UiO : Matematisk institutt

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Cremonatransformasjonar og elliptiske kurver i $\mathbb{P}^4$

Anders Klungre

Masteroppgåve, hausten 2015

Innleiing

Matematikk har frå dei tidligste tider vore noko vi menneskje har brukt for å skildre og forstå verda rundt oss. Våre eldste forfedre brukte kanskje fingrane for å beskrive kor mange vilt dei hadde felt på ein dag, eller for å bli enige om kor mange gulrøter dei skulle hente opp frå åkeren til middag.

I dag har vi med vår trang til å utforske, utvikla matematikken milevis vidare frå dette. I denne oppgåva vil vi hovudsakleg arbeide i $\mathbb{CP}^4$, som er det projektive rommet i 4 dimensjonar over dei komplekse tala. Eit firedimensjonalt rom er ikkje så enkelt å forestille seg i utgangspunktet, og når vi jobbar over dei komplekse tala, gjer ikkje det bildet noko enklare.

Teorien om *elliptiske kurver* er prega av si lange historie og mangfoldet av metodane som er blitt brukt i studiene av denne. Vi skal sjå på korleis ei elliptisk kurve oppfører seg under ein bestemt Cremonatransformasjon. Vi vil sjå at Cremonatransformasjonen vi vel vil gje oss fleire interessante og vakre samanhengar.

Eit av dei viktigste verktya vi kjem til å bruke for å sjå desse samanhengane, er *Heisenberggruppa*, som har fått namn etter Werner Heisenberg. Heisenberggruppa vår er slik at alle elliptiske kurver i $\mathbb{P}^4$ er projektivt ekvivalente med ei elliptisk kurve som er invariant under Heisenberggruppa. Dette vil i stor grad hjelpe oss til å få fram resultata vi er ute etter.

Det krevst ein del utrekningar når vi skal jobbe i $\mathbb{P}^4$. Dei har eg hovudsakleg brukt programmet *Macaulay2* til å rekne ut. Programkode er vedlagt for ein del viktige resultat. For å forenkle utrekningane, let eg $\epsilon = 2$, og ser på den endelege kroppen med 31 element. Då vil $\epsilon^5 = 1$, sidan $2^5 = 32$. Sjølv om vi no jobbar med ein endeleg kropp, vil vi likevel ha meir enn nok informasjon for å finne det vi er interessert i.

Kapittel 1 listar eg opp ein del teorem og definisjonar som blir brukt i oppgåva. Her er Bézouts teorem det aller mest sentrale, som vi kjem til å benytte igjen og igjen. Eg definerer også den elliptiske kurva som eg skal jobbe med.

I **Kapittel 2** definerer eg Heisenberggruppa, og ser på kva polynom som er invariante og absolutt invariante under undergrupper av denne.

Vidare ser eg på nokre av eigenskapane til den elliptiske kurva eg har definert, i **Kapittel 3**.

I **Kapittel 4** dreg eg inn sekantvarieteten, den har nokre interessante resultat knytt til seg. Her vil eg blant anna sjå at den elliptiske kurva mi er trippel langs sekantvarieteten.

Sist, men ikkje minst: i **Kapittel 5** introduserer eg omsider Cremonatransformasjonar, og ser på korleis desse verkar, først i $\mathbb{P}^2$ og deretter i $\mathbb{P}^4$.

Takk

Når denne oppgåva endeleg står ferdig, er det kanskje eit av dei siste kapitla i mitt studieliv som fell på plass. Då er det på sin plass å takke for hjelpa på vegen.

Eg har hatt mange gode studiepartnarar opp igjennom åra. Det er mange fleire eg kunne trekt fram, men Stian Lersveen, Fredrik Grøvdal og Sivert Bocianowski nemnast spesielt, både fordi dei har vore ypperlege samarbeidspartnarar og reflekterte menneskje. Det har vore uvurderleg å ha nokon å stange hovudet i veggen i lag med.

Ei stor takk går også til mine tidlegare mattelærarar. Liv Øygard, Tor Larsen, Birgitte Paulen og Inge Fjerdingstad; takk for at de var med på å styrke gleda mi for matematikk. Den jobben de har vore med på å gjere som lærarar i skulen er heilt grunnleggande, og eg håpar det er noko fleire kan sjå ein større viktighet av i tida som kjem.

Takk også til mine fantastiske besteforeldre som var til stades kvar einaste dag når eg skulle gjere lekser, og spesielt Svanhild som gjerne hjalp meg med alt eg trengte sjølv om ho var pensjonert. Du har vore ei fantastisk bestemor og er det fortsatt.

Takk til min flotte familie. De gjev meg glede og tryggleik i kvardagen. Eg er skikkeleg heldig som har dykk i livet mitt.

Sist, men ikkje minst, takk til min supre veiledar Kristian Ranestad. Di utømmelege evne til å komme med forslag til kva eg kan jobbe med, og forklare alt eg har lurt på, har ikkje vore noko anna enn essensielt. Takk igjen!

Innhald

Kapittel 1

Grunnmur

Eg ser først på dei begrepa og teorema vi kjem til å bruke - grunnmuren i denne oppgåva.

1.1 Projektive rom, hyperflater og oppblåsing

I denne oppgåva vil vi hovudsakleg jobbe i det projektive rommet $\mathbb{P}^4$ over $\mathbb{C}$. $\mathbb{P}^n$ vil alltid beteikne det projektive rommet over $\mathbb{C}$ i n dimensjonar, gitt ved $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$, der $(a_0, a_1, ..., a_n), (b_0, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ er slik at $(a_0, a_1, ..., a_n) \sim (b_0, b_1, ..., b_n)$ hvis og berre hvis det fins ein konstant $k \in \mathbb{C}$ slik at $(a_0, a_1, ..., a_n) = (kb_0, kb_1, ..., kb_n)$. Geometrisk vil dette tilsvare at $\mathbb{P}^n$ er unionen av alle linjer som går gjennom origo i $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{P}^n$ kan også identifiserast som unionen $\mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup ..... \cup \mathbb{A}^1 \cup \{\text{punkt}\}$, der $\mathbb{A}^n$ beteiknar det affine rommet over $\mathbb{C}$ i n dimensjonar.

Vi vil hovudsakleg arbeide med varietetar i $\mathbb{P}^4$. La $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \oplus_{d=0}^{\infty} R_d$ vere den graderte ringen der R_d beteiknar mengda av homogene polynom med koeffisientar i $\mathbb{C}$ av grad d. Dersom T er ei mengd med homogene polynom i R, har vi ein naturleg relasjon mellom R og $\mathbb{P}^4$ ved at vi set $Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n | f(P) = 0 \text{ for alle } f \in T\}$.

Om ein har eit homogent polynom $f \in R$ av grad d, vil $Z(f)$ definere ei *hyperflate* av grad d. Ei hyperflate av grad 1 blir kalt eit *hyperplan*. Ein varietet av dimensjon 1 blir kalt ei projektiv *kurve*. Dersom graden til varieteten i tillegg er 1, har vi ei projektiv *linje*.

Punkt, linjer, plan og andre varietetar av grad 1 blir definert på følgjande måte: Er dimensjonen lik r, og varieteten ligg i $\mathbb{P}^n$, er den definert som snittet av nullpunktsmengda til $n - r$ lineært uavhengige lineære polynom $f_0, f_1, ...f_{n-r-1}$ i R der $f_i \neq kf_j$ for alle $k \in \mathbb{C}, i \neq j$.

Definisjon 1.1. [2, s. 7-8] Ein *projektiv transformasjon* er ei avbildning

$$\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$$
$$(x_1, ..., x_n) \to (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$$

der

$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ & \vdots & \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definisjon 1.2. [2, s. 54] To irredusible projektive kurver C og C' er *projektivt ekvivalente* dersom C er avbilda på C' ved ein projektiv transformasjon.

Definisjon 1.3. [1, s. 125] For alle ideal $I \subseteq R$, er *satureringa* $\bar{I}$ av I gitt ved

$$\bar{I} = \{r \in R | \text{ for kvar } i = 0,...,4 \text{ fins } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ slik at } x_i^n r \in I\}.$$

Vi seier at I er *saturert* dersom $I = \bar{I}$.

Saturering er eit viktig virkemiddel. Nullpunktsmengda til eit homogent ideal i eit projektivt rom endrar seg ikkje om ein saturerer idealet, men generatorane til idealet blir betrakteleg forenkla.

Definisjon 1.4. [1, s. 51] Dersom p er eit minimalt primideal i ein gradert S-modul M, definerer vi $\mu_p(M)$, *multiplisiteten* til M i p, til å vere størrelsen på M_p over S_p.

Definisjon 1.5. [1, s. 53] La $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ vere ein projektiv varietet av dimensjon r, og la H vere ei hyperflate som ikkje inneheld Y. La $Y \cap H = Z_1 \cup ... \cup Z_s$, der Z_j er varietetar av dimensjon $r - 1$. La p_j vere det homogene primidealet til Z_j. *Snittmultiplisiteten* til Y og H langs Z_j er då definert til å vere $i(Y, H; Z_j) = \mu_{p_j}(S/(I_Y + I_H))$, der I_Y og I_H er dei homogene ideala til Y og H.

Vi observerer av dette blant anna at snittmultiplisiteten mellom ei hyperflate og ei linje i eit punkt P er alltid større enn eller lik multiplisiteten til hyperflata i P.

Eit viktig teorem når vi skal betrakte projektive hyperflater og kurver, er Bézouts teorem. Beviset for dette ligg i [1, kap.I.7]:

Teorem 1.6 (Bézouts teorem)**.** [1, s. 53] La Y vere ein varietet av grad c og dimensjon ≥ 1 i $\mathbb{P}^n$, og la H vere ei hyperflate av grad d som ikkje inneheld Y. La $Z_0, Z_1, ..., Z_s$ vere dei irredusible komponentane til $Y \cap H$, som har grad henholdsvis $z_0, z_1, ..., z_s$. Då er $\sum_{j=0}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot z_j = cd$ der $i(Y, H; Z_j)$ er snittmultiplisiteten til Y og H i Z_j.

Den spesielle Bézout gjev då:

Korollar 1.6.1 (Bézouts teorem i planet)**.** [1, s. 54] La Y, Z vere distinkte kurver i $\mathbb{P}^2$ av grad henholdsvis c og d, og la $Y \cap Z = P_1, P_2, ...P_s$. Då er $\sum i(Y, Z; P_j) = c \cdot d$

Oppblåsing er ein viktig del av mitt arbeid med Cremonatransformasjonen. Her er definisjonen av oppblåsing i eit affint rom.

