

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Bergen, 20.12.2006



Prising av opsjoner på OBX- indeksen

Evaluering av ulike volatilitetsmodeller

Av

Jan-Ivar Kemi og Rune Bråten Liholt

Veileder: Førsteamanuensis Jonas Andersson

Masterutredning i Bedriftsøkonomisk analyse

ved

Institutt for foretaksøkonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Denne utredningen er gjennomført som et ledd i masterstudiet i økonomisk-administrative fag ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at høyskolen inntår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

Sammendrag

Denne utredningen evaluerer empirisk prestasjonen til ulike volatilitetsmodeller til å predikere volatiliteten tilknyttet avkastningsserien på OBX-indeksen. Her finner vi at EWMA-modell modellert på bakgrunn av et begrenset antall observasjoner, er den modellen som predikerer indeksens volatilitet best. Deretter følger den konstant modellen og til slutt GARCH-modellene.

I tillegg til en volatilitetsevaluering, benytter vi vinnerne av undersøkelsen til å vurdere prisingsmodellen til Black-Scholes med konstant volatilitet mot Black-Scholes med volatilitet beregnet fra EWMA-modellen og Duan's GARCH opsjonsprisingsmodell med stokastiske volatilitet. Analysen er gjennomført med hjelp av OBX-indeksens kjøpsopsjoner. I vår utredning finner vi at Black-Scholes prisingsmodell basert på 125-dagers EWMA-rullering klarer å predikere prisene best både ved å nytte in-samplet og out-samplet til estimering av prisene. Som for prediksjon av volatiliteten så egner Duans GARCH-modell seg dårlig siden disse prisingsestimaterne avviker stort fra de opsjonsprisene vi finner i markedet.

Forord

Denne oppgaven er en skriftlig masterutredning i finansiell økonomi ved Institutt for foretaksøkonomi ved Norges Handelshøyskole. Det er mange som fortjener en påskjønnelse for at oppgaven ble gjennomført. Vi vil i første omgang rette en stor takk til vår veileder, Assosiert professor Jonas Andersson, for gode tips og råd ved tidligere utkast. Randi Hovde ved Oslo Børs Informasjon AS fortjener honnør fordi hun skaffet oss de nødvendige data slik at oppgaven kunne gjennomføres.

All modellestimering er gjennomført i programmeringsspråket til S-plus og E-views, og interesserte kan ta kontakt med forfatterne for å få tilsendt kodene til de ulike beregningene gjort i oppgaven.

Vi vil her i forordet meddele at vi er svært stolte over innholdet i denne utredningen. Dette fordi vi ikke har funnet tilsvarende studier der noen både har gjennomført en evaluering av ulike volatilitetsmodeller og en empirisk analyse av prisingen av opsjoner i en og samme oppgave. Dette betyr ikke at framgangsmåten er helt ny, men at vi har bygget videre på tidligere artikler og utredninger som har tatt opp emnene hver for seg.

INNHALDSOVERSIKT

SAMMENDRAG	3
FORORD	5
1 INNLEDNING	9
2 STATISTISKE EGENSKAPER VED TIDSSERIEDATA FOR AKSJEINDEKSER	13
2.1 STATISTISKE BEGREPER/STOKASTISKE PROSESSER	13
2.2 DATABESKRIVELSE	17
2.3 EMPIRISKE OBSERVASJONER AV OBX-INDEKSEN	20
2.3.1 <i>Stasjonærhet</i>	22
2.3.2 <i>Autokorrelasjon</i>	24
2.3.3 <i>Heteroskedastisitet</i>	26
2.4 OPPSUMMERING AV INNLEDENDE EMPIRISKE RESULTATER	28
3 STATISTISKE VOLATILITETSMODELLER	31
3.1 HISTORISK VOLATILITET	31
3.1.1 <i>Historisk volatilitet med eksponentiell vektning</i>	33
3.1.2 <i>Historisk volatilitet og skalering</i>	35
3.2 ARMA-MODELL	36
3.2.1 <i>MA-modellen</i>	36
3.2.2 <i>AR modeller</i>	37
3.2.3 <i>ARMA-modeller</i>	37
3.3 GARCH-MODELLER	38
3.3.1 <i>ARCH</i>	38
3.3.2 <i>Lineær GARCH (p,q) modell</i>	39
3.3.3 <i>Varianter av GARCH-modeller</i>	42
3.3.4 <i>Maximum Likelihood Metode</i>	44
4 MODELLSPESIFIKASJON OG ESTIMERING AV VOLATILITETSMODELLER	47
4.1 PARAMETERVERDIER FOR DE ULIKE GARCH-MODELLENE	47
4.2 METODE	47
4.3 ESTIMERING AV DE ULIKE MODELLENE	49
4.3.1 <i>Frekvens: Dag</i>	50
4.3.2 <i>Frekvens: Uke</i>	56
4.4 BETINGET VOLATILITET I ESTIMERINGSPERIODEN	58
5 PREDIKSJONSEGENSKAPER VED VOLATILITETSMODELLENE	61
5.1 UNDERSØKELSESMETODE	61
5.2 STATISTISK SAMMENLIGNING AV VOLATILITETSMODELLENE	63
5.3 RESULTATER FRA UNDERSØKELSEN	64
5.3.1 <i>Frekvens: Dag</i>	64
5.3.2 <i>Frekvens: Uke</i>	71
5.4 HVILKEN MODELL BØR MAN VELGE?	74
6 PRESENTASJON AV OPSJONSTEORI	77
6.1 OPSJONER	77
6.2 TEORETISK RAMMEVERK: OPSJONSPRISINGSMODELLER	78
6.3 BLACK-SCHOLES OPSJONSPRISINGSMODELL	79
6.4 DUANS OPSJONSPRISINGSMODELL	84
7 IMPLEMENTERING OG ESTIMERING AV VOLATILITETSMODELLENE	87
7.1 FORUTSETNINGER VED IMPLEMENTERING OG ESTIMERING	87
7.2 IMPLEMENTERING OG ESTIMERING AV BS' OPSJONSPRISINGSMODELL	87
7.3 IMPLEMENTERING OG ESTIMERING AV DUANS OPSJONSPRISINGSMODELL	89
7.4 SAMMENLIGNING AV DE ULIKE MODELLENE	93

8	OPPSUMMERING OG KONKLUSJON	95
8.1	OPPSUMMERING AV RESULTATENE.....	95
8.2	UTVIDELSER OG FORBEDRINGSPOTENSIALE	97
9	REFERANSER.....	99

1 Innledning

En av de mest sentrale størrelsene innenfor finansfaget er volatiliteten, som blant annet blir brukt i CAPM¹- og APT²-modellene for prising av aksjer samt i opsjonsprisingsteorien. I opsjonsteorien avhenger det avledede aktivas verdi av volatiliteten til det underliggende aktivas avkastning og en rekke andre faktorer. Alle disse faktorene utenom volatiliteten er observerbar i markedet og har en bestemt verdi til et gitt tidspunkt. En korrekt prising av derivater kan være av stor betydning for aktører i ethvert finansielt marked fordi ved hjelp av for eksempel opsjoner kan man hindre muligheten for arbitrasje. Derivater er blant annet en nøkkelkomponent i mange investorers porteføljer der vi nevner blant annet sikring av aktivumene og spekulasjon. Black og Scholes(1973) var de første til å introdusere en prisingsmodell for opsjoner. Denne modellen har hatt stor innvirkning på hvordan aktører i markedet priser dette derivatet. En grunnleggende antakelse i den såkalte Black-Scholes-modellen er at aksjekursen er lognormalfordelt med konstant volatilitet. Denne antagelsen om at volatiliteten er konstant er dessverre ikke observerbar empirisk gjennom å studere den implisitte volatiliteten avledet fra opsjonsprisene i markedet og tid til utløp. Fenomenet blir ofte kalt volatilitetssmil der volatiliteten på en opsjon at-the-money³ er ulike de implisitte verdiene vi får fra opsjoner dypt in- og out-of-the-money. Med motivasjon fra dette ”smilet” så innfører Dumas, Fleming og Whaley(1998) Ad-hoc Black-Scholes modellen der man tillater at volatiliteten avhenger deterministisk av utøvelsespris og tid til utløp.

I tillegg til volatiliteten til det underliggende aktivum bestemmes opsjonsprisen av prisen på underliggende aktivum, risikofri rente, utøvelsespris, tid til forfall og eventuelt dividende. Som et resultat av at volatiliteten ikke er observerbar så viser det seg at det er et betydelig avvik mellom prisene avledet fra (standard) Black-Scholes modellen og den observerte (markeds)prisen. Dette skaper et stort usikkerhetsmoment for alle markedsaktørene og fører til at forskere forsøker å lage modeller som er bedre tilpasset markedsprisene. I motsetning til antagelsen om konstant volatilitet finner de fleste empiriske studier ut at fordelingen til

¹ CAPM - Capital Asset Pricing Model (Sharpe, 1964)

² APT – Arbitrage Pricing Theory(Ross, 1976)

³ At-the-money betyr at dagens spotkurs på aktivumet er tilnærmet lik utøvelsesprisen ved utøvelsestidspunktet. In-the-money da er dagens spotkurs (langt) over utøvelsesprisen, imens out-of-the-money er spotkurs (langt) under utøvelsesprisen.

aksje- og indeksavkastningen inneholder fetere haler⁴ enn antagelsene gjort i Black- Scholes og at avkastningsserien har perioder med såkalte volatilitetsklynger⁵. Disse egenskapene blir fortolket som bevis for at aksjeavkastningen har stokastisk volatilitet. På bakgrunn av dette har en rekke forskere bidratt med studier der de inkorporerer nye modeller som tar høyde denne type volatilitet. Man snakker da gjerne om 2 ulike typer volatilitetsmodeller basert på kontinuerlig tid⁶ (eks. Latent stokastisk volatilitetsmodeller) og diskret tid⁷ (eks Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic models(GARCH)). Valget mellom disse 2 modellene er ikke entydig.

Kontinuerlige modeller er bedre enn de diskrete modellene på enkelte punkter. Man antar at de gir bedre innsikt i de finansielle markeders kontinuerlig utvikling og at de er bedre å arbeide med teoretisk og analytisk. Her bør man føye til at alle finansielle tidsserier opptrer i diskret tid, noe som gjør at man i mange tilfeller foretrekker de diskrete modellene. Disse modellene har også en betydelig fordel at volatiliteten er mulig å observere fra de historiske aktiva prisene. Som resultat for dette gir eksempelvis en GARCH opsjonsmodell muligheten til å finne verdien av en opsjon ved bruk av spot volatilitetene estimert av de historiske verdiene utenom å benytte seg av implisitte volatiliteter fra andre opsjoner på samme tidspunkt (Heston og Nandi, 2000). På bakgrunn av disse avveiningene ønsker vi å studere implementeringen av de stokastiske volatilitetsmodellene i diskret tid fremfor de i kontinuerlig tid.

De stokastiske diskrete volatilitetsmodellene som vi vil benytte oss av er blant annet den velkjente AutoRegressive Heteroskedastiske(ARCH)-modellen introdusert av Engle(1982). Fra denne artikkelen er det blitt foretatte en rekke utvidelser der kanskje den mest kjente av dem er GARCH-modellen(Bollerslev, 1986). Blant GARCH-modellene som er blitt brukt til prisfastsettelse av opsjoner kan vi nevne Bollerslevs(1987)Threshold GARCH modell, Nelsons(1991) Exponential GARCH, Engle og Ngs(1993), NGARCH modell, Duans(1995)

⁴ Fete haler referes til "excess kurtosis".

⁵ Volatilitetsklynge er periode i avkastningsserien til et aktivum der det virker som om utslagene øker en liten periode

⁶ Se Hull&White(1987) og Heston(1993)

⁷ Se Duan(1995) og Heston&Nandi(2000)

GARCH modell med mean reversion⁸ modell og Heston og Nandis (2000) GARCH modell med lukket prisuttrykk.

Innenfor implementering av disse modellene i praksis er det gjort en rekke forskning. Blant annet bruker Engle & Mustafa (1992), Amin & Ng (1994) og Duan (1995) Monte Carlo simulering til å prissette opsjonene. Etter dette har det kommet nyere metoder som empiriske martingal simulering, Duan & Simonatos (1998), lattice metode, Ritchken og Trevor (1999), markovkjede metoden, Duan & Simonatos (1999), og lukkede form metode, Heston og Nandi(2000). Selv om det er skrevet en rekke artikler der man sammenligner prisingsmodeller av opsjoner med konstant, stokastisk og deterministisk volatilitet så finner disse studiene forskjellige og motstridene resultater. Vi kan blant annet nevne at Engle & Mustafa (1992) og Hjortshøj et al.(2003) finner grunnlag for å mene at GARCH(1,1)-modellen er bedre enn Black & Scholes-modellen til å estimere call opsjoner, imens Heston & Nandis (2000) argumentere for at Black & Scholes modellen tilpasser seg bedre enn GARCH(1,1). Bruk av ulik observasjonsperiode, modell og estimeringsmetode fører nok til de ulike konklusjonene.

Hensikten med denne oppgaven er todelt. 1)Den første delen undersøker vi om det er en signifikant forskjell i evnen til random walk, Exponential Weighted Moving Average(EWMA) og ulike GARCH-modeller til å predikere den realiserte volatiliteten av OBX-indeksen bestående av 2379 daglige observasjoner og 484 ukentlige. Vi har tatt for oss sluttkursen til indeksen i perioden 4.1.96 – 1.7.05, der vi har benyttet perioden juli 04 til juli 05 som evalueringsperiode såkalt out-of-sample⁹ – periode. I løpet av denne perioden reestimeres de ulike modellene hver eneste måned slik at vi får 10-12 ulike måneders grunnlag til å avgjøre hvilken av modellene som predikere best. Det er gjort en rekke ulike tester på å finne ut prediksjonsegenskapene til de ulike modellene. Vi kan her nevne studien gjort av Akgiray(1989) som var en av de første til å studere hvordan GARCH-modellene egner seg til prediksjon. Han fant ut at GARCH(1,1)-modellen egnet seg bedre til prediksjon enn ulike ARCH-modeller og 2 modeller for historisk gjennomsnitt(EWMA og random walk). Andre studier som Engle, Kane og Noh(1993) og Heynen og Kat(1994) underbygger standpunktet til Akgiray, men derimot kommer Pagan og Schwert(1990), Hansson og

⁸ Fra Engle, Lilien & Robins (1987) ARCH-M modell

⁹ Out-of-sample er den perioden som man bruker til å sammenligne modellene med de virkelige verdiene.

Hørdahl(1996) og Koekebakker(1997) frem til at henholdsvis EGARCH(1,2), Asymmetrisk SV og EWMA(denne studien er gjort i valutamarkedet) gir bedre resultater enn GARCH(1,1). Som for de ulike testene på Black & Scholes-modellen har disse testene motsvarende konklusjoner på grunn av ulik tidsperiode, modellvalg og evalueringsmetode.

2)Det andre formålet med oppgaven er å evaluere og sammenligne den empiriske ytelsen til Black & Scholes modellen med konstant volatilitet og Duans(1995) GARCH opsjons prisfastsettelses modell med stokastisk volatilitet. I løpet av oppgaven vil vi presentere ulike estimeringsmetoder og de beskrevne egenskapene kommer til å bli illustrert ved bruk av virkelige data. Vi bruker også her de daglige dataene fra OBX-indeksen til våre estimeringer, samt som utgangspunkt ved vår Monte Carlo simulering. Vi vil i tillegg innhente daglig sluttkurser på OBX call-opsjoner¹⁰ i vår out-of-sample-periode og vi vil her begrense datamengden til opsjonspriser der utøvelsesprisen er 5 % lavere og 5 % høyere enn verdien på det underliggende aktivumet.

Ved implementering av de ulike modellene vil vi benytte oss av S-Plus 6.2, Eviews og Excel. Disse programmene har en rekke begrensninger men vi har valgt å se bort i fra disse og nytte oss av de funksjonene som er gitt i programvarene.

Oppbygningen i resten av denne utredningen er som følger: I avsnitt 2 så har vi en gjennomgang av de ulike statistiske egenskapene til vår dataserie og studerer disse grundig. Avsnitt 3 setter lys på de ulike volatilitetsmodellene som vi ønsker å bruke. Disse modellene skal bli brukt videre i utredningen for å avgjøre hvilken av modellene som predikerer volatiliteten best. Avsnitt 4 tar for seg parametrene til de ulike modellene, imens del 5 studerer vi nærmere deres predikative egenskaper. I avsnitt 6 presenterer vi opsjonsteorien for prissetting av opsjoner og i avsnitt 7 prøver vi å avgjøre hvilken opsjonspringsmodell som gir best resultater i forhold til markedet. Avsnitt 8 vil vi forsøke å trekke noen overordnede konklusjoner som kan gjenspeile vår undersøkelse.

¹⁰ OBX callopsjoner av europeisk type der utøvelse bare er mulig ved utløpsdatoen.

2 Statistiske egenskaper ved tidsseriedata for aksjeindekser

I dette kapitlet tar vi for oss de ulike statistiske egenskapene ved det underliggende aktiva som vi ønsker å studere – OBX-indeksen. Først tar vi for oss noen statistiske begreper som er viktig å beskrive for å ha et grunnlag til å forstå undersøkelsen. Her vil vi introdusere en rekke begreper som vi vil benytte oss av i løpet av vår utredning. Det neste steget er en grundig databeskrivelse, der vi blant annet går igjennom hva indeksen inneholder. Deretter setter vi oss inn i de ulike empiriske observasjoner ved vår indeks. Avslutningsvis i kapitlet vil vi oppsummere de ulike resultatene.

2.1 Statistiske begreper/Stokastiske prosesser

En tidsrekke kan analyseres ved å bli representert på en måte som reflekterer vår forståelse av det fenomen som studeres, og som bekreftes ved observasjon av tidsrekken, altså representert ved en modell. Vi betrakter den observerte tidsrekken som del av en prosess i diskret tid. Vi legger en stokastisk modell til grunn da vi i hovedsak er interessert i vurdere egenskapene ved metodene, herunder usikkerhet i prognoser. De fenomenene vi er interessert i å studere er også ofte delvis dominert av tilfeldigheter (Lillestøl, 1997).

Vi lar $\{X(t)\}$ være en stokastisk prosess, som kan beskrives ved angivelse av den simultane sannsynlighetsfordelingen til $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ for et vilkårlig utvalg tidspunkter (t_1, t_2, \dots, t_n) . Av spesiell interesse er såkalte *stasjonære prosesser* der $X(t_1 + k), X(t_2 + k), \dots, X(t_n + k)$ har den samme sannsynlighetsfordelingen uansett valg av k . Det vil si at det er de innbyrdes avstandene mellom tidspunktene som betyr noe, og ikke hvor på tidsaksen vi befinner oss. Videre lar vi $\mu(t)$ betegne prosessens forventning. Variansen og (auto)kovariansen er henholdsvis gitt ved $\sigma^2(t)$ og $\gamma(t, s)$. For en stasjonær prosess vil vi uavhengig av t ha følgende sammenheng;

$$\mu(t) = \mu \quad (2.1)$$

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 \quad (2.2)$$

$$\gamma(k) = \text{cov}(x(t), x(t+k)) \text{ om disse eksisterer} \quad (2.3)$$

Dette utgjør første og andre ordens moment til variablene X_t , og gir oss autokorrelasjonsfunksjonen til den stasjonære prosessen, som er gitt ved;

$$\rho(k) = \gamma(k) / \gamma(0) = \text{korr}(x(t), x(t+k)) \quad (2.4)$$

$$\rho(0) = 1 \text{ og } \rho(-k) = \rho(k)$$

Hvis den stokastiske prosessen har endelig forventning og varians, og kovariansfunksjonen er endelig og uavhengig av t for alle x, er prosessen *svakt stasjonær*. For en svakt stasjonær tidsserie er det ikke gjort noen antagelser om høyere ordens momenter. Derimot en tidsserie som er *strengt (strikt) stasjonær* er det ikke bare forventningen og variansen som er konstant, men det stilles også krav til at fordelingen av $X(t)$ er uavhengig av t. Dette er en meget streng antagelse og stasjonærhet blir gjerne definert på en mindre restriktiv måte i form av første og andre ordens momentene, som nevnt over kalt *svak stasjonærhet*. I mer økonomiske termer betyr *stasjonærhet* at et sjokk ikke er vedvarende (persistence) og heller ikke representerer en start på en ny likevekt. En *stasjonær* tidsserie returnerer til den gamle likevekten etter et sjokk.

Hvis $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ følger en multivariert normalfordeling er *svak stasjonærhet* ekvivalent med *streng (strikt) stasjonærhet*. Dette fordi en multivariert normalfordeling er entydig gitt ved første og andre ordens moment. For andre fordelinger er ikke dette tilfellet.

En *ren tilfeldig prosess* er en diskret prosess $\{X_t\}$, som består av en rekke gjensidig uavhengig identisk fordelte tilfeldige variable (IID). Denne prosessen har konstant forventning og varians. Autokorrelasjonsfunksjonen er gitt ved $\rho(k) = 1$ for $k=0$ og $\rho(k) = 0$ for $k=1$. En slik *ren tilfeldig prosess* betegnes også *hvit støy* (Maddala, 2001).

En prosess som ofte er brukt for å beskrive aksjeprisens utvikling er *Random Walk*. Vi antar at $\{\varepsilon_t\}$ er en ren tilfeldig serie med forventning μ og varians σ^2 . Prosessen $\{X_t\}$ kalles da en *Random Walk* hvis vi har følgende;

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Vi antar videre at X_0 er lik null. Prosessen utvikler seg da videre som følger;

$$\begin{aligned} X_1 &= \varepsilon_1 \\ X_2 &= X_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{osv} \end{aligned}$$

Ved suksessiv innsetting får vi;

$$X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (2.6)$$

som gir $E(X_t) = t\mu$ og $\text{var}(X_t) = t\sigma^2$.

Fordi forventningen og variansen endrer seg med t , så er prosessen *ikke-stasjonær*. Differensiering gir $\Delta X_t = \varepsilon_t$. På differensiert form er *Random Walk* redusert til *hvit støy*, og dermed stasjonær. Hvis vi har en prosess på formen $X_t = \mu + X_{t-1} + \varepsilon_t$ sier vi at vi har en *Random Walk* med drift.

En mulighet for modellering av en tidsrekke X_t er å uttrykke den betingede forventningen og variansen til X_t gitt den tilgjengelige informasjonen F_{t-1} ved tidspunkt $t-1$. F_t kan for eksempel være historiske verdier av tidsrekken gitt ved; $F_t = (X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$. Vi kan da gjøre en antagelse om at;

$$\mu_t = E(X_t | F_{t-1}) \quad (2.7)$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}(X_t | F_{t-1}) \quad (2.8)$$

der μ_t er den betingede forventningen og σ_t er variansen til X_t . De modellene vi skal studere senere i denne oppgaven, er av denne typen.

Hvis vi lar $\{X_t\}$ være en prosess, og F_t representerer den tilgjengelige informasjonen ved tidspunkt t , sier vi at $\{X_t\}$ er en *martingal* med hensyn på $\{F_t\}$ dersom;

$$E(X_t | F_{t-1}) = X_{t-1} \quad (2.9)$$

Dersom $F_t = (X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ har vi at $E(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) = X_t$. Dersom vi videre antar at $\{X_t\}$ er ukorreletert med forventning lik null kan vi skrive:

$$X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (2.10)$$

som gir $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$. Dette uttrykket kjenner vi igjen fra tidligere som en *Random Walk*.

Til sammen gir dette oss resultatet;

$$\begin{aligned} E(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) &= E(X_t + \varepsilon_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) \\ &= X_t + E(\varepsilon_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) = X_t \end{aligned} \quad (2.11)$$

slik at en *Random Walk* uten drift $\{X_t\}$ er en *martingal*.

En *integrert stokastisk prosess* er en prosess bestående av kumulerte feilledd. En stokastisk prosess med endelig varians, som ikke akkumulerer feilledd er stasjonær og integrert av orden null, som betegnes I(0). Den ikke-stasjonære prosessen før differensiering betegnes I(1). I(n) betegner en prosess som er integrert av orden n . Dette betyr at prosessen må differensieres n ganger før den blir I(0), og *stasjonær*. Hvis integrerte prosesser er tilstede kan det oppstå flere problemer i forbindelse med regresjonsanalyse. Vi kan få problemer med *spuriøse regresjoner*, men for å unngå dette blir de integrerte prosessene differensiert for å oppnå *stasjonærhet* (Brooks, 2002)

Som nevnt tidligere vil en prosess $\{X_t\}$ være en *Random Walk* hvis vi har følgende;

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.12)$$

En *Random Walk* er en ikke-stasjonær prosess og feilledet er hvit støy. På differensiert form er *Random Walk* redusert til hvit støy (stasjonær) og gitt ved;

$$\Delta X_t = \varepsilon_t \quad (2.13)$$

Empirisk er det av stor betydning å slå fast hvilken fordeling spekulative priser har, da mange finansteorier er utledet på grunnlag av ulike antagelser om spekulative priser. Innenfor opsjonsprisingsteori bygger for eksempel den velkjente Black-Scholes modellen for prising av Europeiske opsjoner på en rekke antagelser. Modellen er utledet i kontinuerlig tid, hvor det underliggende aktivum antas å følge en geometrisk brownsk bevegelse. I diskret tid betyr dette at logaritmen av prisen på det underliggende aktivum følger en *random walk*. I resten av dette kapitlet skal vi i først omgang analysere daglige/ukentlige endringer på OBX-indeksen empirisk. Vi ønsker å kartlegge den underliggende stokastiske prosessen (dynamikken) som genererer indeksen, samtidig som vi ønsker å slå fast hvilken modell for OBX-dataene som er empirisk rimelig.

2.2 Databeskrivelse

Utvalget i undersøkelsen består av daglige/ukentlige priser på OBX indeksen målt ved sluttnoteringer i tidsrommet 4.1.96 – 1.7.05. Antall observasjoner i serien er (henholdsvis) 2379/484. Dataene er hentet fra kilden Datastream ved biblioteket på NHH. Oslo Børs har normalt åpent fra mandag til fredag. I perioder når Oslo Børs er stengt rapporterer Datastream gårldagens kurs. Disse observasjonene er strøket fra utvalget. Deler av datamaterialet (1997 – 2004) er også korrigert mot data fra Oslo Børs for å få det mest korrekte datamaterialet.

OBX-indeksen består av de 25 mest likvide verdipapirene i OSEBX (Oslo Børs totalindeks) rangert etter seks måneders total omsetning. Verdipapirene er friflytjustert og indeksen revideres på halvårlig basis, med endringer som implementeres tredje fredag i desember og tredje fredag i juni. I perioden mellom revideringsdatoene holdes antall aksjer for hvert indeksmedlem fast, med unntak av kapitaljusteringer med utvanning for eksisterende aksjonærer. OBX-indeksen er en indeks der man kan handel børsnoterte futures og opsjoner (europeiske) tilknyttet indeksen. OBX er ikke justert for ordinært utbytte (Oslo børs). Vi

bemerket her at dette burde ha blitt justert for, men vi har bestemt oss for å se i bort i fra dette i vår oppgave.

I tillegg til OBX-indeksen så har vi lastet ned 1-måned og 2 måned NIBOR fra Datastream og fått prisene på opsjonene til OBX-indeksen fra Oslo Børs Informasjonstjeneste. Disse dataene ønsker vi å benytte i kapittel 7 der vi prøver å avgjøre hvilken opsjonsprisindemodell som tilpasser seg nærmest opsjonsprisene i markedet. For NIBOR-seriene så har vi lagt til 25 basispunkter fordi vi mener at det er nesten ingen aktører i markedet som oppnår en så lav alternativkostnad på kapitalen, eventuelt lånekostnad.

