekt for matematikkens egenart. Funksjonslære er mer enn modellering. For eksempel bør elevene forstå at det å oppgi førstekoordinaten til et toppunkt som $x = e$, er noe annet enn å oppgi den som $x = 2,7$.

Spørsmålet er i hvilken grad regningsalgoritmene fortsatt skal brukes. Typiske eksempler er likningsløsning, derivering for å finne monotoniegenskaper og ekstremalpunkter, dobbelt-derivering for å finne vendepunkter og integrasjon m/praktisk tolkning. Alternativene er her manuelle metoder på den ene siden og grafiske metoder og CAS-metoder på den andre. Diskusjonen går på hvilke og hvor mange oppgaver av disse typene som skal løses manuelt.

Mange tradisjonelle matematikkoppgaver er "rene" oppgaver, som deriveringer, ubestemte integraler og oppstilte likninger der det kreves eksakt svar. Dette er oppgaver som normalt ikke kan løses grafisk, så her er grafiske løsninger og CAS-løsninger *ikke* sidestilt, slik de er i modelleringsoppgaver.

Krav om eksakte løsninger kan styrke CAS-metoder og manuelle metoder framfor grafiske og numeriske metoder. På den måten kan bruk av CAS-verktøy paradoksalt nok bli en motvekt til det økte fokuset på teknologiske grafiske og numeriske metoder de siste 10-12 årene. Bruk av CAS-teknologi kan kanskje medføre større bevissthet om den eksakte matematikkens egenart? (Jf. Kissane (1999), som skriver at CAS kan bidra til å utvikle en sans for det eksakte i matematikken.)

9.4 CAS og oppgaveproduksjon

Til forsøksklassen var det vanskelig å lage oppgaver godt tilpasset CAS-funksjonene. (Se kapittel 5.2.) Det kan ha å gjøre med selve emnet logaritmefunksjoner, et "indrematematisk" emne uten mange anvendelsesmuligheter innenfor den aktuelle læreplanen. Men det kan også ha å gjøre med at tradisjonen i læreplaner, lærebøker og undervisningspraksis er så sterkt knyttet til manuelle løsninger med standard algoritmiske prosedyrer, dvs. nettopp den typen program-merbar matematikk der CAS-verktøy har sin styrke. Generelt kan vi si at bruk av CAS-verktøy legger press på oppgaveprodusenten til å klargjøre hva som er formålet med oppgaven.

Det er mange eksempler på mangelfull føring i prøvebesvarelsene i forsøksklassen. Ofte begrun-nes ikke valget av CAS-funksjon, og vi ser eksempler på at ingen inntasting vises. RIPA-reglene følges i liten grad. En mulig konsekvens er at man ved CAS-vurdering i størst mulig grad bør stille kontrollspørsmål, for å gi elevene anledning til å vise forståelse for resultatene de har kommet fram til. Man kan også kreve begrunnelser for elevenes valg av metoder.

I forsøket var det var ingen stor tilpasning av det ordinære eksamenssettet som skulle til for å gjøre det mer passende til bruk av symbolregner. Dette tyder på at innenfor akkurat denne 3MX-planens mål, ville ikke bruk av symbolregner totalt sett ha medført noen stor omlegging av oppgavetyper. Men som vi har sett for emnet logaritmefunksjoner, kan CAS-bruk ha en meget stor innflytelse innenfor enkelte emner.

Oppgaveprodusenter bør ta hensyn til at rene derivasjons-, integrasjons- og likningsoppgaver i de aller fleste tilfeller løses helt ut ved bruk av CAS-verktøy. Slike oppgaver vil derfor normalt ikke måle annet enn kompetanse i å finne riktig CAS-funksjon og å taste inn med riktig syntaks. Hvis slike oppgaver inkluderes, bør de nok settes i en større sammenheng, slik at eleven har mulighet for å vise forståelse.

Kompleks eksakt utregning, for eksempel av store rotuttrykk, er enkelt med CAS. Derfor kan en del oppgaver som ellers ville blitt avvist i prøvesituasjoner, inkluderes når elevene har CAS-tilgang. Dermed økes "oppgaverommet" og det kan bli større variasjon i oppgavetyper.

Åpner CAS-bruk for å øke antallet oppgaver gitt på prøver, fordi oppgavene kan løses raskere? Vil dette i så fall bedre reliabiliteten til prøvene? Vil prøver der CAS er tillatt, kunne inneholde mange oppgaver der vurderinger og begrepsforståelse vektlegges mer enn det regnetekniske? Da kan vi få en omlegging av oppgavetyper og oppgaveantall på prøver og eksamen.

Man bør unngå oppgaver som er så enkle at det i praksis er vanskelig å vurdere om de er løst på symbolregner eller ved regning.

McCallum (2003) skriver at det er mer krevende å lage gode oppgaver når elevene har CAS-tilgang enn uten. Det blir større svarvariasjon og lærere må lære seg å tolke disse svarene.

Det kan lages oppgaver der symbolregneren kan brukes til å løse interessante oppgaver som i en CAS-fri setting ville vært for krevende, enten fordi de ville gått utover emnene i læreplanen, hatt for store krav til kreativitet eller inkludert *for* omfattende tall- og bokstavregning. Vi kan kalle slike oppgaver for "CAS-unike". Det er liten tradisjon for produksjon av CAS-unike oppgaver, så det er sannsynligvis krevende å lage slike oppgaver per i dag.

CAS-funksjoner åpner for generaliseringer, ved at bokstavparametre kan settes inn i stedet for tall. Slik bruk bør det oppmuntres til, for eksempel ved arbeid med modelleringsoppgaver. Da kan resultatene generaliseres, og man avslutter ikke uten videre oppgaven når et numerisk tallsvar er funnet. Med CAS kan man for eksempel finne hvilke parametre et gitt svar er avhengig av og hvilke det er uavhengig av. Se Lagrange (2003), 280-281. Jeg viser også til vedlegg 10.2.3, med et instruksjonsark til forsøksklassen om bruk av bokstavparametre i likningssett. Lagrange mener at man ikke bør betrakte bruk av CAS som en måte å redusere det tekniske aspektet ved matematikkopplæringen på, men betrakte det som mulighet for å lære nye typer teknikker som elevene kan lære matematikk gjennom.