Definisjon 1.7. [1, s. 28-29] Oppblåsinga av $\mathbb{A}^n$ i punktet O er den lukka undermengda X av $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ som er definert ved likningane $x_i y_j = x_j y_i | i, j = 1, ..., n$. Vi har ein naturleg morfi $\phi : X \to \mathbb{A}^n$ ved å restriktere projeksjonsavbildninga til den første faktoren.

Hvis Y er ein lukka undervarietet av $\mathbb{A}^n$ som går gjennom O, definerer vi då oppblåsinga av Y i punktet O til å vere $\tilde{Y} = (\phi^{-1}(Y - O))^-$, der $\phi : X \to \mathbb{A}^n$ er oppblåsinga av $\mathbb{A}^n$ i punktet O. For å blåse opp i eit anna punkt P i $\mathbb{A}^n$, gjer ein lineær transformasjon av koordinatar for å sende P til O, blås opp, og send bildet tilbake.

Oppblåsing i eit punkt i $\mathbb{P}^n$ fungerer på samme måte som i $\mathbb{A}^n$ etter at ein har satt ein koordinat x_i i $\mathbb{P}^n$ lik 1, sidan ein då får ein homeomorfi mellom den opne mengda $\mathbb{P}^4 / \{x_i = 0\}$ og $\mathbb{A}^n$. [1, s. 10]

1.2 Den elliptiske kurva C_a

Ei *elliptisk kurve* i $\mathbb{P}^4$ er gitt som snittet av nullpunktsmengda til 5 forskjellige kvadrikkar. [3, s. 35] Dette er naturleg nok ikkje eit komplett snitt. Ved ein projektiv transformasjon kan vi få desse kvadrikkane til å bli 5 nye kvadrikkar, nemlig eksakt

$$\begin{aligned}
K_0 &= {x_0}^2 + ax_2x_3 - \frac{1}{a}x_1x_4 \\
K_1 &= {x_1}^2 + ax_3x_4 - \frac{1}{a}x_0x_2 \\
K_2 &= {x_2}^2 + ax_0x_4 - \frac{1}{a}x_1x_3 \\
K_3 &= {x_3}^2 + ax_0x_1 - \frac{1}{a}x_2x_4 \\
K_4 &= {x_4}^2 + ax_1x_2 - \frac{1}{a}x_0x_3
\end{aligned}$$

for ein $a \in \mathbb{C}$. Vi får då ei elliptisk kurve som er gitt ved

$$C_a = Z(I)$$

der

$$I = (K_0, K_1, K_2, K_3, K_4).$$

Alle elliptiske kurver i $\mathbb{P}^4$ er med dette projektivt ekvivalente med ei elliptisk kurve på denne forma, og opp til projektiv ekvivalens har vi då ein einparameterfamilie med elliptiske kurver.

Dei fleste elliptiske kurvene er glatte. Dersom $a \in \mathbb{P}^1 - \{0, \infty, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^i\}$, $i = 0, ..., 4$, vil C_a vere glatt. Dersom derimot $a \in \{0, \infty, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^i\}$, $i = 0, ..., 4$, vil C_a bestå av 5 linjer som skjer kvarandre to og to i singulære punkt. [3, s. 56] Det er då 12 slike elliptiske kurver, og ei slik elliptisk kurve vil vi kalle eit *pentagon*.

For to og to av pentagona vil dei singulære punkta vere like. Dette gjeld for pentagona der $a = 0$ og $a = \infty$, og for pentagonet der $a = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\varepsilon^i$, har pentagonet der $a = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\varepsilon^i$ dei same punkta. Dei 12 pentagona har då til saman 30 singulære punkt. Vi kjem til å sjå nærare på desse seinare.

Kapittel 2

Heisenberggruppa H

Vi vil no jobbe i den graderte ringen R. Vi set $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$, og definerer τ og σ til å virke på R slik at $x_j \overset{\tau}{\mapsto} \varepsilon^j x_j$ og $x_j \overset{\sigma}{\mapsto} x_{j-1}$. Spesielt vil $x_0 \overset{\sigma}{\mapsto} x_4$.

Eit av dei grunnleggande elementa i denne masteroppgåva er Heisenberggruppa av type 5. Den er gitt ved $H = \langle \sigma, \tau \rangle$. H kan bli sett på som ei undergruppe av $GL(4, \mathbb{C})$, som er generert av σ og τ der

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon^4 \end{pmatrix}$$

Her vil $\varepsilon^5 = \sigma^5 = \tau^5 = id$. Sidan $\sigma\tau = \varepsilon\tau\sigma$, vil alle kombinasjonar av τ og σ kunne skrivast på forma $\varepsilon^j \tau^k \sigma^l$, der $j, k, l \in \mathbb{Z}_4$.

Senteret til H vil vere $\mu = \{\varepsilon^m | m \in \mathbb{Z}_4\}$, og dette gjev den eksakte følgja

$$1 \to \mu \to H \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \to 1$$

der σ og τ blir avbilda på henholdsvis $(1,0)$ og $(0,1)$.

Sidan alle element på forma $\varepsilon^j \tau^k \sigma^l$ vil vere med i H, har vi då at $|H| = 5^3 = 125$.

Alle elementa i H utenom identiteten er derav av orden 5, og kvart slikt element genererer då ei syklisk gruppe av orden 5. Vi har at sidan

$$(\varepsilon^j \tau^k \sigma^l)(\varepsilon^{j'} \tau^{k'} \sigma^{l'}) = \varepsilon^{j+j'} \tau^k \sigma^l \tau^{k'} \sigma^{l'} = \varepsilon^{j+j'+k'l} \tau^{k+k'} \sigma^{l+l'}$$

så er gruppeoperasjonen gitt ved

$$(j, k, l) * (j', k', l') = (j + j' + k'l, k + k', l + l')$$

Identitetselementet er $(0,0,0)$, og inversen til (j,k,l) er $(kl - j, -k, -l)$. Ut frå dette kan vi finne konjugasjonsklassene til gruppa.

Lemma 2.1. H består av 5 konjugasjonsklasser med 1 element, og 24 konjugasjonsklasser med 5 element.

Bevis. Dersom eit element (a, b, c) skal vere i same konjugasjonsklasse som (a', b', c'), må det finnast eit element $(j, k, l) \in H$ som er slik at

$$(a, b, c) = (j, k, l) * (a', b', c') * (kl - j, -k, -l) = (a' - kc' + b'l, b', c')$$

Sidan $b = b'$ og $c = c'$ kan ikkje storleiken på konjugasjonsklassene vere større enn 5. Dersom $b = c = 0$, får vi at $a = a' - k \cdot 0 + l \cdot 0 = a'$. Då får vi 5 konjugasjonsklasser med 1 element. Dersom vi vel andre verdiar for b og c, vil vi kunne finne $k, l \in \mathbb{Z}_4$ slik at $(a, b, c) = (a' - kc' + b'l, b', c')$ for alle $a, a' \in \mathbb{Z}_4$. Dette gjev altså $5^2 - 1 = 24$ konjugasjonsklasser med 5 element. □

Lemma 2.2. C_a er invariant under H.

Bevis. τ utgjer ingen forskjell for kvadrikkane, fordi $\tau(K_i) = K_i$. Samtidig vil $\sigma(K_i) = K_{i-1}$ for alle $i \in \mathbb{Z}_4$, som avbildar kvadrikkane på kvarandre, og nullpunktsmengda forblir då uendra. □

Både τ og σ restriktert til kurva vil altså vere automorfiar. Dette er ikkje tilfeldig. H er konstruert akkurat slik at C_a skal vere invariant under denne. Eit spørsmål er likevel om det finst punkt på C_a som er invariant under H, dette vil vi sjå på seinare.

2.1 Invariante og absolutt invariante polynom under H

For kvar d er R_d ei mengd polynom som kan også kan sjåast på som eit vektorrom, men dimensjonen er forskjellig for kvar verdi av d. Vektorrommet av 5-gradspolynom har naturleg nok dimensjon 5, men derifrå eskalerer det fort: Grad 2 gjev dimensjon 15, grad 3 gjev dimensjon 35, grad 4 gjev dimensjon 70 og grad 5 gjev dimensjon 126.

Eit polynom P er *invariant* under H dersom $\sigma(P) = tP$ og $\tau(P) = sP, s, t \in \mathbb{C}$. P er *absolutt invariant* dersom også $s = t = 1$.

Vektorrommet for kvar verdi av d er ikkje berre fullstendig forskjellige, det er også forskjell på korleis vi kan dekomponere desse slik at kvart underrom er invariant under H. Både for grad 1, 2, 3 og 4 kan vi dekomponere heile vektorrommet i underrom som kvar har dimensjon 5. Underromma får ein ganske enkelt ved å ta kvar av koordinatvektorane og sjå på underrommet generert av kvar koordinatvektor i orbiten til denne under σ. Dette underrommet kan ikkje dekomponerast til eit mindre underrom; orbiten til ein vilkårleg vektor i kvart av desse underromma har lengde minst 5, og vektorane i orbiten utspenner heile underrommet.