Som utgangspunkt for den videre studien vil vi bruke logaritmiske avkastninger (Logaritmisk differensiert form) for serien av OBX-indekskurser. Dette er i overensstemmelse med litteraturen, da logaritmiske avkastninger har mer egnede analytiske egenskaper enn aritmetiske avkastninger. For små kursendringer gir logaritmiske avkastninger en god tilnærming til prosentuell avkastning. La $\{X_t\}$ betegne kursen på OBX-indeksen. Den logaritmiske avkastningen er da gitt ved:

$$r_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \quad (2.14)$$

Vi tar videre utgangspunkt i at den enkle *Random Walk*-modellen for å beskrive sammenhengen i OBX-indeksen gitt ved;

$$\ln X_t = \mu + \ln X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

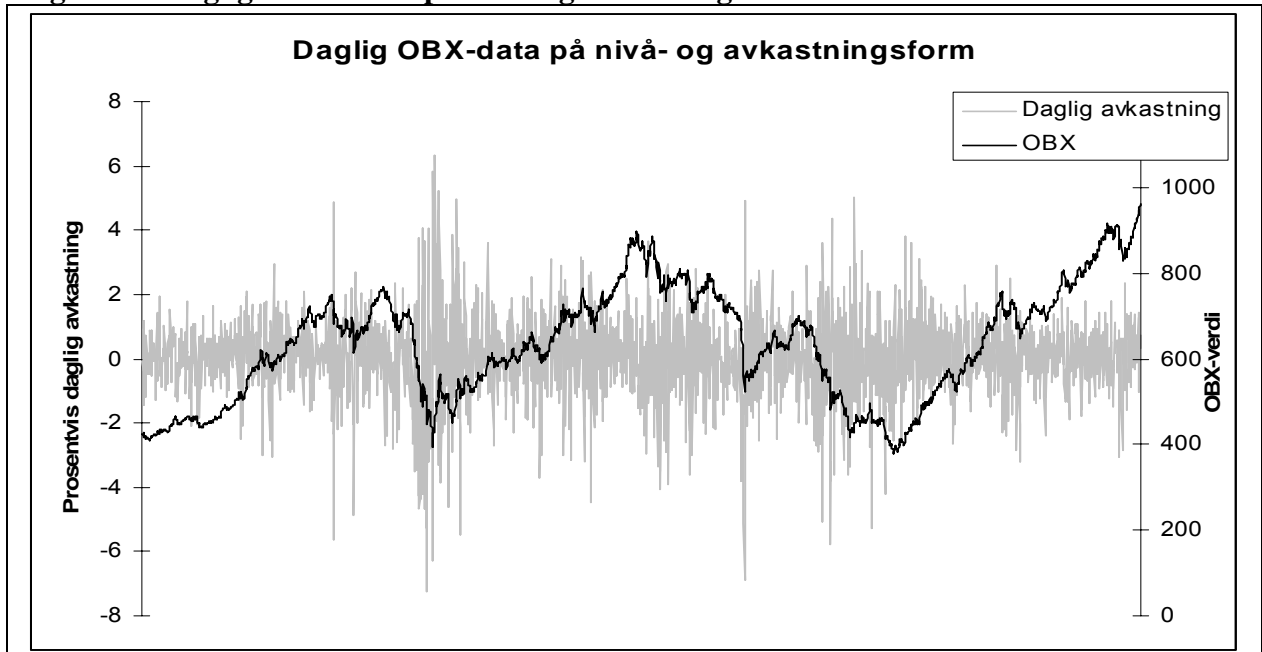
hvor μ er et driftleddet og ε_t er et uspesifisert feilledd. Vår studiet viser at $\{\ln X_t\}$ ikke er stasjonær, og det er derfor nødvendig med differensiering for å oppnå stasjonærhet. Dette er mulig å se uti fra figur 2.1 og figur 2.2 da serien ikke vender tilbake til gjennomsnittet. Ved differensiering får vi;

$$\Delta \ln X_t = \ln X_t - \ln X_{t-1} = \mu + \ln X_{t-1} + \varepsilon_t - \ln X_{t-1} = \mu + \varepsilon_t \quad (2.16)$$

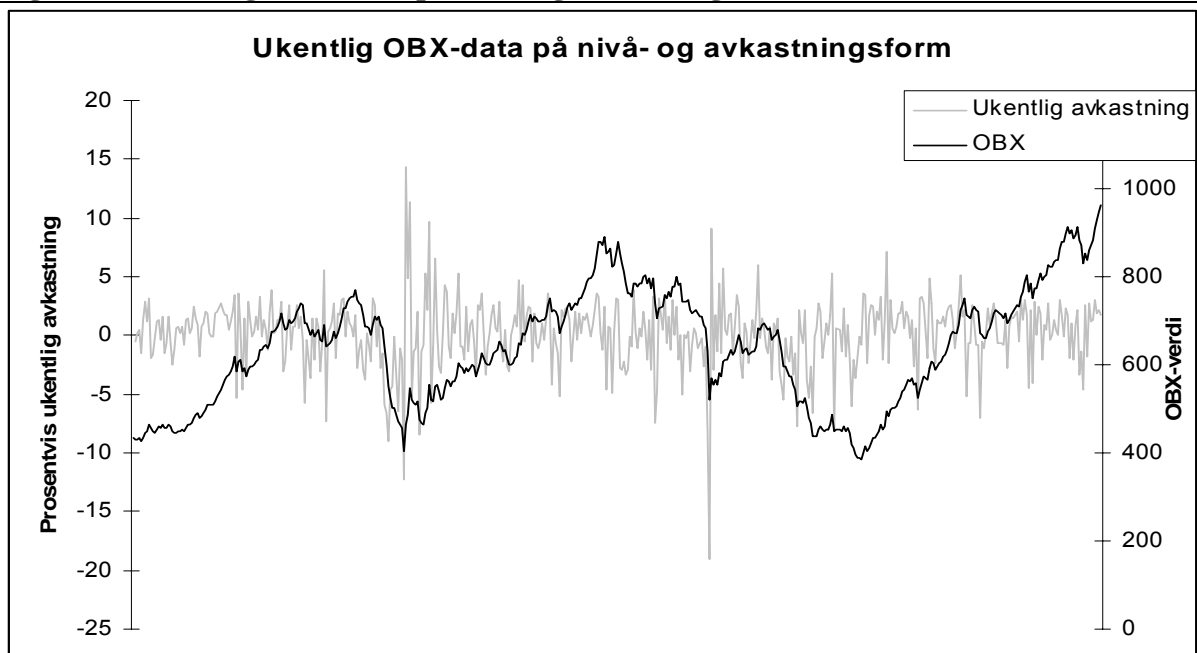
Vi ser at antagelsen om *Random Walk* fører til at den logaritmiske avkastningen er lik driftleddet pluss feilleddet. Videre vil vi forsøke å beskrive de egenskapene som serien av

$\{X_t\}$ viser, og se om (2.16) er en rimelig modell for OBX-indeksen og eventuelt hvorfor ikke.

Figur 2.1: Daglige OBX-data på nivå- og avkastningsform



Figur 2.2: Ukentlig OBX-data på nivå- og avkastningsform



2.3 Empiriske observasjoner av OBX-indeksen

Den svarte linjen i figur 2.1 og i figur 2.2 viser daglige/ukentlige noteringer av OBX indeksen i perioden januar 1996 – juli 2005. De daglige indeksdataene varierer fra verdier opp mot 962,84 til verdier ned mot 377,27. Vi kan se at indeksen har både mer enn fordoblet seg og halvert seg i dette tidsrommet. De ukentlige verdiene har en spennvidde fra 962,84 til 386,2. Som nevnt i forrige avsnitt så er ikke denne serien stasjonær over sitt gjennomsnitt. Derimot den grå linjen i figur 2.1 og figur 2.2 viser den daglige/ukentlige avkastningen på OBX indeksen i perioden januar 1996 – juni 2005. I figur 2.1 kan vi se at volatiliteten fremstår i klynger. Fra litteraturen er det også kjent at volatiliteten i finansielle markeder har en tendens til å fremstå i klynger - et fenomen som gjerne kalles *Volatilitets clustering* eller *Volatilitets pooling*. Det betyr at store avkastningstall (med begge fortegn) forventes å følge store avkastningstall, mens små avkastningstall (med begge fortegn) forventes å følge små avkastningstall. Dette innebærer at den nåværende volatiliteten har en tendens til å være positivt korrelert med sitt nivå i den umiddelbart påfølgende perioden. Dette fenomenet er tydelig i figuren som viser daglige avkastningstall for OBX indeksen. I begynnelsen av perioden, på midten av 1990-tallet, kan det se ut til at det har vært relativt beskjeden positiv og negativ avkastning. Mot slutten av 1997 og frem mot slutten av 1998 observerer vi mye større volatilitet. Noe av det samme finner vi mot slutten av 2001, og fra midten av 2002 til 2003.

Empiriske undersøkelser viser at finansielle avkastningsserier inneholder en rekke stilistiske karakteristikk deriblant volatilitetsklynger (Bollerslev, 1986). I tabell 2.1 så har vi gitt de deskriptive statistikk for den daglige/ukentlige avkastningsserien. Begge disse seriene

Tabell 2.1: Deskriptiv statistikk for avkastningsserien i perioden 1.1.96 – 1.7.2005

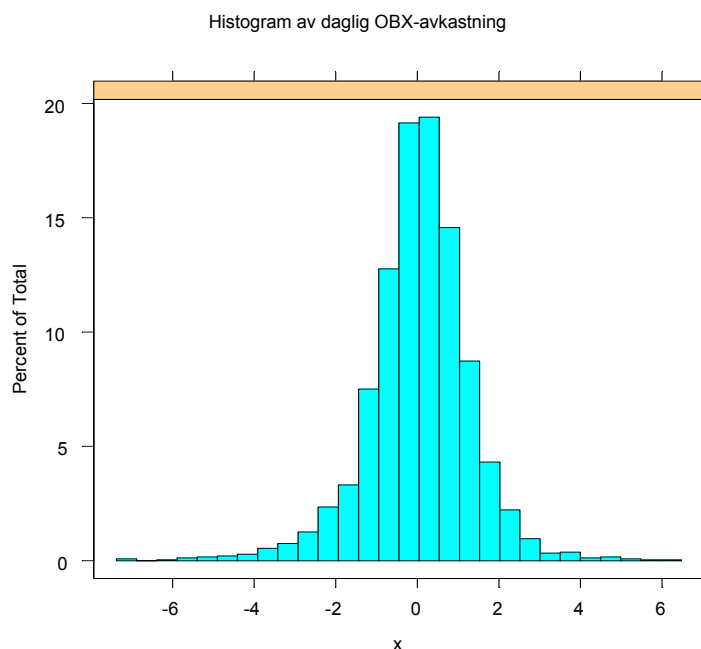
	Gj.snitt	Median	Maximum	Minimum	Standard avvik	Skjevhet ^a	Kurtosis ^b	Ant. Obs.
Daglig OBX avk.	0,0121	0,07571	6,338	-7,24	1,273	-0,4667	6,331	2381
Ukentlig OBX avk.	0,1644	0,5213	14,31	-19,04	2,924	-0,7665	8,834	487

a: skjevhet er gitt ved $b_1 = \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^3 \right) / \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}$, der \bar{x} er utvalgets gjennomsnitt. For en normalfordelt variabel vil skjevheten være 0, altså symmetrisk ved gjennomsnittet.

b: Kurtosis er gitt ved $b_2 = \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^4 \right) / \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2 \right)^2$. For normalfordelte variabler vil kurtosis være ca. 3.

har positiv gjennomsnitt noe som man forventer siden investorene legger til grunn at sine investeringer i aksjemarkedet skal gi en årlig gjennomsnittlig avkastning. Vi nevner her at begge avkastnings gjennomsnittene ligger innenfor 2 standardavvik avstand fra null, slik at en tradisjonell t-test vil forkaste hypotesen om at forventning $\neq 0$ på 5 % -nivå. Seriene viser relativt lite innslag av skjevhet. En normalfordelt fordeling som er naturlig å sammenligne med, er symmetrisk ved en skjevhet = 0. Ser vi på figur 2.3 der et histogram av den daglige avkastningsserien er gitt, er det mulig å skimte den positive skjevheten i avkastningsserien. Det virker som om den positive er større enn den negative. På grunn av at skjevheten til disse seriene er så liten, vil vi i det videre arbeidet anse seriene våre som symmetriske.

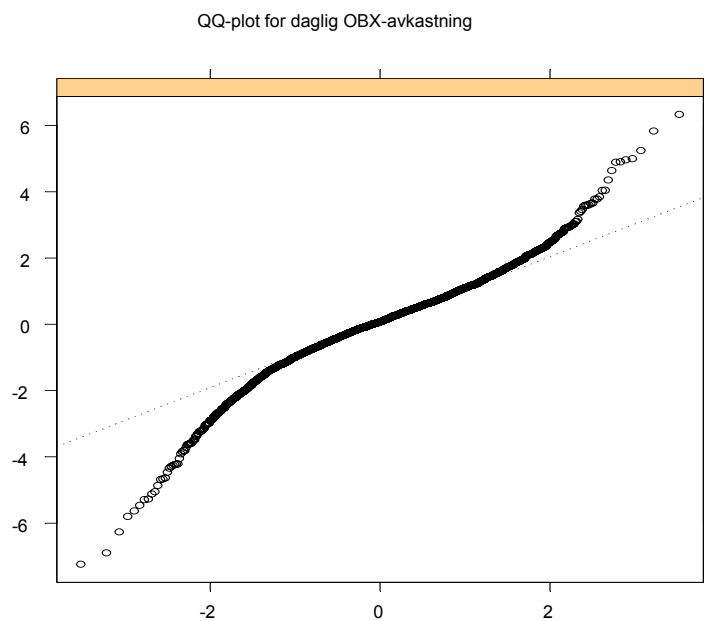
Figur 2.3. Histogram av daglig OBX-avkastning.



Det som kanskje er mest urovekkende ved tabell 2.1 er at verdiene til kurtosisen er så høye. Dette er en annen av de stilistiske karakteristikkene ved avkastningsserier i aksjemarkedet. *Kurtosis* kan defineres som tendensen til at avkastningen på finansielle aktiva har en fordeling med fetere haler og smalere topper enn normalfordeling. Denne egenskapen finner også vi ved våre avkastningstall for OBX indeksen. En normalfordelt serie (Brooks, 2002) vil en standard test rapportere en kurtosis koeffisient på ca. 3. Vi har i tillegg til å se på kurtosistallet gjennomført en normalitetstest av introdusert av Jarque og Bera(1980), og vist et QQ-plot i figur 2.4. Normalitetstesten er gjengitt i tabell 2.2 og tolkes på følgende måte:

Nullhypotesen er at avkastningsserien er normalfordelt imens den alternative hypotesen er at den ikke er normalfordelt. Da viser det seg at både den daglige og ukentlige avkastningsserien ikke er normalfordelt, fordi p-verdien = 0 forkaster nullhypotesen. I QQ-plottet bør den observasjonsverdiene ligge på en rett linje for at serien skal være normalfordelt. Fra figur 2.4 ser vi at dette ikke er tilfellet. Vi nevner her at QQ-plottene har en form lik en omvendt S og man tolker dette som om at serien inneholder fetere haler enn normalfordeling. Problemene med at serien ikke er normalfordelt er at vi kan komme til å forkaste modell parametere som egentlig burde ha vært med i modellering.

Figur 2.4: QQ-plot for daglig OBX-avkastning.



Tabell 2.2: Normalitetstest

	Jarque-Bera	Sannsynlighet
Dag	1186,987	0,0000
Uke	738,3148	0,0000

2.3.1 Stasjonæritet

Vi benytter en Augmented Dickey-Fuller (ADF, 1979) test for Unit Root i Eviews for å avgjøre om hvorvidt tidsserien er Ikke-stasjonær (Unit Root) eller Stasjonær. Denne modellen kan beskrives med følgende formel:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + u_t \quad (2.17)$$

I ADF-testen tester vi nullhypotesen; 'Tidsserien er Ikke-stasjonær (Unit Root)' mot alternativhypotesen; 'Tidsserien er Stasjonær'. Vi finner at de daglige/ukentlige OBX-dataene så er tidsserien ikke signifikant forskjellig fra nullhypotesen, mens på avkastningsform så er begge tidsseriene signifikant forskjellig fra null (se tabell 2.3). I denne tabellen så er testverdiene gitt under slik at man lett ser hvilken serie som er signifikant forskjellig fra 0 og hvilken som ikke er det.

Tabell 2.3 Augmented Dickey-Fuller test for den daglige/ukentlige avkastningsserien.

	t-Statistic	Prob.*
ADF test statistic (Daglig OBX)	-0,933735	0,7779
ADF test statistic (Daglig OBX avkastningsserie)	-23,13430	0,0000
ADF test statistic (Ukentlig OBX)	-1,323622	0,6199
ADF test statistic (Ukentlig OBX avkastningsserie)	-13,34074	0,0000
Test critical values:		
1 % level	-3,432903	
5 % level	-2,862554	
10 % level	-2,567355	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabell 2.4 Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test for den daglige/ukentlige avk.serien.

	LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic (Daglig OBX)	0,899072
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic (Daglig OBX avkastningsserie)	0,152170
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic (Ukentlig OBX)	0,387006
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic (Ukentlig OBX avkastningsserie)	0,128154
Asymptotic critical values*:	
1 % level	0,739000
5 % level	0,463000
10 % level	0,347000

*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)

For at vår konklusjon skal være mer robust, benytter vi en KPSS test (Kwiatkowski et al., 1992) sammen med ADF testen, i en bekreftende data analyse. Her tester vi nullhypotesen;

'Tidsserien er Stasjonær' mot alternativhypotesen; 'Tidsserien er Ikke-stasjonær'. Vi finner at på nivåform så er tidsserien signifikant forskjellig fra nullhypotesen på 10 % -nivå, mens på avkastningsform er tidsserien ikke signifikant forskjellig (se tabell 2.4). Begge testene konkluderer altså med at OBX-tidsserien i avkastningsform er stasjonær både for ukentlig og daglige data.

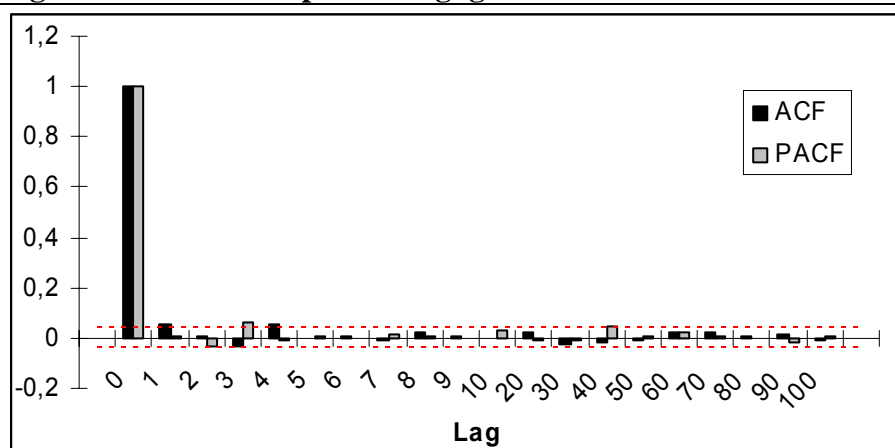
2.3.2 Autokorrelasjon

En av antakelsene ved modellering av tidsserier er at autokovariansen til feilleddene er 0, $Cov(u_t, u_{t-j}) = 0$ der $j \neq 0$. Det finnes flere måter å teste tilstedeværelsen av autokorrelasjon i tidsseriene på, men blant de vanligste metodene er visuell sjekk av autokorrelasjonsfunksjon sammen med Ljung-Box¹¹(1978) eller Box-Pierce-testen. Autokorrelasjonen av vår daglig/ukentlig avkastningsserie og lag s er estimert ved å benytte følgende formel:

$$\tau_s = \frac{COV(y_s, y_t)}{y_t} = \frac{E(y_s - \mu)(y_t - \mu)}{E(y_t - \mu)(y_t - \mu)}, \text{ der } s \geq t \quad (2.18)$$

og μ er utvalgsgjennomsnittet av hele utvalget. Dette er korrelasjonskoeffisienten for s perioder tilbake. Hvis τ_1 er forskjellig fra 0 så sier vi at serien er førsteordens seriekorrelert. For å sjekke om størrelsen på τ_1 er signifikant forskjellig fra 0, og benytter vi oss av et konfidensintervall for korrelasjonskoeffisientene. Ved utregning av konfidensintervallet på 95 % så bruker vi 1,96 approksimerte standardavvik fra gjennomsnittet i normalfordelingen,

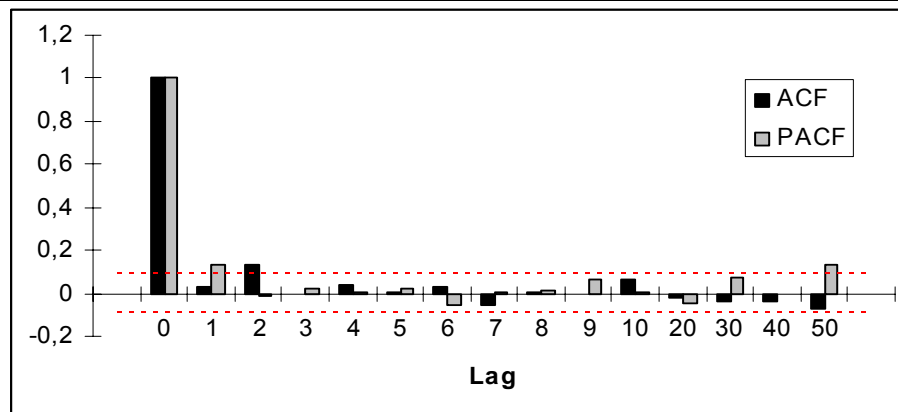
Figur 2.5 ACF/PACF på den daglig avkastn. serien



¹¹ Ljung-Box-testen er gitt ved: $Q(K) = T(T+2) \sum_{k=1}^m (T-k)^{-1} r_k^2 \sim \chi_m^2$

regnet ved $1,96/(\sqrt{T})$, dvs. $\pm 0,04017/\pm 0,08873$ (daglig/ukentlig) i vårt tilfelle. Faller verdiene på en gitt korrelasjonskoeffisient, τ_k , utenfor intervallet er det en bekreftelse på at vi har autokorrelasjon av orden k i tidsserien på 5 % signifikansnivå.

Figur 2.6: ACF/PACF på den ukentlige avkastn. serien



Figur 2.5 og 2.6 viser den estimerte autokorrelasjonsfunksjonen og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen for den daglige/ukentlige avkastningsserien til OBX-indeksen. De horisontale linjene er øvre og nedre 5 % grense for å forkaste nullhypotesen om at serien ikke inneholder autokorrelasjon. Figurene gir små indikasjoner på at autokorrelasjon er til stede, unntatt lag 1 og lag 4 for de daglige dataene og lag 2 for de ukentlige. Studerer vi autokorrelasjonskoeffisientene (tabell 2.6) er det ingen som overstiger 0,06 for den daglig avkastningsserien og 0,14 for den ukentlige, noe som også indikerer lite autokorrelasjon i dataserien. Disse tallene sammenlignes med grensene til konfidensintervallene for å avgjøre tilstedeværelsen av autokorrelasjon altså $\pm 0,04017/\pm 0,08873$ (dag/uke). Som vist i

tabell 2.5 rapporterer vi også Ljung-Box Q-statistikk med tilhørende p-verdier, som indikerer at autokorrelasjon er til stede (p-verdi $< 0,05$). Vi konkluderer med at det fins litt autokorrelasjon i avkastningsseriene, noe som vi vil ta høyde for noe vi lager modellen senere i oppgaven.

Tabell 2.5: Ljung-Box-tabell for daglig og ukentlig avk. serie

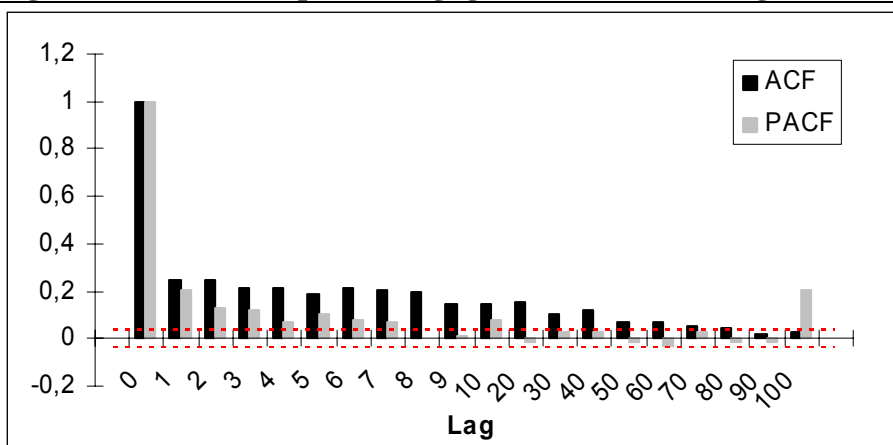
Daglig Q-tabell			Ukentlig Q-tabell		
lag	Statestikk	P-verdi	lag	Statestikk	P-verdi
10	19,0708	0,0394	1	0,4890	0,4844
20	39,7676	0,0053	2	9,3531	0,0093
30	52,2168	0,0072	3	9,3683	0,0248
40	65,8067	0,0062	4	10,0298	0,0399
50	87,1661	0,0009	5	10,0533	0,0737
60	106,3303	0,0002	10	13,9507	0,1753
70	120,4738	0,0002	20	17,8242	0,5990
80	128,3834	0,0005	30	29,1724	0,5086
90	134,3815	0,0017	40	36,4496	0,6309
100	139,8609	0,0053	50	47,3313	0,5811

I Tabell 2.6 ACF- og PACF-koeffisienter for den ukentlig og daglige avkastningsserien

	Lag	1	2	3	4	5	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Daglig	ACF	0,0559	0,0105	-0,0337	0,0546	-0,0023	0,0194	-0,0263	-0,0191	-0,0083	0,0192	0,0233	0,0038	0,0113	-0,0107
	PACF	0,0074	-0,0348	0,0586	-0,0081	0,0038	-0,0079	-0,0065	0,0493	0,0070	0,0206	0,0073	-0,0041	-0,0181	0,0074
Ukentlig	ACF	0,0316	0,1344	-0,0056	0,0366	0,0069	-0,0196	-0,0382	-0,0416	-0,0743					
	PACF	0,1335	-0,0137	0,0196	0,0080	0,0202	-0,0447	0,0735	-0,0012	0,1335					

2.3.3 Heteroskedastisitet

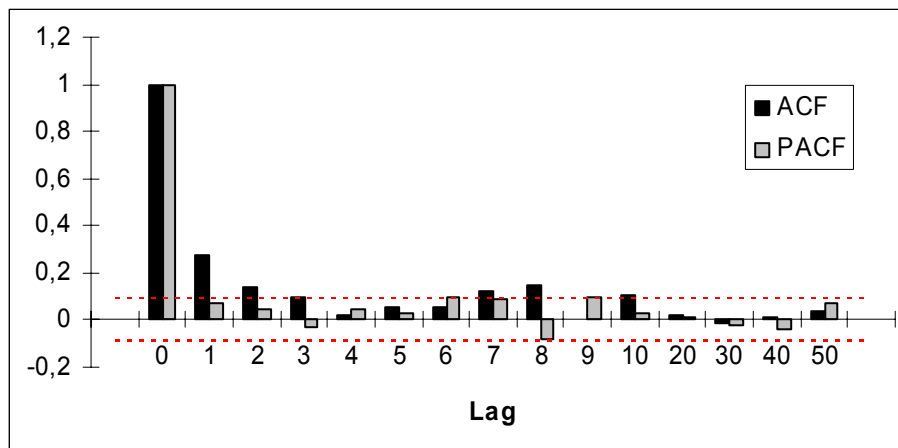
Det er en vanlig antagelse at finansielle tidsserier blir relativt godt approksimert ved random walk, men det vi ønsker å vise nå er at man bør kanskje studere andre modeller også. Studerer vi figurene 2.1 og 2.2 så ser vi indikasjoner på at serien ikke har konstant volatilitet, og vi bemerker at de viser grad av volatilitetsklynge. En visuell test er som regel ikke holdbar, hvis det ikke derimot er enorme ulikheter mellom periodene, og vi vil nå gå inn på enkle tester som viser heteroskedastisitet i vår obx-avkastningsserien. Bruk av Ljung-Box test på absolutt og kvadrert avkastning er en ansett test for heteroskedastisitet, og er gjengitt i de påfølgende figur 2.7 – 2.10 og tabell 2.7 og 2.8.

Figur 2.7 ACF/PACF på den daglig absolutte avkastningsserien.

Figur 2.7 og 2.8 viser den estimerte autokorrelasjonsfunksjonen for avkastningsserien til OBX indeksen i absolutt verdier. Vi kan se at autokorrelasjonskoeffisientene for absolutt verdiene til avkastningen er mye større enn for den rene avkastningsserien. Når vi ser på Ljung-Box Q-statistikken med tilhørende p-verdier (se tabell 2.7) ser vi en klar indikasjon på

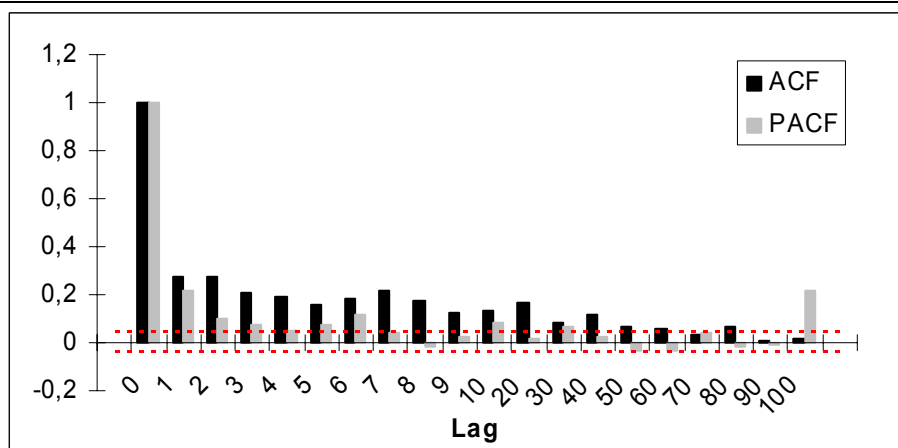
at autokorrelasjon er til stede, og nullhypotesen om ikke autokorrelasjon i den absolutte avkastningsserien forkastes.

Figur 2.8: ACF/PACF på den ukentlige absolute avkastningsserien.

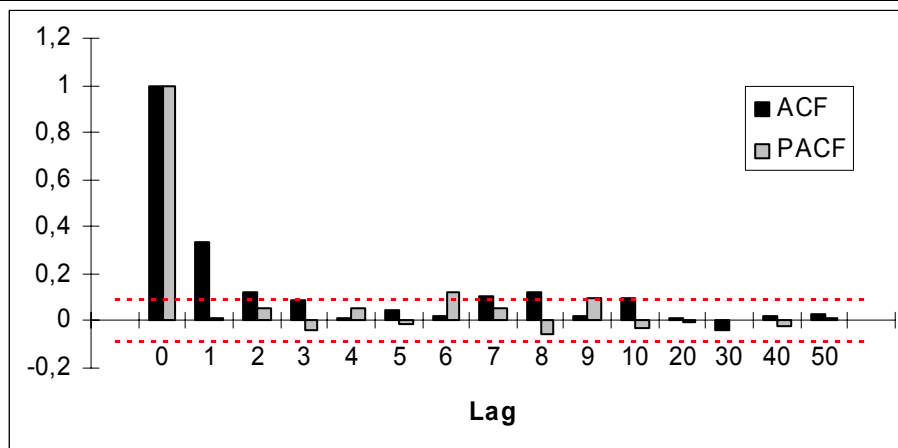


Figuren 2.9 og 2.10 viser den estimerte autokorrelasjonsfunksjonen for den kvadrerte avkastningsserien til OBX indeksen. I tabellen 2.8 har vi gjengitt p-verdiene av den gjennomførte Ljung-Box-testen for de kvadrerte serien. Vi bemerker her at det er autokorrelasjon i de kvadrerte verdiene. Dette gir oss en indikasjon på at vi har betinget heteroskedastisitet i vår serie, og må ta høyde for dette ved modellering.