9.5 CAS og eksamen

Sammenlikning av ulike CAS-verktøy har ikke vært i fokus i denne oppgaven, men dette er likevel gjort ved to anledninger: i kapittel 5.2.4 og i 7.1.2, oppgave 1a. Disse eksemplene viser klare funksjonalitetsforskjeller, der begrensninger på ett verktøy ikke finnes på et annet. Dette bør få konsekvenser ved en eventuell bruk av CAS-verktøy på eksamen: Ved CAS-bruk på eksamen bør oppgavene være teknologiuavhengige, både i den forstand at det i oppgaveteksten ikke bør henvises til operasjoner knyttet til et spesielt produkt, og i den forstand at oppgavene må prøves ut på alle relevante verktøy før de benyttes. Av rettferdighetshensyn bør ikke forskjellige teknologiske begrensninger mellom CAS-verktøyene kunne påvirke elevenes eksamensresultater.

Tradisjonelle oppgaver innen logaritmefunksjoner, som å finne definisjonsmengde, nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter, er ikke godt tilpasset CAS-bruk, i og med at CAS-verktøy "trivialiserer" denne matematikken (Buchberger, 1990). Tilsvarende gjelder for flere andre emner innen funksjonslære og algebra. Én løsning er å redusere plassen til slike emner i læreplanene. Dette mener jeg er en uheldig løsning, da denne matematikken danner grunnlag for forståelse innen mange andre deler av matematikken. En annen løsning er å forsøke å sikre et visst nivå manuelle ferdigheter ved å teste elevene uten at de har tilgang til teknologiske hjelpemidler. Dette mener jeg kan være veien å gå.

Vi må altså ta utgangspunkt i eksamensordningen. Per i dag er det eksamensordningen som i stor grad styrer hjelpemiddelbruken i det daglige læringsarbeidet og i standpunktvurderingen. Vi kan se for oss flere typer eksamensordninger som respons på CAS-utfordringen. De mest aktuelle vil kanskje være:

1. Eksamen med tilgang på grafisk/numerisk verktøy, men ikke CAS.
2. Eksamen med full CAS-tilgang.
3. Todelt eksamen, der oppgavene i én del skal løses uten bruk av teknologiske hjelpemidler og der CAS er tillatt i den andre delen.

Modell 1 har vært den vanlige i Norge fra 1994. I forsøksklassen ble modell 2 gjennomført. Denne modellen vil jeg ikke anbefale, ut fra konsekvensene det er redegjort for tidligere i oppgaven.

Jeg mener at man kan vurdere å ta i bruk CAS-verktøy i matematikkopplæringen på de mest krevende kursene i videregående skole. En fornuftig bruk av CAS-verktøy i disse kursene vil sannsynligvis kunne bidra til økt motivasjon og økt mulighet for matematisk utforskning og kreativitet. Men for å unngå negative konsekvenser for elevenes forståelse, bør nok eksamensmodell 3 gjennomføres i de kursene der CAS tillates. I matematikkurs på de laveste trinnene i videregående skole vil sannsynligvis ikke CAS-verktøy være godt egnet.

En todelt eksamen kunne vært lagt opp slik at man i første del hadde mange og relativt enkle oppgaver som skulle løses uten hjelpemidler. Her kunne man sjekket grunnleggende manuelle løsningsmetoder. Innenfor hvert kurs må det da defineres hva som skal være kravet til manuelle ferdigheter. Dette bør altså inn i læreplanen.

I andre del av eksamen, delen med CAS-tilgang, kunne man ha større modelloppgaver, utforskende oppgaver og oppgaver som testet begrepsforståelse, for eksempel ved at elevene skulle komme med lengre resonnementer. Her kunne man hente inspirasjon fra RIPA-reglene for føring av oppgaver. Økt krav til tekstlig utdyping vil også kunne dreie oppgaver bort fra kompetanseklasse 1 og over til kompetanseklasse 2. En del av oppgavene bør ta CAS-verktøyets funksjonalitet på alvor, dvs. at de er utformet slik at de *ikke* like gjerne kan løses ved å bruke andre hjelpemidler. Denne typen oppgaver har jeg kalt for CAS-unike.

Det er helt klart en utfordring å lage gode oppgaver til en slik CAS-tilpasset eksamensdel. (Mine forsøk er gjengitt i kapittel 4.1.2.) Men jeg tror en todelt eksamen med CAS-bruk i én del, på sikt vil kunne åpne for større spenn i oppgavetyper og dermed en mer variert matematikkundervising.

En gitt manuell ferdighet vil kunne bli testet i tilknytning til ett bestemt kurs, og vil normalt ikke bli testet i kurs på høyere trinn. Da vil ferdigheten bli innøvd i en "hvit boks"-fase, mens tilsvarende oppgaver på høyere trinn kan inngå i en "svart boks"-fase, der de løses ved bruk av CAS-verktøy.

I kapittel 2.8 er det presentert noen erfaringer med eksamensvurdering med CAS. Her argumenteres det for todelt eksamen, både ved å henvise til elevenes forskjellige læringsstiler, og ved å påpeke at noen lærere aksepterer CAS som et godt undervisnings- og læringsverktøy, mens andre ikke gjør det. En todeling kan dermed treffe bredden av elever og lærere bedre.

I diskusjonen om bruk av CAS er det også viktig å ikke miste av syne at teknologien i seg selv sannsynligvis vil forandre innholdet i matematikkfaget. For eksempel trenes ikke lenger elevene i ferdigheten å regne ut kvadratrøtter manuelt, fordi dette på grunn av den elementære lommeregnerens inntog ikke lenger blir regnet som en nødvendig matematisk ferdighet. Sannsynligvis har ikke dette forhindrer utviklingen av begreper om irrasjonale tall hos elevene. Denne typen utvikling kan vi også komme til å se innenfor mer avansert matematikk. Hva som regnes som viktig kunnskap og viktige ferdigheter er hele tiden i endring. Matematikk, som andre fag, er ikke statiske størrelser. Ny læringsteknologi bør møtes med en åpen, kritisk holdning der man kontinuerlig vurderer hva som er viktig og mindre viktig innen fagets tradisjon.