Sidan vektorrommet av 5-gradspolynom av grad 5 har dimensjon $126 \not\equiv 0 \pmod 5$, har vi ikkje det same tilfellet her. Men - her kan vi faktisk dekomponere heile vektorrommet i 126 underrom som er invariante under H. Desse får vi fram ved å først finne orbiten til ein koordinatvektor under σ. La oss seie at vi tek koordinatvektoren $x_0^3x_1x_2$. Under virkninga av σ dukkar $x_1^3x_2x_3, x_2^3x_3x_4, x_3^3x_4x_0$ og $x_4^3x_0x_1$ opp. Då kan vi komponere 5 polynom som kvar utspenner eit eindimensjonalt vektorrom:

$$
\begin{gathered}
x_0^3x_1x_2 + x_1^3x_2x_3 + x_2^3x_3x_4 + x_3^3x_4x_0 + x_4^3x_0x_1 \\
x_0^3x_1x_2 + \varepsilon x_1^3x_2x_3 + \varepsilon^2 x_2^3x_3x_4 + \varepsilon^3 x_3^3x_4x_0 + \varepsilon^4 x_4^3x_0x_1 \\
x_0^3x_1x_2 + \varepsilon^2 x_1^3x_2x_3 + \varepsilon^4 x_2^3x_3x_4 + \varepsilon x_3^3x_4x_0 + \varepsilon^3 x_4^3x_0x_1 \\
x_0^3x_1x_2 + \varepsilon^3 x_1^3x_2x_3 + \varepsilon x_2^3x_3x_4 + \varepsilon^4 x_3^3x_4x_0 + \varepsilon^2 x_4^3x_0x_1 \\
x_0^3x_1x_2 + \varepsilon^4 x_1^3x_2x_3 + \varepsilon^3 x_2^3x_3x_4 + \varepsilon^2 x_3^3x_4x_0 + \varepsilon x_4^3x_0x_1
\end{gathered}
$$

Ved å benytte seg av ε på same måte kan alle dei andre koordinatvektorane som ligg i den same orbiten under σ danne eindimensjonale vektorrom, og $x_0x_1x_2x_3x_4$ dannar sitt eige invariante vektorrom. Alle polynoma i desse eindimensjonale vektorromma er naturleg nok invariante under H.

Men - er det då fleire polynom som er invariante under H i andre vektorrom?

Lemma 2.3. Graden til eit homogent polynom som er invariant under virkninga av H er deleleg med 5.

Bevis. Anta at eit ledd av grad d på forma $x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}$ er inneholdt i eit polynom A invariant under σ. Då vil også eit ledd på forma $\sigma(x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}) = x_0^{a_1}x_1^{a_2}x_2^{a_3}x_3^{a_4}x_4^{a_0}$ vere inneholdt i A. Vidare iterasjon gjev at dersom monomet på forma $x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}$ er inneholdt i A, må heile

$$x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4} + x_0^{a_1}x_1^{a_2}x_2^{a_3}x_3^{a_4}x_4^{a_0} + x_0^{a_2}x_1^{a_3}x_2^{a_4}x_3^{a_0}x_4^{a_1} + x_0^{a_3}x_1^{a_4}x_2^{a_0}x_3^{a_1}x_4^{a_2} + x_0^{a_4}x_1^{a_0}x_2^{a_1}x_3^{a_2}x_4^{a_3}$$

vere inneholdt i A.

Monoma på forma $x_0^ax_1^ax_2^ax_3^ax_4^a$ er er då dei einaste monoma som er invariante under H, sidan det er dei einaste monoma som er invariante under σ, og i tillegg er dei invariante under τ også.

Anta no at eit slikt polynom også er invariant under τ. Då vil

$$\begin{aligned}
&a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 \\
&\equiv a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \\
&\equiv a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_0 \\
&\equiv a_3 + 2a_4 + 3a_0 + 4a_1 \\
&\equiv a_4 + 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 \\
&\equiv 0 (\text{mod } 5)
\end{aligned}$$

og vi har då at

$$\begin{aligned}
d = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - 4a_4 \\
= (a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) &\equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod 5
\end{aligned}$$

□

Monoma på forma $x_0^ax_1^ax_2^ax_3^ax_4^a$ er er då dei einaste monoma som er invariante under H, sidan det er dei einaste monoma som er invariante under σ, og i tillegg er dei invariante under τ også.

Nokre av 5-gradspolynoma som er invariante, er også absolutt invariante. Eg vil no spesifikt sjå på kva 5-gradspolynom som er absolutt invariant under virkninga av H. Det skal vise seg at det vil vere av verdi seinare. Etter nøye gjennomgang av dei 126 grunnleggande absolutt invariante polynoma som fins, får eg at dei einaste absolutt invariante 5-gradspolynoma er

$$\begin{gathered}
x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 \\
x_0^3x_1x_4 + x_1^3x_2x_0 + x_2^3x_3x_1 + x_3^3x_4x_2 + x_4^3x_0x_3 \\
x_0^3x_2x_3 + x_1^3x_3x_4 + x_2^3x_4x_0 + x_3^3x_0x_1 + x_4^3x_1x_2 \\
x_0^2x_1^2x_3 + x_1^2x_2^2x_4 + x_2^2x_3^2x_0 + x_3^2x_4^2x_1 + x_4^2x_0x_2 \\
x_0^2x_1x_2^2 + x_1^2x_2x_3^2 + x_2^2x_3x_4^2 + x_3^2x_4x_0^2 + x_4^2x_0x_1^2 \\
x_0x_1x_2x_3x_4
\end{gathered}$$

2.1.1 Punkt, linjer, plan og hyperplan som er invariante under H

I arbeidet vidare er det nyttig å sjå på korleis H virkar på forskjellige varietetar i $\mathbb{P}^4$.

H er ei gruppe av orden 25. Dette betyr at dersom vi tek eit punkt i $\mathbb{P}^4$ og ser på virkninga til H på punktet, vil orbiten til punktet ha lengde 1, 5 eller 25. Det er mest truleg at når vi tar eit tilfeldig punkt, vil punktet ha orbit av lengde 25. Dersom punktet skal ha orbit av lengde 5, må det vere invariant under enten τ, σ, $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$ etc., medan eit punkt med orbit av lengde 1 må vere invariant under både τ og σ.

Lemma 2.4. 30 punkt i $\mathbb{P}^4$ har orbit av lengde 5 under virkninga av H. Resten har orbit av lengde 25.

Bevis. For at eit punkt $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ skal vere invariant under σ, må

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_0) = (x_2, x_3, x_4, x_0, x_1)$$

etc.

Det er ikkje vanskeleg å sjå at vi då får $x_i = tx_{i-1}$ for $x_i \in \mathbb{C}$, og dei einaste 5 punkta som er invariante under σ er då

$$(1, t, t^2, t^3, t^4), t \in \sqrt[5]{1}.$$

For τ er det annleis. Dersom to forskjellige x_i-koordinatar skal vere ulike 0, blir ikkje forholdet mellom desse likt lenger etter at vi har utført τ, sidan forskjellige koordinatar multipliserast med forskjellige potensar av ϵ under τ. Dei einaste mulighetane er då punkta

$$(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0) \text{ og } (0, 0, 0, 0, 1)$$

Sidan det då ikkje er nokre punkt som er invariante under både τ og σ, har ingen punkt i $\mathbb{P}^4$ orbit av lengde 1 under H.

Vi merkar oss at desse 10 punkta vi no har funne, er singulære punkt på nokre av pentagona. For $a = \infty$ eller $a = 0$ får vi eit pentagon som har singulære punkt presis i dei punkta som er invariante under τ, medan vi for a $= -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon$ får pentagonet som har singulære punkt i dei punkta som er invariante under σ. På same måte kan vi finne at punkta som er invariante under $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$ etc., er presis punkta som høyrer til våre resterande pentagon.

Vi får derav til saman 30 punkt med orbit av lengde 5, resten har ikkje noko anna val enn å ha orbit av lengde 25. $\square$

Vi kan no sjå på kva hyperplan som er invariante under H.

Lemma 2.5. 30 hyperplan i $\mathbb{P}^4$ har orbit av lengde 5 under virkninga av H. Resten har orbit av lengde 25.

Bevis. Det er ein ein-til-ein-korrespondanse mellom punkt i $\mathbb{P}^4$ og hyperplan i $(\mathbb{P}^4)^*$, som er *dualrommet* til $\mathbb{P}^4$, ved at vi korresponderer punktet $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{P}^4$ med hyperplanet $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \in (\mathbb{P}^4)^*$.

Alle punkta i $\mathbb{P}^4$ som er invariante under ei undergruppe av H, vil derav kvar og ein korrespondere til eit hyperplan som også er invariant under den same undergruppa av H. Det er derav 30 hyperplan som har orbit av lengde 5 under H, resten har orbit av lengde 25. Dei 30 hyperplana som har orbit av lengde 5 er gitt ved

$$H_i : x_i = 0; i = 0, 1, ..4$$

og

$$H_{kl} : \{\sum_{m=0}^{4} \varepsilon^{\frac{m}{2}(m-5)l-mk} x_m = 0\}$$

Dette er akkurat dei 30 hyperplana i $\mathbb{P}^4$ som er utspent av kvart val av 4 av 5 singulære punkt i eit pentagon. □

Sidan Lemma 2.2 fortel oss at C_a er invariant under heile H, må dette også spesielt gjelde dei 12 pentagona. Vel vi no ei av desse linjene i eit av pentagona, er denne linja ein lineærkombinasjon av to av dei singulære punkta.

Sidan begge desse punkta er invariante under ei undergruppe av H, vil også linja mellom dei vere invariant under den same undergruppa. Vi har då ei linje som har orbit av lengde 5.

Eit anna element i H vil derimot avbilde dei to punkta på to andre singulære punkt på den same elliptiske kurva, og linja mellom desse vil vere eit element i orbiten til den opprinnelege linja. Dei fem linjene i ei spesiell elliptisk kurve blir då til saman ein orbit. Vi har 12 slike orbitar, og vi har derav 60 linjer som har orbit av lengde 5.

Lemma 2.6. Dei einaste linjene i $\mathbb{P}^4$ som er invariante under ei ekte undergruppe av H er dei 60 linjene i dei 12 pentagona, som har orbit av lengde 5.

Bevis. La oss først sjå på undergruppa generert av τ. Ei vilkårleg linje l i $\mathbb{P}^4$ mellom to punkt $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ og $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ er gitt ved

$$(\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3, \alpha a_4 + \beta b_4), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$\tau(l)$ blir då

$$(\alpha a_0 + \beta b_0, \varepsilon\alpha a_1 + \varepsilon\beta b_1, \varepsilon^2\alpha a_2 + \varepsilon^2\beta b_2, \varepsilon^3\alpha a_3 + \varepsilon^3\beta b_3, \varepsilon^4\alpha a_4 + \varepsilon^4\beta b_4).$$

For at $\tau(l) = l$, må det fins α og β slik at

$$(\alpha a_0+\beta b_0, \varepsilon\alpha a_1+\varepsilon\beta b_1, \varepsilon^2\alpha a_2+\varepsilon^2\beta b_2, \varepsilon^3\alpha a_3+\varepsilon^3\beta b_3, \varepsilon^4\alpha a_4+\varepsilon^4\beta b_4) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

og andre α og β slik at

$$(\alpha a_0+\beta b_0, \varepsilon\alpha a_1+\varepsilon\beta b_1, \varepsilon^2\alpha a_2+\varepsilon^2\beta b_2, \varepsilon^3\alpha a_3+\varepsilon^3\beta b_3, \varepsilon^4\alpha a_4+\varepsilon^4\beta b_4) = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4).$$

I begge tilfella får vi at dei einaste moglege punkta er $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)$, ... , $(0, 0, 0, 0, 1)$. Dei einaste linjene som er invariante under τ er dei 10 linjene gjennom desse punkta, som er unionen av dei to pentagona C_0 og C_∞.