Figur 2.9: ACF/PACF på den daglige kvadrerte avkastningsserien



I figuren 2.5- 2.10 har vi fremstilt de forskjellige autokorrelasjonsfunksjonene til den ”rene” avkastningsserien sammen med absolutt serien og den kvadrerte serien. Vi nevner at utslagene i den ”rene” avkastningsserien skifter mellom positive og negative utslag, mens utslagene til de absolutte og kvadrerte seriene er alle positive.

Figur 2.10 ACF/PACF på den ukentlige kvadrerte avkastningsserien**Tabell 2.7: Ljung-Box-tabell for den daglige og ukentlige absolutte avk. serie**

lag	Daglig Q-tabell		lag	Ukentlig Q-tabell	
	Statestikk	P-verdi		Statestikk	P-verdi
10	992,2452	0,0000	1	37,4799	0,0000
20	1583,7208	0,0000	2	47,1048	0,0000
30	1903,8551	0,0000	3	52,0111	0,0000
40	2170,4551	0,0000	4	52,1755	0,0000
50	2417,4462	0,0000	5	53,6194	0,0000
60	2533,6425	0,0000	10	77,9008	0,0000
70	2595,6251	0,0000	20	87,2573	0,0000
80	2636,0134	0,0000	30	99,6209	0,0000
90	2663,1497	0,0000	40	104,2099	0,0000
100	2676,8006	0,0000	50	115,6304	0,0000

Tabell 2.8: Ljung-Box-tabell for daglige og ukentlige kvadrerte avk. serie

lag	Daglig Q-tabell		lag	Ukentlig Q-tabell	
	Statestikk	P-verdi		Statestikk	P-verdi
10	966,1938	0,0000	1	55,2018	0,0000
20	1586,0938	0,0000	2	62,5422	0,0000
30	1874,7692	0,0000	3	66,6312	0,0000
40	2149,5599	0,0000	4	66,6824	0,0000
50	2325,4894	0,0000	5	67,6174	0,0000
60	2418,1800	0,0000	10	86,0493	0,0000
70	2454,7446	0,0000	20	90,6462	0,0000
80	2501,6707	0,0000	30	95,4821	0,0000
90	2516,0733	0,0000	40	98,3052	0,0000
100	2529,7488	0,0000	50	102,0402	0,0000

2.4 Oppsummering av innledende empiriske resultater

Vi har funnet at avkastningsserien har liten autokorrelasjon. Dette er i overensstemmelse med stiliserte fakta (forelesningsnotater, vår 2005) og annen litteratur, hvor det påpekes at det for avkastningsserier er ingen eller lav autokorrelasjon. Vi har dermed en svak form av markedseffisiens.

Resultatene vi finner for avkastningsserien i absolutt- og kvadrert form er også typiske. Mens uavhengighet mellom to tilfeldig variabler tilsier at de også er ukorrelerte, kan vi ikke si at to variable som er ukorrelert også er uavhengige. Unntaket er når de to tilfeldig

variablene er normalfordelt. Så selv om vi har funnet at avkastningsserien er tilnærmet ukorrelert og har forventning null, er ikke serien IID, da vi påviser sterk avhengighet i andreordensmomentet. For å kunne ta hensyn til disse effektene i vår studie vil vi da trenge en ikke-lineær modell og dette vil vi studere nærmere i neste kapittel.

De statistiske egenskapene vi har funnet her er avhengig av intervallet mellom observasjonene. Vi ser fra alle figurene at autokorrelasjonen synker når man legger til flere lag. Det er også mulig å observere forskjellen mellom de daglige og ukentlige observasjonene. Autokorrelasjonen til de daglige dataene er høyere enn for de ukentlige ved at acf-koeffisientene er større¹².

¹² Her har vi ikke testet om det er en signifikant forskjell. Vi bare bemerker den.

3 Statistiske volatilitetsmodeller

Volatilitet er en av de viktigste parameterne innenfor finansfaget. Volatiliteten blir gjerne uttrykt ved variansen σ^2 , eller kanskje helst ved standardavviket, σ , til de variablene man betrakter, og vi vil i dette kapitlet beskrive ulike metoder og deres egenskaper for å komme frem til denne parameteren. Volatilitet uttrykt på denne måten blir også mye brukt for å beskrive den totale risikoen til finansielle aktiva. Den er også som tidligere nevnt en viktig komponent i den velkjente Black-Scholes modellen for å avlede opsjonspriser.

3.1 Historisk volatilitet

En enkel og velbrukt metode for å finne en parameter for volatiliteten i aksjeavkastningen i en periode, er å beregne det historiske standardavviket for serien i denne perioden. På grunn av sin enkelhet er modellen relativt populær, men av samme grunn har modellen fått kritikk fra flere hold. Vi antar at en serie r_t av finansielle data representerer avkastningstallene for en aksje, og den gjennomsnittlige avkastningen for perioden er \bar{r} . Vi kan da finne et uttrykk for volatiliteten på tidspunkt T for de n foregående dagene ved hjelp av variansen over de siste n dagene, gitt ved;

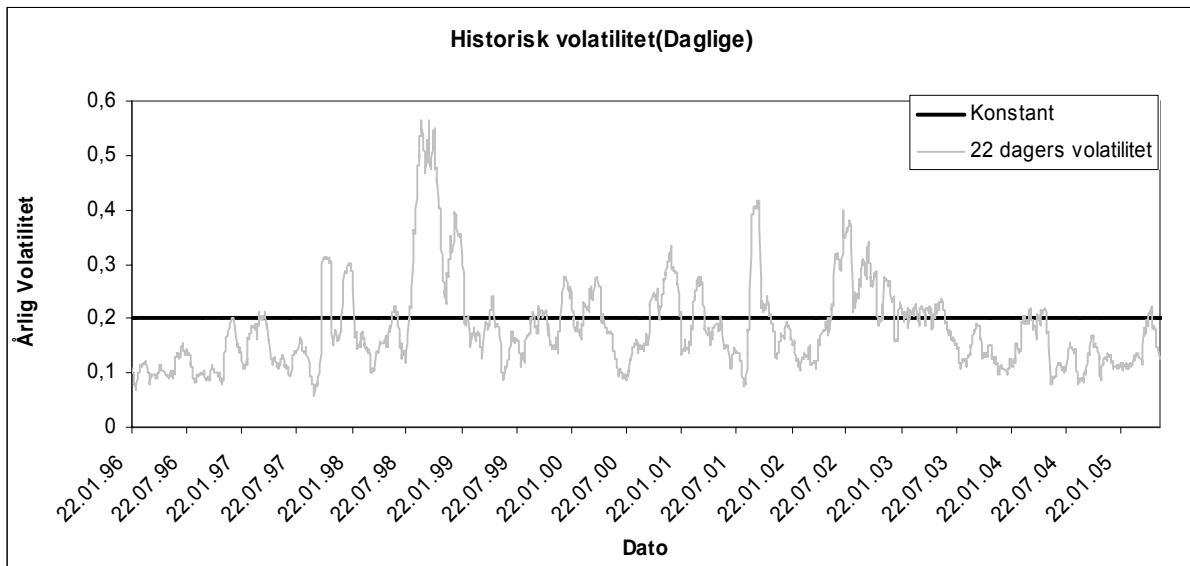
$$\sigma_T^2 = \sum_{t=T-n}^{t=T-1} \frac{(r_t - \bar{r})^2}{n} \quad (3.1)$$

Standardavviket for avkastningstallene for de n dagene blir dermed $\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2}$.

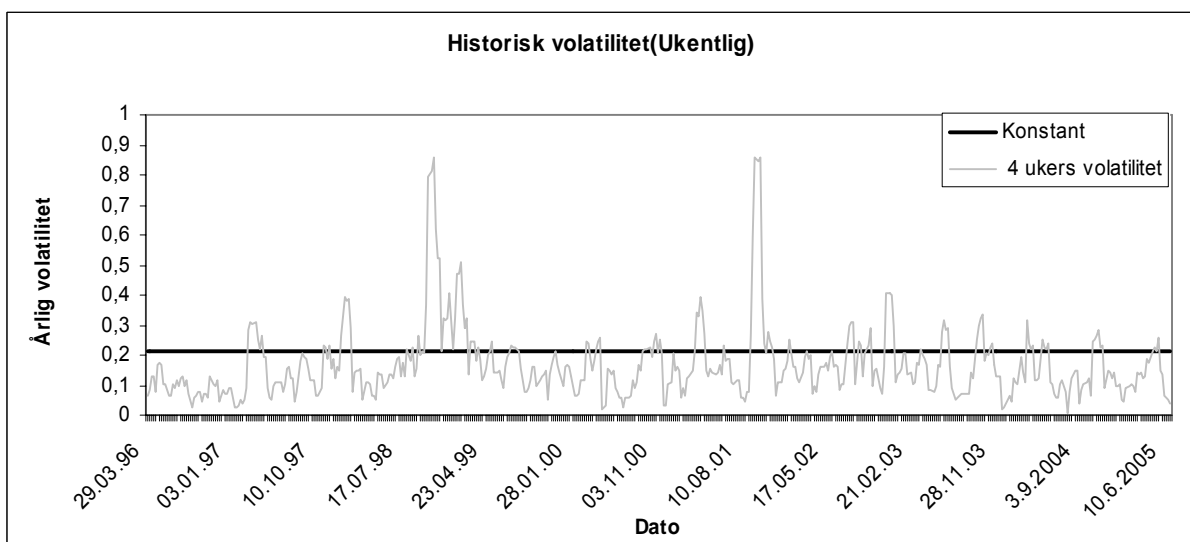
Ved å beregne såkalt *n-periodisk volatilitet* σ_T ved hvert tidspunkt T i tidsserien får vi en tidsserie av volatilitetsestimater. Volatilitetsestimater beregnet som slike ”glidende” standardavvik har tradisjonelt (Hull, 2003) blitt benyttet som prognose på volatiliteten i en fremtidig periode. Vanligvis benytter man de siste n observasjonene som grunnlag for et estimat over den etterfølgende perioden av en lengde på n dager.

I figur 3.1 og 3.2 så har vi gitt den konstante volatilitetene i hele perioden sammen med en konstant volatilitet med 22-dagers/4ukeres glidende gjennomsnitt¹³. Fra disse figurene så kan vi se at påstanden om konstant volatilitet virker veldig urealistisk. Her legger vi merke til at volatiliteten stiger mye i 2 tidsrom i 4. kvartal 1998 og 4 kvartal 2001. Den konstante volatiliteten for hele perioden er beregnet til å være 20,14 % ved årlig basis.

Figur 3.1. Historisk daglig konstant volatilitet



Figur 3.2. Historisk ukentlig konstant volatilitet



¹³ 22- dagers volatilitet til de glidende gjennomsnitt er beregnet på følgende måte:
$$\hat{\sigma} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{22} \left(x_{t-i} - \frac{\sum_{j=1}^{22} x_{t-j}}{22} \right)^2}{22} \right]^{1/2}$$

3.1.1 Historisk volatilitet med eksponentiell vekting

Til nå har vi sett på en modell for historisk volatilitet som tilordner hver observasjon i utvalget samme vekt uansett hvor i utvalget observasjonen er plassert. En slik metode innebærer for eksempel at et avkastningstall for en aksje vil påvirke den estimerte volatilitetsparameteren like mye uavhengig om det er n dager gammelt, eller om det er avkastningstallet for foregående dag. For å fange opp dynamikken i tidsserien bedre, kan man tilordne observasjonene ulike vekter.

Hvis vårt ønske er å estimere dagens volatilitetsnivå, vil det være naturlig å gi de siste observasjonene i tidsserien en høyere vekt enn de første. En konkret måte å gjøre dette på er å benytte eksponentielt vektete glidende gjennomsnitt (EWMA¹⁴). I EWMA modellen gis observasjonene vekter som avtar eksponentielt med avstanden i tid fra estimeringstidspunktet. Hvis α_i er et uttrykk for vekten og λ er en konstant mellom null og en, har vi mer spesifikt gitt $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$ (Hull, 2003).

Hvis vi for eksempel skal estimere volatiliteten på bakgrunn av en tidsserie med lengde n , og tilordner den ferskeste observasjonen en vekt mellom null og en, gis de foregående observasjonene eksponentielt avtakende vekt $\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \dots, \lambda^n$. Den første observasjonen i utvalget får dermed minst vekt. Hvis vi tar utgangspunkt i en tidsserie x , kan en slik estimator uttrykkes ved

$$\frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i x_{t-i-1} \quad \text{der } 0 < \lambda < 1. \quad (3.2)$$

I EWMA tilnærmingen gis altså de siste observasjonene i tidsserien en høyere vekt enn de første, og har en design som kan sies å spore endringer i volatiliteten. Jo lavere verdi vektingsparameteren λ har, jo raskere avtar påvirkningen. Estimering med en høy λ - verdi produserer volatilitetsestimat som reagerer relativt sakte på ny informasjon om endringer, og observasjoner som ligger langt tilbake i tid får stor innvirkning på estimatet (Hull, 2003). Value at Risk programpakken RiskMetrics fra J.P. Morgan bruker EWMA metoden med $\lambda = 0.94$ til å oppdatere daglige estimater for volatilitet. Det virker veldig drøyt å bruke en

¹⁴ EWMA – Exponential Weighted Moving Average

metode der λ er gitt, siden det kan være naturlig å estimere størrelsen selv slik at den er tilpasset vår dataserie. I denne undersøkelsen vil vi ikke sette lys på dette så vi godtar J.P.Morgans estimatet, men har dette i bakhodet når vi skal trekke våre konklusjoner.

Ved bruk av EWMA for lange tidsserier benytter man ofte en tilnærming til formelen i likning 3.2. Siden nevneren i brøken til venstre i uttrykket konvergerer mot $(1 - \lambda)$ når $n \rightarrow \infty$, kan man for store verdier av n i stedet for formelen til høyre i (3.2) benytte formelen:

$$\sigma_t = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i x_{t-i-1} \quad (3.3)$$

Hvis man benytter denne metoden på en tidsserie av avkastningstall for en aksje med gjennomsnittlig avkastning $\bar{r} = 0$, får vi at $x = r^2$ i formel (3.3)

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-1}^2 \quad (3.4)$$

Denne likningen kan omskrives til det uttrykket som vanligvis benyttes til å beregne vektete historiske volatilitetsparametere (For en utledning refererer vi til Hull, 2003). Formelen som benyttes er:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)r_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (3.5)$$

Vi ser at et estimat som beregnes ved tiden t påvirkes i større eller mindre grad av kortsiktige bevegelser i avkastningstallene avhengig av størrelsen på koeffisienten $(1 - \lambda)$. Denne koeffisienten kalles derfor ofte for *reaksjonskoeffisienten*. Koeffisienten foran den laggede variansen σ_{t-1}^2 er vektingsparameteren λ . Denne sammenhengen kan den betraktes som en *vedvarehetskoeffisient*, siden størrelsen på denne påvirker i hvor stor grad et estimat er påvirket av de foregående estimatene. I en EWMA modell er de to koeffisientene ikke uavhengige – summen av de to vil faktisk alltid være lik én (Rakkestad, 2003). I en mer generell GARCH-modell skal vi se at uavhengighet kan være tilfellet.

3.1.2 Historisk volatilitet og skalering

Som nevnt ovenfor er de estimeringsmetodene som hittil er omtalt basert på at man estimerer en konstant volatilitetsparameter. Slik sett kan man si at de historiske metodene med og uten vektning kun er estimeringsmetoder og ikke et prognoseverktøy, som kan brukes til prediksjon. Hvis man likevel skal lage en prognose basert på en enkel historisk estimeringsmetode, må man gjøre en antagelse om at dagens volatilitetsestimert er den beste prognosen på volatiliteten i fremtiden. Dette gjøres vanligvis ved å la dagens estimerte verdi for éndags-volatiliteten, være prognosen for éndags-volatiliteten for hver av de etterfølgende dagene. Under denne forutsetningen kan man på bakgrunn av volatiliteten over en tidshorisont på én dag, si noe om volatiliteten over lengre tidshorisonter. Éndags-estimatet kan altså skaleres opp til å være estimert for en tidshorisont på for eksempel en uke. Hvordan denne skaleringen gjøres avhenger av hvilke antagelser man har gjort om den tidsserien man betrakter. Hvis man estimerer volatiliteten til en tidsserie av finansielle data som antas å være uavhengig og ha identisk sannsynlighetsfordeling (IID¹⁵), vil variansen over en tidshorisont på t -dager være t ganger variansen over en tidshorisont på én dag. Usikkerheten angående en fremtidig aksjekurs målt ved standardavviket kan dermed skaleres opp tilsvarende ved å multiplisere éndags-standardavviket med \sqrt{t} . Å bruke regelen om skalering med "kvadratroten av tiden" er ekvivalent med antagelsene i den veletablerte Black-Scholes modellen for opsjonsprising, om at volatiliteten er konstant i fremtiden. Denne antagelsen vil bli diskutert nærmere senere i oppgaven. I en Black-Scholes modell er volatilitetsparameteren det annualiserte standardavviket til den underliggende tidsserien i modellen. Ved en annualisering, og en antagelse om 250 handledager¹⁶ per år, vil skaleringsfaktoren være $\sqrt{250}$ hvis man skalerer éndags-volatiliteter og $\sqrt{250/t}$ hvis man tar utgangspunkt i volatiliteter over en tidshorisont på t dager. At regelen om skalering med kvadratroten av tiden impliserer konstant volatilitet kan vi se ved å betrakte følgende uttrykk:

$$\sqrt{(250/t)} \times \sqrt{(t \times \sigma^2)} = \sqrt{(250\sigma^2)} \quad (3.6)$$

Annualisert t -dagers volatilitet er lik annualisert 1-dags volatilitet.

¹⁵ IID – Independent Identical Distribution.

¹⁶ Empirisk forskning viser at i diskusjonen mellom å bruke kalenderdager versus handledager indikeres det at sistnevnte bør brukes (Fama, 1965 og French, 1980).

Vi ser altså at en slik skalering impliserer at det ikke spiller noen rolle hvilken tidshorisont man tar utgangspunkt i når man skalerer volatilitetsestimatene til annualiserte verdier, eller med andre ord at volatilitetsstrukturen er konstant over tid. Dette er en klar begrensning ved denne type modeller. Empirisk har man observert at volatiliteten i finansielle serier har en tendens til å ”hope seg opp” innenfor kortere tidsperioder. Det kan derfor argumenteres for å benytte betingede volatilitetsparametere som varierer over tid. De mer sofistikerte GARCH-modellene estimerer slike betingede parametere.

3.2 ARMA-modell

I dette avsnittet vil vi presentere dynamikken og egenskapene til ARMA prosesser. Disse modellene ble introdusert av Box og Jenkins (1976), og det ble i denne artikkelen vist at ARMA-modeller fungerer til å modellere ulike tidsserier. Innenfor tidsrekkemodellering er kanskje denne type modellering den enkleste, og per i dag så blir det sett på som et godt utgangspunkt for videre studie av de ulike seriene. Vi benytter oss av disse prosessene til å innlemme den autokorrelasjonen som ble påvist i tidsserien vår i avsnitt 2.3.2. Dette er viktig fordi det er ønskelig å lage en modell som skal kunne predikere tidsserien..

ARMA er en forkortelse for Autoregressive Moving Average¹⁷. Det er som tidligere nevnt ønskelig å tilpasse en modell der modellen styres av en hvit støy-prosess. Definisjonen er gitt kapittel 2, men vi gjentar den her:

$$E(y_t) = \mu \quad (3.7)$$

$$\text{VAR}(y_t) = \sigma^2 \quad (3.8)$$

$$\gamma_{t-r} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for } t=r \\ 0 & \text{for } t \neq r \end{cases} \quad (3.9)$$

3.2.1 MA-modellen

Blant de simpleste klassene av tidsrekkemodellering er den såkalte moving average-prosessen. La oss anta at u_t , der $t = 1, 2, 3, \dots$, er en sekvens med uavhengig, identiske

¹⁷ Her ønsker vi å beholde den engelske terminologien moving average selv om man kunne ha kalt det glidende gjennomsnitt. Dette pga av at moving average er et velkjent begrep for statistikere.

distribuerte(IID) tilfeldig variabler med $E(u_t) = 0$ og $\text{VAR}(u_t) = \sigma^2$. Hvis vi bare antar at $\{u_t\}$ er ukorrelert, ikke uavhengige, vil $\{u_t\}$ være lik en White Noise-prosess beskrevet i kapittel 2, der $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Hvis vi konstruerer en et vektet gjennomsnitt av u_t får vi det som defineres som en MA modell:

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad (3.10)$$

der μ er gjennomsnitt til tidsrekken.

Dette er en q 'te orden moving average mode, beskrevet som MA(q). En MA modell er dermed bare en lineær kombinasjon av hvit støy prosesser, slik at y_t er avhengig av dagens og de tidligere verdiene av den hvite støy prosessens feilledd. Siden våre tidsserier er stasjonære så er det viktig at modellen har den samme egenskapen. En MA(q) modellen vil alltid være stasjonær på grunn av dens autokorrelasjonsfunksjon vil være forskjellig fra 0 inntil lag q , og deretter 0.

3.2.2 AR modeller

En annen enkel modell i denne klassen er såkalte autoregressive(AR) modeller. En autoregressiv modell er at den ønskede verdien av en variable, y , bare er avhengig av verdiene som variabelen hadde i tidligere perioder pluss et feilledd, u . En autoregressiv modell av orden, p , beskrevet som AR(p), kan bli uttrykt på følgende måte.

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (3.11)$$

der u_t er en hvit støy feilledd, $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Som for MA modellen så er det viktig at modellen er stasjonær. AR prosessen er stasjonær

hvis det eksisterer en sekvens av konstanter $\{\psi_j\}$ slik at $y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j u_{t-j}$.

3.2.3 ARMA-modeller

Ved å kombinere AR(p) og MA(q) modellene, oppnår vi en ARMA(p, q)-modell. En slik modell forteller oss at den aktuelle verdien av en serie, y , er lineært avhengig av dens egne

tidligere verdier sammen med en kombinasjon av aktuelle og tidligere verdier av hvit støy feilleddene. Denne modellen kan bli formulert på følgende måte:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (3.12)$$

$$\text{der } u_t \sim (0, \sigma^2); E(u_t, u_s) = 0 \text{ for } t \neq s$$

Karakteristikkene av en ARMA-prosess vil være en kombinasjon av de fra den autoregressive (AR) og moving average (MA)-delen.

3.3 GARCH-modeller

GARCH er en forkortelse for *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Heteroskedastisitet betyr nettopp ”varierende varians”, slik at *Conditional Heteroscedasticity* står for betinget varierende varians. Som vi har vært inne på tidligere sier vi at en tidsserie fremviser betinget heteroskedastisitet hvis er mulig å observere perioder med lav volatilitet eller med store fluktasjoner og høy volatilitet. Som nevnt tidligere viser de fleste finansielle avkastningsserier en slik oppførsel. Ofte vil man for eksempel se en opphopning av volatilitet i en tidsserie av priser i forbindelse med offentliggjøring av informasjon, da dette kan føre til mye usikkerhet rundt selve aksjen.

3.3.1 ARCH

En ikke-lineær modell som er velbrukt i finans er blant annet ARCH-modellen (ARCH står for *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity-modell*). Denne modellen er forløperen til GARCH-modellen. ARCH-modellen som ble introdusert av Engle (1982) tillater den betingede variansen å endre seg over tid, mens den ubetingede variansen holdes konstant.

En måte for å modellere volatilitetsendringer på, er ved en såkalt ARCH-modell. Et eksempel på en ARCH-modell kan være definert ved:

$$y_t = \beta_1 + u_t \quad (3.13)$$

$$u_t = v_t \sigma_t \text{ der } v_t \sim N(0,1) \quad (3.14)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \quad (3.15)$$

Som for ARMA-modellene så er det i ARCH-modellen også en parameterrestriksjon, $\alpha_0 \geq 0$, \dots , $\alpha_q \geq 0$, som sikrer at $\sigma_t^2 > 0$. En feilvarians som hadde vært negativ ved hvilket som helst tidspunkt ville ikke ha gitt oss noen mening, og dermed så må restriksjonen gjelde.

ARCH(q)-modellen har et ”minne” på q-observasjoner, og variansestimater varierer over tid avhengig av kvadratet av de foregående verdiene av de u-forventede avkastningstallene u_t . Effekten av dette er at en stor bevegelse i markedet innenfor modellens ”minne” (de siste q observasjonene), vil gi et høyere volatilitetsestimat. Med andre ord vil modellen beskrive et mønster der store (små) fluktuasjoner i en tidsserie etterfølges av store (små) fluktuasjoner. I den engelske litteraturen blir fenomenet referert til som *Volatilitets Klynger* og modellen er kjent som den *lineære ARCH(q) modellen*.

3.3.2 Lineær GARCH (p,q) modell

Et alternativ til den lineære ARCH(q) modellen, som gjerne byr på en mer fleksibel lag struktur er GARCH (p,q) modellen (Bollerslev, 1986). Modellen er en generalisering av ARCH ved å legge til p autoregressive ledd i modellen, slik at man inkluderer en vektet sum av de foregående volatilitetsestimatene. Modellen kan uttrykkes ved likningen:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \quad (3.16)$$

$$\text{der } \alpha_0 \dots \alpha_q \geq 0, \beta_1 \dots \beta_p \geq 0$$

I likningen har modellen et ”minne” på p og q tidsperioder med hensyn til henholdsvis varians σ_t^2 og avkastningstall u_t . I en enkel variant av modellen, som betegnes GARCH(1,1), benytter man $p = q = 1$, slik at modellen bare har et minne på én tidsperiode¹⁸:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad (3.17)$$

¹⁸ Dette stemmer ikke helt fordi fra denne modellen kan man utlede en modell der variansen har et uendelig minne.

Når $\omega = 0, \alpha = (1 - \lambda)$ og $\beta = \lambda$ ser vi at GARCH(1,1) ligner på EWMA modellen vi har sett på tidligere. I en EWMA modell er summen av koeffisienten alltid lik én. Koeffisientene i GARCH (p,q) modellene kan variere, men man må vanligvis oppgi betingelser på disse ut fra hensynet til konvergens. I tilfellet med GARCH (1,1) modellen må koeffisientene tilfredsstillende likningen $\alpha + \beta < 1$ for å sikre svak stasjonæritet i prosessen.

Størrelsen på parametrene α og β påvirker hvordan modellen reagerer ved ulike utslag i tidsserien modellen brukes på. En høy β -verdi vil føre til at det tar lang tid før et stort utslag i den betingede volatiliteten ”dør ut”. På samme måte vil en høy α -verdi føre til at modellen reagerer raskt på store bevegelser i tidsserien. Parametrene α_0, α_1 og β_1 bestemmer det langsiktige gjennomsnittet volatilitetsprognosen konvergerer mot.

GARCH-modellen har enkelte positive egenskaper vedrørende de ubetingede momentene, og vi vil her gjengi dem.

- 1) **Gjennomsnitt:** Ved bruk av ”law of iterated expectations”, så kan det ubetingede gjennomsnittet beregnes ved følgende metode:

$$E(u_t) = E[E(u_t | F_{t-1})] \quad \text{der } F_{t-1} \text{ er alle tidligere observasjonene av } y(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0) \quad (3.18)$$

og i henhold til likning (3.17) er $E[E(u_t | F_{t-1})]$ lik 0 uavhengig av F_{t-1} , som betyr at $E(u_t) = 0$. Dermed har GARCH prosesser alltid et gjennomsnitt lik 0.

- 2) **Varians:** Siden $E(u_t) = 0$ så er den ubetingede variansen lik det ubetingede annen ordens momentet, som kan beregnes ved:

$$\begin{aligned} E(u_t^2) &= E[E(u_t^2 | F_{t-1})] \\ &= E[E(v_t^2 \sigma_t^2 | F_{t-1})] \\ &= E[E(\sigma_t^2 | F_{t-1})] \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i E(u_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i E(\sigma_{t-i}^2) \end{aligned}$$

$$= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i E(u_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i E(u_{t-i}^2) \quad (3.19)$$

Hvis man nå antar at prosessen begynner ved uendelig mange steg tilbake i tid med et initialt annen ordens moment, så vil denne sekvensen konvergere mot:

$$\sigma_u^2 = E(u_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \text{ der } \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (3.20)$$

- 3) **Skjevhet:** På grunn av at v_t i ligning 3.14 er normalfordelt og uavhengig av σ_t , så er de ulike høyereordens momentene til u_t lik null. Dermed så er skjevheten til u_t null og vi har en symmetrisk fordeling
- 4) **Kurtosis:** Her vil vi bare uttrykke fjerde momentsfunksjonen til GARCH(1,1) som eksempel for kurtosis i GARCH prosessene. Hvis $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ da er kurtosisen gitt ved:

$$E(u_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)} \quad (3.21)$$

Dermed vil ”excess” kurtosisen være:

$$\frac{E(u_t^4)}{E(u_t^2)^2} - 3 = \frac{E(u_t^4) - 3E(u_t^2)^2}{E(u_t^2)^2} = \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2} \quad (3.22)$$

og dette er større enn 0 noe som betyr at en GARCH-prosess alltid har ”excess” kurtosis.