10. Litteratur

Artigue, Michèle (2002): Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection About Instrumentation and the Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7, 245-272

Ball, Lynda & Stacey, Kaye (2003): What should students record when solving problems with CAS? *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Bowers, David med Schüller, Peter (1995): Quantifying the Experience and Attitudes of Teachers Towards Computer Algebra Systems, http://website.lineone.net/~davidbowers/Cas_surv/Cas_surv.htm Lest 04.05.06

Bowers, David (2003): Promoting Pure Mathematics through Preliminary Investigational Activities Using Computer Algebra. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Buchberger, Bruno (1990): Should Students Learn Integration Rules? *ACM SIGSAM Bulletin* 24(1), 10-17

Buchberger, Bruno (2002): Computer Algebra: The end of Mathematics? *ACM SIGSAM Bulletin* 36(1), 3-9

Cannon, Raymond J. & Madison, Bernard L. (2003): Testing with Technology: Lessons Learned. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Cedillo, Tenoch & Kieran, Carolyn (2003): Initiating Students into Algebra with Symbol-Manipulating Calculators. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Child, Doug (2001): The symbolic math guide and the law of exponents. *Micromath* summer/2001.

Connors, Mary Ann & Snook, Kathleen G. (2001): A techology tale: Integrating handheld CAS into a mathematics curriculum. *Teaching Mathematics and its Applications* 20(4), 171-190

Cuoco, Al (2002): Thoughts on reading Artigue's "Learning mathematics in a CAS environment". *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7, 293-299

Cuoco, Al & Levasseur, Ken (2003): Classical Mathematics in the Age of CAS. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Dick, Thomas (1998): Challenges in the Use of Technology Active Assessment. Some Lessons Learned in AP Calculus, http://mathforum.org/technology/papers/papers/dick/dick.html Lest 04.05.06

Drijvers, Paul & Doorman, Michiel (1996): The Graphics Calculator in Mathematics Education. *Journal of Mathematical behavior* 15, 425-440

Drijvers, Paul (1999): Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5, 189-209

Drijvers, Paul (2003): Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Edwards, Michael Todd (2003): Calculator-based Computer Algebra Systems: Tools for Meaningful Algebraic Understanding. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Fey, James T. (1989): Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics* 20, 237-272

Forster, Patricia A. & Taylor, Peter C. (2003): An Investigation of Communicative Competence in an Upper-Secondary Class Where Using Graphics Calculators Was Routine. *Educational Studies in Mathematics* 52, 57-77

Garry, Tim (2003): Computing, Conjecturing, and Confirming with a CAS Tool. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Gjone, Gunnar (2004): Process or object? Ways of solving mathematical problems using CAS. *Teaching Mathematics and Computer Science* 2(1), 117-132

Goldenberg, E. Paul (2003): Algebra and Computer Algebra. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Goos, Merrilyn, Galbraith, Peter, Renshaw, Peter & Geiger, Vince (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior* 22, 73-89

Grey, E. & Tall, D. (1994): Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(2), 116-140

Guin, Dominique & Trouche, Luc (1999): The complex prosess of converting tools into mathematical instruments: The case of calulators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227

Guin, Dominique, Ruthven, Kenneth & Trouche, Luc (2005) (ed.): *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* New York, Springer.

Hannula, Markku S. (2002): Attitude towards Mathematics: Emotions, Expectations and Values. *Educational Studies in Mathematics* 49, 25-46

Heid, Kathleen (2003): Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Heugl, Helmut (2000): New emphasis of fundamental algebraic competence and its influence in exam situation. http://www.acdca.ac.at/kongress/portoroz/p00_heug.pdf Lest 04.05.06

Herget, Wilfried, Heugl, Helmut, Kutzler, Bernhard & Lehmann, Eberhard (2000): Indispensible Manual Calculation Skills in a CAS Environment, http://b.kutzler.com/article/art_indi/art_indi.pdf Lest 04.05.06

Hofe, Rudolf vom (2001): Investigations into students' learning of applications in computer-based learning environments. *Teaching Mathematics and its applications* 3, 109-119

Hong, Ye Yoon, Thomas, Mike & Christine Kiernan (2000): Supercalculators and University Entrance Calculus Examinations. *Mathematics Education Research Journal* 3

Hoyles, Celia (2001): Steering between Skills and Creativity: a role for the Computer? *For the Learning of Mathematics* 21, 33-39

Kissane, Barry (1999): The Algebraic Calculator and Mathematics Education, Yang, W-C, Wang, D., Chu, S-C & Fitz-Gerald, G (ed.): *Proceedings of 4th Asian Technology Conference on Mathematics*, (123-132) Guangzhou, China. Asian Technology Conference in Mathematics http://wwwstaff.murdoch.edu.au/~kissane/papers/ATCM99.pdf Lest 04.05.06

Kokol-Voljc, Vlasta (1999): Exam questions when using CAS for school mathematics teaching, http://www.tech.plym.ac.uk/maths/CTMHOME/ictmt4/P04_Koko.pdf Lest 04.05.06

Kutzler, Bernhard (2000): The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, http://b.kutzler.com/article/art_paed/art_pead.pdf Lest 04.05.06

Kutzler, Bernhard (2003): CAS as Pedagogocal Tools for Teaching and Learning Mathematics. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Lagrange, Jean-Baptiste (1999): Complex calculators in the classroom: Theoretical and Practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4, 51-81

Lagrange, Jean-Baptiste (2003): Learning Techniques and Concepts Using CAS: A Practical and Theoretical Reflection. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Lesh, Richard (2000): Beyond Constructivism: Identifying Mathematical Abilities that are Most Needed for Success Beyond School in an Age of Information. *Mathematics Education Research Journal* 3

Malabar, I & Pountney, D.C. (1999): When is it appropiate to use a Computer Algebra system (CAS)? *Proceedings of ICMTT4 Plymouth*, 9-13 August 1999

Manuochehri, Azita (2004): Using interactive algebra software to support a discourse community. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 37-62

McCallum (2003): Thinking out of the box. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

McMullin, Lin (2003): Traditional Assessment and Computer Algebra Systems. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Menghini, Marta (1994): Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on Upper Secondary school Teaching. *For the Learning of Mathematics* 14, 9-13

Monaghan, John (1993): Computer Algebra Systems in the Classroom. Monaghan, Etchells (ed.): *Computer Algebra Systems in the Classroom.* Centre for Studies in Science and Mathematics Education. The University of Leeds.

Møller, Dag-Erik (2001): Rapport om bruk av symbolregner til eksamen i matematikk i VKII (3MX/3MY) våren 2000. Læringssenteret.