For σ har vi eit liknande tilfelle, då vil vi få at $a_0 = \alpha a_1 = \alpha^2 a_2 = \alpha^3 a_3 = \alpha^4 a_4 = \alpha^5 a_0$, som gjev oss dei einaste 5 punkta

$$(1, \varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon), (1, \varepsilon^3, \varepsilon, \varepsilon^4, \varepsilon^2), (1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon, \varepsilon^3), (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4) \text{ og } (1, 1, 1, 1, 1),$$

så dei einaste linjene som er invariante er dei 10 linjene gjennom desse punkta, som er unionen av dei to pentagona $C_{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$ og $C_{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$. Liknande prosedyre kan utførast for dei andre undergruppene til H for å få fram dei resterande linjene. $\square$

På same måte som med linjer og hyperplan er det ein ein-til-ein-korrespondanse mellom linjer i $\mathbb{P}^4$ og plan i $(\mathbb{P}^4)^*$, så desse 60 linjene korresponderer til 60 plan som alle har orbit av lengde 5.

2.2 6 kvintikkar og 25 linjer

Eg vil no definere 6 kvintikkar og 25 linjer som er spesielle i arbeidet framover. Kvintikkane finn ein ut frå dei hyperplana H_i og H_{kl}. Sidan dette er dei einaste hyperplana som har har orbit av lengde 5 under H, vil 5 og 5 av desse danne ein orbit. Set vi saman 5 og 5 av desse hyperplana, får ein då 6 kvintikkar som alle er invariante under H. Dette blir kvintikkane

$$Q_{-1} = \prod_{i=0}^{4} H_i$$

og

$$Q_l = \prod_{k=0}^{4} H_{kl}$$

Snittet av nullrommet til desse 6 kvintikkane er faktisk ingenting anna enn 25 linjer. Sidan kvintikkane som definerer linjene er invariante under H, og linjene i pentagona er dei einaste linjene som har orbit av lengde 5, vil desse 25 linjene til saman vere ein orbit under H. Linjene er gitt ved

$$L_{kl} : x_{-l} = x_{1-l} + \varepsilon^{2k} x_{4-l} = \varepsilon^k x_{2-l} + x_{3-l} = 0$$

Dersom ein ser på hyperplana og linjene, dannar desse saman ein konfigurasjon av type $(25_6, 30_5)$. Kvar linje er inneholdt i 6 hyperplan, og kvart hyperplan inneheld 5 linjer.

Lemma 2.7. Kvar av linjene L_{kl} skjer C_a i eit punkt.

Bevis. Ta linja L_{00}. Denne vil vere definert ved

$$x_0 = x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$$

Snittar vi denne med C_a vil vi få punktet $(0 : -a : 1 : -1 : a)$. Dette er eit punkt for alle verdiar av $a \in P^4$. Utfører vi så eit element frå H på linja, vil vi få ei av dei andre linjene, og sidan C_a er invariant, vil den nye linja også skjære C_a i nøyaktig eit punkt. Dette medfører at alle linjene skjer C_a i eit punkt. $\square$

Lemma 2.8. Dei 25 punkta som C_a skjer linjene L_{kl} i, er 5-torsjonspunkt på C_a.

Bevis. Vi treng å finne 25 hyperplan som skjer C_a i kun eit punkt kvar, nemleg dei 25 skjeringspunkta. La oss sjå på eit spesifikk kurve og ei spesifikk linje først. Skjeringspunktet mellom L_{00} og C_1 vil vere $P = (0 : -1 : 1 : -1 : 1)$.

Dersom P skal vere eit 5-torsjonspunkt, må det altså finnast eit hyperplan gjennom P slik at P er eit 5-dobbelt punkt. Eg tek det femte-symmetriske idealet til punktet og plussar på idealet til C_1.

No må det saturerte idealet ha eit førstegradspolynom F_P som ein generator om P faktisk skal vere eit 5-torsjonspunkt. Og det har det. $H_P = Z(F_P)$ er då hyperplanet som går gjennom P femdobbelt, og sidan graden til C_1 er 5, kan ikkje hyperplanet skjere kurva i andre punkt.

Sidan C_a er invariant under H, vil no orbiten til punktet P vere dei 25 5-torsjonspunkta. For eksempel går hyperplanet $\tau(H_P)$ gjennom $\tau(C_1)$ i kun eit punkt, nemleg $\tau(P)$, og sidan $\tau(C_1) = C_1$, vil $\tau(P)$ vere det einaste snittpunktet mellom C_1 og $\tau(H_P)$.

Det same argumentet gjeld for alle undergrupper av H, og alle dei 25 punkta i orbiten til P er derav 5-torsjonspunkt. Same argument gjeld også for alle forskjellige elliptiske kurver C_a. □

Macaulay2-kode 1. :

R = ZZ/31$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$;
Q1 = $x_0 * x_0 + x_2 * x_3 - x_1 * x_4$
Q2 = $x_1 * x_1 + x_3 * x_4 - x_0 * x_2$
Q3 = $x_2 * x_2 + x_4 * x_0 - x_1 * x_3$
Q4 = $x_3 * x_3 + x_0 * x_1 - x_2 * x_4$
Q5 = $x_4 * x_4 + x_1 * x_2 - x_0 * x_3$
I = ideal(Q1,Q2,Q3,Q4,Q5)
K1 = $x_3 + x_4$
K2 = x_0
K3 = $x_1 + x_2$
K4 = $x_2 + x_3$
J = ideal(K1, K2, K3, K4)
dim J
J5 = J^5
H = J5 + I
saturate H

Hyperplanet vi får då er

$$x_0 - 10x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 10x_4$$

og bortsett frå at dette er eit hyperplan, er det ingenting anna verdifullt vi kan trekkje ut frå dette sidan vi har jobba i ein endeleg kropp.

Dei 25 5-torsjonspunkta er då ein orbit under H, og kvart element frå H avbildar då eit 5-torsjonspunkt på eit anna 5-torsjonspunkt.

Kapittel 3

Eigenskapane til C_a

Teorem 3.1. To elliptiske kurver C_a og $C_{a'}$ skjer kvarandre kun dersom $a \in \{0, \infty, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon\}$.

Bevis. La C_a og $C_{a'}, a \neq a'$ vere to forskjellige elliptiske kurver. Vi vil sjå for kva verdiar av a og a' desse skjer kvarandre. Om vi set ${x_0}^2 + ax_2x_3 - \frac{1}{a}x_1x_4 = {x_0}^2 + a'x_2x_3 - \frac{1}{a'}x_1x_4$, finn vi at $aa'x_2x_3 + x_1x_4 = 0$. Gjer vi tilsvarande for $i = 1, 2, 3, 4$, finn vi tilsvarande likningar. Multipliserer vi alle desse likningane med kvarandre, finn vi at $(1 - a^5a'^5)(x_0^2x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2) = 0$. No er det to mulighetar. Enten er $(1 - a^5a'^5) = 0$, eller så er $(x_0^2x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2) = 0$.

La oss sjå på det siste tilfellet først, og anta at ein av $x_i = 0$, utan tap av generalitet kan vi då anta at $x_0 = 0$. Likningane på forma $aa'x_{i+2}x_{i+3} + x_{i+1}x_{i+4} = 0$ for $i = 0, ..., 4$ gjev at dersom $x_0 = 0$, så må $aa' = 0$, eller så kan maks ein annan x_i vere ulik 0. Men sidan $a{x_i}^2 + ax_{i+2}x_{i+3} - \frac{1}{a}x_{i+1}x_{i+4} = 0$ for alle i, kan ikkje nokon x_i vere lik 0 åleine. Så dersom $(x_0^2x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2) = 0$, må $aa' = 0$.

La oss då anta at $a = 0$. Då vil $x_ix_{i+2} = 0$ for alle i, og då vil den homogeniserte likninga $a'b'{x_i}^2 + a'^2x_{i+2}x_{i+3} - b'^2x_{i+1}x_{i+4} = 0$ føre til at $a'b'{x_i}^2 + a'^2x_{i+2}x_{i+3} = 0$ for alle i. $a' = 0$ er uaktuelt, for då vil $C_a = C_{a'}$. Det betyr at $b'{x_i}^2 + a'x_{i+2}x_{i+3} = 0$ for alle i. Sidan $x_0 = 0$, vil vi få at alle $x_i = 0$ om ikkje $b' = 0$. Det gjev at dersom vi set $a = 0$, vil C_∞ vere den einaste elliptiske kurva som skjer C_0.

Dersom $(1 - a^5a'^5) = 0$, vil $aa' = \sqrt[5]{-1}$, noko som gjev dei 5 løysingane $-1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$ og ϵ^4 for aa'. $aa' = -1$ gjev $x_{i+1}x_{i+2} = x_ix_{i+3}$ for alle $i = 0, ..., 4$, som saman med betingelsen at $a, a' \neq 0$ gjev dei 5 løysingane $(1, k, k^2, k^3, k^4)$, $k = \epsilon^i$ for $i = 0, ..., 4$. Satt inn i C_a og $C_{a'}$ gjev dette at a og a' får verdiane $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. På same måte gjev dei andre verdiane av aa' at vi får 5 snittpunkt dersom $a, a' = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\epsilon^i$, $i = 1, ..., 4$.

At det ikkje finst nokre andre elliptiske kurver som skjer kvarandre, kan vi også sjå ved hjelp av følgjande argument: La C_a og $C_{a'}$ vere to forskjellige elliptiske kurver, der ingen er unionen av 5 linjer. Begge vil vere gitt ved snittet av 5 kvadrikkar. La k vere ein kvadrikk i idealet til $C_{a'}$. Då vil denne kvadrikken vere forskjellig frå alle kvadrikkane i idealet til C_a.