3.3.3 Varianter av GARCH-modeller

EGARCH

Det kan likevel hevdes at de tradisjonelle GARCH-modellene er lite fleksible. I GARCH (p,q)-modellen avhenger variansen bare av vekten og ikke fortegnet til u_t . Det er en symmetri i modellen, fordi GARCH-modellene tar utgangspunkt i kvadrerte relasjoner. Volatiliteten i disse modellene reagerer altså likt både på oppgang og nedgang i for eksempel aksjeavkastningen. For å komme mer i harmoni med empirien introduserte Nelson (1991) en eksponentiell GARCH-modell - EGARCH(p,q) med asymmetrisk varians. σ_t^2 er altså en asymmetrisk funksjon av tidligere u_t verdier definert ved (for gjøre presentasjonen av teorien litt enklere så tar vi får oss bare varianter av GARCH(1,1)-prosess);

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 f\left(\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad \text{der,} \quad (3.23)$$

$$f\left(\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) = \frac{|u_{t-1}| + \theta_1 u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

I motsetning til den lineære GARCH (p,q)-modellen er det ingen restriksjoner på parametrene α_i og β_i for å hindre at den betingede variansen blir negativ. Denne modellen synes å være passende for modellering av avkastningsserier for aksjer/indekser, siden negative overraskelser empirisk har vist seg å øke volatiliteten relativt mer enn positive overraskelser. Dette fenomenet er blitt kalt ”leverage”-effekten

Det er ikke bare Nelson som har introdusert volatilitetsmodeller som tar hensyn til ”leverage”-effekten. Threshold GARCH(TGARCH) og Power GARCH(PGARCH) er modeller som tar hensyn til at volatiliteten blir større når aksjekursen blir mindre. Vi vil her kort presenter disse modellene (Zakoian, 1994 og Ding, Granger og Engle, 1993).

TGARCH

I 1991 presentert Zakoian (1994) TGARCH-modellen som er formulert på følgende måte:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma_1 S_{t-1} u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.24)$$

der $S_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } u_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{hvis } u_{t-1} \geq 0 \end{cases}$

Dette betyr at avhengig av om u_{t-1}^2 er over eller under den såkalte terskelverdien av 0, så har u_{t-1}^2 ulik effekt på den betingede variansen σ_t^2 : Når u_{t-1} er positive så er total effekten gitt av $\alpha_1 u_{t-1}^2$, men derimot når u_{t-1} er negativ så er total effekten lik $(\alpha_1 + \gamma_1) u_{t-1}^2$. Dermed så vil man forventet at γ_1 til å være positiv for at de dårlige nyhetene skal ha større effekt.

PGARCH

Den neste modellen som er en asymmetrisk volatilitetsmodell er PGARCH. Her vil benytte oss av to ulike varianter av modellen; en generell og en spesiell. Den generelle modellen ble utgitt av Ding, Granger og Engle(1993) og er:

$$\sigma_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 (|u_{t-1}| + \gamma_1 u_{t-1})^d + \beta_1 \sigma_{t-1}^d \quad (3.25)$$

Der d er en positiv eksponent, og γ_1 beskriver koeffisienten til "leverage" effekten. Her nevner vi at når $d = 2$ så blir modellen lik en vanlig GARCH-modell med "leverage" effekt, i vår utredning blir denne modellen definert som PGARCH(1,1,2).

GARCH-in-Mean(GARCH-M)

I tillegg til modellene med asymmetrisk volatilitet ønsker vi å benytte oss av GARCH-in Mean modellene. Bakgrunnen til modellen er at i finansielle investeringer så er høy risiko ofte forventet til å gi høy avkastning. Selv om moderne aktiva prisings teori ikke impliserer en så enkel sammenheng, så foreslår den at det er en eller annen sammenheng mellom forventet avkastning og risiko målt ved volatiliteten. Det var Engle, Lilien og Robins(1987) som først foreslo å utvide den enkle GARCH modellen slik at den betingede variansen klarer å generere en risiko premie som er del av den forventede avkastningen. GARCH-M modellen utvider den betingede gjennomsnittet funksjonen(3.13):

$$y_t = \mu + \alpha g(\sigma_t) + u_t \quad (3.26)$$

Der $g(\cdot)$ kan være ulike arbitrære funksjoner av volatiliteten σ_t , eksempel gitt i tabell 4.1:

Tabell 4.1 Arbitrære funksjoner av volatiliteten

$g(\sigma_t)$	
σ	standardavvik
σ^2	varians
$\ln(\sigma^2)$	log varians

3.3.4 Maximum Likelihood Metode

Siden modellen ikke lenger er på den vanlig lineære formen, så kan ikke OLS¹⁹ bli brukt for GARCH-modell estimering. Det er flere grunner til dette, men den mest berettiget er at OLS minimerer den kvadrerte summen av residualene. Siden RSS er avhengig av bare parametrene i den betingede gjennomsnittsformelen, og ikke av betinget varians, så er dermed ikke RSS minimeringen en mulig måte.

For å estimere GARCH-modeller blir en annen teknikk brukt, kjent som *maximum likelihood*. Metoden virker på den måten at den prøver å finne den mest sannsynlige verdien for parametrene gitt de aktuelle dataene. For å være mer nøyaktig, blir en log-likelihood formulert, og verdiene til parameterne som maksimerer den blir søkt.

Ønsker vi f. eks å estimere en AR(1)-GARCH(1,1)-modell, vi videre antar at X_t er betinget gaussisk, kan vi skrive likelihoodfunksjonen ved hjelp av normalfordelingen.

$$f(x_t | F_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (3.27)$$

Der σ_t^2 er variansspesifikasjonen for GARCH-modellen, θ er en vektor som inneholder de parameterne som skal estimeres $\theta \equiv \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i, \sum_{i=1}^q \beta_i \right)$ og F_{t-1} er de historiske verdiene av x_t , $F_{t-1} = x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_0$. Fra modellspefikasjonen har vi at hver observasjon er normalfordelt med

¹⁹ OLS – Ordinary Least Squares

forventning lik $y_t - \mu - \phi y_{t-1}$. En felles sannsynlighetsfordelingen for x_{t+1} og x_t på tidspunkt $t-1$ er gitt ved:

$$f(x_{t+1}, x_t; \theta) = f(x_{t+1} | x_t; \theta) \times f(x_t | F_{t-1}; \theta) \quad (3.28)$$

Dermed ved å betinge sannsynligheten for hver enkelt observasjon på forhistorien, kan sannsynligheten for serien bli gitt ved:

$$f(x_t, x_{t-1}, \dots, x_0; \theta) = f(x_1; \theta) \times \prod_{i=2}^T f(x_i | F_{i-1}; \theta) \quad (3.29)$$

Måten man tenker på er å velge verdier av θ som maksimerer funksjonen (3.2.4), altså vi maksimerer (3.2.6) gitt vår realiserte observasjonsrekke F_t . Bruker vi (3.2.4) i (3.2.5) og tar den naturlige logaritmen av uttrykket så får vi log-likelihood funksjonen for vårt utvalg.

$$\sum_{i=1}^T \ln(f(x_i | F_{i-1}; \theta)) = -\left(\frac{T}{2}\right) \ln(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^T \ln(\sigma_i^2) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^T \ln\left(\frac{(y_i - \mu - \phi y_{i-1})^2}{\sigma^2}\right) \quad (3.30)$$

Årsaken til at vi ønsker funksjonen på log-form er av bekvemmelighetshensyn. De optimale parameterverdiene til en funksjon vil være de samme for den naturlige logaritmen av funksjonen. Hovedforskjellen er at vi på log-form arbeider med en summasjon istedenfor et produkt og dette gjør estimeringsprosedyrene enklere.

Ved å sette inn for den enkelte variansspesifikasjonen i (3.27), kan enhver art av ARCH- og GARCH-modell estimeres. En ARCH(q)-modell trenger, q, initiale observasjoner for å estimere parametrene. Deretter må vi bestemme startverdien for θ , og log-likelihood funksjonen kan så bli maksimert ved å optimere (3.30) numerisk. Ved GARCH-estimasjonen er det i tillegg nødvendig med en verdi for σ_0^2 . Denne verdien kan for eksempel være de 20 første observasjonene eller den ubetingede variansen for hele utvalget. Vi nevner her at GARCH-modeller har ofte en flat likelihood-funksjon med flere maksimumspunkt, og dette kan føre til problemer ved estimering. Litt avhengig av hvilken optimeringsalgoritme som er blitt brukt, kan valg av initialverdier som er veldig forskjellig fra de sanne verdiene føre til at optimeringsalgoritmen ender i et lokalt maksimum eller får konvergensproblemer.

Det er også mulig å bruke den samme framgangsmåten som er gitt ovenfor med andre sannsynlighetsfordelinger enn den gaussiske. De fete halene i finansielle tidsrekke data indikerer at normalfordeling ikke er optimal. Den inneholder muligens ikke tilstrekkelig kurtosis i den ubetingede fordelingen. Fordeling man gjerne kan benytte er Student-t-fordelingen og GED (generalized error distribution), foretrukket av henholdsvis Bollerslev(1997) og Nelson(1991).

4 Modellspesifikasjon og estimering av volatilitetsmodeller

I dette kapitlet kommer vi til å estimere de ulike GARCH-modellene som ble presentert i kapittel 3. Vi vil benytte oss av den ukentlige og daglige avkastningsserien. Dette er to lange tidsserier som skulle kunne fange opp mye av dynamikken i indeksen. For hver modell diskuterer vi de ulike modellspesifikasjonene, deres parameterverdier og variansens kvalitative egenskaper gitt disse spesifikke parameterestimaterne. Vi vil bare estimere en enkelt modell fra de ulike volatilitetsmodellene som benyttes ved volatilitetsmodellering.

4.1 Parameterverdier for de ulike GARCH-modellene

Vi vil i dette avsnittet presenter estimeringsresultatene for de ulike modellene beskrevet i kapittel 3. Her vil vi anta at modellene er betinget Gaussiske eller ved Student-t fordeling, dersom ikke en annen antakelse er spesifikt gitt. Som hovedbeslutningsgrunnlag for å bestemme hvilke av modellene som beskriver tidsserien best, vil vi benytte oss av Schwartz(1978) informasjonskriteriet(BIC)²⁰. Det er kun de første 2124 daglige og 435 ukentlige avkastningsdataene som estimeres i dette kapitlet, dvs. de først 8,5 årene av vårt 9,5-årige utvalg. Årsaken til dette er at de resterende observasjonene vil vi benytte i neste kapittel som sammenligningsgrunnlag for å finne hvilke av volatilitetsmodellene som predikerer ”out of sample” best.

4.2 Metode

Metoden vi støtter oss til er den som er kalt Box-Jenkins metode. Box og Jenkins (1976) var de første til å estimere en ARMA-GARCH modell på en systematisk måte. Metoden de kom frem til er både praktisk og pragmatisk og inneholder 3 steg:

²⁰ BIC er gitt ved: $BIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln T$ der $\hat{\sigma}^2$ er residual variansen, k er totalt antall av parametere estimert og T er utvalgets størrelse.

-
1. Identifisering
 2. Estimering
 3. Diagnostiske tester

Steg 1

Dette innebærer å finne modellens orden som best tar hensyn til dynamikken i tidsserien. Her benytter man som oftest grafiske prosedyrer(acf²¹- og pacf²²-plot) og spesifikke tester(eks. Ljung-Box-test) for å bestemme de passende spesifikasjonene.

Steg 2

Her prøver man å estimere parametrene til modellen som er spesifisert i 1. Det kan gjøres ved OLS-metoden eller ved en annen teknikk som maximum likelihood-metode(den som vi vil benytte oss av). Hvilken teknikk man ønsker å bruke er avhengig av hvilken modell som skal estimeres.

Steg 3

Ved dette steget skal man undersøke om den spesifiserte og estimerte modellen er adekvat. Box-Jenkins peker på 2 metoder: Overtilpasning og residual diagnostikk. *Overtilpasning* betyr enkelt og greit at man benytter en større modell en det som er nødvendig for å fange dynamikken til tidsserien som er identifisert i steg 1. *Residual diagnostikk* impliserer å studere residualene for lineær avhengighet og ved tilstedeværelse vil kunne bety at den opprinnelig spesifisert modellen er uadekvat til å fange dynamikken i dataene.

Et av målene med metoden er å finne en ”sparsommelig” modell som er en som tar høyde for all dynamikk som vi er interessert i ved bruk av så få parametere som mulig. Dette er ønskelig fordi 1) variansen av estimatorene er proporsjonal invers av det antall frihetsgrader, 2) modeller som er for store vil automatisk passe dataenes spesifikke dynamikk, noe som gjør at det ofte ikke kan videreføres til out-of-sample.

²¹ Eksempel på ACF-plot er gitt i kapittel 2

²² Eksempel på PACF-plot er gitt i kapittel 2

4.3 Estimering av de ulike modellene

Vi maksimerer likelihoodfunksjonen beskrevet i kapittel 3 ved hjelp av S-plus. For den siste iterasjonen benyttes en robust rutine som evaluerer Hessematrixen numerisk. Rutinen gir oss standardavvik/t-statistikk som er konsistent med eventuelt ytterligere heteroskedastisitet i tidsrekken(jfr. White (1980)). Framgangsmåten for å bestemme antall lag for p og q i de ulike modellene benytter vi Schwartz informasjonskriteriet som mål. Informasjonskriteriet vil bare brukes ved valg av en modell innenfor de ulike volatilitetsmodellene og ikke som sammenligningsgrunnlag for å avgjøre om denne ene volatilitetsmodellen er bedre enn de andre. Innholdet i kriteriet har vi beskrevet tidligere og dermed vet vi at jo lavere verdiene til kriteriene er, desto bedre er modellen tilpasset de observerte verdiene i tidsserien.

Som nevnt i tidligere kapittel, vil GARCH-modeller med mange laggede verdier føre til estimeringsproblemer. Dermed så har vi begrenset oss til å bare velge mellom modeller som der p og q kan ta verdiene fra 0 til 3. For at modellen skal kunne benyttes så har vi bestemt oss for enkelte kriterier:

- a) Vi ønsker blant annet at alle parameterverdiene i modellene må være signifikant forskjellig fra 0 på 5 % nivå. Nivået på 5 % er valgt fordi dette er svært vanlig signifikansnivå i statistiske miljøer.
- b) Det er også viktig at modellen tilpasses på en slik måte at tidsserien er fri for autokorrelasjon og heteroskedastisitet. Bakgrunnen til dette er forklart inngående i kapittel 2.
- c) Vi vil estimere modeller for både Gaussisk- og Student-t-fordeling, fordi vi ønsker å undersøke om prediksjonsegenskapene til modellen er avhengig av dens fordeling. Tidligere er det gjort en rekke studier på at modellen tilpasses bedre ved bruk av T-student fordeling, men man har ikke sett på den predikative effekten ved valg av sannsynlighetsfordeling.

4.3.1 Frekvens: Dag

For valg av modell i denne analysen så har vi benyttet de daglige observasjonene i vårt within-sample. Tidsserien er i den perioden der vi er sikre på at det har eksistert opsjoner på OBX-indeksen. Det er 2124 observasjoner, et stort antall som bør føre til at vi klarer å fange opp dynamikken i indeksen. I henhold til teorien gitt i del 3 så bør en slik modellering fange opp autokorrelasjonen og heteroskedastisiteten i serien.

		MA(q)			
		0	1	2	3
AR(p)	0		7210,167	7217,401	7221,551
	1	7210,093	7217,513	7227,466	7224,670
	2	7217,430	7225,777	726,517	7232,062
	3	7222,356	7225,426	7340,538	7239,581

Framgangsmåten er som beskrevet ovenfor (Box-Jenkins), der vi har foretatt tester av normalitetsbetingelsen, autokorrelasjon, stasjonæritetstest og test for heteroskedastisitet. Enkelte av disse testene er allerede presentert så vi vil nå utelukkende konsentrere oss om de ulike ARMA-GARCH-modellene.

Tabell 4.2: Estimater for GARCH(p,q) for perioden 4.1.96 – 1.7.04 (2125 observasjoner)

Parameter	GARCH(1,1)	PGARCH(1,1,2)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	PGARCH(1,1,1)	GARCH-in-mean (Std.dev)	GARCH-in-mean (Var)
M	0,09402 (3,950)	0,07788 (3,289)	0,0791 (3,413)	0,08441 (3,542)	0,08110 (3,507)	0,248564 (2,80857)	0,1429 (3,470)
σ^2						-0,14383 (-1,72147)	-0,0404 (-1,352)
α_0	0,04323 (5,207)	0,04773 (5,770)	-0,1602 (-11,415)	0,0507 (5,906)	0,04873 (6,707)	0,042922 (5,229933)	0,04282 (5,215)
α_1	0,12207 (11,350)	0,10905 (9,595)	0,2216 (11,854)	0,07566 (5,280)	0,11222 (11,182)	0,121703 (11,34871)	0,11926 (11,317)
β_1	0,85546 (78,715)	0,85812 (78,208)	0,9602 (161,913)	0,85553 (76,217)	0,87163 (86,402)	0,856094 (80,21683)	0,85811 (80,776)
γ_1				0,07332 (4,029)			
θ_1		-0,16791 (-3,589)	-0,295 (-4,698)		-0,35375 (-5,261)		
BIC	6719,076	6712,947	6706,505	6712,857	6701,818	6722,609	6724,699
Log-Likelihood	-3344,22	-3337,32	-3334,1	-3337,28	-3331,76	-3342,15	-3343,2
σ^2 -ubetinget (årlig)	1,38728 (21,93482)	1,266461 (20,0245)	1,231445 (19,47086)	1,255825 (19,85634)	1,255008 (19,84341)	1,3904 (21,98415)	1,375731 (21,75222)
P-verdi Ljung-Box Test stand. resid.	0,2499	0,3485	0,4762	0,3744	0,3485	0,53347	0,4627
P-verdi Ljung-Box Test sqrt. stand. resid.	0,1838	0,06807	0,06106	0,07302	0,06807	0,180308	0,1735

Robust t-statistikk i parentes.

Fra del 2 vet vi at dagsserien inneholder autokorrelasjon og vi ønsker dermed å tilpasse en modell som veier opp for dette. I henhold til tabell 4.1 ser vi at informasjonskriteriet har lavest verdi for en ARMA(1,0). Dermed så vil vi videre benytte oss av denne modellen for å modellere volatiliteten på OBX-indeksen. Vi bemerker her at selv om vi bruker en ARMA(1,0) klarer ikke denne modellen å inkorporere den autokorrelasjonen som fins i tidsserien rundt lag 50. Vi velger uansett å fortsette siden vi håper at en sammensatt ARMA-GARCH-modell vil kunne fange opp denne dynamikken. Vår undersøkelse fra denne ARMA-modellen viser at Ljung-Box-testen på de kvadrerte residualene ikke er signifikante. Dette betyr at modellene inneholder betinget varians, altså autokorrelasjon i de kvadrerte feilleddene. Neste steg vil da være å modellere ulike GARCH-modeller på tidsserien. GARCH-modellene er presentert i sin helhet i tabell 4.2²³.

Vi ser i tabell 4.2 at alle modellene er en variant av GARCH(1,1)-modellen. For å velge modell så har vi benyttet Schwartz informasjonskriteriet (BIC). Det viste seg at de andre modellene hadde høyere BIC-verdi enn de som er presentert ovenfor og på bakgrunn av våre kriterier er det overflødig med ytterligere parametere. Studerer vi tallene nærmere så ser vi at alle parametrene er signifikante på 5 % -nivå, utenom σ^2 -parameteren for GARCH-in-Mean-modellene. At denne verdien ikke er signifikant antyder at GARCH-in-Mean modellen ikke egner seg som beskrivende for vår tidsserie. Det naturlig vil være å utelukke parameteren ved videre analyse men vi vil i dette tilfellet fortsatt bruke denne modellen ved prediksjon i neste kapittel for å undersøke om den uansett egner seg som prediksjonsmodell. P-verdiene for de standardiserte og kvadrerte residualene viser at vi har klart å innlemme både autokorrelasjonen og den betingete heteroskedastisiteten i tidsserien vår²⁴. Det betyr at vi ikke vil gå videre å teste en sammensatt ARMA-GARCH-modell, fordi de ulike GARCH-modellen har klart å modellere dynamikken i OBX-tidsserien.

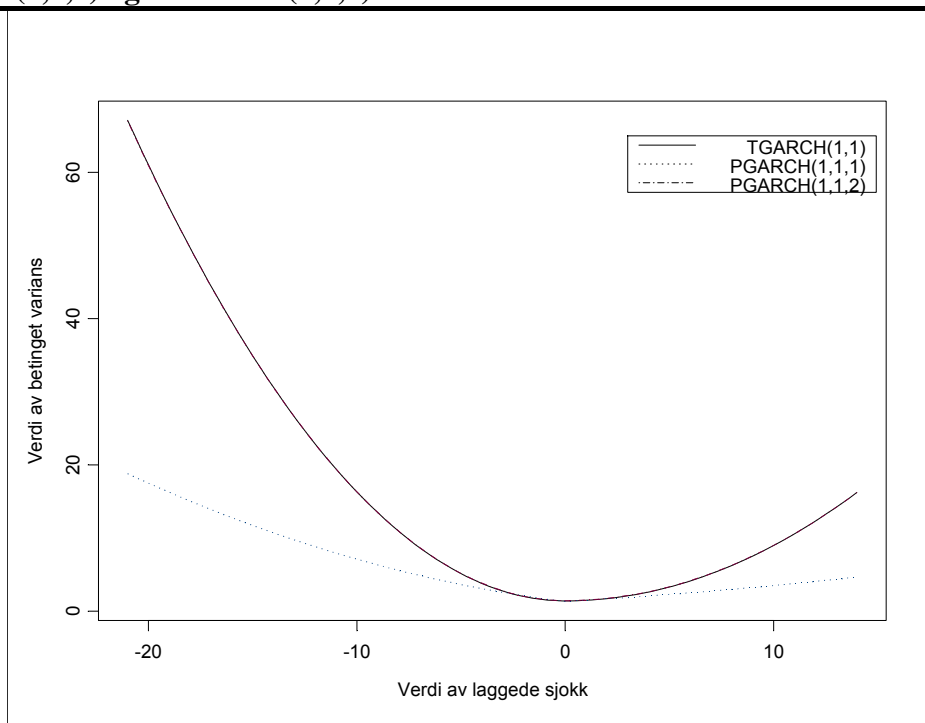
Vi kan ut i fra verdiene presentert i tabellen antyde at OBX-indeksens volatilitet reagerer asymmetrisk på oppgang og nedgang i aksjemarkedet. Det kan tolkes fra θ_1 som er

²³ For plasshensyn så vil vi kun presentere parametrene til de GARCH-modellene utarbeidet på bakgrunn av 2124 obs.

²⁴ Her har vi også testet modellene for henholdsvis 20, 50 og 100 lag, og ingen av disse testene gjorde at vi måtte forkaste noen av våre modeller.

signifikante og negative i PGARCH(1,1,2), EGARCH(1,1) og PGARCH(1,1,1) som er modeller som tar høyde for asymmetrisk volatilitet. I tillegg så ser vi at γ_1 signifikant positiv for TGARCH(1,1). Skulle man ha valgt en av disse modellen så kunne man ha brukt Nyhets-effektkurven(figur 4.1) som ble introdusert av Pagan og Schwert(1990). I denne figuren ser vi at TGARCH og LEVGARCH har høyere asymmetri en PGARCH.

Figur 4.1: News impact curve for de estimerte modellene TGARCH(1,1), PGARCH(1,1,1) og PGARCH(1,1,2).



Sånn som forventet får vi høy β_1 -verdier og alle disse er svært signifikante. Vi bemerker også at alle modellene er stasjonære. Det er mulig å undersøke ved å summere α - og β -verdiene. Hvis denne summen er lavere enn 1 indikerer dette på at serien er stasjonær. Summen av α_1 og β_1 forteller oss om tregheten til variansen i den spesifikke modellen²⁵. En høy verdi av denne summen kan tyde på at variansen endres sakte. Høy varians i en periode vil føre til høy varians i neste. Gitt at variansen er stasjonær noe som resultatene ovenfor helt klart indikerer, vil den ubetingede variansen fra en velspesifisert modell ligge tett opp til den empiriske variansen for utvalget. I tabell 4.3 har vi gjengitt de ubetingede variansene for de

²⁵ For EGARCH-modellen undersøker man stasjonærhet ved se om λ -leddene i polynomet:

$$\sum_{i=1}^p \lambda^{p+1-i} \beta_{i-1} \text{ ligger innenfor enhetssirkelen.}$$

ulike GARCH-modellene er gitt i tabell 4.3. Her legger vi merke til at den ubetingede variansen treffer den empiriske variansen veldig godt.

Skulle vi ha valg en modell på bakgrunn av informasjonskriteriet så ville vi ha gått for PGARCH(1,1,1)-modell siden denne modellen har laveste BIC-verdi og alle dens koeffisienter er signifikante.

Tabell 4.3: Ubetingede varians til GARCH-prosesser

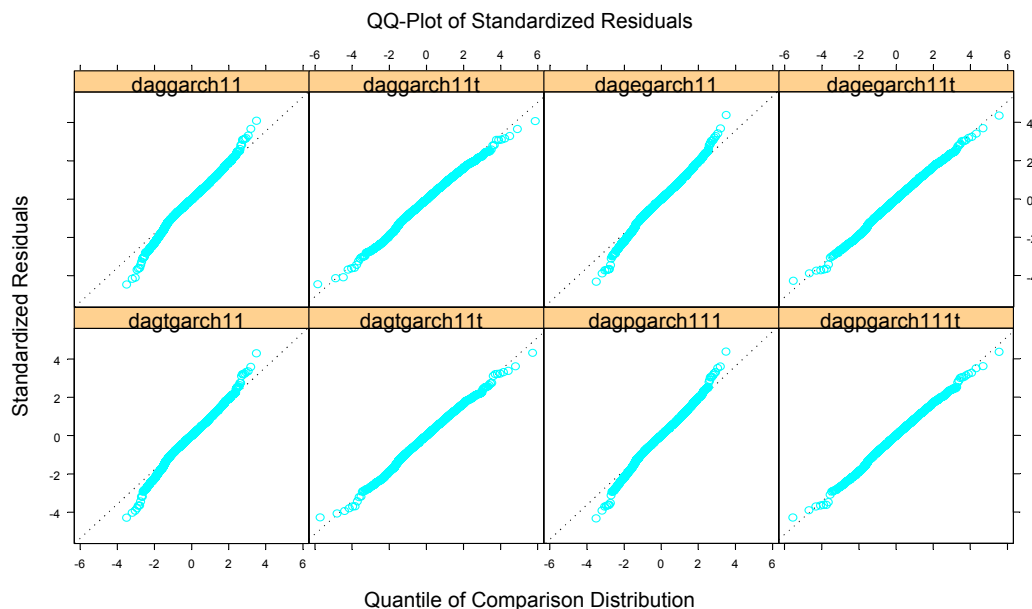
GARCH(p,q)	$\bar{\sigma}^2 = a_0 \left/ \left[1 - \sum_{i=1}^p a_i (1 + \gamma_i^2) - \sum_{j=1}^q b_j \right] \right.$
TGARCH(p,q)	$\bar{\sigma}^2 = a_0 \left/ \left[1 - \sum_{i=1}^p a_i (1 + \gamma_i^2) - \sum_{j=1}^q b_j \right] \right.$
PGARCH(p,q,1)	$\bar{\sigma}^2 = a_0^2 \left/ \left[1 - \sum_{i=1}^p a_i \sqrt{2/\pi} - \sum_{j=1}^q b_j \right]^2 \right.$
EGARCH(p,q)	$\bar{\sigma}^2 = \exp \left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \sqrt{2/\pi} \right) \left/ \left(1 - \sum_{j=1}^q b_j \right) \right. \right]$

T-distribuerte GARCH-modeller

Vi vil også studere nærmere om valg av distribusjon fører til at man klarer å modellere og predikere OBX-serien bedre enn ved bruk av gaussisk sannsynlighetsfordeling. Studerer man QQ-plottene (figur 4.2) for de ulike modellene gitt ovenfor så ser man at tidsserien har fetere haler enn det normalfordeling antar. Enkelte av observasjonene ligger over den prikkede linjen noe som gjør at vi kan skimte en omvendt S-form. Det er denne formen som antyder at avkastningsserien har større kurtosis enn normalfordelingen. Derimot hvis vi benytter oss av Student-t-fordelingen som har fetere haler en normal fordelingen så kan man klare å ta høyde for at avkastningen har mer kurtosis i sin distribusjonsfordeling. Det optimale hadde vært om QQ-plottene hadde vært lineære men dette er svært sjeldent i avkastningsserier på aksjer og indekser. Derimot det vi kan oppnå er at vi klarer å få en modell som er bedre tilpasset enn modellene basert på normalfordelingen. QQ-plottene til de ulike GARCH-prosessene følger tilnærmet en rett linje og det tyder på at T-student-fordeling på residualene er en mer

optimal fordeling enn den Gaussiske²⁶. For å identifisere den GARCH-modellen som gjengir data best, bruker vi som for normalfordelingen BIC-informasjonskriteriet.

Figur 4.2. QQ-plot av standardiserte residualer



Rekkefølgen på modellen er følgende: (over) GARCH, GARCH(t-disp.), EGARCH, EGARCH(t-disp.), (under) TGARCH, TGARCH(t-disp.), PGARCH, PGARCH(t-disp.)

Ut i fra figur 4.2 så er det naturlig å prøve å tilpasse dataserien for T-student distribusjon. Dette har vi gjort og de nye parameter verdien er gitt i tabell 4.4. Gjennomgående så ser vi at alfa og beta verdiene blir noe mindre ved bruk at denne type distribusjon. Konstantverdiene for gjennomsnittet og for volatiliteten er noen økende, imens BIC verdien faller noe. Dette er som forventet fordi dataene er noe mer tilpasset serien enn for GARCH-prosessene med Gaussisk fordeling. Ser man på T-verdiene så går de noe ned for alle parametrene og det er som ventet siden T-distribusjonen har fetere hale enn normalfordelingen. Både p-verdiene for de standardiserte og kvadrerte residualene i Ljung-Box-testen er fortsatt signifikante og dermed modellerer disse seriene også dynamikken i OBX-dataene.²⁷ Som for GARCH-

²⁶ Ser man på testverdiene for normalitetstest Jarque-Bera(ikke vist ovenfor) i de ulike prosessene så viser p-verdiene at serien ikke er normalfordelt for GARCH med eller uten T-distribusjon.