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (2004): Nasjonale prøver: Kompetanser i matematikk. www.matematikksenteret.no/content.ap?thisID=204 Lest 04.05.06

NCTM (2003): *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education.* Ed.: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin & Rose Mary Zbiek. Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Niss, Mogens & Jensen, Thomas Højgaard (ed.) (2002): Kompetencer og matematikklæring. Ideer til inspirasjon og udvikling av matematikkundervisning i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002, s. 43-72 og 241-270. http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf Lest 04.05.06

Noss, Richard (1999): Keynote 2: Rethinking abstraction in the light of digital technologies, http://www.lkl.ac.uk/came/events/weizmann/CAME-Keynotes.pdf (Proceedings CAME, http://www.lkl.ac.uk/came.) Lest 27.04.2006

Noss, Richard & Hoyles, Celia (1996): *Windows on mathematical meanings.* Dordrecht, NL: Kluwer Academic Press.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framwork, 23-55. Organisation for Economic Co-Operation and Development. www.pisa.oecd.org./dataoecd/46/14/33694881.pdf Lest 04.05.06

Oldknow, Adrian & Taylor, Ron (2003): *Teaching Mathematics using Information and Communications Technology.* London, UK: Continuum.

Olsen, Rolf V. (2004): Matematikkdidaktiske perspektiver. Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe, Turmo: *Rett spor eller ville veier. Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA.* Universitetsforlaget

Pierce, Robyn, & Stacey, Kaye (2001): Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. *Mathematics Education Research Journal*

Ruthven, Kenneth (1990): The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics* 21, 431-450

Ruthven, Kenneth (2002): Instrumenting Mathematical Activity: Reflections on Key Studies of the Educational Use of Computer Algebra Systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7, 275-291

Schultz, James E. (2003): To CAS or Not to CAS? *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Sfard, Anna (1991): On the dual nature of mathematical conseptions: Reflections om prosesses and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36

Sfard, Anna (2000): Symbolizing Mathematical Meaning into Being - Or how Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other. Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (2000): *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Shaw, Nomiki, Jean, Brian & Peck, Roger (1997): A statistical Analysis on the Effectness of Using a Computer Algebra system in a Development Algebra Course. *Journal of mathematical behavior* 16, 175-180

Slavit, David (1996): Graphic calculators in i "Hybrid" Algebra II Classroom. *For the Learning of Mathematics* 16, 9-14

Tall, David (1994): Computer environment for the learning of mathematics. Biehler, R. (ed.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht, NL: Kluwer Academic Press.

Tall, David (1996): Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities. *Proceedings of the 8th International Congress om Mathematics Education.*

Tall, David (2000): Cognitive Development In Advanced Mathematics Using Technology. *Mathematics Education Research Journal* 3

Tõnisson, Eno (1999): Step-by-Step Solution Possibilities in Different Computer Algebra Systems http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g_toniss.pdf Lest 04.05.06

Zbiek, Rose Mary (2003): Using Research to Influence Teaching and Learning with Computer Algebra Systems. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Zehavi, Nurit & Mann, Gloria (2003): Task Design in a CAS Environment: Introducing (In)equations. *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. (Ed.: Fey, Cuoco, Kieran, McMullin & Zbiek.) Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics

Zehavi, Nurit (2004): Symbol sense with a symbolic-graphical system: a story in three rounds. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 183-203

Østerlie, Per G. (2004): Om symbolregnende lommeregnere i den videregående skole, Tangenten 1/2004: 8-24.

Aarstad, Tor Jan (1997): Forsøk med symbolsk lommeregner TI-92 matematikk 3MX, http://www.rogaland-f.kommune.no/~strand/symb_kalk.htm Lest 04.05.06

Aarstad, Tor Jan (1998): Rapport fra forsøk med grafisk symbolregner, TI-92, 2MX, VK1 - AF, www.rogaland-f.kommune.no/~strand/2MX97-98.htm Lest 04.05.06

11. Vedlegg

11.1 Oversikt over CAS-funksjoner

Her følger en oversikt over de viktigste CAS-funksjonene som vil være aktuelle i videregående skole. Skjermbildene er fra symbolregneren Casio Algebra FX 2.0, som er maskinen som omhandles i denne oppgaven, men CAS-funksjonene som presenteres fins på alle symbolbehandlende verktøy, og oversikten er dermed teknologiuavhengig.

Regning med bokstavuttrykk:	
$\dfrac{3ab}{\left(a^2 \cdot 3b^{-1}\right)^3} = \dfrac{b^4}{9a^5}$	`3AB/(A²×3B⁻¹)^3` → $\dfrac{B^4}{9A^5}$
$x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^9}$	`X²×X^(1/4)` → $\sqrt[4]{X^9}$
$\dfrac{2}{x} + 3x = \dfrac{3x^2+2}{x}$	`combine(2/X+3X)` → $\dfrac{3X^2+2}{X}$
Eksakt regning med reelle tall:	
$\dfrac{5^{\frac{1}{6}}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$	`5^(1/6)/3×³√5/2` → $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$
Derivering:	
$f(x) = 6x\mathrm{e}^{x^2}$ gir $f'(x) = 12x^2\mathrm{e}^{x^2} + 6\mathrm{e}^{x^2}$	`diff(6Xe(X²))` → $12e^{X^2}X^2+6e^{X^2}$
Dobbeltderivering:	
$f(x) = \ln\left(3 - x^2\right)$ gir $f''(x) = \dfrac{-2}{3-x^2} - \dfrac{4x^2}{\left(3-x^2\right)^2}$	`diff(ln (3-X²),X,2)` → $\dfrac{-2}{-X^2+3} - \dfrac{4X^2}{(-X^2+3)^2}$
Tangentlikning: Likningen for tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet $\left(2\ ,\ f(2)\right)$ er $y = 4x - 4$	`tanLine(X²,X,2)` → `4X-4`
Faktorisering av bokstavuttrykk:	
$12x^2\mathrm{e}^{x^2} + 6\mathrm{e}^{x^2} = 6\mathrm{e}^{x^2}\left(2x^2+1\right)$	`rFactor(12X²eX²+6eX²)` → $6e^{X^2}(2X^2+1)$