Då vil vi ved Bézout, sidan C_a er av grad 5, og k er av grad 2, få 10 snittpunkt mellom desse, telt med multiplisitet. Ta eit av desse snittpunkta. Orbiten til dette punktet blir 25 forskjellige punkt, sidan vi har sett at det kun er dei singulære punkta i dei spesielle elliptiske kurvene som har ein annan orbitlengde enn 25. Men - sidan ei elliptisk kurve er invariant under H, må alle desse punkta ligge i snittet mellom k og C_a. Dette er ikkje mogleg, og vi er i mål. □

Lemma 3.2. Fire forskjellige punkt på C_a ligg ikkje i same plan.

Bevis. Anta for motseiing at punkta P_1, P_2, P_3 og P_4 ligg i same plan N. Då vil det for kvart val av punkt $P \in C_a, P \neq P_1, P_2, P_3, P_4$ vere slik at det fins eit hyperplan som snittar divisoren $P+P_1+P_2+P_3+P_4$. Samtidig vil alle hyperplan som inneheld N inneholde eit slikt punkt P.

Det betyr at vi må ha ei birasjonal avbildning frå C_a til $\mathbb{P}_1$, som alle hyperplana gjennom dette planet er parametrisert ved. Ved Hurwitz' formel [1, s. 301] finst ikkje ei slik avbildning sidan C_a er rasjonal og har genus 1. Vi har derav ei motseiing. □

Kapittel 4

Sekantvarieteten S_a til C_a

Sekantvarieteten til C_a, som eg vil beteikne med S_a, er unionen av alle moglege sekantar til C_a. Denne er verdt ei studie. Korleis vil egentleg denne sjå ut?

La oss sjå på eit spesifikt eksempel, der $a = 0$, og C_a er då eit av pentagona. Her vil sekantvarieteten vere unionen av sekantvarietetane vi får når vi vel 2 av desse linjene, det vil seie at sekantvarieteten ser ut til å vere unionen av 10 forskjellige irredusible mengder.

No vil det derimot vere slik at for to linjer som skjer kvarandre i eit punkt vil sekantvarieteten til unionen av desse to linjene vere eit plan. For to linjer som ikkje skjer kvarandre derimot, vil sekantvarieteten vere ein $\mathbb{P}^3$. Kvart plan er imidlertid inneholdt i to av dei andre $\mathbb{P}^3$-ane, slik at sekantvarieteten blir ein union av 5 $\mathbb{P}^3$-ar.

S_∞ og S_0 vil då vere like, nemleg $x_0x_1x_2x_3x_4 = 0$. Dette er unionen av dei 5 hyperplana H_0, H_1, H_2, H_3 og H_4, som vi kallar Q_{-1}. For to andre pentagon med dei same singulære punkta, vil vi få same scenario. Her vil vi få unionen av dei 5 hyperplana H_{kl} der k er fiksert.

Dersom vi vel ei elliptisk kurve C_a som ikkje er sett saman av 5 linjer, blir det med ein gong litt verre å finne S_a. Men det er ei løysing på dette også.

Lemma 4.1. *S_a er unionen av alle dei singulære punkta til kvadrikkar i vektorrommet av kvadrikkar utspent av dei 5 kvadrikkane som definerer C_a.*

Grov gjennomgang av bevis. (Eit meir fullstendig bevis ligg i [3, s. 39-46]) Ta eit punkt P som ligg på ein sekant til C_a, men som ikkje er eit av dei to punkta på C_a. Vi vil sjå på $\pi_P : \mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^3$, som er projeksjonen frå P. $\pi_P(C_a) = C_P$. C_P vil no vere singulær sidan P ligg på ein sekant. Hadde ikkje P lege på ein sekant, ville $\bar{C}_a$ ha vore glatt.

Graden til C_P er i likhet med C_a 5, men den aritmetiske genusen er ikkje lenger 1, men 2. Alle singulære kurver av grad 5 og genus 2 i $\mathbb{P}^3$ er inneholdt i ei andregradsflate F_{C_P}.

Då kan vi sjå på $\pi^{-1}(F_{C_P})$, som er kjegla over F_{C_P}. Dette vil vere ein kvadrikk i $\mathbb{P}^4$ som er singulær i P. Faktisk er det slik at ei kurve i $\mathbb{P}^3$ ligg på ein kvadrikk hvis og berre hvis inversbildet til kurva ligg på ein kvadrikk i $\mathbb{P}^4$ med singulært punkt i P. □

Lemma 4.2. *S_a er invariant under H.*

Bevis. Sidan C_a er invariant under H, er det ingen stor overraskelse at også S_a er invariant under H. La oss likevel sjå på detaljane for dette.

C_a er altså den felles nullpunktsmengda til alle elementa i vektorrommet utspent av dei 5 kvadrikkane

$$K_i = {x_i}^2 + ax_{i+2}x_{i+3} - \frac{1}{a}x_{i+1}x_{i+4}$$

Eit vilkårleg element i dette vektorrommet er gitt ved

$$\sum_{i=0}^{4} y_i K_i(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4), y_i \in P^1.$$

Unionen av alle dei singulære punkta i vektorrommet er då alle $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ som tilfredsstiller likninga

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_0}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_4} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$$

for alle y_i. Dette er alle punkta $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ som er slik at

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_0}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \\ \frac{\partial Q_0}{\partial x_4} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_4}{\partial x_0} \end{pmatrix} = 0$$

Vi får då at sekantvarieteten er gitt ved

$$\begin{gathered} S_a = -a^5(x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5) \\ +(a^9 + 3a^4)(x_0x_1^3x_2 + x_1x_2^3x_3 + x_2x_3^3x_4 + x_3x_4^3x_0 + x_4x_0^3x_1) \\ +(a^8 - 2a^3)(x_0^2x_1x_2^2 + x_1^2x_2x_3^2 + x_2^2x_3x_4^2 + x_3^2x_4x_0^2 + x_4^2x_0x_1^2) \\ -(2a^7 + a^2)(x_0^2x_1^2x_3 + x_1^2x_2^2x_4 + x_2^2x_3^2x_0 + x_3^2x_4^2x_1 + x_4^2x_0^2x_2) \\ +(a - 3a^6)(x_0^3x_2x_3 + x_1^3x_3x_4 + x_2^3x_4x_0 + x_3^3x_0x_1 + x_4^3x_1x_2) \\ +(a^{10} + 16a^5)(x_0x_1x_2x_3x_4) = 0 \end{gathered}$$

Dette er faktisk ein lineærkombinasjon av dei 6 absolutt invariante 5-gradspolynoma vi har funne tidlegare! Det betyr at S_a, i likhet med C_a, er invariant under heile H. □

Om vi ser bort frå pentagona, der sekantvarieteten er lik for to og to elliptiske kurver, vil S_a vere forskjellig for alle forskjellige val av a. Eg vil imidlertid ikkje gå nærare inn på dette.

4.1 S_a har trippel multiplisitet langs C_a

Det er ein svært interessant link mellom C_a og S_a. La oss ta det tredje-symmetriske produktet til idealet til C_a. Dette idealet vil då vere generert av $\binom{7}{3} = 35$ polynom av grad 6. Saturerer vi dette idealet, får vi faktisk ut eit femtegradspolynom F_a som eit av generatorane for det saturerte idealet. $Z(F_a)$ er faktisk lik S_a!

Tek vi det tredje-symmetriske produktet til I_a, får vi eit ideal I_a^3 av sekstikkar. Alle hyperflatene i dette idealet har trippel multiplisitet langs C_a. Saturerer vi idealet, finn vi at femtegradspolynomet F_a er ein generator i det saturerte idealet. Dette betyr at

$$(x_0F_a, x_1F_a, x_2F_a, x_3F_a, x_4F_a) \subset I^3$$

har trippel multiplisitet langs C_a. For kvart punkt $P = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ på C_a vil det vere minst ein $x_i \neq 0$. Sidan hyperflata $x_iF_a = 0$ har trippel multiplisitet i P, må $Z(F_a)$ ha trippel multiplisitet i P. Men det betyr at $Z(F_a)$ har trippel multiplisitet langs heile C_a.

Lemma 4.3. $S_a = Z(F_a)$, så S_a har trippel multiplisitet langs C_a.

Bevis. Vi treng no berre å vise at $S_a = Z(F_a)$. Ta ein vilkårleg sekant L til C_a, og anta at denne ikkje er inneholdt i $Z(F_a)$. Då vil denne linja snitte C_a i to punkt. Sidan snittmultiplisiteten mellom L og $Z(F_a)$ er 3 i kvart av dei to punkta, vil dei skjære kvarandre 6 gonger medrekna multiplisitet. Men i følgje Bézout kan dei skjære kvarandre maks 5 gonger sidan L har grad 1 og $Z(F_a)$ har grad 5. Dette blir ei motseiing, og alle sekantar er derav inneholdt i $Z(F_a)$, slik at $S_a \subseteq Z(F_a)$.

Sekantvarieteten er også irredusibel. Kvart punkt på sekantvarieteten må vere i ein komponent av dimensjon 3, sidan du der har 3 kontinuerlege parametrar som varierer: Det første punktet på C_a, det andre punktet på C_a, og kor du ligg på sekanten.