²⁷ Testene for GARCH-prosessen med 20,50,100 lag, er også signifikante. Så dermed ser vi bort fra at Ljung-Box-test verdien for PGARCH er lavere en 0,05.

prosessene så er alle parametrene i modellene signifikant forskjellig fra 0, utenom σ^2 -parameteren i GARCH-M-modellen.

Tabell 4.4: Estimat for GARCH(p,q) med T-student distribusjon for perioden 4.1.96 – 1.7.04 (2125 observasjoner)

Parameter	GARCH(1,1)	PGARCH(1,1,2)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	PGARCH(1,1,1)	GARCH-in-mean (Std.Dev)	GARCH-in-mean (VAR)
μ	0,10199 (4,554)	0,08891 (3,994)	0,08456 (3,781)	0,08931 (4,021)	0,08349 (3,737)	0,249947 (3,08826)	0,13932 (3,707)
σ^2						-0,14185 (-1,86652)	-0,03159 (-1,188)
α_0	0,04526 (3,653)	0,05064 (4,050)	-0,16553 (-7,872)	0,05060 (4,058)	0,04906 (4,591)	0,043954 (3,654486)	0,04436 (3,650)
α_1	0,12230 (7,090)	0,11329 (6,380)	0,23010 (7,932)	0,07954 (3,856)	0,11595 (7,465)	0,122955 (7,202706)	0,12193 (7,151)
β_1	0,85546 (46,995)	0,85213 (46,441)	0,95939 (107,958)	0,85217 (46,485)	0,86932 (53,094)	0,855214 (48,28491)	0,85577 (47,916)
γ_1				0,07332 (2,848)			
θ_1		-0,15689 (-2,517)	-0,27199 (-3,333)		-0,33639 (-3,801)		
BIC	6670,221	6712,947	6667,133	6668,857	6663,174	6674,099	6676,345
Log-Likelihood	-3315,96	-3311,43	-3310,58	-3311,45	-3308,6	-3314,07	-3315,19
σ^2 - ubetinget (årlig)	1,407354 (22,2522)	1,26199 (19,95381)	1,249079 (19,74967)	1,256147 (19,86142)	1,285403 (20,32401)	1,41893 (22,43525)	1,410544 (22,30265)
P-verdi Ljung- Box Test stand. resid.	0,2725	0,33823	0,4814	0,3872	0,5314	0,539058	0,4446
P-verdi Ljung- Box Test sqrt.stand.resid.	0,1874	0,07554	0,07169	0,07366	0,0477	0,181997	0,1783

Robust t-statistikk i parentes.

Vi bemerker også at de øvrige parametrene i GARCH-modellen med T-distribusjon ikke endrer seg mye, og dette fører til at den langsiktig volatiliteten (ubetingede) endrer seg lite ved valg av fordeling.

Tregheten til variansen er som i GARCH-prosessene m/Gaussisk fordeling, og som for disse modellene så er de fleste av modellene stasjonære.

4.3.2 Frekvens: Uke

Vi ønsker også å undersøke om det er en å fordel å bruke ukentlig data til å modellere og predikere volatiliteten i OBX-dataene. Her presenter vi de modellene som vi kom frem til. Som for de daglige verdiene har vi brukt bare de første 8 årene av vår tidsserie. Dermed så inneholder dataene 436 observasjoner og vi tror denne datamengden fanger opp dynamikken i avkastningene til indeksen. Framgangsmåten vi benytter oss av er fortsatt Box-Jenkins-metode og sjekker for om residualene inneholder autokorrelasjon, heteroskedastisitet og er normalfordelt.

Tabell 4.5: Estimat for GARCH(p,q) for perioden 4.1.96 – 1.7.04 (436 observasjoner)

Parameter	GARCH(1,1)	PGARCH(1,1,2)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	PGARCH(1,1,1)	GARCH-in- mean (Std.Dev)	GARCH-in- mean (VAR)
μ	0,3605 (2,746)	0,2828 (2,076)	0,3184 (2,4063)	0,2813 (2,061)	0,3315 (2,537)	1,576471 (3,001208)	0,58060 (2,590)
σ^2						-0,47159 (-2,36198)	-0,03256 (-1,220)
α_0	1,6031 (4,838)	1,4973 (4,803)	0,1059 (0,9904)	1,5008 (4,799)	0,6100 (4,985)	1,702759 (5,189545)	1,63007 (4,997)
α_1	0,2638 (6,762)	0,2023 (4,637)	0,4636 (7,6935)	0,1302 (2,347)	0,2449 (6,380)	0,290456 (6,252441)	0,26829 (6,474)
β_1	0,5650 (11,188)	0,6081 (12,036)	0,7699 (16,0606)	0,6097 (12,074)	0,5974 (11,587)	0,529599 (10,69642)	0,55630 (11,177)
γ_1				0,1540 (2,460)			
θ_1		-0,1937 (-1,942)	-0,2097 (-2,0488)		-0,3025 (-2,728)		
BIC	2134,26	2137,373	2135,259	2137,391		2135,076	2138,797
Log-Likelihood	-1054,98	-1053,5	-1052,4412	-1053,51	-1052,47	-1052,35	-1054,21
σ^2 - ubetinget (årlig)	3,059697 (22,0637)	2,868201 (20,68289)	2,8124549 (20,280901)	2,862646 (20,64283)	2,94401 (21,22956)	3,076148 (22,18242)	3,048457 (21,98274)
P-verdi Ljung-Box Test resid.	0,2075	0,3228	0,3295	0,3202	0,4437	0,528658	0,3783
P-verdi Ljung-Box Test stand.resid.	0,2235	0,1779	0,295	0,1729	0,3211	0,414451	0,2635

Robust t-statistikk i parentes.

GARCH-prosessene som vi benytter oss av, er de samme som for de daglige observasjonene: GARCH, GARCH med leverage-effekt, EGARCH, TGARCH, PGARCH og GARCH-in-Mean. Sann som for den daglige avkastningsserien så begynte vi å estimere ARMA-modeller på tidsserien. Det viste seg at diagnostikken ble svært lik den daglige. Vi klarte å

oppnå modeller som inkorporerte autokorrelasjonen men som det tidligere tilfellet så førte Ljung-Box-testen til at de kvadrerte residualene fikk en P-verdi som var under 5 %. Dette førte til at vi så oss nødt til å prøve oss med GARCH-metodikk. Modellene er presentert i tabell 4.5.

Studerer vi koeffisientene som er gitt over så ser vi at nesten alle er signifikante på 5-prosentsnivå, utenom, som for den daglige avkastningsserien, σ^2 -parameteren til GARCH-in-Mean modellen med variansen i gjennomsnittsfunksjon. Tregheten til volatiliteten er noe

Tabell 4.6: Estimat for GARCH(p,q) med T-student distribusjon for perioden 4.1.96 – 1.7.04 (436 observasjoner)

Parameter	GARCH(1,1)	PGARCH(1,1,2)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	PGARCH(1,1,1)	GARCH-in-mean (Std.Dev)	GARCH-in-mean (VAR)
μ	0,4505 (3,894)	0,4500 (3,8033)	0,4607 (3,9178)	0,44988 (3,8027)	0,4416 (3,792)	1,846673 (2,976593)	0,77073 (3,207)
σ^2						-0,51218 (-2,18817)	-0,04160 (-1,385)
α_0	1,4980 (2,384)	1,3565 (2,3569)	0,0962 (0,6806)	1,35503 (2,3561)	0,3907 (2,325)	1,958009 (3,004694)	1,75909 (2,664)
α_1	0,1923 (2,864)	0,1532 (2,1501)	0,3265 (3,1337)	0,11864 (1,2320)	0,1456 (2,511)	0,262579 (3,210586)	0,21515 (2,977)
β_1	0,6471 (6,372)	0,6847 (6,9250)	0,8350 (12,0747)	0,68494 (6,9304)	0,7521 (8,816)	0,54048 (6,099457)	0,59971 (6,108)
γ_1				0,07356 (0,7501)			
θ_1		-0,1198 (-0,6313)	-0,1643 (-0,7996)		-0,3028 (-1,203)		
BIC	2113,763	2119,41	2120,1	2119,41	2119,373	2113,048	2117,147
Log-Likelihood	-1041,69	-1041,4789	-1041,82	-1041,48	-1041,46	-1038,3	-1040,35
σ^2 - ubetinget [årlig]	3,054098 [22,0234]	2,913141 [21,00696]	2,947389 [21,25392]	2,913485 [21,00944]	2,966997 [21,39532]	3,153111 [22,73741]	3,082416 [22,22762]
P-verdi Ljung-Box Test stand. resid.	0,2544	0,3562	0,4113	0,3564	0,5045	0,623324	0,4859
P-verdi Ljung-Box Test sqrt. stand. resid.	0,07707	0,07703	0,1127	0,07705	0,08203	0,280865	0,1112

Robust t-statistikk i parentes.

lavere for de ukentlige dataene i sammenligning med de daglige. Summen av α_1 og β_1 komponenten er bare ca 0,8. Dette fører til at modelleringen til den ukentlige avkastning endres hyppigere enn for den daglige. Dette er naturlig siden de ukentlige verdiene egentlig består av 5 daglige verdier, og dermed ikke kan ha samme treghet fordi da ville den økte volatiliteten vedvare lengre i de ukentlige dataene i forhold til de daglige. Det er GARCH(1,1)-modellen som har lavest BIC-verdi, og skulle vi ha valgt bare en modell så

måtte det ha blitt denne. P-verdiene for Ljung-Box-testene er ikke signifikante og dermed klarer modellene å ta høyde for autokorrelasjonen og heteroskedastisiteten. Den ubetingede variansen for alle modellene er rundt 22 %, og sammenlignet med den empiriske konstanten så er de svært like. De ukentlige GARCH-prosessen viser også tilstedeværelse asymmetrisk volatilitet. Her er derimot ikke leverage-effektens parameter signifikante for GARCH-modellen, men vi bemerker at de øvrige modellene viser at indeksens volatilitet reagerer med høyere svingninger for nedgang enn for oppgang. Dermed så slutter vi at leverage-effekt er noe som bør innlemmes i modellene.

T-distribuerte GARCH-modeller

Siden at QQ-plottene for den daglige avkastningsserien viste at serien ikke var normalfordelt ønsker vi også nå å modellere den ukentlige avkastningsserien med T-student distribusjon. De ulike GARCH-prosessen er presentert i tabell 4.6. Vi ser her at parameterverdiene ikke endrer seg mye i forhold til de gaussiske, og vi heller ikke her klarer man å fange inn enkelte av de problemene gitt ovenfor. Blant annet så er σ^2 -parameteren fortsatt ikke signifikant for den ene GARCH-in-Mean modellen og nå viser det seg tydelig at serien ikke har asymmetrisk volatilitet. Ingen av de koeffisientene som viser asymmetri er signifikante og bør dermed ikke være med i modellering av serien. Vi nevner her at den ubetingede standardavviket er fortsatt rundt 20, imens tregheten til volatiliteten har sunket noe siden denne verdien er ca 0,85.

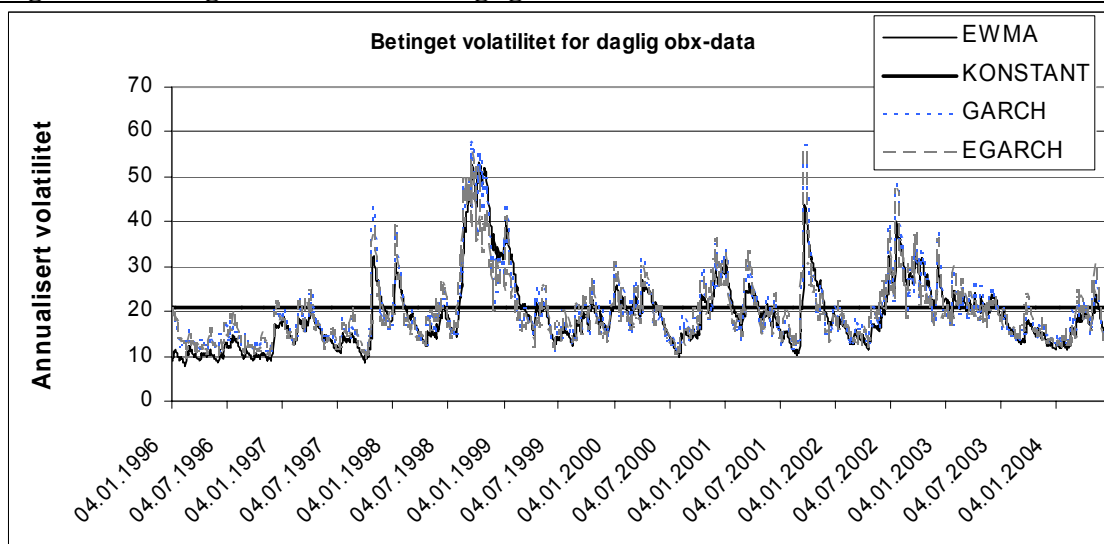
4.4 Betinget volatilitet i estimeringsperioden

I figurene 4.3 – 4.6 har vi plottet den betingede volatiliteten produsert av de ulike modellene for de daglige og ukentlige OBX-observasjonene med og uten T-distribusjon. Årlig volatilitet, som er benyttet som måleenhet langs Y-aksen, er gitt ved $\sigma_t^{\text{årlig}} = \sqrt{\sigma_t^2 \times t}$; der σ_t^2 er daglig/ukentlige betinget varians for en prosentvis, daglig/ukentlig avkastningsserie og t er det antall daglige/ukentlige handledager i året hhv. 250 og 60 handledager. Den horisontale linjen i figurene er en modell for den konstante volatiliteten.

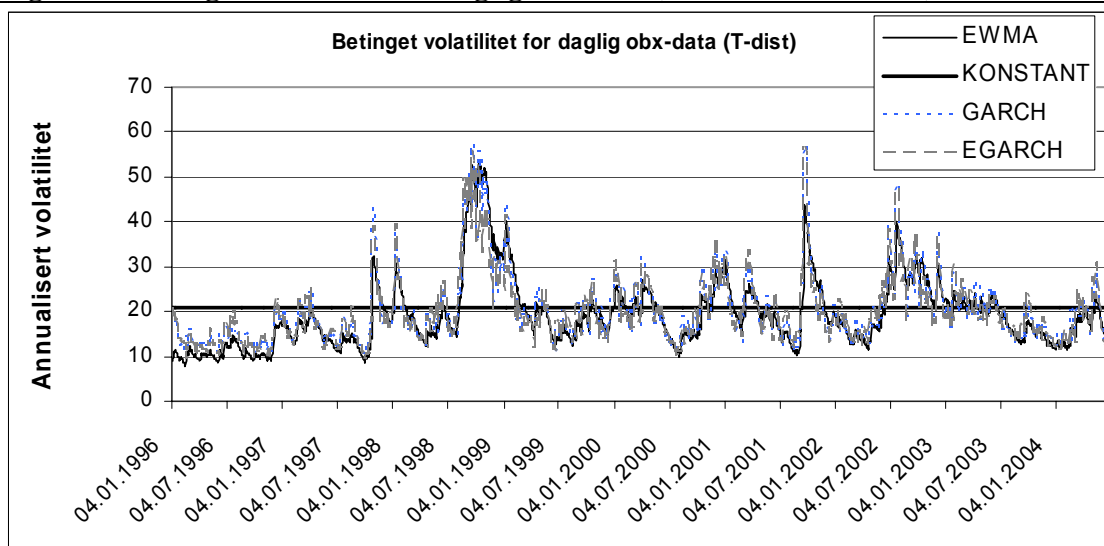
Ser vi nærmere på figurene så ser vi at GARCH-prosessen modellerer økningen av volatiliteten i avkastningsseriene i periodene 4.kvartal 1998, 3-4 kvartal 2001 og 3 kvartal

2002. Dette gjelder alle prosessene både med og uten t-distribusjon. Med ukentlige data så blir periodene mye mindre tydelig men vi klarer fortsatt å skimte at volatiliteten gikk opp i disse periodene. Hvis man skulle anta de årlige volatilitetene i disse figurene hadde vært reel, så ville volatiliteten vært opp mot 55 % i løpet av et år. Dette er ganske ekstreme verdier men noe som kjennetegner nedgangstider og usikkerhet i markedet.

Figur 4.3 Betinget volatilitet for daglig obx-data



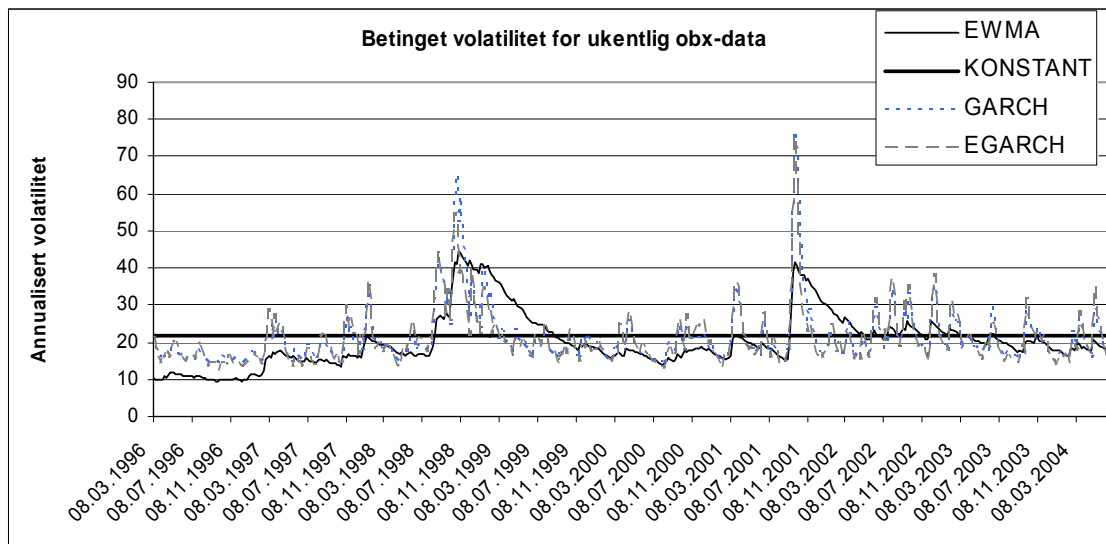
Figur 4.4 Betinget volatilitet for daglig obx-data(T-distribuerte data)



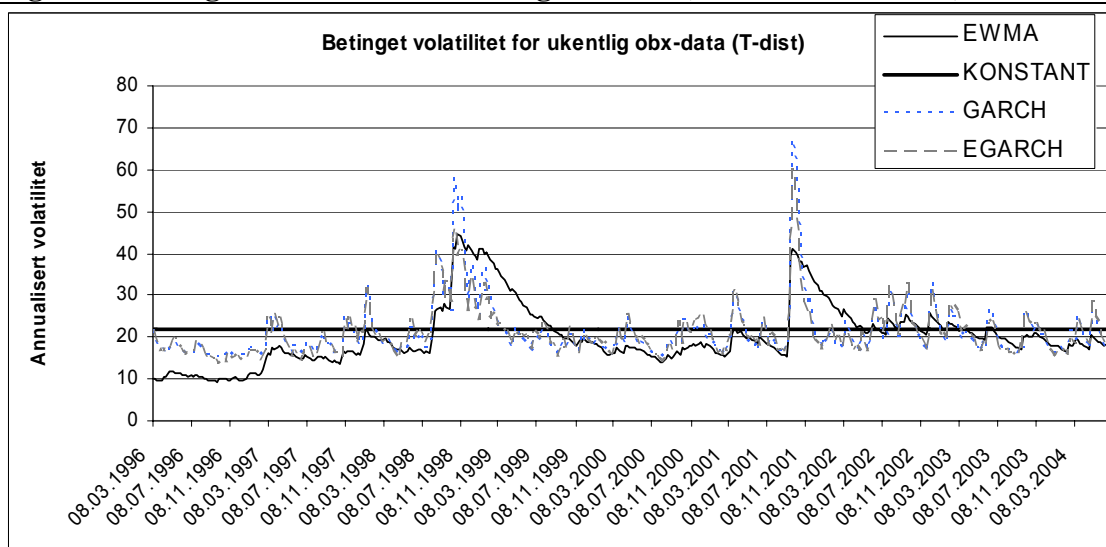
Vi nevner her at forskjellene mellom GARCH- og EGARCH-modellene relativt liten, og det er nesten umulig å se forskjell i figurene. Det er som forventet, siden modellene bygger på de samme forutsetningene. EWMA-modell som er et spesialtilfelle av IGARCH følger de 2

øvrigte modellene tett, men har som oftest lavere volatilitetsverdier enn GARCH og EGARCH. Sammenligner man figur 4.3 og figur 4.4 så ser de like ut. Det er som ventet siden parameterne til GARCH og GARCH m/t-dist. er svært like.

Figur 4.5 Betinget volatilitet for ukentlig obx-data



Figur 4.6 Betinget volatilitet for ukentlig obx-data(T-distribuerte data)



5 Prediksjonsegenskaper ved volatilitetsmodellene

I dette kapitlet foretar vi en sammenligning av prediksjonsegenskapene til de ulike volatilitetsmodellene presentert i de 2 foregående kapitlene, altså: ulike GARCH-modeller, RiskMetrics EWMA-modellen og konstant varians modellen. Her vil sammenligningen bli foretatt med en prediksjonskonkurranse der vårt "out-of-sample" gir oss den "korrekte" volatiliteten. I denne konkurransen vurderes modellene opp mot hverandre i flere korte perioder, og det blir dermed viktig å bestemme de kriteriene som avgjør om modellen er god eller dårlig. Den vanligste metoden er den såkalte gjennomsnittlig kvadrert prediksjonsfeilmetoden, men dette trenger ikke å være det optimale kriteriet. Vi vil derfor også diskutere ulike typer modeller med utgangspunkt i den spesifikke beslutningssituasjonen hvor prediksjonsmodellen skal anvendes. Til slutt bestemmer vi oss for en GARCH-modell som vi skal benytte oss av i neste kapitel.

5.1 Undersøkellesmetode

De ulike volatilitetsmodellene vi ønsker å benytte oss av i denne prediksjonskonkurransen er konstant varians med ulike tidslag (benchmark), EWMA og de ulike GARCH prosessene. For de ulike konstant varians modellene og EWMA- modellen kan prediksjonsuttrykkene benyttes for alle prediksjonshorizontene. Det vil med andre ord si at predikert varians i morgen er lik predikert varians på dag nr. k, for $k > 1$. Dermed gjelder

$$\hat{\sigma}_{t+k(KONSTANT)}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{t-i+1}^2 \quad (5.1)$$

og

$$\hat{\sigma}_{t+k(EWMA)}^2 = (1 - \theta) \sum_{i=1}^k \theta^i x_{t-i}^2 \quad (5.2)$$

for alle k, og kan dermed enkelt brukes til å predikerer varians for en periode på n dager ved $n \times \hat{\sigma}_{t+1(KONSTANT)}^2$ og $n \times \hat{\sigma}_{t+1(EWMA)}^2$. For GARCH-modellene vil det derimot ikke være like enkelt, siden prediksjonene ikke er konstante for alle k. Hvis k går mot uendelig vil den predikerte variansen gå mot den ubetingede variansen til modellen. Når volatiliteten i dagens

marked er høyere enn den ubetingede variansen vil den daglige avkastningen avta for økende k , og naturligvis det motsatte i perioder med lav volatilitet. Vi vil her bare vise prediksjonsuttrykket for GARCH(1,1):

$$\hat{\sigma}_{t+k(GARCH)}^2 = \gamma \frac{(1 - (\alpha + \beta)^{k-1})}{(1 - (\alpha + \beta))} + (\alpha + \beta)^{k-1} \sigma_{t+1}^2 \quad (5.3)$$

Disse modellene kommer vi til å bruke når vi skal predikere $n=5, 10, 21,63$ handledager frem i tid for dagserien og $n=1, 2, 4, 13$ handledidspunkter for ukeserien. Dette tilsvarer 1 ukes, 2 ukers, 1 måneds og 3 måneders estimat for volatiliteten. Estimeringen for en modell starter ved T_1, T_2, \dots, T_{12} som er siste observasjon i utvalget og blir oppdatert ved dette tidspunktet. Deretter brukes modellen til å predikere variansen for de påfølgende tidspunktene $T_1 + 1, T_1 + 2, \dots, T_1 + n$. Dermed får vi formelen:

$$\hat{\sigma}_{(PREDIKERT)}^2 = \sum_{t=T+1}^{T+n} \hat{\sigma}_t^2 \quad (5.4)$$

T_1, T_2, \dots, T_{12} vil være de 12 ulike tidspunkter i vår prediksjonskonkurransen og alle vil inngå for å avgjøre hvilken av modellene som er best. Vi vil benytte oss av ulike datoer der vi starter prediksjonskonkurransen. Vi har satt tidspunktene til å være den første i hver eneste måned i perioden 1.7.2004 til 1.7.2005. Dette fører til at vi tester modellene 10-12 ganger²⁸ og hver periode har like stor innflytelseskraft for å avgjøre en vinner.

Prediksjon av volatilitet er en affære som anses for å være svært vanskelig. Hovedgrunnen til dette er at den virkelige variansen i markedet er uobserverbar. Den standardiserte løsningen til dette problemet, som er den løsningen vi også støtter oss til, er å bruke de kvadrerte observasjonene som en Proxy for den virkelige variansen i markedet. De realiserte variansene for en periode på n dager er da gitt ved:

$$\hat{\sigma}_{(REALISERT)}^2 = \sum_{t=T+1}^{T+n} x_t^2 \quad (5.5)$$

²⁸ 10 ulike tidspunkter for 3-måneders prediksjonene

Her ønsker vi å minne om at de ulike modellene for vår avkastingsserie er gitt ved $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, der $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0,1)$. Da vet vi at $E[x_{t+k}^2] \equiv E[\hat{\sigma}_{t+k}^2 \varepsilon_{t+k}^2] \cong \hat{\sigma}_{t+k}^2$ slik at x_{t+k}^2 er en forventningsrettet estimator for $\hat{\sigma}_{t+k}^2$. Selv om x_{t+k}^2 er forventningsrettet, så er estimatoren upresis fordi den inneholder mye støy. Derimot hvis vi antar at $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$, finner vi at $x_{t+k}^2 = \hat{\sigma}_{t+k}^2 \varepsilon_{t+k}^2$ har forventning lik $\hat{\sigma}_{t+k}^2$ siden $\varepsilon_t^2 \sim \chi_1^2$. Den virkelige variansen blir mer pålitelig for økende prediksjonshorisont, men samtidig vil den gå mot den ubetingede variansen til modellene og dermed mister volatilitetsmodellene sin predikative fordel. Disse problemene med en uobserverbar virkelig varians og en Proxy som er asymmetrisk fordelt er noe som vi ikke kan gjøre noe med, men vi vil ta høyde for dette når vi tolker våre resultater fra prediksjonskonkurransen.

5.2 Statistisk sammenligning av volatilitetsmodellene

Etter at vi har utført den rullerende prediksjonen for volatilitetene med de ulike modellene er det naturlig å sammenligne dem mot hverandre. Metodene som vi ønsker å bruke er analyser ved hjelp av prediksjonsfeil. Denne prediksjonsfeilen kan defineres på følgende måte: *Residualen er differansen mellom predikert og virkelig verdi på tidspunkt t. Dette kan tolkes som prediksjonsfeilen fordi den angir forskjellen mellom volatilitetens virkelig verdi og den predikert verdien på bakgrunn av estimert modell.*

$$u_t = \left(\hat{\sigma}_{t(\text{REALISERT})}^2 - \hat{\sigma}_{t(\text{PREDIKERT})}^2 \right) \quad (5.6)$$

For å evaluere de ulike rullerende prediksjonene av volatiliteten brukte vi vanlige statistiske metoder. De metodene som vi ønsker å benytte oss av er gjennomsnittsfeil (ME), gjennomsnittlig kvadrert prediksjonsfeil (RMSE), gjennomsnittlig absolutt feil (MAE) og median standard feil (MedSE). Disse blir beregnet på følgende måte:

$$ME = \frac{1}{T - n - h + 1} \sum_{t=n}^{T-h} u_{t+h|t} \quad (5.7)$$

$$RMSE = \left[\frac{1}{T - n - h + 1} \sum_{t=n}^{T-h} u_{t+h|t}^2 \right]^{1/2} \quad (5.8)$$

$$MAE = \frac{1}{T - n - h + 1} \sum_{t=n}^{T-h} |u_{t+h|t}| \quad (5.9)$$

$$MedSE = median[u_{t+h|t}]^{1/2} \quad (5.10)$$

For hvert evalueringskriterium rangeres de ulike modellene slik at man har et sammenligningsgrunnlag for videre undersøkelser.

5.3 Resultater fra undersøkelsen

5.3.1 Frekvens: Dag

Vi har dermed brukt 22 ulike modeller til å predikere variansen i perioden 5, 10, 21 og 63 dager. Deretter har vi benyttet disse verdiene i 4 ulike evalueringsmodeller for å sammenligne de mot hverandre, og disse resultatene er presentert i tabellene 5.1-5.4. Tallene i parentes angir rangeringen til modellene ved bruk av det spesifikke sammenligningsmålet. Her ønsker vi å påpeke at gjennomsnittlig prediksjonsfeil (ME) ikke er et sammenligningsmål men derimot et kriterium som forteller oss om den enkelte volatilitetsmodellen gir forventningsrettet anslag på fremtidig volatilitet (Zivot, 2003). Vi har uansett rangert modellene etter dette kriteriet etter lavest ME som beste notering. De ulike konstante- og EWMA-modellene skilles ved følgende måte: Konstant(250) tilsier at den konstante volatilitetene er beregnet på bakgrunn av de 250 siste historiske avkastningstallene. Dermed blir da eksempelvis EWMA(63) den EWMA-volatiliteten beregnet på bakgrunn av de 63 siste observasjonene. Har ikke volatilitetsmodellen knyttet tall til seg betyr det at estimert volatilitet er gjort på bakgrunn av hele tidsserien altså alle observasjonene.