$5x^2 - 10 = 5\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$	`rFactor(5X²-10)` `5(X-√2)(X+√2)`
Forkorting av brøker: $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$	`rFactor((X²-4)/(X+2))` `X-2`
Ubestemte integraler: $\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^4 \ln x}{4} - \dfrac{x^4}{16} \left(+C\right)$	`∫(X^3×ln X)` $\frac{X^4 \cdot \ln(X)}{4} - \frac{X^4}{16}$
Bestemte integraler: $\int_2^4 x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{56}{3}$	`∫(X²,X,2,4)` $\frac{56}{3}$

Grenseverdier:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$
	`lim(sin X/X,X,0)`
	`1`
	`lim((1+1/X)^X,X,∞)`
	`e`

Likningsløsning med eksakte tallsvar: $3\mathrm{e}^{-0,2t} = 1$ $t = 5 \ln 3$	`solve(3e(-0.2T)=1,T)` `T=5•ln(3)`
Likningsløsning med bokstavsvar (omforming): $0,5x + 3a = 0$ løst med hensyn på a, blir $a = \dfrac{-x}{6}$	`solve(0.5X+3A=0,A)` $A = \frac{-X}{6}$
Substitusjon: $x = y - 2$ satt inn i $3x + 2$	`substitute(3X+2,X=Y-2` `3(Y-2)+2`

Ulikheter:
$\dfrac{x+2}{x-1} \le x$ har løsningsmengde $\left[1 - \sqrt{3}\,,1\right\rangle \cup \left[1 + \sqrt{3}\,, \rightarrow\right\rangle$
	`solve((X+2)/(X-1)≤X`
	`-√3+1≤X<1`
	`√3+1≤X`

<table>
<tr><td>Likningssett med førstegradslikninger:

$\begin{cases} 4c+d=2 \\ -c=1+d \end{cases}$ har løsningen $c=1,\ d=-2$

solve({4C+D=2,-C=1+D}
C=1
D=-2</td></tr>
</table>

De følgende eksemplene viser noen forskjeller mellom symbolregnere og grafiske lommeregnere:

<table>
<tr><th>CAS-funksjoner
(bare på symbolregnere)</th><th>Numeriske funksjoner
(både på grafiske lommeregnere og på symbolregnere)</th></tr>
<tr><td>Symbolregnende likningsløsning:

$\ln x^2=3$ løst eksakt blir
$x=-\sqrt{e^3} \vee x=\sqrt{e^3}$

solve(ln X²=3)
X=-√e³
X=√e³</td><td>Numerisk likningsløsning:

Ved numerisk løsning av $\ln x^2=3$ blir den ene av de to løsningene 4,48168907.
(Tilnærmingsverdi til $\sqrt{e^3}$.)

Eq:ln X²=3
X=4.48168907</td></tr>
<tr><td>Symbolregnende integrasjon:

$\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{1-\sqrt{5}}{8}+\frac{1}{2}$

∫(sin (2X),X,0,π/5)
$-\frac{(\sqrt{5}-1)}{8}+\frac{1}{2}$</td><td>Numerisk integrasjon:

$\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin x\mathrm{d}x = 0,3454915028$

(Tilnærmingsverdi til $\frac{1-\sqrt{5}}{8}+\frac{1}{2}$.)

∫(sin (2X),0,π/5)
0.3454915028</td></tr>
<tr><td>Bokstavregning:

$a+a=2a$

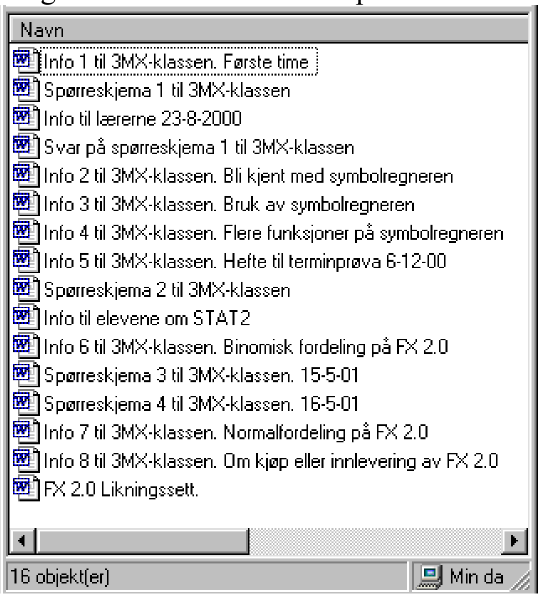
A+A
2A</td><td>Regning der bokstavene bare er numeriske minneplasser:

Tallet 1,5 lagres i minneplassen a:
1.5→A

a + a blir da 3:
A+A
3</td></tr>
</table>

11.2 Utvalg av dokumenter brukt i forsøksklassen

Følgende liste viser det lærerproduserte stoffet i forbindelse med forsøket:



Tre av disse dokumentene er hentet inn her. Det er "Info 1 til 3MX-klassen. Første time", "Info 2 til 3MX-klassen. Bli kjent med symbolregneren" og "FX 2.0 Likningssett".

Det kunne også vært relevant å ta med "Info 5 til 3MX-klassen. Hefte til terminprøva 6-12-00", da dette heftet viser instruksjonsstoffet det var nødvendig å lage. Men av plasshensyn tas det ikke med.

11.2.1 Innledende informasjon om forsøket

3MX. Informasjon om symbolregnerprosjektet.

Fra Dag-Erik Møller til elevene i 3MX5-G31.

Oslo Handelsgymnasium 17/8-2000.

Du er elev i den 3MX-klassen som skal bruke en ny type lommeregner gjennom hele skoleåret og på eksamen. Dere får låne hver deres maskin av typen Casio Algebra FX 2.0, og denne skal brukes i stedet for de gamle lommeregnerne. Det som skiller denne maskinen fra den lommeregneren du har brukt i 1MA og 2MX, er at den kan regne *symbolsk*, dvs. at den kan regne med bokstavuttrykk og gjøre forskjellige symbolske operasjoner på disse uttrykkene. Derfor kalles lommeregnere av denne typen for ***symbolregnere***. Andre lommeregnere regner kun med *tall*. Casio Algebra FX 2.0 har for øvrig alle de lommeregnerfunksjonene du kjenner fra før, så det blir ikke mye nytt å sette seg inn i.