Anta for motseiing at sekantvarieteten S_a er redusibel, beståande av to komponentar $S = U \cup V$. La oss sjå på U og anta at heile C_a ikkje er inneholdt i U. Då vil komponenten berre inneholde eit endeleg antal punkt frå C_a. Sidan kvar sekant inneheld to punkt frå C_a betyr dette at vi vil kun ha eit endeleg antal sekantar inneholdt i U. Men unionen av eit endeleg antal sekantar vil ha dimensjon 1. Dette kan då ikkje vere ein komponent. U må derav inneholde C_a. U må også inneholde ein del av sekantane for at den skal ha dimensjon 3. Mengda $E = (p, q) \in C_a \times C_a | \langle p, q\rangle \in U$ må vere av dimensjon 2 for at U skal ha dimensjon 3, men sidan $C_a \times C_a$ er irredusibel av dimensjon 2, må $E = C_a \times C_a$. Heile S_a er då inneholdt i U, og S_a er derav irredusibel. Sidan $Z(F_a)$ er irredusibel og inneheld S_a, må $Z(F_a) = S_a$. □

Macaulay2-kode 2. :
R = $ZZ/31[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$; <Koordinatringen til domenet, merk at eg brukar ein endeleg kropp>
S = $ZZ/31[y_0, y_1, y_2, y_3, y_4]$; <Koordinatringen til codomenet>
hypa = $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ <Dei 5 hyperplana>
hypb = $14 * x_0 + 14 * x_1 + 3 * x_2 + 3 * x_3 + 14 * x_4$
hypc = $26 * x_0 + 26 * x_1 + 15 * x_2 + 4 * x_3 + 15 * x_4$
hypd = $12 * x_0 + 23 * x_1 + 12 * x_2 + x_3 + x_4$
hype = $2 * x_0 + 13 * x_1 + 13 * x_2 + 2 * x_3 + 2 * x_4$
xtily = map$(S, R, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ <Identitetsavbildninga mellom koordinatringane>
ytilx = map$(R, S, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ <Inversen til sistnevnte>
yhypa = xtily(hypa)
yhypb = xtily(hypb)

yhypc = xtily(hypc)
yhypd = xtily(hypd)
yhype = xtily(hype)
faca = hypb*hypc*hypd*hype <Produktet av kvart utval av 4 hyperplan>
facb = hypa*hypc*hypd*hype
facc = hypa*hypb*hypd*hype
facd = hypa*hypb*hypc*hype
face = hypa*hypb*hypc*hypd
trans0 = faca/11-facb/11+facc/11-face/11 <Det y_0 avbildast på>
trans1 = facb/11-facc/11+facd/11 <Det y_1 avbildast på>
trans2 = -2*faca/11-facb/11+facc/11-facd/11+face/11 <etc>
trans3 = 16*faca/11-facc/11+facd/11-face/11
trans4 = -4*faca/11+facb/11-facd/11+face/11
x0pa = xtily(trans0)
x1pa = xtily(trans1)
x2pa = xtily(trans2)
x3pa = xtily(trans3)
x4pa = xtily(trans4)
Crem = map(S, R, x0pa, x1pa, x2pa, x3pa, x4pa) <ϕ>
Q1 = $x_0 * x_0 + x_2 * x_3 - x_1 * x_4$ <Dei 5 kvadrikkane som definerer C_1>
Q2 = $x_1 * x_1 + x_3 * x_4 - x_0 * x_2$
Q3 = $x_2 * x_2 + x_4 * x_0 - x_1 * x_3$
Q4 = $x_3 * x_3 + x_0 * x_1 - x_2 * x_4$
Q5 = $x_4 * x_4 + x_1 * x_2 - x_0 * x_3$
I = ideal(Q1,Q2,Q3,Q4,Q5) <Idealet hvis nullpunktsmangde er C_1>
dim I
degree I
J = jacobian I
S1 = det J <Her finn eg polynomet som definerer S_1
idealet = I^3
saturert = saturate idealet
uttrykk = $\mathrm{saturert}_0$ <Her finn eg akkurat det samme polynomet som definerer S_1>

Kapittel 5

Cremonatransformasjonar

Vi går no over på hovuddelen av oppgåva, og det er å sjå på kva som skjer med S_a under ein spesiell Cremonatransformasjon.

5.1 Cremonatransformasjonar i $\mathbb{P}^2$

Vi ser først på korleis ein Cremonatransformasjon fungerer i $\mathbb{P}^2$, for å få eit innblikk i kva som egentleg skjer i ein dimensjon som vi enklare kan forestille oss.

Ein Cremonatransformasjon er ein birasjonal automorfi. Transformasjonen min går no frå rommet $\mathbb{P}^2$ som har den korresponderande koordinatringen $M = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ til $\mathbb{P}^2$ med koordinatringen $N = \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$. Geometrisk har eg då ei avbildning

$$\phi : \text{Proj M} \ \rightarrow \ \text{Proj N}$$

som definerer ei avbildning algebraisk

$$\phi^* : N \rightarrow M$$

Vi vil spesielt sjå på dei transformasjonane som er gitt ved at tre ulike lineære former i domenet, eg kallar dei a_0, a_1 og a_2, går på sin eigen invers. Dei tilsvarande lineære formene i codomenet vil vi beteikne med b_0, b_1 og b_2. Transformasjonen min er gitt ved

$$\phi^* : (b_0 \rightarrow a_1a_2, b_1 \rightarrow a_0a_2, b_2 \rightarrow a_0a_1).$$

og inversavbildninga vil vere

$$(\phi^*)^{-1} : (a_0 \rightarrow b_1b_2, a_1 \rightarrow b_0b_2, a_2 \rightarrow b_0b_1).$$

No vil $(\phi^*)^{-1}(\phi^*(b_0)) = (\phi^*)^{-1}(a_1a_2) = b_0b_1b_2b_0$, og gjer vi dette for b_1 og b_2 også, ser vi at vi kan skalere vekk $b_0b_1b_2$ frå kvar av koordinatane, og det kjem då tydeleg fram at dette faktisk er inversavbildninga.

ϕ er no definert slik at den er ein isomorfi utanfor linjene $a_0 = 0, a_1 = 0$ og $a_2 = 0$, men dersom $a_1a_2 = a_0a_2 = a_0a_1 = 0$, er ikkje ϕ definert, sidan $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2$. Mengda av punkt som ϕ ikkje er definert i, blir kalt den *fundamentale mengda* til ϕ. Dette kan då kun vere tilfelle om to av tre av dei lineære formene er 0.

Snittet til nullmengda til eit kvart utval av to av desse lineære formene, vil vere eit punkt. Nullpunktsmengda til dei tre lineære formene vil her vere linjer, medan nullpunktsmengda til homogene polynom av grad d vil vere kurver av grad d. Eg vil kalle $a_0 = 0, a_1 = 0$ og $a_2 = 0$ dei *tre definerande linjene.*

Sidan det er tre forskjellige utval av to linjer blant tre, er den fundamentale mengda, som eg vil kalle F_2, for ϕ akkurat tre punkt i $\mathbb{P}^2$, som eg vi kalle *fundamentale punkt.*

Eg vel for mitt eksempel dei tre lineære formene til å vere

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 + 2x_1 + x_2 \\ a_1 &= x_1 + x_2 \\ a_2 &= x_0 + x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Sidan ϕ er sin eigen invers, vil dei tilsvarande lineære formene i N vere dei same etter at vi har bytta ut koordinatfunksjonane, så dei blir

$$\begin{aligned} b_0 &= y_0 + 2y_1 + y_2 \\ b_1 &= y_1 + y_2 \\ b_2 &= y_0 + y_1 + y_2 \end{aligned}$$

og då får transformasjonen dei tre fundamentale punkta

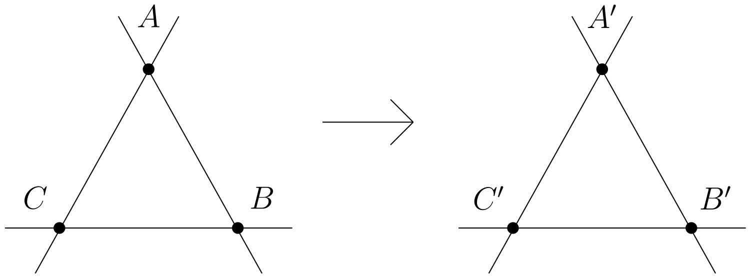
$$A : (0 : 1 : -1), B : (1 : 0 : -1) \text{ og } C : (1 : -1 : 1).$$

Inversavbildninga vil då ha dei tre fundamentale punkta

$$A' : (0 : 1 : -1), B' : (1 : 0 : -1) \text{ og } C' : (1 : -1 : 1).$$

Dei tre definerande linjene vil eg kalle AB, AC og BC, medan dei tilsvarande linjene i codomenet vil vere $A'B'$, $A'C'$ og $B'C'$. Avbildninga vår er då spesifikt gitt ved at

$$\begin{aligned} x_0 + 2x_1 + x_2 &\to (y_1 + y_2)(y_0 + y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 &\to (y_0 + y_1 + y_2)(y_0 + 2y_1 + y_2) \\ x_0 + x_1 + x_2 &\to (y_1 + y_2)(y_0 + 2y_1 + y_2) \end{aligned}$$



Figur 5.1: Cremonatransformasjonen i $\mathbb{P}^2$.

Om vi har ein varietet V i domenet og U er den opne mengda utanfor dei tre definerande linjene, vil dim V_U = dim $\phi_U(V_U)$. Dimensjonen vil bli bevart utanfor F_2.

Kva skjer egentleg med kurver som går gjennom eit av dei fundamentale punkta? Jo, det vi må gjere, er å blåse opp dei fundamentale punkta - då løyser vi problemet med at desse punkta er i F_2.

Om ein skal blåse opp eit vilkårleg punkt, finn ein først ein koordinat ulik 0. Då kan ein identifisere dei resterande koordinatane med eit punkt i $\mathbb{A}^n$. Så kan vi flytte dette punktet i $\mathbb{A}^n$ til origo, blåse det opp, flytte det attende og atter identifisere det med punktet i $\mathbb{P}^n$. Då vil vi ha fått ei delmengd av $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, som eg vil beteikne som *det oppblåste rommet.*

I vårt tilfelle i $\mathbb{P}^2$ har vi tre punkt vi må blåse opp: A, B og C. Det som skjer når vi bles opp kvart av punkta, er at inversbildet under π til kvart av dei tre punkta vil vere ein $\mathbb{P}^1$. Om vi har ein varietet V i domenet som går gjennom eit eller fleire av desse fundamentale punkta, vil vi kunne finne bildet av V under ϕ ved å sjå på $\tilde{\phi}(\overline{\pi^{-1}(V - F)})$.

I det oppblåste rommet vil vi altså kunne utvide avbildninga slik at den gjeld for tillukninga til inversbildet av den delen av V som ligg utanfor F_2, og dette gjev meg bildet av V under ϕ.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\
\mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

Figur 5.2: Oppblåsing i $\mathbb{P}^2$. Vi vil få eit heilt tilsvarande bilde i $\mathbb{P}^4$, med $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^3$ som det oppblåste rommet.

La oss då sjå på kva som skjer med dei forskjellige varietetane under ϕ. La oss ta linja AB som eit eksempel. Alle punkta på denne linja, i alle fall unntatt dei fundamentale, vil gå på eit enkelt punkt i codomenet, nemleg $C' : (1 : -1 : 1)$. Om vi deretter tek linja AC, vil alle punkta på denne - unntatt dei fundamentale - gå på eit enkelt punkt i codomenet, nemleg $B' : (1 : 0 : -1)$. Men desse linjene skjer jo kvarandre i det fundamentale punktet $A : (0 : 1 : -1)$ i domenet! Kva vil dette punktet då gå på? B'? C'? Både B' og C'?