Studerer vi først ME-kriteriet ser vi at for alle prediksjonshorizontene varierer verdiene mellom negative og positive tall. Det er bare EWMA-modellene som har positive verdier mens de andre modellene har flest negative. Man kan da antyde at disse modellene

predikerer for lave verdier av volatiliteten, på bakgrunn av definisjonen av prediksjonsfeil der den virkelige verdien blir subtrahert den predikerte verdien. Det viser seg at EWMA-modellene er de svakeste ved 5 dagers prediksjon, mens de er blant de sterkeste for de øvrige horisontene. Utover dette er det vanskelig å finne et klart mønster ved bruk av dette kriteriet. Vi bemerker her at det er Konstant 250, EWMA, EWMA og Konstant(90) som har oppnådd den beste rangeringen for henholdsvis 5, 10, 21 og 63 handledager.

Tabell 5.1: Sammenligning av prediksjonsevne; 5 dager

Volatilitetsmodell	Prediksjonshorisont: 5 dager									
	Sammenligningsmål									
	ME		RMSE		MAE		MedSE		Totalt	
Konstant	-0,8181	(24)	1,3608	(24)	1,2146	(24)	1,2750	(24)	-24,00	(24)
Konstant(250)	0,0114	(1)	0,9793	(1)	0,7549	(3)	0,5830	(8)	-4,00	(2)
Konstant(125)	0,0724	(16)	0,9947	(3)	0,7654	(4)	0,5992	(9)	-5,33	(5)
Konstant(90)	0,0889	(17)	0,9920	(2)	0,7457	(1)	0,5706	(6)	-3,00	(1)
Konstant(63)	0,1074	(18)	1,0036	(4)	0,7514	(2)	0,5782	(7)	-4,33	(4)
EWMA	0,1518	(19)	1,0230	(9)	0,7877	(9)	0,5574	(5)	-7,67	(9)
EWMA(250)	0,1616	(21)	1,0207	(7)	0,7844	(6)	0,5428	(3)	-5,33	(5)
EWMA(125)	0,1616	(22)	1,0207	(6)	0,7844	(7)	0,5429	(4)	-5,67	(7)
EWMA(90)	0,1616	(20)	1,0207	(5)	0,7842	(5)	0,5428	(2)	-4,00	(2)
EWMA(63)	0,1624	(23)	1,0216	(8)	0,7847	(8)	0,5425	(1)	-5,67	(7)
GARCH	-0,0219	(4)	1,0405	(10)	0,8311	(12)	0,6798	(12)	-11,33	(11)
GARCH-L	-0,0380	(14)	1,0441	(17)	0,8406	(20)	0,6944	(20)	-19,00	(19)
EGARCH	-0,0327	(11)	1,0732	(22)	0,8496	(22)	0,6996	(22)	-22,00	(22)
TGARCH	-0,0359	(12)	1,0446	(19)	0,8408	(21)	0,6951	(21)	-20,33	(21)
PGARCH	-0,0264	(5)	1,0658	(20)	0,8391	(17)	0,6863	(16)	-17,67	(17)
GARCH-M(St.dev.)	-0,0139	(2)	1,0411	(11)	0,8295	(10)	0,6764	(10)	-10,33	(10)
GARCH-M(Var)	-0,0185	(3)	1,0411	(12)	0,8309	(11)	0,6792	(11)	-11,33	(11)
GARCH (T-dist)	-0,0380	(13)	1,0427	(14)	0,8350	(15)	0,6862	(15)	-14,67	(15)
GARCH-L (T-dist)	-0,0323	(9)	1,0445	(18)	0,8399	(18)	0,6928	(19)	-18,33	(18)
EGARCH (T-dist)	-0,0430	(15)	1,0748	(23)	0,8522	(23)	0,7039	(23)	-23,00	(23)
TGARCH (T-dist)	-0,0325	(10)	1,0436	(16)	0,8385	(16)	0,6900	(18)	-16,67	(16)
PGARCH (T-dist)	-0,0298	(7)	1,0665	(21)	0,8399	(19)	0,6885	(17)	-19,00	(19)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-0,0269	(6)	1,0430	(15)	0,8329	(13)	0,6816	(13)	-13,67	(13)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-0,0319	(8)	1,0427	(13)	0,8337	(14)	0,6837	(14)	-13,67	(13)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

Tabell 5.2: Sammenligning av prediksjonsevne; 10 dager**Prediksjonshorisont: 10 dager**

Volatilitetsmodell	Sammenligningsmål				
	ME	RMSE	MAE	MedSE	Totalt
Konstant	-0,9498 (24)	1,4402 (24)	1,2785 (24)	1,3231 (24)	-24,00 (24)
Konstant(250)	-0,1202 (9)	1,0151 (9)	0,7504 (9)	0,6426 (9)	-9,00 (9)
Konstant(125)	-0,0593 (8)	1,0098 (7)	0,7277 (8)	0,5914 (8)	-7,67 (8)
Konstant(90)	-0,0428 (7)	1,0143 (8)	0,7207 (7)	0,5803 (7)	-7,33 (7)
Konstant(63)	-0,0243 (2)	1,0063 (6)	0,7039 (1)	0,5780 (6)	-4,33 (5)
EWMA	0,0202 (1)	0,9998 (1)	0,7119 (2)	0,5597 (5)	-2,67 (2)
EWMA(250)	0,0300 (4)	1,0034 (3)	0,7170 (4)	0,5535 (2)	-3,00 (3)
EWMA(125)	0,0300 (5)	1,0033 (2)	0,7170 (3)	0,5535 (1)	-2,00 (1)
EWMA(90)	0,0299 (3)	1,0035 (4)	0,7172 (5)	0,5538 (3)	-4,00 (4)
EWMA(63)	0,0307 (6)	1,0040 (5)	0,7175 (6)	0,5540 (4)	-5,00 (6)
GARCH	-0,2040 (12)	1,0421 (12)	0,8015 (12)	0,7144 (12)	-12,00 (12)
GARCH-L	-0,2159 (19)	1,0488 (18)	0,8096 (18)	0,7326 (21)	-19,00 (20)
EGARCH	-0,2242 (22)	1,0689 (22)	0,8233 (22)	0,7415 (22)	-22,00 (22)
TGARCH	-0,2138 (18)	1,0491 (19)	0,8092 (17)	0,7319 (20)	-18,67 (19)
PGARCH	-0,2065 (13)	1,0575 (20)	0,8133 (20)	0,7271 (15)	-18,33 (18)
GARCH-M(St.dev.)	-0,1964 (10)	1,0409 (10)	0,7989 (10)	0,7113 (10)	-10,00 (10)
GARCH-M(Var)	-0,2005 (11)	1,0416 (11)	0,8003 (11)	0,7139 (11)	-11,00 (11)
GARCH (T-dist)	-0,2236 (21)	1,0484 (16)	0,8108 (19)	0,7275 (16)	-17,00 (17)
GARCH-L (T-dist)	-0,2110 (14)	1,0484 (15)	0,8082 (16)	0,7294 (17)	-16,00 (15)
EGARCH (T-dist)	-0,2383 (23)	1,0732 (23)	0,8306 (23)	0,7522 (23)	-23,00 (23)
TGARCH (T-dist)	-0,2110 (15)	1,0486 (17)	0,8080 (14)	0,7304 (18)	-16,33 (16)
PGARCH (T-dist)	-0,2122 (16)	1,0593 (21)	0,8158 (21)	0,7312 (19)	-20,33 (21)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-0,2126 (17)	1,0460 (13)	0,8065 (13)	0,7225 (13)	-13,00 (13)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-0,2172 (20)	1,0469 (14)	0,8082 (15)	0,7245 (14)	-14,33 (14)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

Vurderer vi prediksjonskonkurransen ved kun å sjekke rangeringen av de ulike kriteriene fører dette til at vi får ulike volatilitetsmodeller ved forskjellige horisonter. Rangeringen gjort av kriteriene gir oss dessverre ikke et entydig svar på hvilken modell som er best så vi er nødt til å gjøre noe for å få en klarer oversikt. Eksempel for en horisont på 5 dager (tabell 5.1) gir RMSE, MAE og MedSE 3 ulike modeller som ”vinnere”: Konstant(250), Konstant(90) og EWMA(63). For å få bukt med dette problemet har vi laget en oppsummeringstabell, tabell 5.5. Her lar vi ikke ME inngå som et kriterium og finner ut gjennomsnittet av rangering for de forskjellige kriteriene på tvers av prediksjonshorisont.

Dermed ser vi at det er EWMA-modellene som er de beste modellene (gjengitt i kolonne 5 i tabell 5.5). Disse modellene innehar de 5 første plassene etterfulgt av Konstant(63), Konstant(90), Konstant(125) og Konstant(250).

Tabell 5.3: Sammenligning av prediksjonsevne; 21 dager

Prediksjonshorisont: 21 dager

Volatilitetsmodell	Sammenligningsmål									
	ME		RMSE		MAE		MedSE		Totalt	
Konstant	-0,9568	(24)	1,4606	(24)	1,2958	(24)	1,3731	(24)	-24,00	(24)
Konstant(250)	-0,1273	(9)	1,0261	(8)	0,7565	(9)	0,6618	(9)	-8,67	(9)
Konstant(125)	-0,0664	(8)	1,0256	(7)	0,7394	(8)	0,6132	(8)	-7,67	(7)
Konstant(90)	-0,0499	(7)	1,0352	(9)	0,7391	(7)	0,6084	(7)	-7,67	(7)
Konstant(63)	-0,0314	(6)	1,0228	(6)	0,7219	(6)	0,5856	(6)	-6,00	(6)
EWMA	0,0131	(1)	1,0129	(1)	0,7146	(1)	0,5660	(5)	-2,33	(1)
EWMA(250)	0,0229	(3)	1,0190	(3)	0,7191	(3)	0,5656	(3)	-3,00	(3)
EWMA(125)	0,0229	(4)	1,0190	(2)	0,7191	(2)	0,5657	(4)	-2,67	(2)
EWMA(90)	0,0229	(2)	1,0192	(4)	0,7193	(5)	0,5654	(2)	-3,67	(5)
EWMA(63)	0,0236	(5)	1,0195	(5)	0,7192	(4)	0,5653	(1)	-3,33	(4)
GARCH	-0,3097	(17)	1,0939	(12)	0,8568	(12)	0,7874	(12)	-12,00	(12)
GARCH-L	-0,3091	(16)	1,0974	(15)	0,8604	(16)	0,8057	(21)	-17,33	(17)
EGARCH	-0,3575	(22)	1,1347	(22)	0,9020	(22)	0,8268	(22)	-22,00	(22)
TGARCH	-0,3068	(14)	1,0976	(16)	0,8597	(15)	0,8047	(20)	-17,00	(16)
PGARCH	-0,3079	(15)	1,1023	(18)	0,8676	(18)	0,8004	(16)	-17,33	(17)
GARCH-M(St.dev.)	-0,3031	(10)	1,0924	(10)	0,8544	(10)	0,7859	(10)	-10,00	(10)
GARCH-M(Var)	-0,3065	(13)	1,0934	(11)	0,8556	(11)	0,7871	(11)	-11,00	(11)
GARCH (T-dist)	-0,3357	(21)	1,1052	(20)	0,8720	(20)	0,7998	(15)	-18,33	(20)
GARCH-L (T-dist)	-0,3058	(12)	1,0971	(13)	0,8591	(14)	0,8037	(18)	-15,00	(13)
EGARCH (T-dist)	-0,3793	(23)	1,1450	(23)	0,9159	(23)	0,8413	(23)	-23,00	(23)
TGARCH (T-dist)	-0,3053	(11)	1,0972	(14)	0,8591	(13)	0,8043	(19)	-15,33	(14)
PGARCH (T-dist)	-0,3179	(18)	1,1073	(21)	0,8733	(21)	0,8033	(17)	-19,67	(21)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-0,3254	(19)	1,1020	(17)	0,8671	(17)	0,7940	(13)	-15,67	(15)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-0,3289	(20)	1,1028	(19)	0,8685	(19)	0,7963	(14)	-17,33	(17)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

I punktene 1)-4) i samme tabell har vi valgt å la hvert kriterium velge modell på tvers av horisonten. Tar vi de ulike kriteriene i den rekkefølgen som er gitt i tabellen ser vi at RMSE-

kriteriet utroper EWMA- og EWMA(90)-modellen som de beste modellene, med EWMA(250) på den neste plassen. I følge RMSE er den konstante volatilitetsmodellen den helt klart svakeste. Dette gjelder for øvrig i absolutt alle horisontene og evalueringskriteriene. MAE velger en annen modell enn RMSE som den beste modellen. I dette kriteriet er det EWMA(125)-modellen som gjør det best i konkurransen, etterfulgt av EWMA(250) og Konstant(63). Bruker man derimot MedSE-kriteriet er det EWMA(63) som er den beste modellen, mens EWMA(250) og EWMA(90) følger på de neste plassene. Denne tabellen

Tabell 5.4: Sammenligning av prediksjonsevne; 63 dager

Prediksjonshorisont: 63 dager

Volatilitetsmodell	Sammenligningsmål				
	ME	RMSE	MAE	MedSE	Totalt
Konstant	-0,9392 (24)	1,5354 (24)	1,3213 (24)	1,4057 (24)	-24,00 (24)
Konstant(250)	-0,1247 (4)	1,1650 (6)	0,7873 (9)	0,7012 (9)	-8,00 (8)
Konstant(125)	-0,0396 (2)	1,1712 (8)	0,7633 (8)	0,6267 (8)	-8,00 (8)
Konstant(90)	-0,0057 (1)	1,1758 (9)	0,7526 (7)	0,6076 (7)	-7,67 (7)
Konstant(63)	0,0495 (3)	1,1665 (7)	0,7265 (6)	0,5552 (6)	-6,33 (6)
EWMA	0,1500 (5)	1,1561 (1)	0,6895 (5)	0,4855 (5)	-3,67 (4)
EWMA(250)	0,1620 (8)	1,1598 (3)	0,6889 (2)	0,4741 (2)	-2,33 (2)
EWMA(125)	0,1620 (7)	1,1598 (2)	0,6889 (1)	0,4741 (3)	-2,00 (1)
EWMA(90)	0,1618 (6)	1,1599 (4)	0,6891 (3)	0,4743 (4)	-3,67 (4)
EWMA(63)	0,1630 (9)	1,1606 (5)	0,6892 (4)	0,4731 (1)	-3,33 (3)
GARCH	-0,4881 (18)	1,3107 (18)	1,0117 (18)	0,9429 (17)	-17,67 (18)
GARCH-L	-0,4314 (13)	1,2784 (12)	0,9728 (13)	0,8982 (13)	-12,67 (13)
EGARCH	-0,6304 (22)	1,3987 (22)	1,1157 (22)	1,0468 (22)	-22,00 (22)
TGARCH	-0,4259 (10)	1,2763 (11)	0,9696 (10)	0,8929 (11)	-10,67 (11)
PGARCH	-0,4682 (14)	1,2965 (14)	0,9987 (14)	0,9371 (14)	-14,00 (14)
GARCH-M(St.dev.)	-0,4848 (15)	1,3098 (16)	1,0101 (15)	0,9386 (15)	-15,33 (15)
GARCH-M(Var)	-0,4859 (17)	1,3101 (17)	1,0107 (16)	0,9403 (16)	-16,33 (16)
GARCH (T-dist)	-0,5293 (21)	1,3314 (21)	1,0389 (21)	0,9733 (21)	-21,00 (21)
GARCH-L (T-dist)	-0,4299 (12)	1,2787 (13)	0,9725 (12)	0,8966 (12)	-12,33 (12)
EGARCH (T-dist)	-0,6694 (23)	1,4227 (23)	1,1442 (23)	1,0816 (23)	-23,00 (23)
TGARCH (T-dist)	-0,4278 (11)	1,2761 (10)	0,9709 (11)	0,8919 (10)	-10,33 (10)
PGARCH (T-dist)	-0,4854 (16)	1,3067 (15)	1,0110 (17)	0,9536 (18)	-16,67 (17)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-0,5228 (20)	1,3292 (20)	1,0353 (20)	0,9669 (19)	-19,67 (20)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-0,5224 (19)	1,3283 (19)	1,0346 (19)	0,9678 (20)	-19,33 (19)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

Tabell 5.5: Oppsummerende resultater

		Gjennomsnittsrangering totalt									
		1)		2)		3)		4)		5)	
		ME		RMSE		MAE		MedSE		TOTALT	
Konstant		24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)
Konstant(250)		5,75	(1)	6,00	(7)	7,50	(9)	8,75	(9)	7,42	(9)
Konstant(125)		8,50	(6)	6,25	(8)	7,00	(8)	8,25	(8)	7,17	(8)
Konstant(90)		8,00	(5)	7,00	(9)	5,50	(6)	6,75	(7)	6,42	(7)
Konstant(63)		7,25	(3)	5,75	(5)	3,75	(2)	6,25	(6)	5,25	(6)
EWMA		6,50	(2)	3,00	(1)	4,25	(4)	5,00	(5)	4,08	(4)
EWMA(250)		9,00	(7)	4,00	(3)	3,75	(2)	2,50	(2)	3,42	(2)
EWMA(125)		9,50	(9)	3,00	(1)	3,25	(1)	3,00	(4)	3,08	(1)
EWMA(90)		7,75	(4)	4,25	(4)	4,50	(5)	2,75	(3)	3,83	(3)
EWMA(63)		10,75	(10)	5,75	(5)	5,50	(6)	1,75	(1)	4,33	(5)
GARCH		12,75	(15)	13,00	(12)	13,50	(12)	13,25	(12)	13,25	(12)
GARCH-L		15,50	(18)	15,50	(15)	16,75	(17)	18,75	(21)	17,00	(19)
EGARCH		19,25	(22)	22,00	(22)	22,00	(22)	22,00	(22)	22,00	(22)
TGARCH		13,50	(16)	16,25	(16)	15,75	(15)	18,00	(20)	16,67	(17)
PGARCH		11,75	(12)	18,00	(20)	17,25	(19)	15,25	(14)	16,83	(18)
GARCH-M(St.dev.)		9,25	(8)	11,75	(10)	11,25	(10)	11,25	(10)	11,42	(10)
GARCH-M(Var)		11,00	(11)	12,75	(11)	12,25	(11)	12,25	(11)	12,42	(11)
GARCH (T-dist)		19,00	(21)	17,75	(19)	18,75	(20)	16,75	(18)	17,75	(20)
GARCH-L (T-dist)		11,75	(12)	14,75	(14)	15,00	(14)	16,50	(17)	15,42	(14)
EGARCH (T-dist)		21,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)
TGARCH (T-dist)		11,75	(12)	14,25	(13)	13,50	(12)	16,25	(16)	14,67	(13)
PGARCH (T-dist)		14,25	(17)	19,50	(21)	19,50	(21)	17,75	(19)	18,92	(21)
GARCH-M(St.dev., T-dist)		15,50	(18)	16,25	(16)	15,75	(15)	14,50	(13)	15,50	(15)
GARCH-M(VAR., T-dist)		16,75	(20)	16,25	(16)	16,75	(17)	15,50	(15)	16,17	(16)

1), 2), 3) og 4) Gjennomsnittsrangering totalt for hvert evalueringskriterium.

5) Gjennomsnittsrangering totalt for de ulike volatilitetsmodellene.

avslører 2 viktige momenter og det er 1) at det er stor sammenheng mellom evalueringsmetoden man benytter og hvilken modell som er best. Argumentasjonen for hvilken av kriteriene som skal benyttes er ulike, men i følge Heynen og Kat(1994) og Franses og van Dijk (1996) bør man bruke MedSE fordi de mener at RMSE legger for mye vekt på de ekstreme observasjonene i tidsserien. Vi ønsker ikke å gjøre en undersøkelse av hvilket kriterium som er det beste å bruke, men vi bare nevner at i vår utredning er det EWMA-modellen som gir de beste resultatene ved bruk av MedSE-kriteriet, som for øvrig er

en modell som ikke ble benyttet i de 2 nevnte artiklene. 2) Vi nevner også at grunnen til at alle EWMA-modellene gjør det best i punkt 5) i tabell 5.5, er at hvis en av modellene gjør det bra så vil de andre modellene også rangeres høyt. Dette på grunn av at prediksjonsestimatene blir svært like mellom modellene. Differansen mellom de ulike predikerte volatilitetene i EWMA-modellen er svært liten, noe som fører til at evalueringskriteriene får tilnærmet lik verdi.

Tabell 5.6: Sammenligning av prediksjonsevne; 1 uke

Volatilitetsmodell	Prediksjonshorisont: 1 uke									
	Sammenligningsmål									
	ME		RMSE		MAE		MedSE		Totalt	
Konstant	-6,2631	(24)	6,2848	(24)	6,2848	(24)	-6,2631	(24)	-24,00	(24)
Konstant(250)	-5,9568	(23)	5,9837	(23)	5,9837	(23)	-5,9568	(23)	-23,00	(23)
Konstant(125)	-4,2374	(22)	4,7264	(22)	4,7264	(22)	-4,2374	(22)	-22,00	(22)
Konstant(90)	-3,4297	(7)	3,9620	(7)	3,9620	(7)	-3,4297	(7)	-7,00	(7)
Konstant(63)	-2,6690	(6)	3,4223	(6)	3,4223	(6)	-2,6690	(6)	-6,00	(6)
EWMA	-2,2558	(2)	3,0680	(5)	3,0680	(5)	-2,2558	(2)	-4,00	(4)
EWMA(250)	-2,2663	(5)	3,0169	(4)	3,0169	(4)	-2,2663	(5)	-4,33	(5)
EWMA(125)	-2,2655	(4)	3,0163	(3)	3,0163	(3)	-2,2655	(4)	-3,33	(3)
EWMA(90)	-2,2582	(3)	3,0099	(2)	3,0099	(2)	-2,2582	(3)	-2,33	(2)
EWMA(63)	-2,2051	(1)	2,9809	(1)	2,9809	(1)	-2,2051	(1)	-1,00	(1)
GARCH	-3,5687	(10)	4,1631	(10)	4,1631	(10)	-3,5687	(10)	-10,00	(10)
GARCH-L	-3,4907	(8)	4,0632	(8)	4,0632	(8)	-3,4907	(8)	-8,00	(8)
EGARCH	-3,8491	(16)	4,4185	(17)	4,4185	(17)	-3,8491	(16)	-16,67	(16)
TGARCH	-3,4985	(9)	4,0732	(9)	4,0732	(9)	-3,4985	(9)	-9,00	(9)
PGARCH	-3,8512	(17)	4,4355	(18)	4,4355	(18)	-3,8512	(17)	-17,67	(18)
GARCH-M(St.dev.)	-3,6263	(12)	4,2399	(12)	4,2399	(12)	-3,6263	(12)	-12,00	(12)
GARCH-M(Var)	-3,5930	(11)	4,1914	(11)	4,1914	(11)	-3,5930	(11)	-11,00	(11)
GARCH (T-dist)	-3,8131	(15)	4,3099	(15)	4,3099	(15)	-3,8131	(15)	-15,00	(15)
GARCH-L (T-dist)	-3,7644	(14)	4,2455	(14)	4,2455	(14)	-3,7644	(14)	-14,00	(14)
EGARCH (T-dist)	-4,0562	(21)	4,5174	(21)	4,5174	(21)	-4,0562	(21)	-21,00	(21)
TGARCH (T-dist)	-3,7597	(13)	4,2405	(13)	4,2405	(13)	-3,7597	(13)	-13,00	(13)
PGARCH (T-dist)	-3,9602	(19)	4,3953	(16)	4,3953	(16)	-3,9602	(19)	-17,00	(17)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-3,9642	(20)	4,5170	(20)	4,5170	(20)	-3,9642	(20)	-20,00	(20)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-3,9247	(18)	4,4397	(19)	4,4397	(19)	-3,9247	(18)	-18,67	(19)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

5.3.2 Frekvens: Uke

Vi ønsker nå å gjennomføre samme eksersis som for de daglige dataene på de ukentlige datae. Vi benytter oss av de 22 ulike volatilitetsmodellene til å predikere volatiliteten henholdsvis 1, 2, 4 og 13 uker frem i tiden. Disse predikerte verdiene sammenlignes mot benchmarken vår for å se hvilken av modellene som treffer best. I motsetning til de daglige dataene må vi ta forbehold i vår undersøkelse siden de ulike GARCH-modellene ikke har signifikante verdier for sine parametere. Dette kommer vi til å ta til etterretning når vi skal foreslå den beste modellen. Resultatene vi kom frem til er gjengitt i tabellene 5.6-5.9. I

Tabell 5.7: Sammenligning av prediksjonsevne; 2 uker

Volatilitetsmodell	Prediksjonshorizont: 2 uker									
	Sammenligningsmål									
	ME		RMSE		MAE		MedSE		Totalt	
Konstant	-4,9386	(24)	6,5875	(24)	6,1837	(24)	-4,9386	(24)	-24,00	(24)
Konstant(250)	-4,6323	(23)	6,3654	(23)	5,9698	(23)	-4,6323	(23)	-23,00	(23)
Konstant(125)	-2,9130	(20)	5,3080	(16)	4,9789	(18)	-2,9130	(20)	-18,00	(18)
Konstant(90)	-2,1052	(7)	4,9136	(7)	4,5050	(7)	-2,1052	(7)	-7,00	(7)
Konstant(63)	-1,3446	(6)	4,6623	(6)	4,1170	(6)	-1,3446	(6)	-6,00	(6)
EWMA	-0,9314	(2)	4,4529	(2)	3,9013	(5)	-0,9314	(2)	-3,00	(3)
EWMA(250)	-0,9418	(5)	4,4687	(5)	3,8982	(4)	-0,9418	(5)	-4,67	(5)
EWMA(125)	-0,9411	(4)	4,4682	(4)	3,8977	(3)	-0,9411	(4)	-3,67	(4)
EWMA(90)	-0,9338	(3)	4,4660	(3)	3,8943	(2)	-0,9338	(3)	-2,67	(2)
EWMA(63)	-0,8806	(1)	4,4479	(1)	3,8669	(1)	-0,8806	(1)	-1,00	(1)
GARCH	-2,4863	(10)	5,1420	(10)	4,7248	(10)	-2,4863	(10)	-10,00	(10)
GARCH-L	-2,3457	(8)	5,1294	(8)	4,6682	(8)	-2,3457	(8)	-8,00	(8)
EGARCH	-2,7925	(18)	5,3938	(18)	4,9760	(17)	-2,7925	(18)	-17,67	(17)
TGARCH	-2,3540	(9)	5,1365	(9)	4,6756	(9)	-2,3540	(9)	-9,00	(9)
PGARCH	-2,6940	(15)	5,4377	(21)	4,9887	(20)	-2,6940	(15)	-18,67	(20)
GARCH-M(St.dev.)	-2,5668	(12)	5,2491	(15)	4,8223	(14)	-2,5668	(12)	-13,67	(14)
GARCH-M(Var)	-2,5171	(11)	5,1782	(11)	4,7592	(11)	-2,5171	(11)	-11,00	(11)
GARCH (T-dist)	-2,6967	(16)	5,2349	(14)	4,8462	(15)	-2,6967	(16)	-15,00	(15)
GARCH-L (T-dist)	-2,5989	(14)	5,2175	(13)	4,8032	(13)	-2,5989	(14)	-13,33	(13)
EGARCH (T-dist)	-2,9356	(22)	5,4907	(22)	5,0933	(22)	-2,9356	(22)	-22,00	(22)
TGARCH (T-dist)	-2,5942	(13)	5,2127	(12)	4,7984	(12)	-2,5942	(13)	-12,33	(12)
PGARCH (T-dist)	-2,7609	(17)	5,4007	(19)	4,9802	(19)	-2,7609	(17)	-18,33	(19)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-2,9212	(21)	5,4295	(20)	5,0443	(21)	-2,9212	(21)	-20,67	(21)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-2,8388	(19)	5,3339	(17)	4,9538	(16)	-2,8388	(19)	-17,33	(16)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

Tabell 5.8: Sammenligning av prediksjonsevne; 4 uker

Volatilitetsmodell		Prediksjonshorizont: 4 uker				
		Sammenligningsmål				
		ME	RMSE	MAE	MedSE	Totalt
Konstant		-4,5053 (24)	6,6068 (24)	6,0410 (24)	-5,0736 (24)	-24,00 (24)
Konstant(250)		-4,1990 (23)	6,3960 (23)	5,8377 (23)	-4,7673 (23)	-23,00 (23)
Konstant(125)		-2,4796 (13)	5,2858 (8)	4,7454 (10)	-3,0479 (17)	-11,67 (11)
Konstant(90)		-1,6719 (7)	4,9135 (7)	4,3380 (7)	-2,2402 (7)	-7,00 (7)
Konstant(63)		-0,9112 (6)	4,5719 (6)	3,8910 (6)	-1,4795 (6)	-6,00 (6)
EWMA		-0,4981 (2)	4,4967 (2)	3,7918 (2)	-1,0664 (2)	-2,00 (2)
EWMA(250)		-0,5085 (5)	4,5119 (5)	3,8084 (5)	-1,0768 (5)	-5,00 (5)
EWMA(125)		-0,5078 (4)	4,5113 (4)	3,8077 (4)	-1,0761 (4)	-4,00 (4)
EWMA(90)		-0,5005 (3)	4,5098 (3)	3,8059 (3)	-1,0688 (3)	-3,00 (3)
EWMA(63)		-0,4473 (1)	4,4801 (1)	3,7724 (1)	-1,0156 (1)	-1,00 (1)
GARCH		-2,4599 (12)	5,3801 (11)	4,8424 (13)	-2,9146 (12)	-12,00 (12)
GARCH-L		-2,2096 (8)	5,2965 (9)	4,7129 (8)	-2,6723 (8)	-8,33 (8)
EGARCH		-2,8356 (20)	5,6505 (20)	5,1260 (20)	-3,2880 (20)	-20,00 (20)
TGARCH		-2,2187 (9)	5,3037 (10)	4,7226 (9)	-2,6803 (9)	-9,33 (9)
PGARCH		-2,5503 (15)	5,5773 (19)	5,0099 (18)	-3,0084 (14)	-17,00 (18)
GARCH-M(St.dev.)		-2,5738 (17)	5,4890 (16)	4,9424 (16)	-3,0259 (15)	-15,67 (15)
GARCH-M(Var)		-2,4995 (14)	5,4158 (14)	4,8757 (14)	-2,9544 (13)	-13,67 (14)
GARCH (T-dist)		-2,6159 (18)	5,4607 (15)	4,9274 (15)	-3,0821 (18)	-16,00 (16)
GARCH-L (T-dist)		-2,4340 (11)	5,3915 (13)	4,8312 (12)	-2,9094 (11)	-12,00 (12)
EGARCH (T-dist)		-2,8740 (21)	5,7222 (22)	5,1933 (22)	-3,3301 (21)	-21,67 (22)
TGARCH (T-dist)		-2,4297 (10)	5,3871 (12)	4,8267 (11)	-2,9050 (10)	-11,00 (10)
PGARCH (T-dist)		-2,5533 (16)	5,5584 (17)	4,9929 (17)	-3,0361 (16)	-16,67 (17)
GARCH-M(St.dev., T-dist)		-2,9461 (22)	5,6899 (21)	5,1676 (21)	-3,4081 (22)	-21,33 (21)
GARCH-M(VAR., T-dist)		-2,7994 (19)	5,5721 (18)	5,0488 (19)	-3,2663 (19)	-18,67 (19)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

motsetning til de daglige dataene er ME-kriteriet til de ulike volatilitetsmodellene negative i alle horisontene, noe som tyder på at modellene overestimerer volatiliteten i påfølgende uke. Vi bemerker her at hvis man sammenligner verdiene mellom den ukentlige prediksjonsverdien for henholdsvis de daglige og ukentlige verdiene så ser vi at verdien til ME-kriteriet er betraktelig større for de beregninger gjort på bakgrunn av den ukentlige avkastningsserien(sammenligner ME-tallet i tabell 5.1 mot tabell 5.6). Dette kan tyde på vår analyse av den ukentlige dataserien egner seg dårlig til prediksjon av volatiliteten i vårt out-of-sample.