Bruk av symbolregner er i dag ikke tillatt på eksamen. Det pedagogiske spørsmålet som må besvares i løpet av få år er *om* disse maskinene skal inn i skolen og da evt. *hvordan* de skal brukes. For å svare på disse spørsmålene må det være innhentet erfaringer fra bruk i vanlige klasser. Vårt 3MX-prosjekt på OHG er et bidrag til denne pedagogiske diskusjonen. Det du gjør og sier i løpet av skoleåret kan være med på å påvirke hvilken retning matematikken kommer til å ta i videregående skole i fremtiden, så dette blir et spennende prosjekt!

Her kommer noen eksempler på symbolsk regning på den lommeregneren dere får disponere. Dette er oppgaver som kunne vært gitt i 1MA og 2MX og som kan utføres direkte på symbolregneren, men som en vanlig (grafisk) lommeregner ikke kan utføre:

expand utvider (multipliserer ut) et uttrykk:	expand(2(X−3)²(X+1)) $2X^3-10X^2+6X+18$
rFactor faktoriserer et uttrykk så mye som mulig: (**r** står for root.)	rFactor(5X²−10) $5(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$
rFactor forkorter også brøker:	rFactor((X²−4)/(X+2)) X−2
simplify trekker sammen et uttrykk:	simplify((X+2)²−(X−5)) X^2+3X+9
solve løser likninger, ulikheter og likningssett:	
$0{,}5x+3=0$	solve(0.5X+3=0) X=−6
$ax^2+bx+c=0$	solve(AX²+BX+C=0) $X=\frac{-B}{2A}-\frac{\sqrt{-4AC+B^2}}{2A}$ $X=\frac{-B}{2A}+\frac{\sqrt{-4AC+B^2}}{2A}$
$2x>5$	solve(2X>5) $\frac{5}{2}<X$
$x^2-9>0$	solve(X²−9>0) X<−3 3<X
$\frac{x+2}{x-1}\le x$	solve((X+2)/(X−1)≤X) $-\sqrt{3}+1\le X<1$ $\sqrt{3}+1\le X$
diff deriverer et uttrykk. Eksempel: Deriver $4x^3-\frac{1}{2}x^2+5$ (**diff** kan også finne den dobbeltderiverte)	diff(4X^3−1/2×X²+5) $12X^2-X$
tanLine bestemmer likningen for en tangent til en funksjon i et gitt punkt. Eksempel: Likningen for tangenten til $f(x)=x^2$ i punktet $(2\ ,\ f(2))$:	tanLine(X²,X,2) 4X−4
lim bestemmer grenseverdier. Eksempler:	
Bestem $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$	lim((X²−4)/(X+2),X,−2 −4
Bestem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x+2}$ (Ser at vi får svaret uendelig, dvs. at brøken går mot uendelig og følgelig eksisterer ikke grenseverdien.)	lim((X²−4)/(X+2),X,∞) ∞
Bestem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$	lim(sin X/X,X,0) 1

Σ bestemmer en sum. Eksempel: Summen av den uendelige geometriske rekka $30+10+\frac{10}{3}+.....$, dvs. rekka med $a_n = 30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (Skjermen kan ikke vise hele det inntastete uttrykket. Etter det siste kommaet er det tastet inn ∞.)	Σ(30×(1/3)^(N-1),N,1, 45
tCollect omformer et produkt av trigonometriske uttrykk til en sum:	tCollect((sin X)²) $\frac{-\cos(2X)}{2}+\frac{1}{2}$ tCollect(sin Xcos X) $\frac{\sin(2X)}{2}$

Tiltak for å øke bruken av ny teknologi i skolen er noe det arbeides mye med i dag. I mange fag er det først og fremst snakk om økt bruk av internett og tekstbehandling, men også regneark, databaser mm. Når det gjelder IKT i matematikkfaget er bruk av symbolregner det mest aktuelle spørsmålet for tiden. Symbolregnerfunksjoner som de som er vist over har før kun eksistert i spesielle matematiske dataprogrammer. (Maple, Mathematica, Derive, Mathcad, ...) Vår symbolregner er en liten matematisk datamaskin og vår bruk av den i 3MX vil høre inn under området ”Bruk av IKT i matematikkundervisningen.”

Overordnede spørsmål blir: Hvordan vil matematikken i videregående skole bli med symbolregner? Hva slags oppgaver må gis (i timene, i lekse, på prøver og på eksamen)? Hva slags teorigjennomgang i lærebøkene bør det være? Hva slags arbeidsformer i klasserommet er best tilpasset denne nye teknologien? Hvordan vil elevene lære de matematiske begrepene med dette verktøyet?

Initiativet til *vårt* prosjekt kommer fra meg, og ikke fra skolen eller skolemyndigheter. Forsøket kommer til å resultere i en hovedoppgave ved Universitetet i Oslo. I samarbeid med min veileder ved universitetet, professor Gunnar Gjone, vil jeg analysere det som foregår i timene, resultater på prøver, intervjuer med elever, elevenes svar på spørreskjemaer og elevenes eksamensresultater. Dette for å få et bredest mulig grunnlag for å trekke konklusjoner om bruk av symbolregneren. All informasjon er selvfølgelig fortrolig og vil bli anonymisert i hovedoppgaven. Dere vil få en tett oppfølging gjennom skoleåret.

På slutten av skoleåret vil dere få en spesialeksamen som er tilpasset bruk av symbolregner. Jeg vil være med i diskusjonen i Eksamenssekretariatet rundt denne eksamenen. Formen på eksamen vil bli drøftet i løpet av høsten-2000, slik at vi kan gjennomføre eksamenstrening i 2. termin av skoleåret.

Det er gjennomført eksamensforsøk med symbolregnere før, da i regi av Eksamenssekretariatet. Man har i disse prosjektene brukt maskinen Texas Instruments TI-89. Bruk av Casio-maskiner er nytt i denne sammenhengen.

Grunnene til at jeg har valgt å bruke Casio Algebra FX 2.0 er

1. Dette er en relativt ny maskin, og det har ikke vært gjennomført forsøk med den før (i hvert fall ikke i Norge). Man trenger erfaringer fra forskjellig teknologi.
2. OHG bruker Casio-lommeregnere fra før, så det vil være lite merarbeid for dere å få den nye maskinen. Dere må bare lære et begrenset antall symbolregnende funksjoner. Resten er likt det dere er vant til fra 1MA og 2MX (selv om knappeoppsettet er noe forandret). (Dere vil

dessuten få undervisningsmateriell om bruken av symbolregneren som jeg tilpasser til bruk i 3MX.)