Vel, sidan Cremonatransformasjonen er sin eigen invers, kan vi få eit hint om kva som skjer med punktet om vi ser på inversbildet til kvar av dei tre definerande linjene i codomenet.

Inversbilda til desse vil jo nemleg, på same måte, vere punkta A, B og C, og ein kan derav fastslå at linjene er inneholdt i bildet av punkta.

Og linjene **er** faktisk bildet av punkta, dersom vi kun avbildar punktet i seg sjølv. Det som imidlertid er, er at ei linje i domenet som går gjennom punktet A, ikkje vil ha heile linja $b_0 = 0$ i bildet sitt. Dersom vi restrikterer avbildninga til linja, vil bildet av punktet vere akkurat *eit* punkt på linja $b_0 = 0$.

Vi ser altså at det er forskjellig kva eit punkt frå F_2 egentleg går på. Er det kun punktet som blir avbilda, blir bildet ei linje, medan om vi ser på bildet av punktet restriktert til ei linje, vil bildet kun bli eit punkt.

For to kurver som skjer kvarandre i domenet, vil det då nemlig ikkje nødvendigvis vere slik at dei respektable bileta skjer kvarandre i codomenet. Dette kjem av at om dei kun skjer kvarandre i eit eller fleire av dei tre fundamentale punkta, så vil dei

Domene					$\mapsto$	Codomene			
Hyperflate	Grad	Mult i punkt				Grad	Mult i punkt		
		A	B	C			A	B	C
$x_0+x_1+x_2=0$	1	0	1	1		0	1	0	0
$2x_0+x_1+x_2=0$	1	0	1	0		1	0	1	0
$3x_0+15x_1+17x_2=0$	1	0	0	0		2	1	1	1
$x_0^2+3x_0x_1+3x_1^2+2x_0x_2+4x_1x_2+x_2^2=0$	2	1	1	1		1	0	0	0
$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$	2	0	1	1		2	0	1	1
$x_0^2-3x_1^2+x_2^2=0$	2	0	0	0		4	2	2	2
$x_0^2+2x_1^2-x_2^2=0$	2	0	0	1		3	1	1	2
$3x_0^2-x_1^2+x_2^2=0$	2	0	1	0		3	1	2	1
$x_0^3+x_1^3+x_2^3-x_0x_1x_2=0$	3	0	1	1		4	1	2	2
$x_0^4+x_1^4+x_2^4-x_0^2x_2^2-x_0^2x_1^2-x_1^2x_2^2=0$	4	2	0	0		6	4	2	2
$x_0^4+x_1^4+x_2^4-x_0x_2^3-x_0^2x_1^2-x_1^2x_2^2=0$	4	1	0	0		7	4	3	3
$x_0^4+x_1^4-x_2^4=0$	4	0	1	1		6	2	3	3

Tabell 5.1: Kva som skjer med ulike kurver under ϕ.

avbildast på forskjellige punkt i codomenet dersom *tangentane* til kurvene i det fundamentale punktet alle er forskjellige. Det er effekten av oppblåsinga. Dersom to kurver har like tangentar i eit punkt, vil dei likevel skjære kvarandre i same punkt i codomenet.

Vi ser at det er ein samanheng mellom kor mange gonger ei kurve skjer kvart av dei fundamentale punkta før transformasjonen, og kor mange gonger billedkurva etter transformasjonen skjer dei tilsvarande punkta i codomenet. La oss sjå på eit eksempel.

Eksempel 5.1. Om vi har ei linje l som går gjennom A, men ikkje B eller C, vil $\phi(l)$ bli ei linje som går gjennom A', men ikkje B' eller C'.

Bevis. Grunnen til dette er følgjande: l vil skjære BC i eit punkt. Dette punktet vil bli avbilda på punktet A' i codomenet, så $\phi(l)$ vil skjere A'. l går også gjennom punktet A, som betyr at $\phi(l)$ vil skjere $B'C'$. Men $\phi(l)$ vil ikkje skjere $B'C'$ i verken B' eller C' sidan tangenten til l i A ikkje er lik tangenten til verken AB eller AC i A. l skjer verken AB, BC eller AC fleire gonger enn dette, så $\phi(l)$ vil ikkje skjere A', B' eller C' fleire gonger heller.

Graden til $\phi(l)$ kan vi finne ved å invertere eit generelt hyperplan H_l frå codomenet, og sjå kor mange gonger inversbildet skjer l. ϕ er i utgangspunktet definert slik at lineære former går på kvadrikkar, og då vil også ϕ^{-1} vere definert slik. Graden til $\phi^{-1}(H_l)$ vil då maks vere 2. Sidan H_l går gjennom dei tre linjene $A'B'$, $A'C'$ og $B'C'$ ein gong kvar, vil $\phi^{-1}(H_l)$ gå gjennom alle punkta A, B og C, og graden kan då ikkje vere anna enn 2.

$\phi^{-1}(H_l)$ og l vil no skjere i kun to punkt ved den generelle Bézout. Men eit av desse punkta er punktet A, og det vil ikkje telle med når vi skal finne graden til bildet, fordi $\phi^{-1}(H_l)$ og l må ha forskjellige tangentar i A. Vi står igjen med eit anna skjeringspunkt, og $\phi(l)$ vil då vere ei linje. $\square$

Derav vil bildet til ei kurve i $\mathbb{P}^2$ av grad d som ikkje snittar i verken A, B eller C, ha snittmultiplisitet d i kvar av punkta A', B' og C', sidan denne hyperflata snittar kvar av dei tre definerande linjene i d punkt, og desse trekkjast saman til A', B' og C'.

Tabell 5.1 viser ei oversikt over kva som skjer med ulike kurver i $\mathbb{P}^2$ under ϕ.

5.2 Cremonatransformasjonar i $\mathbb{P}^4$

Når vi no har sett korleis dette grovt sett fungerer i $\mathbb{P}^2$, kan vi våge oss over i å sjå på det tilsvarande eksemplet i $\mathbb{P}^4$.

Når ein jobbar i $\mathbb{P}^4$, vil opplevelsen her vere ganske lik den vi såg i $\mathbb{P}^2$. Forskjellen er at her er ikkje nullmengda til dei lineære formene vi vel ut, linjer, som i $\mathbb{P}^2$.

Det er fortsatt hyperplan, men denne gongen er hyperplana av dimensjon 4! Det betyr at kvar av desse hyperplana vil bli trekt saman til eit einaste punkt gjennom Cremonatransformasjonen.

Eg vel å sjå på ein spesiell Cremonatransformasjon, og ser på den elliptiske kurva C_1. Eg vel så 5 punkt på C_1 der kvart utval av 4 av desse ikkje ligg i same hyperplan. For enkelhets skuld vel eg 5 av dei 25 5-torsjonspunkta, då desse har koordinatar som er enkle å forholde seg til.

Eg vel meg då punkta

$$\begin{aligned}
A &: (1 : 0 : -\epsilon : \epsilon^4 : -\epsilon^2) \\
B &: (-1 : 1 : -1 : 0 : 1) \\
C &: (1 : -1 : 1 : -1 : 0) \\
D &: (0 : 1 : -1 : 1 : -1) \\
E &: (-1 : 0 : 1 : -1 : 1)
\end{aligned}$$

og ser på Cremonatransformasjonen der desse 5 punkta er dei fundamentale punkta. Då kan vi definere 5 hyperplan; eit for kvart utval av fire av desse punkta. Desse hyperplana har eg funne ved hjelp av programmet Maple. Eg fann likningane for hyperplana ved å ta likninga

$$x_0 + ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$$

for eit generelt hyperplan og sette inn 4 av dei 5 fundamentale punktafor å få 4 likningar. Løysinga på dette likningssystemet gjev meg koeffisientane eg treng. Dei lineære formene vi får som definerer desse hyperplana, er dei du kan sjå i tabell 5.2.

Eg let så Cremonatransformasjonen min vere definert på den måten at eg sender dei lineære formene på sin eigen invers, og ser kva eg får då. Transformasjonen er då i praksis gitt ved

$$\phi: \text{ Proj R } \rightarrow \text{ Proj S}$$

slik at

$$\phi^* : S \rightarrow R : (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) \rightarrow (a_1a_2a_3a_4, a_0a_2a_3a_4, a_0a_1a_3a_4, a_0a_1a_2a_4, a_0a_1a_2a_3).$$

Eg ser så på kva som skjer med forskjellige hyperflater under ϕ. Nokre av resultata kan du sjå i tabell 5.3.

Lemma 5.2. Den fundamentale mengda F_4 for ϕ er unionen av 10 plan.

Bevis. For at eit punkt skal vere ein del av F_4, må alle produkta $a_1a_2a_3a_4$, $a_0a_2a_3a_4$, $a_0a_1a_3a_4$, $a_0a_1a_2a_4$, og $a_0a_1a_2a_3$ gå på 0. Alle desse er produktet av 4 av 5 lineære former. Utan tap av generalitet kan vi då anta at $a_0 = 0$. Då vil alle produkta vere

Namn	Inneh. i hyperplanet	Likning
H_e	A, B, C, D	$(\epsilon)x_0 + (\epsilon^4 - \epsilon^2 + 1)x_1 + (\epsilon^4 - \epsilon^2 + 1)x_2 + \epsilon x_3 + \epsilon x_4 = 0$
H_d	A, B, C, E	$(\epsilon^3 + \epsilon^2)x_0 + (2\epsilon^3 + 2\epsilon^2 - 1)x_1 + (\epsilon^3 + \epsilon^2)x_2 + x_3 + x_4 = 0$
H_c	A, B, D, E	$(2\epsilon^3 + 2\epsilon^2 + \epsilon)x_0 + (2\epsilon^3 + 2\epsilon^2 + \epsilon)x_1 + (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1)x_2$
		$+\epsilon + 1)x_2 + (\epsilon + 2)x_3 + (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1)x_4 = 0$
H_b	A, C, D, E	$(\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon)x_0 + (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon)x_1 + (\epsilon + 1)x_2$
		$+(\epsilon + 1)x_3 + (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon)x_4 = 0$
H_a	B, C, D, E	$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Tabell 5.2: Dei 5 hyperplana

0, unntatt $a_1a_2a_3a_4$. For at denne skal vere 0, må ei av dei andre lineære formene også vere 0 - då vil alle produkta bli 0. Det vil seie at snittet av nullpunktsmengda til to utvalde lineære former vil vere ein del av F_4.