Slik som for de daglige dataene er det problematisk å se et utpreget mønster i tabellene, så vi må nok en gang benytte oss av en tabell som oppsummerer resultatene for oss. Resultatene er gitt i tabell 5.10. Studerer vi denne tabellen så kommer det mye klarer frem hvilken av modellene som gjør det best. I følge denne tabellen er det EWMA(63) som blir utropt til å være den beste modellen. Alle kriteriene velger denne modellen og man kan dermed antyde leverage-effect. Som for de daglige avkastningsdataene er den konstante modellen den desidert dårligste modellen til å predikere volatiliteten, og vi kan dermed konstantere at den egner seg svært dårlig til predikasjon av vårt out-of-sample.

Tabell 5.9: Sammenligning av prediksjonsevne; 13 uker

Prediksjonshorisont: 13 uker

Volatilitetsmodell	Sammenligningsmål									
	ME		RMSE		MAE		MedSE		Totalt	
Konstant	-4,1805	(24)	6,6142	(24)	5,8618	(24)	-5,6646	(24)	-24,00	(24)
Konstant(250)	-3,8264	(23)	6,4019	(23)	5,6308	(23)	-5,3105	(23)	-23,00	(23)
Konstant(125)	-2,3192	(8)	5,6749	(8)	4,7299	(8)	-3,8034	(9)	-8,33	(8)
Konstant(90)	-1,4030	(7)	5,3431	(7)	4,2852	(7)	-2,8871	(7)	-7,00	(7)
Konstant(63)	-0,7434	(6)	5,1321	(1)	3,9779	(6)	-2,2275	(6)	-4,33	(4)
EWMA	-0,1054	(3)	5,2615	(2)	3,8687	(1)	-1,5896	(3)	-2,00	(1)
EWMA(250)	-0,1072	(5)	5,3057	(5)	3,8925	(5)	-1,5913	(5)	-5,00	(6)
EWMA(125)	-0,1066	(4)	5,3057	(6)	3,8924	(4)	-1,5908	(4)	-4,67	(5)
EWMA(90)	-0,0972	(2)	5,3044	(4)	3,8900	(3)	-1,5813	(2)	-3,00	(3)
EWMA(63)	-0,0595	(1)	5,2833	(3)	3,8693	(2)	-1,5436	(1)	-2,00	(1)
GARCH	-3,0572	(15)	6,0100	(15)	5,1554	(15)	-4,4414	(15)	-15,00	(15)
GARCH-L	-2,4777	(9)	5,7510	(9)	4,8234	(9)	-3,7968	(8)	-8,67	(9)
EGARCH	-3,6104	(22)	6,3499	(22)	5,5296	(22)	-4,9002	(21)	-21,67	(22)
TGARCH	-2,4848	(10)	5,7523	(10)	4,8301	(10)	-3,8135	(10)	-10,00	(10)
PGARCH	-2,8168	(14)	5,9483	(14)	5,0302	(14)	-4,2168	(14)	-14,00	(14)
GARCH-M(St.dev.)	-3,2094	(18)	6,1037	(18)	5,2531	(18)	-4,5600	(18)	-18,00	(18)
GARCH-M(Var)	-3,0991	(16)	6,0342	(16)	5,1834	(16)	-4,4746	(17)	-16,33	(16)
GARCH (T-dist)	-3,1014	(17)	6,0355	(17)	5,1858	(17)	-4,4620	(16)	-16,67	(17)
GARCH-L (T-dist)	-2,6752	(12)	5,8405	(12)	4,9425	(12)	-4,0263	(12)	-12,00	(12)
EGARCH (T-dist)	-3,4820	(20)	6,3078	(20)	5,4739	(20)	-4,8186	(20)	-20,00	(20)
TGARCH (T-dist)	-2,6720	(11)	5,8397	(11)	4,9417	(11)	-4,0246	(11)	-11,00	(11)
PGARCH (T-dist)	-2,7183	(13)	5,9297	(13)	4,9984	(13)	-4,0995	(13)	-13,00	(13)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	-3,6054	(21)	6,3118	(21)	5,5035	(21)	-4,9244	(22)	-21,33	(21)
GARCH-M(VAR., T-dist)	-3,3389	(19)	6,1524	(19)	5,3236	(19)	-4,6938	(19)	-19,00	(19)

Tallene i parentes angir rangeringen av prediksjonsevnen til de ulike volatilitetsmodellene for valgt kriterium.

Tabell 5.10: Oppsummerende resultater

Gjennomsnittsrangering totalt										
	1)		2)		3)		4)		5)	
	ME		RMSE		MAE		MedSE		TOTALT	
Konstant	24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)	24,00	(24)
Konstant(250)	23,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)	23,00	(23)
Konstant(125)	15,75	(16)	13,50	(14)	14,50	(14)	17,00	(18)	15,00	(15)
Konstant(90)	7,00	(7)	7,00	(7)	7,00	(7)	7,00	(7)	7,00	(7)
Konstant(63)	6,00	(6)	4,75	(5)	6,00	(6)	6,00	(6)	5,58	(6)
EWMA	2,25	(2)	2,75	(2)	3,25	(3)	2,25	(2)	2,75	(2)
EWMA(250)	5,00	(5)	4,75	(5)	4,50	(5)	5,00	(5)	4,75	(5)
EWMA(125)	4,00	(4)	4,25	(4)	3,50	(4)	4,00	(4)	3,92	(4)
EWMA(90)	2,75	(3)	3,00	(3)	2,50	(2)	2,75	(3)	2,75	(2)
EWMA(63)	1,00	(1)	1,50	(1)	1,25	(1)	1,00	(1)	1,25	(1)
GARCH	11,75	(10)	11,50	(10)	12,00	(11)	11,75	(10)	11,75	(10)
GARCH-L	8,25	(8)	8,50	(8)	8,25	(8)	8,00	(8)	8,25	(8)
EGARCH	19,00	(20)	19,25	(20)	19,00	(20)	18,75	(19)	19,00	(20)
TGARCH	9,25	(9)	9,50	(9)	9,25	(9)	9,25	(9)	9,33	(9)
PGARCH	15,25	(15)	18,00	(18)	17,50	(18)	15,00	(15)	16,83	(18)
GARCH-M(St.dev.)	14,75	(14)	15,25	(15)	15,00	(15)	14,25	(14)	14,83	(14)
GARCH-M(Var)	13,00	(13)	13,00	(12)	13,00	(13)	13,00	(13)	13,00	(13)
GARCH (T-dist)	16,50	(18)	15,25	(15)	15,50	(16)	16,25	(16)	15,67	(16)
GARCH-L (T-dist)	12,75	(12)	13,00	(12)	12,75	(12)	12,75	(12)	12,83	(12)
EGARCH (T-dist)	21,00	(21)	21,25	(22)	21,25	(22)	21,00	(21)	21,17	(22)
TGARCH (T-dist)	11,75	(10)	12,00	(11)	11,75	(10)	11,75	(10)	11,83	(11)
PGARCH (T-dist)	16,25	(17)	16,25	(17)	16,25	(17)	16,25	(16)	16,25	(17)
GARCH-M(St.dev., T-dist)	21,00	(21)	20,50	(21)	20,75	(21)	21,25	(22)	20,83	(21)
GARCH-M(VAR., T- dist)	18,75	(19)	18,25	(19)	18,25	(19)	18,75	(19)	18,42	(19)

1), 2), 3) og 4) Gjennomsnittsrangering totalt for hvert evalueringskriterium.

5) Gjennomsnittsrangering totalt for de ulike volatilitetsmodellene.

5.4 Hvilken modell bør man velge?

Det eneste vi kan slå fast med den undersøkelsen vi nettopp har gjennomført er at man ikke bør velge den konstante volatilitetsmodellen for prediksjon av volatilitet i intervallene 1 uke, 2 uker, 1 måned og 3 måneder ved bruk av daglige og ukentlige data. Sant skal sies at det er svært vanskelig å slå fast om den ene modellen er mer predikativ enn den andre når out-of-

sample-vinduet vårt er så lite, bare 1 år. Man bør prøve de ulike modellene for en lengre tidsperiode, og kanskje øke lengden på tidsserien. Vi bemerker her at volatiliteten har vært noe ekstrem i den 8 års-perioden som vi har valgt. Det har vært enkelte kriser og oppturer i denne perioden der vi blant annet kan nevne Asia-krisen i 1997 og resesjonen i begynnelsen 2002. Et standardavvik på nærmere 66 prosent som den empiriske konstante volatiliteten viser til, er ikke noe som finansfolk opererer daglig med ved prising av ulike instrumenter.

Spørsmålet nå blir hvilken modell skal vi benytte videre. Vi skal velge 4 modeller, dermed en konstant, en EWMA, og to GARCH. Her bestemte vi oss for å bruke total kriteriet, altså gjennomsnittlig plassering på tvers av horisont som beslutningsgrunnlag. Vi vil ikke se på den ukentlige prediksjonskonkurransen til å avgjøre hvilken modell vi vil benytte. Dette ønsker vi å gjøre fordi 1) avvikene mellom den predikerte volatiliteten og den ”virkelige” var vesentlig større enn for den daglige avkastningsserien, 2) mange av de ukentlige GARCH-parametrene ikke var signifikant forskjellig fra 0. Vi vil heller ikke benytte oss av en t-distribuert GARCH-modell i den videre undersøkelsen siden vi ønsker å begrense vår studie til å undersøke opsjonspriser basert på normalfordeling. Dermed vil tabell 5.5 være vårt beslutningsgrunnlag og de 4 modellene som skal være med videre i vår undersøkelse vil da være: Konstant(63), EWMA(125), GARCH(1,1)²⁹ og TGARCH(1,1)³⁰

²⁹ Denne fordi volatilitetsleddet i GARCH-M modellene ikke er signifikant forskjellig fra 0.

³⁰ Siden vi påviste tilstedeværelse av leverage effect så ønsker vi å beholde den beste modellen fra tabell 5.5

6 Presentasjon av opsjonsteori

Et finansielt instrument kan defineres som et derivat dersom verdien på instrumentet avhenger av verdien av et annet underliggende instrument. Derivater kan konstrueres på en rekke ulike måter og således generere ulike kontantstrømmer betinget av verdien av det underliggende instrumentet derivatet er knyttet til. I dette kapitlet vil vi gå igjennom noen sentrale begreper og metodiske prinsipper for prising av derivater, med fokus på europeiske opsjoner. Det faller utenfor denne oppgaven å komme inn på konstruksjon og prising av terminkontrakter.

6.1 Opsjoner

En opsjon er et derivat hvis verdi avhenger av verdien på et underliggende aktivum og rettigheter til kjøp/salg av dette aktivumet. Det underliggende aktivum kan være aksjer, aksjeindekser, valuta, gjeldsinstrumenter, råvarer og futures kontrakter. Det er to grunnleggende typer opsjoner, kjøps- og salgsopsjoner. Med en kjøpsopsjon (Call opsjon) har innehaveren rett, men ikke plikt, til å kjøpe underliggende aktivum ved et eller flere avtalte tidspunkt til en bestemt pris. Med en salgsopsjon (Put opsjon) har innehaveren rett, men ikke plikt, til å selge underliggende aktivum ved et eller flere avtalte tidspunkt til en bestemt pris (notater FIN 325). Opsjoner som gir innehaveren en rett til å kjøpe eller selge underliggende på et bestemt fremtidig tidspunkt kalles *europeiske* opsjoner. Hvis opsjonen gir innehaveren rett til å utøve kontrakten på et valgfritt tidspunkt innen kontrakten forfaller kalles den en *amerikansk* opsjon. For innehaveren av en kjøpsopsjon vil kontantstrømmen ved forfallstidspunktet T kunne uttrykkes ved;

$$\max(S_T - X, 0) \tag{6.1}$$

der K er den forhåndsbestemte *utøvelsesprisen*, og S_T er prisen på opsjonens underliggende instrument ved forfallstidspunktet T . Det tilsvarende uttrykket for en salgsopsjon er;

$$\max(X - S_T, 0) \tag{6.2}$$

6.2 Teoretisk rammeverk: Opsjonsprisingsmodeller

Arbitrasje står sentralt når det gjelder prising av derivater generelt. En arbitrasjemulighet kan defineres som en mulighet for å realisere en strengt positiv gevinst som er både kostnads- og risikofri. Å finne en arbitrasjemulighet i et likvid og transparent marked vil imidlertid være svært vanskelig. Under forutsetning av at aktørene er rasjonelle, vil et prisbilde som avdekker en arbitrasjemulighet i et likvid og transparent marked raskt endre seg slik at arbitrasjemuligheten elimineres. Det er derfor rimelig å anta at det i et likvid marked ikke finnes arbitrasjemuligheter. Med dette som utgangspunkt kan vi komme frem til en prisingsmodell for opsjoner.

Som nevnt tidligere innebærer et kjøp av en opsjonskontrakt at man kjøper seg en rettighet uten at man er forpliktet til å benytte seg av rettigheten ved forfall. For denne rettigheten betaler kjøperen en pris, den såkalte *opsjonspremien* eller *opsjonsprisen*. Det finnes flere måter å utlede størrelsen på denne premien på, men vi ønsker å begrense oss til en enkel metode.

En tilnæringsmåte er å starte med å spesifisere en statistisk modell for prisen på opsjonens underliggende og ut fra denne modellen utlede de statistiske egenskapene ved opsjonsprisen. Både opsjonen og dens underliggende er dermed antatt å følge en spesifikk stokastisk prosess med ulike parametere. Man konstruerer deretter en portefølje bestående av opsjonen og dens underliggende slik at risikoen i porteføljen er nøytralisert. Hvis prinsippet om fravær av arbitrasjemuligheter skal være oppfylt, må avkastningen på denne porteføljen være lik den risikofrie renten. Ved å konstruere en slik portefølje ender man opp med en partiell differensiallikning (PDE) som opsjonsprisen må tilfredsstillte. Løsningen på denne likningen gir oss prisen på opsjonen.

Et annet alternativ er å benytte seg av mer avanserte matematiske metoder for å utlede prisen på en opsjon. Dette innebærer at man omskriver den stokastiske prosessen for opsjonens underliggende ved å endre sannsynlighetsmålet slik at prosessen blir en såkalt *martingal*. En stokastisk prosess kalles en martingal dersom den forventede verdien av prosessen i fremtiden er lik prosessens nåværende verdi. Martingalegenskapen kan uttrykkes som følger;

$$E[S_t | S_j, j < t] = S_j \quad (6.3)$$

De underliggende sannsynlighetene for den omformede prosessen kalles *martingalsannsynligheter* eller *risikonøytrale sannsynligheter*. Man betrakter deretter den neddiskonterte verdien av den fremtidige kontantstrømmen som opsjonen gir ved forfall, og beregner opsjonspremien som forventingen av denne kontantstrømmen med hensyn til det risikonøytrale målet

Med forutsetning om at opsjonens underliggende følger en spesifikk stokastisk prosess, en såkalt geometrisk brownsk bevegelse med konstant volatilitet, vil begge de ovennevnte framgangsmåtene gi oss den mye anvendte Black-Scholes formelen. Rammeverket som formelen utledes i, kalles ofte for Black-Scholes modellen.

6.3 **Black-Scholes opsjonsprisindemodell**

I 1973 presenterte Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton en modell for prising av opsjoner, nå kjent som Black-Scholes modellen. Modellen har hatt stor innflytelse på hvordan aktører i markedet priser og ”hedger” opsjoner (Hull, 2003). Modellen bygger på en rekke forutsetninger, og noen av de viktigste blir presentert her;

- a. Underliggende aktivum følger en lognormal ’random walk’ prosess med konstant drift og konstant volatilitet.
- b. *Ingen dividende* / dividende
- c. Det er ingen transaksjonskostnader eller skatter.
- d. Det er ingen risikofrie arbitrasjemuligheter.
- e. Kontinuerlig handel.
- f. Risikofri rente er konstant.
- g. Konstant volatilitet

Vi skal ta en nærmere titt på rammeverket som denne formelen utledes i. I modellen antas opsjonens underliggende å være en kontinuerlig funksjon av tiden, men det kan være hensiktsmessig å ta utgangspunkt i en diskret modell for å få et intuitivt bilde av modellen.

Fra symbolforklaringene over ser vi at S_t kan beskrive verdien av et finansielt instrument ved tiden $t \in \{0, 1, \dots, N\}$. Hvis man antar at den kontinuerlig beregnede avkastningen

$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ er normalfordelt, kan man skrive følgende;

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t \quad \text{der } \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (6.4)$$

Dette er ekvivalent med at $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Alternativt kan man skrive $\ln(S_t) = \ln(S_{t-1}) + \mu + \sigma \varepsilon_t$ som gir følgende;

$$S_t = S_{t-1} e^{(\mu + \sigma \varepsilon_t)} = S_{t-1} e^{r_t} \quad (6.5)$$

Man sier da at S_t følger en lognormal fordeling, siden logaritmen til S_t er normalfordelt. Ved å betrakte avkastningen r_t på to etterfølgende tidspunkter t og $t+1$ finner man at $r_t + r_{t+1} \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$, dersom avkastningen på to tidspunkter antas å være uavhengige. Uttrykket over indikerer at både forventningsverdien og variansen øker lineært med tiden. Dette er ekvivalent med å si at standardavviket øker med kvadratroten av tiden noe som ikke er observerbart i empiriske undersøkelser. Hvis man nå setter $P_t = \ln(S_t)$ er det derfor naturlig å anta at man vil ha følgende sammenheng i kontinuerlig tid;

$$dP_t = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} \varepsilon_t \quad (6.6)$$

Leddene $\sqrt{dt} \varepsilon_t$ er tilveksten til det man kaller en Brownsk bevegelse eller en Wiener prosess;

$$dW_t = \sqrt{dt} \varepsilon_t \quad (6.7)$$

En Wiener prosess eller en Brownsk bevegelse kan så defineres som en aggregert samling av slike tilvekster;

$$W_t = W_0 + \int_0^t dW_s \quad (6.8)$$

En viktig egenskap ved en Brownsk bevegelse er at det er en martingal og at hvis prosessen ved et tidspunkt, t , har verdien x , er sannsynlighetsfordelingen for prosessen gitt ved tiden T , gitt ved normalfordelingen $N(x, T-t)$. Dette innebærer at variansen er økende med tiden akkurat som i den diskrete modellen. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for en Brownsk bevegelse ved tidspunkt T gitt at prosessen ved tidspunkt t var x år er gitt ved følgende likning;

$$q(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right] \quad (6.9)$$

Fra definisjonen av prosessen $P_t = \ln(S_t)$ kan man finne et uttrykk for prosessen $S_t = e^{P_t}$.

Ved å anvende det såkalte Ito's Lemma finner man at S_t må tilfredsstille følgende likning;

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (6.10)$$

Forenklet gjerne uttrykt;

$$dS_t = \psi S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (6.11)$$

En prosess som tilfredsstillere denne likningen kalles en *geometrisk Brownsk bevegelse*. Prisen på en opsjon kan uttrykkes som en funksjon av et underliggende instrument S_t som er en løsning av likningen ovenfor. Hvis man lar $C(S_t, t)$ være prisen på en europeisk kjøpsopsjon ved tiden t , kan man ved hjelp av Ito's Lemma finne et uttrykk for differensialet til denne prisen. Ideen i Black-Scholes rammeverket var, som nevnt tidligere, å konstruere en portefølje som var risikofri. Strategien bak en slik portefølje er at man selger kjøpsopsjonen og kjøper $\frac{\partial C}{\partial S}$ enheter av det underliggende instrumentet til opsjonen. Hvis man lar $V_t(S_t, t)$ være verdien av denne porteføljen ved tiden t , har vi følgende sammenheng;

$$V_t(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t - C(S_t, t) \quad (6.12)$$

Siden vi allerede har uttrykket for differensialet til prisen $dC(S_t, t)$, kan vi finne et uttrykk for $dV_t(S_t, t)$ og vise at denne porteføljen er risikofri. Etter en del beregninger finner vi følgende;

$$dV_t(S_t, t) = -\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - \frac{\partial C}{\partial t} dt \quad (6.13)$$

Siden dette uttrykket ikke inneholder leddet dW_t , må porteføljen være risikofri i tidsintervallet dt . Et risikofritt aktivum B_t kan modelleres ved $dB_t = rB_t dt$, der $r > 0$ er risikofri rente. I følge prinsippet om frasvær av arbitrasje må vi følgelig ha $B_t = V_t$, og vi ender opp med det som ofte kalles Black-Scholes likningen, gitt ved;

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} = rC(S_t, t) \quad (6.14)$$

Ved å løse denne likningen under randbetingelsene $C(0, t) = 0$ og $C(S_T, T) = \max(S_T - X, 0)$, ender vi opp med Black-Scholes formelen (1973) for en europeisk opsjon der underliggende aktivum ikke utbetaler dividende. Den første betingelsen sier at opsjonen ikke har noen verdi dersom det underliggende instrumentet antar verdien 0 på et tidspunkt før opsjonen forfaller. Dette kan tolkes som en situasjon der man har en kjøpsopsjon på en aksje i et selskap som går konkurs. Den andre betingelsen er et uttrykk for kontantstrømmen til kjøpsopsjonen ved forfallstidspunktet $t=T$ (Rakkestad, 2003). Andre løsningsmetoder for likningen er senere blitt brukt, og det finnes en rekke varianter av Black-Scholes formelen. Modellen kan lett utvides til å gjelde opsjoner med andre typer underliggende.

Black-Scholes formelen (1973) for en europeisk opsjon som ikke utbetaler dividende kan uttrykkes som følger;

$$C_{BS} = S_t N(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (6.15)$$

der d_1 og d_2 er gitt ved:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (6.16)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (6.17)$$

Symbolforklaringer:

$N(x)$ = Funksjonen til den kumulative sannsynlighetsfordelingen, normalfordelt

$T - t$ = Tid til forfall

S = Spotpris (på tidspunkt t), pris på underliggende aktivum

X = Kontraktspris

r = Risikofri rente

q = Utbytte

σ = Volatilitet til underliggende aktivum

c_{BS} = Verdi BS-salgsopsjon

Hvis vi ser på inputparametrene i formelen er volatiliteten i opsjonens underliggende i tiden frem til forfall gitt ved σ . Det er viktig å legge merke til at dette er den eneste parameteren som ikke er kjent, og derfor må estimeres av prisstilleren. Siden man for en gitt opsjonspris kan utlede denne parameterens verdi, kalles parameteren gjerne for opsjonens *implisitte volatilitet*.

Til Black-Scholes så er det knyttet noen svakheter. Disse er kritikk av de forutseningene som ligger til grunn for modellen. I litteraturen er disse kjent som stylized facts, og vi har vært innom dem i kapitel 2 og 3. Forutsetningene om at avkastningsserien er normalfordelt er blitt avkreftet av oss og i tidligere empiriske undersøkelser. Tidsserien inneholder både mer skjevhet og mer kurtosis enn en normalfordelt sannsynlighetsfordeling. BS-modellen forutsetter også konstant volatilitet noe som vi har vist at ikke er tilfelle. De fleste avkastningsserier på aksjer har sammenhengende perioder der serien viser mer volatilitet enn andre.

6.4 Duans opsjonsprisingsmodell

I 1995 introduserte Jin-Chuan Duan en prisingsmodell for opsjoner på et underliggende aktivum hvis kontinuerlig påløpte avkastning følger en *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (GARCH) prosess. Det antas en diskret økonomi hvor det underliggende aktivums en-periode avkastning er betinget lognormalfordelt under sannsynlighetsmålet P. Feilleddet ε_t har forventet verdi lik null og betinget varians σ_t under P. λ kan tolkes som enhetsrisikopremie. Formelt,

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + u_t \quad (6.18)$$

hvor

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad \text{under målet P}$$

og

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (6.19)$$

$$p \geq 0, q \geq 0, \alpha_0 \geq 0, i = 1, \dots, q; \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p.$$

Symbolforklaringer:

S_t = Spotpris (på tidspunkt t), pris på underliggende aktivum

r = Risikofri rente

u_t = Feilledd

σ_t^2 = Betinget varians

λ = Konstant enhets risikopremie

ϕ_t = Informasjonssett av all informasjon t.o.m. tidspunkt t

Videre i modellen er den betingede variansen en lineær funksjon av tidligere kvadrerte feilledd og tidligere betingede varianser. Opsjonspriseringsresultatene i denne modellen bygger på betinget normalitet og GARCH-prosessens egenskaper er grundig forklart i avsnitt 3.2.2. GARCH prosessen spesifisert over blir redusert til en standard homoskedastisk

lognormal prosess i Black-Scholes modellen hvis $p = 0$ og $q = 0$. Black-Scholes modellen representerer altså et spesialtilfelle.

For å utvikle den komplekse GARCH opsjonsprisinde modellen må det vanlige risikonøytrale prisingsforholdet generaliseres for å tilpasse Heteroskedastisiteten til avkastningen i det underliggende aktivum (Duan, 1995). Duan refererer til denne generaliseringen som 'locally risk-neutral valuation relationship' (LRNVR). Det defineres et prisingsmål Q som må tilfredsstillende følgende;

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} \mid \phi_{t-1} \sim \text{lognormalfordelt} \quad (6.20)$$

$$E^Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \mid \phi_{t-1}\right) = e^r \quad (6.21)$$

$$\text{Var}^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \mid \phi_{t-1}\right) = \text{Var}^P\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \mid \phi_{t-1}\right) \quad (6.22)$$

S_t/S_{t-1} må altså være lognormalfordelt (under Q) og forventningen til avkastningen under målet Q skal være lik den risikofrie avkastningen. For at LRNVR skal gjelde kreves det også at den betingede variansen under de to målene er like. Dette er ønskelig fordi man kan estimere modellen under Q -målet og anvende estimatene i modellen med prisen som mål. Under disse forholdene blir den implisitte risikofrie renten konstant. Antagelsen om konstant implisitt risikofri rente gjør det mulig å gjøre en sammenligning med Black-Scholes i en dimensjon med kun Heteroskedastisitet. Konseptet med LRNVR impliserer da at avkastningsprosessen er gitt(under målet Q) ved følgende:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t \quad (6.23)$$

hvor

$$\xi_t \mid \phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (6.24)$$

og

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (6.25)$$

Avkastningsprosessen har mye den samme formen som tidligere, men nytt er det at følgende gjelder for feilledet; $\varepsilon_t = \xi_t - \lambda \sigma_t$. Resultatet sier at enhetsrisikopremien, λ påvirker den betingede varians prosessen globalt, selv om risikoen har blitt nøytralisert lokalt under målet Q. Det er derfor viktig å skille mellom lokal og global risiko nøytralisering.

Av (6.25) følger det at prisen på underliggende aktivum ved forfall T er

$$S_T = S_t \exp \left[(T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{i=t+1}^T \sigma_i^2 + \sum_{i=t+1}^T \xi_i \right] \quad (6.26)$$

Den betingede fordelingen av S_T over mer enn en periode, gitt dagens pris, kan ikke bli bestemt analytisk. For å finne GARCH opsjonsprisen må vi ifølge Duan bruke Monte Carlo simulering.

En europeisk kjøpsopsjon, med kontraktspris X og forfall på tidspunkt T har da en verdi på tidspunkt t gitt ved

$$c_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q [\max(S_T - X, 0) | \phi_t] \quad (6.27)$$

hvor E^Q betegner den risikonøytrale betingede forventningsoperatoren, og c_t^{GH} betegner prisen på en opsjon beregnet med GARCH-volatilitet.