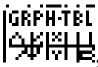
Casio i Norge har velvilligst lånt oss et klassesett med maskiner uten vederlag. Det betyr:
Ta godt vare på maskinen. Dersom noen ønsker å kjøpe ”sin” maskin når skoleåret er over, vil de få et godt tilbud fra Casio. Dette kommer vi tilbake til. (Det er ingenting i veien for å selge den gamle lommeregneren allerede nå.) Du bruker symbolregneren gjennom skoleåret som om den var din egen.

11.2.2 Innledende symbolregneroppgaver

3MX. "Bli kjent med symbolregneren."

Her kommer en kort instruksjon til hvor de vanligste kalkulatorfunksjonene som du kjenner fra 1MA og 2MX ligger på Casio Algebra FX 2.0. Så følger det noen få eksempler på bruk av noen av de nye symbolregnerfunksjonene. Innimellom er det noen oppgaver:

Hovedmenyvalg 1, , gir vanlig regning. (MAT står for matriseregning. Dette kan dere glemme.) Her er knappene stort sett som før. Veksling mellom grader og radianer ligger på CTRL - SET UP - Angle. (Den grønne kontrollknappen CTRL brukes for de grønne funksjonene på funksjonsknappene F1 til F6.)
Oppgave: Trykk inn noen regnestykker du lager selv. Bruk de fire regningsartene og f.eks. trigonometri, x i andre, x-te-rot, log, brøkknappen a b/c, ...

Hovedmenyvalg 3, , gir tegning av grafer, grafiske beregninger (G-solv) og utregning av verditabeller. Her kjenner du mange av kommandoene, men de ligger på litt nye steder.
Følg dette eksemplet: Legg inn funksjonen $f(x) = 0{,}5x^2 - 4$ på Y1. Trykk SHIFT – V-Window og still inn koordinatsystemet på standard, dvs. STD (F3). Trykk EXE og tegn grafen med DRAW (F5). Bruk G-solv (F4) til å finne nullpunktene (Root), bunnpunktet (Min), skjæringspunktet med y-aksen (Y-Icpt), funksjonsverdien for x=3 (Y-cal) og til slutt x-verdiene som gir y=-3 (X-cal. Dette er det samme som å løse likningen f(x)=-3).
Gå så tilbake til funksjonsuttrykket med ESC (escape) og trykk F6 (pila betyr flere menyvalg) og RANG. Her stiller du inn Start, end og pitch til en verditabell, som du får ved å trykke ESC og TABL (F5). Prøv til slutt å legge inn nye x-verdier i tabellen. (Marker en x-verdi, trykk et nytt tall og trykk EXE.)
Oppgave: Finn eventuelle ekstremalpunkter (topp- eller bunnpunkter) og nullpunkter til funksjonen $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$. Finn så f(5) grafisk og løs så likningen f(x)=4 grafisk. Lag en passende verditabell som du kunne brukt hvis du skulle tegnet grafen på ark.

Hovedmenyvalg 9, , gir de symbolregnende funksjonene. (CAS betyr Computer Algebra System.) Gjør følgende eksempler/oppgaver:

- Trekk sammen $a + 2a - 5a^2$ ved rett og slett å taste det inn med ALPHA – A og trykke EXE.
- Faktoriser uttrykket $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - 2x - \frac{5}{4}$ ved å trykke TRNS (F1) – rFctor og så uttrykket.
- Løs likningen $\frac{8}{x+2} = 6$ ved å trykke TRNS – solve og så likningen. Likhetstegnet finner du på kommaknappen. Husk parentes rundt nevneren.
- Deriver funksjonen $f(x) = \frac{3x+2}{2x}$ ved CALC (F2) – diff og så funksjonen. (Husk riktige parenteser.) Trekk sammen svaret ved TRNS – collct – Ans. (Ans står for Answer. Samme knapp som den lille minusknappen.) Hvordan ville du derivert denne ved regning?
- Deriver $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$. Prøv så å finne en kommando som kan forkorte svaret ditt. Hvordan ville du derivert denne funksjonen ved regning?

Begynner du å få en anelse om hva denne lommeregneren kan?

Når du er ferdig med oppgavene kan du utforske lommeregneren på egen hånd. Nyttige sider i instruksjonsheftet nå i begynnelsen er Snabbstart s. 2 – 7 og s. 11. Videre kapittel 1-1 til 1-3. (De symbolregnende funksjonene finner du først og fremst i kap 7-1, og disse kommer vi tilbake til.) Trykk i vei. Finner du ut noe interessant, så del det med læreren og medelevene. Kanskje det egner seg for bruk i undervisningen? Legg bort den gamle lommeregneren i dag. Venn deg til å bruke den nye.

11.2.3 Om løsning av likningssett på symbolregneren

3MX. Casio Algebra FX 2.0

Likningssett under CAS

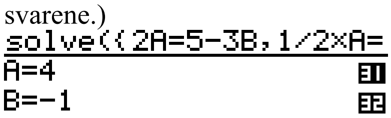
Som andre Casiomaskiner har FX 2.0 en funksjon for løsning av likningssett under **EQUA**. Den er grei å bruke, men har begrensninger:

- Likningssettet må være ordnet slik at leddene som inneholder de variable kommer i riktig rekkefølge på venstresidene og konstantleddene på høyresidene.
- Den regner kun med tall, og ikke med bokstaver.
- De variable heter alltid X, Y, Z, T, U, ...

Disse begrensningene har vi ikke under **CAS**, men til gjengjeld er det litt mer arbeid å legge inn likningssettet.

Først et enkelt eksempel: Løs likningssettet $\begin{array}{l} 2a = 5 - 3b \\ \frac{1}{2}a = -2b \end{array}$

Dette gjøres slik: Velg CAS, TRNS, solve. Skriv så inn likningssettet inni {}-parenteser og skill de to likningene med det store kommaet (til høyre for parentes-slutt-knappen). Skriv så stort komma og list opp variablene (her a og b) inni {}-parenteser. Trykk EXE. Skjermen skal da se slik ut: (Du vil nok få andre tall enn 31 og 32. Dette er bare numre som maskinen setter på likninger og ulikheter når de opptrer i svarene.)