7 Implementering og estimering av volatilitetsmodellene

I dette kapittelet ønsker vi å forklare hvordan vi har implementert og estimert de ulike volatilitetsmodellene. Vi starter med Black & Scholes-modellen med henholdsvis 63-dagers konstantvolatilitet og 125-dagers EWMA estimert volatilitet. Deretter følger vi opp med vår Duan tilpassede metode.

7.1 Forutsetninger ved implementering og estimering

I henhold til vårt datasett har vi definert følgende observasjonsperiode der t er element i $[t_0, T]$. Starttidspunktet $t_0 = 1.7.04$ og sluttidspunkt er $T = 1.7.05$. Perioden er delt opp i 250 handledager, som betyr at tidsperioden er inndelt i n intervaller der lengden av en handledag $d = 1/250$. Hver dag observeres et varierende antall europeiske kjøpsopsjoner, og vi har begrenset oss til å studere de opsjonene som er $\pm 5\%$ av kurs S_n . Vi har benyttet oss av historiske avkastninger for å komme frem til de ulike prisene.

7.2 Implementering og estimering av BS' opsjonsprisindemodell

Her benytter vi oss av den teori som er blitt presentert i avsnitt 6.2 og opsjonsprisindeformelen i slutten av dette avsnittet. For å beregne de ulike opsjonsprisene har vi benyttet oss av de dataene som er tilgjengelig. De fleste av variablene er observerbare i markedet, som indekscursen, S_n , risikofri rente, r , antall dager til forfall, $(t_u - t)$, og utøvelsesprisen, K , men vi har beregnet oss frem til volatiliteten, σ^2 . Vi har her skilt mellom konstant og EWMA beregnet volatilitet og oppdatert versus ikke-oppdatert volatilitetsestimat. Modellene vi har benyttet oss av er 63-dagers konstant volatilitet og 125-dager EWMA-volatilitet. En ikke-oppdatert versjon tilsier at volatilitetsestimatet ved t_0 er den volatiliteten som benyttes i hele perioden. Ved et oppdatert estimat benyttes alltid den volatiliteten som er $t_n - 63$ og $t_n - 125$ for henholdsvis volatiliteten til den konstante modellen og volatiliteten for EWMA-modellen. Utløpsdagen for opsjonene er i følge Oslo Børs den 3. torsdagen hver måned. Vi har brukt denne dagen som grunnlag for å finne de ulike prisene. Resultatene vi kom frem til er presentert i sin helhet i tabell 7.1.

Tabell 7.1 Resultater fra BS-modellen og EWMA-modellen

Tid til utløp		ITM	ATM	OTM	Alle opsjonene
Kort periode (7-20 dager)	MP	30,3514	10,5871	1,7540	14,3261
	OppdBS	31,2618	10,2880	1,4238	14,3343
	BS	32,1552	12,1394	2,5284	15,8234
	OppdEWMA	31,2757	10,2440	1,5016	14,3239
	EWMA	31,1328	10,0330	1,1942	14,1157
Medium periode (21-34 dager)	MP	30,4246	13,5662	4,0646	16,1345
	OppdBS	33,1304	14,1841	3,8101	17,1235
	BS	35,0985	17,0383	5,9074	19,6236
	OppdEWMA	33,0549	14,1070	3,9123	17,0781
	EWMA	32,8287	13,6616	3,2293	16,6462
Lang periode (35- dager)	MP	34,3390	17,4277	6,6862	20,0108
	OppdBS	36,1053	17,3804	6,2794	20,3641
	BS	38,8782	21,0158	9,2364	23,6765
	OppdEWMA	35,9200	17,0751	6,1155	20,1111
	EWMA	35,6430	16,7336	5,5381	19,7491
Alle	MP	31,7375	13,9249	4,2103	16,8724
	OppdBS	33,5208	14,0081	3,8814	17,3200
	BS	35,4039	16,8025	5,9527	19,7667
	OppdEWMA	33,4378	13,8625	3,8875	17,2147
	EWMA	33,2221	13,5308	3,3576	16,8805

Observasjonsperiode juli 2004 – juli 2005: Callopsjoner på OBX-indeksen

MP: Gjennomsnittlig markedspris

OppdBS: Gjennomsnittlig oppdatert BS-pris

BS: Gjennomsnittlig BS-pris uten oppdatert volatilitet

OppdEWMA: Gjennomsnittlig oppdatert EWMA-pris

EWMA: Gjennomsnittlig EWMA-pris uten oppdatert volatilitet

Fra tabell 7.1 ser vi at i OTM-kategorien presterer den oppdaterte EWMA-modellen best i den korte og i den mellomlange perioden, mens er den oppdaterte Black-Scholes-modellen best i den lange perioden. For alle periodene i OTM-kategorien ,er OppdEWMA-modellen som kommer nærmest opsjonsprisene i markedet. Her kan vi bemerke at modellene OppdBS, OppdEWMA og EWMA underestimerer verdien til OTM-opsjonene, mens BS-modellen overestimerer verdiene kraftig og det gjelder for alle periodene. I ATM-kategorien ser vi at det fortsatt er OppdBS og OppdEWMA som klarer å treffe opsjonsprisen best. OppdEWMA er nærmest i den mellomlange perioden og for "Alle" perioden, mens OppdBS er best for den korte og den lange observasjonsperioden. Her kan vi ikke se at noen av modellene gjennomgående overestimerer eller underestimerer opsjonsprisen. Modellene i

ITM-kategorien overestimerer verdiene til opsjonene. EWMA-modellen er den modellen som treffer best i forhold til de observerte verdiene. EWMA-modellen er den modellen som presterer best prisanslag hvis du ser alle periodene under et, og BS-modellen er den modellen som presterer dårligst.

7.3 Implementering og estimering av Duans opsjonsprisindemodell

I motsetning til den teorien som er presentert i avsnitt 6.4 har vi gjort noen endringer. Duan benytter en variant av GARCH-M(1,1) til å estimere de fremtidige kursene, men vår undersøkelse av volatilitetsmodellene i kapittel 4 viste at GARCH-M-modellen egner seg dårlig til å predikere vår tidsserie. Hovedargumentet for denne konklusjonen er at volatilitetsparameteren i gjennomsnittsfunksjonen ikke var signifikant forskjellig fra 0. Vi gjør oppmerksom her at vi benyttet oss av de funksjonene som var gitt i S-plus og ikke den GARCH-M-modellen som Duan viste til i sin artikkel. Modellen vi kommer til å benytte oss av er dermed GARCH(1,1).

For å estimere opsjonsprisene for denne modellen benytte vi Monte Carlo Simulering, noe som også Duan viser til i sin artikkel. Som i avsnitt 7.1 estimeres prisene der GARCH modellen oppdateres daglig og en der man bruker GARCH-modellen ved t_0 til å estimere alle prisene. I vår simulering har vi valgt å bruke $N=50000$ gjentakelser som gjør at standardavviket på prisestimatene kommer ned på akseptabelt nivå. Simulering foregår dermed på følgende måte.

$$\varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (7.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad (7.2)$$

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\mu(t_n - t_0) + \varepsilon_{t+1} \sqrt{(t_n - t_0)}\right) \quad (7.3)$$

Her er $(t_n - t_0)$ de antall dager vi ønsker å predikere inn i fremtiden og μ er forventet gjennomsnittlig avkastning. Ligning (7.1) – (7.3) viser at Duans GARCH modell er gjennomsnittlig reverserende i volatilitetsuttrykket og dette fører til at startverdien for volatiliteten ikke har stor betydning for prisestimeringen.

$$C_{K,t_n} = \frac{1}{N} \exp(-r_0(t_n - t_0)) \times \sum_{n=1}^N (S_{t_n,n} - K_K)^+ \quad (7.4)$$

$$\sigma_K = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\exp(-r_0(t_n - t_0))(S_{t_n,n} - K_K)^+ - C_{K,t_n})^2}{(N-1)N}} \quad (7.5)$$

Et estimat av den fremtidig kursen regnes ut for hver gjentakelse og denne verdien sammenlignes med utøvelsesprisen slik at vi får opsjonens verdi, C_{K,t_n} , ved utløp. En vanlig forenkling er at man neddiskonterer gjennomsnittet av disse verdiene og sier at denne verdien er opsjonens prisestimat slik ligning (7.4) viser. σ_K er standardavviket til det gjennomsnittlige prisestimatet.

Ved simuleringen har vi benyttet oss av de tilfeldige verdiene som er gitt av S-plus. Da dette er et statistikkprogram så antar vi at disse tilfeldige variablene vil være tilfeldige nok, slik at vi ikke får repeterende variabler som forstyrrer vår undersøkelse.

I tabell 7.2 har vi gjengitt våre resultater ved å ta gjennomsnittlig verdi for hver eneste periode. Vi bemerker her at Duans Threshold GARCH modell med ikke oppdaterte verdier er den modellen som gir best anslag for opsjonsprisene på OBX-indeksen. Vi observerer også at den oppdaterte duanske GARCH-modellen gir et dårlig estimat i forhold til de observerte prisene i markedet. I motsetning til BS-modellen med konstantbasert- og EWMA basert volatilitet, overestimerer de duanske GARCH-modellene de observerte prisene i alle kategoriene. De duanske GARCH-modellene treffer helt klart best i den korte perioden, mens i både den mellomlange og lange perioden kan man se at estimatene overestimerer kraftig. For å oppsummere, kan man si at opsjonspriser beregnet på bakgrunn av Duans opsjonsprisindeksmodell med TGARCH-volatilitet uten oppdatering gir gjennomgående et mest nøyaktig anslag av opsjonsprisene i markedet, men klarer ikke å treffe de opsjonsprisene i markedet.

Tabell 7.2 Resultater fra Duans opsjonsprisindeksmodell

Tid til utløp		OTM	ATM	ITM	Alle opsjonene
Kort periode (7-20 dager)	MP	30,3514	10,5871	1,7540	14,3261
	OppdDG	31,6099 (0,0977)	11,4696 (0,0646)	2,1570 (0,0285)	15,2317 (0,0676)
	DG	31,3768 (0,0936)	11,0052 (0,0609)	1,7949 (0,0247)	14,8428 (0,0638)
	OppdDTG	31,7591 (0,0980)	11,4912 (0,0649)	2,2100 (0,0290)	15,2911 (0,0679)
	DTG	31,4577 (0,0933)	10,9413 (0,0606)	1,7755 (0,0244)	14,8231 (0,0635)
Medium periode (21-34 dager)	MP	30,4246	13,5662	4,0646	16,1345
	OppdDG	34,1390 (0,1344)	16,1293 (0,0987)	5,4426 (0,0588)	18,7794 (0,1007)
	DG	33,6867 (0,1296)	15,4119 (0,0936)	4,7057 (0,0525)	18,1250 (0,0954)
	OppdDTG	34,1616 (0,1344)	16,1459 (0,0988)	5,4723 (0,0591)	18,7998 (0,1008)
	DTG	33,6289 (0,1289)	15,3228 (0,0929)	4,6381 (0,0519)	18,0475 (0,0948)
Lang periode (35- dager)	MP	34,3390	17,4277	6,6862	20,0108
	OppdDG	37,6505 (0,1632)	19,8881 (0,1244)	8,5481 (0,0828)	22,5922 (0,1277)
	DG	37,2189 (0,1592)	19,2936 (0,1202)	7,8915 (0,0777)	22,0290 (0,1234)
	OppdDTG	37,5883 (0,1627)	19,8130 (0,1239)	8,5314 (0,0827)	22,5294 (0,1273)
	DTG	37,0343 (0,1581)	19,1237 (0,1192)	7,7650 (0,0767)	21,8622 (0,1224)
Alle	MP	31,7375	13,9249	4,2103	16,8724
	OppdDG	34,4915 (0,1319)	15,8965 (0,0964)	5,4430 (0,0572)	18,9230 (0,0991)
	DG	34,1197 (0,1276)	15,3056 (0,0920)	4,8505 (0,0522)	18,3874 (0,0946)
	OppdDTG	34,5276 (0,1319)	15,8828 (0,0963)	5,4645 (0,0575)	18,9276 (0,0991)
	DTG	34,0651 (0,1270)	15,1967 (0,0914)	4,7784 (0,0515)	18,2982 (0,0940)

Observasjonsperiode juli 2004 – juli 2005: Callopsjoner på OBX-indeksen

MP: Gjennomsnittlig markedspris

OppdDG: Gjennomsnittlig oppdatert Duans opsjonspris med GARCH volatilitet

DG: Gjennomsnittlig Duans opsjonspris uten oppdatert GARCH volatilitet

OppdDTG: Gjennomsnittlig oppdatert Duans opsjonspris med TGARCH volatilitet

DTG: Gjennomsnittlig Duans opsjonspris uten oppdatert TGARCH volatilitet

Tabell 7.3 Resultater fra Duans opsjonsprisindeksmodell

Tid til utløp		OTM	ATM	ITM	Alle opsjonene
Kort periode (7-20 dager)	OppdBS	3,00 %	-2,82 %	-18,82 %	0,06 %
	BS	5,94 %	14,66 %	44,15 %	10,45 %
	OppdEWMA	3,05 %	-3,24 %	-14,39 %	-0,01 %
	EWMA	2,57 %	-5,23 %	-31,91 %	-1,47 %
	OppdDG	4,15 %	8,34 %	22,98 %	6,32 %
	DG	3,38 %	3,95 %	2,33 %	3,61 %
	OppdDTG	4,64 %	8,54 %	26,00 %	6,74 %
	DTG	3,65 %	3,35 %	1,23 %	3,47 %
Medium periode (21-34 dager)	OppdBS	8,89 %	4,55 %	-6,26 %	6,13 %
	BS	15,36 %	25,59 %	45,34 %	21,63 %
	OppdEWMA	8,65 %	3,99 %	-3,75 %	5,85 %
	EWMA	7,90 %	0,70 %	-20,55 %	3,17 %
	OppdDG	12,21 %	18,89 %	33,90 %	16,39 %
	DG	10,72 %	13,60 %	15,77 %	12,34 %
	OppdDTG	12,28 %	19,01 %	34,63 %	16,52 %
	DTG	10,53 %	12,95 %	14,11 %	11,86 %
Lang periode (35- dager)	OppdBS	5,14 %	-0,27 %	-6,08 %	1,77 %
	BS	13,22 %	20,59 %	38,14 %	18,32 %
	OppdEWMA	4,60 %	-2,02 %	-8,54 %	0,50 %
	EWMA	3,80 %	-3,98 %	-17,17 %	-1,31 %
	OppdDG	9,64 %	14,12 %	27,85 %	12,90 %
	DG	8,39 %	10,71 %	18,03 %	10,09 %
	OppdDTG	9,46 %	13,69 %	27,60 %	12,59 %
	DTG	7,85 %	9,73 %	16,13 %	9,25 %
Alle	OppdBS	5,62 %	0,60 %	-7,81 %	2,65 %
	BS	11,55 %	20,66 %	41,38 %	17,15 %
	OppdEWMA	5,36 %	-0,45 %	-7,67 %	2,03 %
	EWMA	4,68 %	-2,83 %	-20,25 %	0,05 %
	OppdDG	8,68 %	14,16 %	29,28 %	12,15 %
	DG	7,51 %	9,91 %	15,20 %	8,98 %
	OppdDTG	8,79 %	14,06 %	29,79 %	12,18 %
	DTG	7,33 %	9,13 %	13,49 %	8,45 %

Observasjonsperiode juli 2004 – juli 2005: Callopsjoner på OBX-indeksen

7.4 Sammenligning av de ulike modellene

I tabell 7.3 sammenligner vi alle de ulike modellene med de virkelige prisene i markedet³¹. For å gjøre det mest mulig oversiktlig så er tabellen gitt i prosentvis avvikelse fra markedsprisene. Vi valgte denne løsningen for enkelhetens skyld, slik at sammenligningen blir lettere uten at vi mister noe av modellens innhold.

Vi nevner her at det er oppdaterte EWMA basert prissetting som har gitt den best mulige tilnærmingen i forhold til markedsprisen i kategorien OTM. Modellen avviker relativt mye fra de virkelige prisene med 4,68 %, og vi bemerker at modellene med konstant volatilitet synliggjør verdiene bedre enn GARCH-modellene hvis man ser bort fra den konstante BS-modellen. For ATM kategorien er det fortsatt den oppdaterte EWMA-modellen som gir et best anslag av markedsprisen. Gjennomsnittlig underpriser denne modellen kun markedet med 0,45 %. I den siste kategorien, ITM, presterer fortsatt den oppdaterte EWMA-modellen best, men den gjennomsnittlige verdien underpriser markedet med en litt høyere verdi (7,67 %) enn for ATM-kategorien. Tar man for seg alle periodene anslår EWMA-modellene markedsprisene best, mens BS-modellen gjør det dårligst. Vi nevner her at i vår undersøkelse treffer de konstante modellene så godt fordi modellene overpriser når opsjonene er i OTM, underpriser i ITM og treffer ganske godt når de er ATM. Her kan vi nevne at Duans GARCH-modell har overpriset markedet i alle kategoriene. Det er litt overraskende at disse modellene ikke presterer bedre enn de konstante modellene, siden man observerer at volatiliteten i markedet ikke er konstant.

På bakgrunn av vår analyse bemerker vi at det er beregninger gjort med de konstante volatilitetene som klarer å forutsi markedsprisene på opsjonene i det norske markedet best. Vi nevner at alle modellene bommer relativt mye i OTM- og ITM- kategorien der noe av årsaken kan være volatilitetssmilet til indeksen eller at markedet tar høyde for at

³¹ Antall observasjoner i de ulike kategoriene er som følger:

Tid til utløp	OTM	ATM	ITM	Alle opsjonene
Kort periode (7-20 dager)	201	458	120	779
Medium periode (21-34 dager)	194	445	135	774
Lang periode (35- dager)	205	482	127	814
Alle	600	1385	382	2367

avkastningsserien har fetere haler enn hva normalfordelingen tilsier. Dette ville kunne være et interessant utgangspunkt for videre forskning innenfor dette feltet.

8 Oppsummering og Konklusjon

I denne oppgaven har vi studert de empiriske egenskapene til ulike volatilitetsmodeller og undersøkt hvordan disse modellene kan benyttes ved verdsettelse av opsjoner på Oslo Børs. Vi har i hovedsak vurdert 4 ulike volatilitetsmodeller mot hverandre: GARCH(p,q), TGARCH(p,q), EWMA og en konstant modell. De empiriske resultatene fra de ulike modellene er blitt belyst, og til slutt falt vi ned på 4 konkrete modeller som vi ønsket å benytte i vår videre analyse. Ved å bruke disse variantene ønsket vi å finne hvilken av modellene som sammen med Black and Scholes(1976) og Duans opsjonsprisindemodell, kunne predikere opsjonsprisene til OBX-indeksen best.

GARCH(p,q), TGARCH(p,q) og EWMA er modeller som skal prøve å fange opp egenskaper som er svært synlig i finansielle tidsrekker. De bygger på antagelser om at volatiliteten er mulig å modellere og at den endrer seg over tid. Vi studerte vår tidsserie og viste blant annet at tidsserien er heteroskedastisk. Det neste kapittelet tok for seg en presentasjon av den teoretiske bakgrunnen for de ulike modellene, og hvilke metoder som benyttes for å estimere parametrene for de ulike volatilitetsmodellene. Kapittel 4 følger med en presentasjon av modellestimeringen og ulike grafiske fremstillinger av de ulike modellene, og i kapittel 5 gjennomfører vi en prediksjonskonkurranse for å avgjøre hvilke av modellene som best predikerer volatiliteten. Av konkurransen i kapittel 5 valgte vi 4 ulike volatilitetsmodeller som gikk videre i undersøkelsen; GARCH(1,1), TGARCH(1,1), EWMA(125) og Konstant(63). I kapittel 6 gjennomgikk vi den teoretiske beskrivelsen av prising av opsjoner, og hvilken teknikk som benyttes ved prissettingen. Avslutningsvis tar vi for oss prissettingen og prøver å finne ut hvilken modell som best predikerer prisene i markedet.

8.1 Oppsummering av resultatene

I kapittel 4 evaluerte vi ulike volatilitetsmodeller mot en konstant modell. For å gjøre vår undersøkelse så hentet vi datamaterialet fra Oslo Børs, med daglige og ukentlige observasjoner på OBX-indeksen i perioden 4/1-1996 til 1/7-2004. Med bakgrunn i dette tallmaterialet fant vi de ulike modellene som tilpasset seg perioden best. Ved å benytte Schwartz informasjonskriteriet som beslutningskriterium, endte vi opp med følgende

varianter av GARCH-modellene: GARCH(1,1), EGARCH(1,1), PGARCH(1,1,2), TGARCH(1,1), PGARCH(1,1,1), GARCH-in-mean og GARCH-in-var. Det vi observerer er at tidsserien vår har asymmetrisk volatilitet; at man kunne få bedre tilpasset parametere med bruk av student-t fordeling istedenfor den gaussiske, og at de ukentlige observasjonene egnet seg dårlig for å tilpasse en modell til vår tidsserie. Fra de grafiske fremstillingene i figur 4.3-6 kunne vi se at det var stor variasjon i betinget volatilitet for den ukentlige og daglige tidsserien.

Kapittel 5 tok for seg en konkurranse mellom 4 ulike modeller som skulle gir svar på deres prediksjonsegenskaper. Først foretok vi en sammenligning av de ulike volatilitetsmodellene prediksjonsevne over en tidsperiode på 5, 10, 21, 63 dagers horisont(1 uke, 2 uker, 1 måned, 3 måneder). Modellene ble rangert opp mot hverandre ved hjelp av velkjente metoder som gjennomsnittsfeil(ME), gjennomsnittlig kvadrert prediksjonsfeil(RMSE), gjennomsnittlig absolutt feil(MAE) og median standard feil(MedSE), der resultatene ble oppsummert gjennom tabell 5.5(5.10). Vi nevner at det var de konstantbaserte volatilitetsmodellene med begrenset observasjoner som hadde best predikative egenskaper gjennom EWMA-modellen, og det var de lange konstante modellene som egnet seg dårligst. Fra denne prediksjonskonkurransen skulle vi ha 4 ulike modeller videre i vår undersøkelse. Modellene som vi ønsket å benytte videre i vår undersøkelse, ble Konstant(63), EWMA(125), GARCH(1,1) og TGARCH(1,1).

Avslutningsvis benyttet vi markedsprisene fra handlede OBX-call-opsjoner for å finne ut hvilken av modellene som best klarte å gjenskape prisene i markedet. Vi benyttet oss av Monte-Carlo simulering og Duans opsjonsprisnings modell for å finne de ulike prisene. Vi skilte mellom modeller med daglige oppdaterte volatilitetsestimater og volatiliteten gitt den 1.7.2004. Våre resultater er oppsummert i tabell 7.3, og som for prediksjonskonkurransen var det de konstante modellene som kom best ut. EWMA modellen hadde en svært liten feilmargin hvis man sammenlignet alle periodene. Andre viktige observasjoner er at de ulike modellene bommer kraftig når opsjonene er Out-of-the-money og In-the-money. I vår undersøkelse egnet GARCH- og TGARCH-modellen seg svært dårlig som prisingsmodell for opsjonene i markedet.

8.2 Utvidelser og forbedringspotensiale

I denne oppgaven har vi konsentrert oss om modeller for historisk volatilitet og for markeder der handel med derivater ikke eksisterer, vil det være eneste mulighet for volatilitetsprediksjon. Ved å studere opsjonsprisene i markedet kan man også benytte implisitt volatilitet som prediksjonsgrunnlag. I tillegg, som tidligere nevnt, kan beregninger gjort på bakgrunn av latente stokastiske volatilitetsmodeller også bli brukt for å finne prisene til de ulike opsjonene.

Vår undersøkelse er gjort på det norske markedet der opsjoner kun har eksistert en kort periode³². Det kunne vært interessant å gjøre en tilsvarende undersøkelse i markeder der derivater har eksistert lengre enn i Norge. Dette vil sannsynligvis føre til at tilgjengelig datamateriell av opsjonspriser er atskillig større enn det grunnlaget som vi hadde. Sant skal sies at handelsvolumet til opsjonene har økt betraktelig de siste årene, slik at en nyere undersøkelse også vil kunne gi en mer bastant konklusjon enn denne utredningen gjennomført av oss.

³² 20. mai 1990 ble det åpnet for handel av opsjoner på Oslo Børs(www.ose.no)

9 Referanser

Akgiray, V., (1989), *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence an Forecasts*, Journal of Business, vol. 62, 55- 80

Amin, K., og Ng, V., (1993) *ARCH Processes and Option Valuation*, working paper, University of Michigan.

Black F. og Scholes, M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637-659

Bollerslev. T. (1986) *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics, v(31), 307-327.

Bollerslev. T. (1984) *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics, 69, 542-547

Box, G.E.P. og Jenkins, G.M. (1976) *Time Series Analysis: Forecasting and control*, 2nd edn, Holden-Day, San Francisco

Brooks, C., (2002), *Introductory Econometrics for Finance*

Ding, Z., Granger, C.W.J. og Engle, R.F., (1993), *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Modell*, Journal of Empirical Finance, 1, 83-106

Dickey, D.A og Fuller, W.A. (1979), *Distribution for the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Journal of the American Statistical Association, 74, 427-431

Duan, J.C. (1995), *The Garch Option Pricing Model*, Mathematical Finance, Vol.5, No. 1, 13-32

Duan, J. C. og Simonato, J. G. (1998), *Empirical Martingale Simulation for Asset Prices*, Management Science, 44, 1218-1233

-
- Duan, J. C. og Simonato, J. G. (1999), *American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain approximation*, Working paper, Hong Kong University of Science and Technology
- Dumas, B., Fleming, J., og Whaley, R. E., (1998), *Implied Volatility Functions: Empirical Tests*, The Journal of Finance, Vol. LII, No.6
- Engle, R. F., (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica 50, 987-1007
- Engle, R.F., Lilien, D.M. og Robins, R.P., (1987), *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term-Structure: the ARCH-M Model*, Econometrica, 55 (2), 391-407
- Engle, R. F., Kane, A. og Noh, J., (1993), *Index-Option Pricing with Stochastic Volatility and the Value of Accurate Variance Forecast* Working Paper 93-143, University of California, San Diego
- Engle, R. F. og Mustafa, C., (1992), *Implied ARCH Models from Options Prices*, Journal of Econometrics, 52, 289-311
- Engle, R.F. og Ngs, V.K., (1993), *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, Journal of Finance, 48(5), 1749 - 1778
- Fama, E. E., (1965), *The Behavior of Stock Market Prices*, Journal of Business, 38, 34-105
- Forelesningsnotater (2005) i kurset *Time Series Analysis(ECO403)* ved Norges Handelshøyskole, foreleser Jonas Andersson, vårsemesteret
- Forelesningsnotater (2005) i kurset *Derivater(FIN 325)* ved Norges Handelshøyskole, foreleser Jøril Mæland, vårsemesteret
- Franses, P.H, og Van Dijk, D. (1996) *Forecasting Stock Market Volatility Using (Non-Linear) Garch Models*, Journal of Forecasting, Vol. 15, 229-235

-
- French, K.R., (1980), *Stock Returns and the Weekend Effect*, Journal of Financial Economics, 8, 55-69.
- Hansson, B., og Hørdahl, P., (1996), *Forecasting Variance Using Stochastic Volatility and GARCH*, Paper presentert ved EFA årlige konferanse, Oslo Plaza, 28-30 august
- Heston, S.L., (1993), *A closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to bond and currency Options*, The Review of Financial Studies, 6(2), 327-343
- Heston, S.L og Nandi S. (2000), *A closed-form GARCH Option Valuation Model*, The Review of Financial Studies, 13(3), 585-625
- Heynan, R.C. og Kat, H.M. (1994), *Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH(1,1) og EGARCH(1,1) Models*, Journal of Derivatives, 55-65
- Hjortshøj, T. Joensen, J. Kallestrup, M. og Lund, J. (2003) *Pricing S&P 500 Call Options*,
- Hull, J.C. (2003), *Options, Futures and other Derivatives*, Fifth edition.
- Hull, J. og White, A. (1987), *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The Journal of Finance, XLII(2)
- Jarque, C.M. og Bera. A.K. (1980), *Efficient Tests for Normality, Homoskedasticity og Serial Dependence of Regression Residuals*, Economic letters, 6,
- Koekebakker, S. (1997), *Modellering og Prediksjon av Volatilitet i Valutamarkedet*, Skriftlig utredning ved HAS i økonomisk administrative fag på Norges Handelshøyskole.
- Kwiatkowski, D., Philips, P.C.B., Schmidt, P. og Shin, Y. (1992), *Testin the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root*, Journal of Econometrics, 54, 159-178
- Lillestøl, J. (1997), *Sannsynlighetsregning og statistikk med anvendelser*, 5. utgave

Ljung, G.M. og Box, G.E.P. (1978), *On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models*, *Biometrika*, 65, 297-303

Maddala, G.S. (2001), *Introduction to Econometrics*, 3rd edition

Nelson, D.B.(1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, *Econometrica* 59(2), 703-708

Pagan, A.R. and Schwert, G.W.(1990), *Alternative Models fro Conditional Stock Volatilities*, *Journal of Econometrics* 45, 267-290

Rakkestad, K.J.(2003), *Estimering av indikatorer for volatilitet*, Working Paper, Norges Bank

Ritchken, P. og Trevor, R., (1990), *Pricing Options under Generalized(GARCH) and Stochastic Volatility Processes*, *Journal of Finance*, 59(1), 377-402

Ross, Stephen. (1976), *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, *Journal of Economic Theory*, 13: 341-360.

Schwarz, G., (1978), *Estimating the Dimension of a Model*, *Annals of Statistics* 6, 461-464

Sharpe, William F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, *Journal of Finance*, 19 (3), 425-442.

Tsay, Ruay S. (2002), *Analysis of Financial Time Series*.

Zakoian, J.M., (1994), *Threshold Heteroskedastic Models*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955

Zivot, Eric og Wang, J. (2003), *Modeling Financial Time Series with S-Plus*.

White, H. (1980). *A Heteroskedasticity- Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity*, *Econometrica*, v(48), 817-838