(Resten av inntastingen vil se slik ut: -2B},{A,B}})

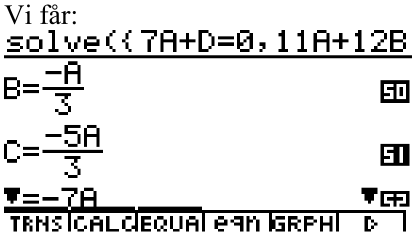
Sammenlikn ev. med EQUA og løs det samme likningssettet der.

Prøv så et likningssett der vi vil ha uttrykt en av variablene ved de andre, slik som i eks. 3 s. 154 i 3MX-boka.

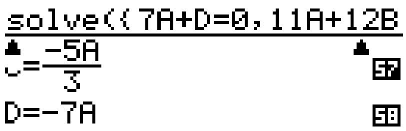
Da gjør vi som i det forrige eksemplet, men med denne forskjellen:

Vi har fire variable, men bare tre likninger. Vi vil ha uttrykt b, c og d ved hjelp av variabelen a. Da skriver vi bare B, C, D i variabellista. Vi dropper altså den variabelen vi vil ha de andre uttrykt ved.

Vi får:



(Resten av det inntastede uttrykket: +D=0,2A-3C+D=0},{B,C,D}})



Ved å trykke pil ned får vi resten av svaret: 

Denne typen likningssett kan kun løses på symbolregner, ikke på vanlige lommeregnere.

11.3 Program for *uv*-derivasjon med trinnvis løsning

Her følger programkoden for *u* ganger *v*-programmet beskrevet i kapittel 9.1. Programmet er skrevet på symbolregneren Texas Instruments TI-89.

```
:uvderiv()
:Prgm
:ClrIO
:Disp "u="
:Input u
:Disp "v="
:Input v
:d(u,x)→r
:d(v,x)→s
:ClrIO
:Disp "u derivert er"
:Disp r
:Disp "v derivert er"
:Disp s
:Pause
:ClrIO
:Disp "mellomregning:"
:Disp r
:Disp "*"
:Disp v
:Disp "+"
:Pause
:ClrIO
:Disp u
:Disp "*"
:Disp s
:Pause
:ClrIO
:Disp "svar:"
:r*v+u*s→w
:Disp w
:Pause
:ClrIO
:Disp "svaret faktorisert:
 "
:factor(w)→p
:Disp p
:Pause
:ClrIO
:Disp "den deriverte er nu
 ll for"
:solve(w=0,x)→q
:Disp q
:EndPrgm
```

11.4 Kontakt med Eksamenssekretariatet

11.4.1 Søknad om CAS-tilpasset eksamen

UNIVERSITETET I OSLO

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Postboks 1099, Blindern
0316 Oslo

Besøksadresse
Fysikkbygningen, østfløyen, sem Sælandsvei 24

Telefon: 22 85 50 70
Telefaks: 22 85 44 09

Oslo: 11. april 2000

Statens Utdanningskontor i Oslo og Akershus
Eksamenssekretariatet
v/ Øyvind Raanes
Pb 8105 Dep
0032 Oslo

Søknad om forsøk med symbolregnere i 3MX skoleåret 2000/01.

Dag-Erik Møller arbeider ved Oslo Handelsgymnasium og underviser i matematikk. Han er interessert i å ta hovedfag i realfagsdidaktikk ved ILS, med tema IKT i matematikkundervisningen og bruk av symbolregnere. Han ønsker å ha et opplegg for en klasse som han underviser i.

Det har vært en uformell kontakt med Casio som er villige til å støtte forsøket med et klassesett med symbolregnere.

Et sentralt element i et slikt forsøk vil være eksamen, siden det er naturlig at elevene på eksamen skal ha tilgang til det utstyret de er vant til å bruke gjennom skoleåret. Derfor ser vi Eksamenssekretariatet som det naturlige stedet å henvende seg.

Vi er kjent med det (de) forsøkene som Eksamenssekretariatet er i gang med om symbolregnere. Vi vil være interessert i at et opplegg ved Oslo Handelsgymnasium kan knyttes til andre forsøk som pågår i Eksamenssekretariatet.

Siden dette opplegget vil være en del av et hovedfag for Dag-Erik Møller vil forsøket nøye bli fulgt opp gjennom veiledning. En sentral del vil også være å finne og bruke aktuell pedagogisk teori for bruk av IKT i matematikk. På denne måten regner vi også med at Eksamenssekretariatet vil ha nytte av et slikt forsøk..

Vi håper på velvillig behandling av søknaden og ønsker tilbakemelding så snart som mulig på grunn av videre planlegging.

Med hilsen

Gunnar Gjone — Professor

Dag-Erik Møller — Adjunkt

Department of Teacher Education and School Development
University of Oslo

11.4.2 Svar på søknad om CAS-tilpasset eksamen

STATENS UTDANNINGSKONTOR I OSLO OG AKERSHUS
EKSAMENSSEKRETARIATET (SUE)

Universitetet i Oslo
Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling
Boks 1099 Blindern
0316 Oslo

Deres ref.:	Vår ref.: (Bes oppgitt ved svar)	Dato:
11.04.00 Prof. G. Gjone	00/703 oer	29.08.00

Søknad om forsøk med symbolbehandlende lommeregnere i 3MX skoleåret 2000/01
Dag-Erik Møller - Oslo Handelsgymnasium

Vi viser til brev og telefonsamtaler med prof. Gunnar Gjone om saken.

Vi ser positivt på at adjunkt Dag-Erik Møller ved Oslo Handelsgymnasium kan knyttes til IKT-forsøket, som vil bli drevet i regi av Eksamenssekretariatet/Læringssenteret også inneværende skoleår. For ordens skyld minner vi om at utgifter i forbindelse med dette i utgangspunktet ikke belastes SUE/LS.

Til orientering nevnes at det skal arrangeres en samling for forsøksskolene 25., 26. og 27. september, der Dag-Erik Møller og Gunnar Gjone er velkommen til å delta.

Med vennlig hilsen

Georg Matthiesen e.f.

Øyvind Raanes

Kopi:

Rektor Johs. Øvereng, Oslo Handelsgymnasium, Boks 2474 Solli, 0202 Oslo
Adjunkt Dag-Erik Møller, Oslo Handelsgymnasium

Postadresse:	Besøksadresse:	Telefon: 22 00 38 00	Saksbehandler: Øyvind Raanes
Postboks 8105	Tordenskiolds gt. 12	Telefaks: 22 00 38 91	Direkte telefon: 22 00 38 64
0032 OSLO	Inngang sjøsiden		