Snittet av to lineære former er eit plan, og det er $\binom{5}{2} = 10$ forskjellige utval vi kan gjere, så den fundamentale mengda for ϕ er unionen av 10 plan. $\square$

Om ein ser på den tilsvarande fundamentale mengda i $\mathbb{P}^3$ er ikkje denne så vanskeleg å forestille seg. Der vil nemleg den fundamentale mengda vere 4 linjer som utgjer kantane i eit tetraeder. Men ti plan i $\mathbb{P}^4$?

La oss likevel gjere eit forsøk. Ta planet gjennom A, B og C, som vi kallar planet ABC. Dette planet vil ha linja AB felles med planet ABD. Men det vil jo også ha den same linja felles med planet ABE! For kvar av dei 10 linjene som går gjennom to av dei fundamentale punkta vil 3 plan skjære denne. Kvart plan vil då ha ei linje felles med 6 av plana, medan det har eit punkt felles med dei resterande 3, noko som gjev eit totalt bilete som er vanskeleg å sjå for seg for alle som kun er vant til å tenkje i maks tre dimensjonar.

Eg vil no kalle linja gjennom to fundamentale punkt for ei *fundamental linje*, og planet gjennom tre fundamentale punkt for eit *fundamentalt plan.*

5.2.1 Bildet av forskjellige delar av F_4

$\phi(\mathbb{P}^4)$ gjev ein isomorfi i området utanfor dei 5 definerande hyperplana. Eit punkt på eit av dei 5 definerande hyperplana i domenet som ikkje er i same plan som 3 fundamentale punkt vil bli avbilda på eit av dei 5 fundamentale punkta i codomenet. Men kva skjer med dei punkta på kurva som er blant F_4 i domenet, som er unionen av dei 10 plana som inneheld 3 fundamentale punkt kvar?

Vel, som nevnt går punkt på hyperplan. Punktet A, gitt ved $H_b = H_c = H_d = H_e = 0$, går på hyperplanet $H_{a'}$ i codomenet, nemleg $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Tilsvarande gjeld for dei andre punkta. Dessuten går hyperplana i domenet på punkta i codomenet.

Linja gitt ved $H_c = H_d = H_e = 0$ går på same måte på planet gjennom C', D' og E' i codomenet. Men kva avbildast EIT av punkta på linja på? Jo, dersom vi tek eit vilkårleg punkt på denne linja, som er gitt som snittet mellom hyperplana $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ og $ka_3 + la_4 = 0$, får vi følgjande bilde: snittet mellom $b_1b_2b_3b_4 = 0$, $b_0b_2b_3b_4 = 0$, $b_0b_1b_3b_4 = 0$ og $b_0b_1b_2(kb_3 + lb_4) = 0$. Snittet av desse er faktisk mengda $b_3 = b_4 = 0$. Det vil seie at vi får eit plan. Eit punkt på denne linja gjev oss altså eit heilt plan! Det vil altså seie at det er vilkårleg om vi mappar heile linja eller berre eit punkt på linja - vi får ut planet uansett!

Domene							$\mapsto$	Codomene					
Hyperflate	Grad	Multiplisitet i punkt						Grad	Multiplisitet i punkt				
		A	B	C	D	E			A	B	C	D	E
$x_0 + x_1 + x_2 = 0$	1	0	0	0	1	1		2	1	1	1	2	2
$x_3 + x_4 = 0$	1	0	0	0	1	1		2	1	1	1	2	2
$x_0 + 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0$	1	0	0	0	0	0		4	3	3	3	3	3
$2x_0 + x_2 + x_4 = 0$	1	0	0	0	0	1		3	2	2	2	2	3
$x_0^2 + x_2x_3 - x_1x_4 = 0$	2	1	1	1	1	1		3	2	2	2	2	2
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	2	0	0	1	0	0		7	5	5	6	5	5
$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$	3	0	1	1	1	1		8	6	7	7	7	7

Tabell 5.3: Det som skjer med forskjellige hyperflater i $\mathbb{P}^4$ under ϕ.

Kva med bildet til eit fundamentalt plan, då? Vel, på tilsvarande måte vert desse avbilda på ei linje. Planet $a_0 = a_1 = 0$ går for eksempel på $b_2 = b_3 = b_4 = 0$.

5.2.2 Bildet av hyperplan

Eit naturleg spørsmål å stille seg er: Kva skjer med eit hyperplan som inneheld 1, 2 eller 3 av dei fundamentale punkta? Kva vil desse hyperplana bli avbilda på under ϕ? Sidan hyperplanet er definert ved nullpunktsmengda til eit polynom, vil også bildet av dette bli nullpunktsmengda til eit polynom, men av kva grad? Kva grad er det på hyperflata vi får ut i codomenet?

Først og fremst: I likhet med eksemplet i $\mathbb{P}^2$ har vi at sidan ϕ er ein isomorfi utanfor dei definerande hyperplana, vil det for alle varietetar V vere slik at dersom vi kallar unionen av dei 5 definerande hyperplana for U, vil vi få at dim V = dim $\phi(V - U)$ - dimensjonen til varieteten er bevart utanfor hyperplana. Graden til bildet av hyperflata vil vere antal snittpunkt mellom hyperflata og ei generell linje, gitt ved snittet til 3 generelle hyperplan. Måten vi finn dette på er å i staden sjå på antal snittpunkt utenom F_4 til inversbilda til desse hyperplana.

La oss ta eit eksempel.

Eksempel 5.3. La H_{AB} vere eit hyperplan som går gjennom dei to fundamentale punkta A og B i domenet. Då vil $\phi(H_{AB})$ ha grad 2.

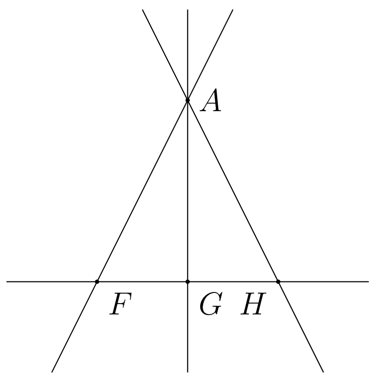
Bevis. La oss sjå på restriksjonsavbildninga $\phi|_{H_{AB}} : H_{AB} \to \mathbb{P}^4$.

For å finne graden til $\phi(H_{AB})$ ser vi altså på kor mange gonger $\phi(H_{AB})$ skjer ei generell linje i codomenet. Ei slik linje i codomenet vil vere gitt ved snittet av tre hyperplan. Inversbildet til desse tre hyperplana vere 3 kvartikkar som eg kallar KV_0, KV_1 og KV_2. Vi treng altså å sjå på kor mange gonger snittet av desse kvartikkane skjer H_{AB}.

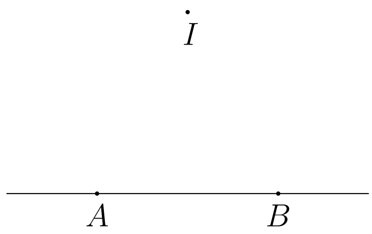
Det er då interessant å sjå på kva snittet mellom H_{AB} og F_4 er. Det er linja mellom A og B, eit punkt frå henholdsvis BC, CD og DE som vi kan kalle F, G og H, og linjene gjennom kvart par av desse 5 punkta. F, G og H ligg på same linje.

Om vi utelukkande ser på F_4, vil både KV_0, KV_1 og KV_2 ha multiplisitet 3 i dei fundamentale punkta, multiplisitet 2 i kvart punkt på dei fundamentale linjene og multiplisitet 1 i punkt på dei fundamentale plana. Linja AB inkludert punkta F, G og H vil då ha multiplisitet 2, og linja gjennom F, G og H vil ha multiplisitet 1.

La oss først sjå på KV_0, og sidan hyperplana er generelle, kan vi velje KV_0 til å vere unionen av 4 plan. Eg vel då denne kvartikken til å vere unionen av planet utspent av B, F, G og H, planet utspent av A, F, G og H, og to andre plan som



Figur 5.3: Restriksjonen av F_4 til planet gjennom A, F, G og H



Figur 5.4: Restriksjonen av F_4 til planet gjennom A og B

inneheld linja AB. Då har vi dekka over den fundamentale mengda vi treng å ha inkludert. Kva blir då restriksjonen av KV_1 og KV_2 til desse plana?

Vel, om vi tek KV_1, og restrikterer denne til planet gjennom A, F, G og H, blir restriksjonen fortsatt ein kvartikk, og sidan KV_1 må inneholde alle dei fundamentale punkta med tilhøyrande multiplisitet, har vi ikkje andre mulighetar enn den eine: Det er at KV_1 restriktert til dette planet vil vere dei 4 irredusible komponentane som er linjene AF, AG, AH og FG. FG går også gjennom H. Melodien er lik for KV_2, så KV_1 og KV_2 må begge ha akkurat denne restriksjonen til dette planet. Alle desse punkta er punkt frå F_4, så derav vil vi ikkje få noko bidrag til graden her. Ei akkurat tilsvarande historie vil vi få for planet gjennom B, F, G og H.

Det eine planet gjennom A og B vil snitte linja FG i eit punkt, vi kallar det I. KV_1 og KV_2 må ha dobbel multiplisitet i kvart punkt på linja AB, så kvar av kvartikkane må ha to irredusible komponentar, altså linjer, i AB. I tillegg har vi då punkta A, B og I som begge kvartikkane må gå gjennom. Restriksjonen av KV_1 og KV_2 til planet vil i tillegg til den doble linja AB vere ein kvadrikk, og tek vi to kvadrikkar gjennom A, B og I, vil desse kvadrikkane snitte kvarandre i eit fjerde punkt! Vi har no fått eit snittpunkt som ikkje er ein del av den fundamentale mengda, og som derav fortel at vi har eit snittpunkt mellom $\phi(H_{AB})$ og vår generelle linje.

Det andre planet gjennom A og B vil gje same historie, og vi får då til saman to snittpunkt utenom den fundamentale mengda. Eit hyperplan gjennom to fundamentale punkt har derav grad to etter transformasjonen! $\square$

Tabell 5.3 viser kva som skjer med forskjellige hyperflater i $\mathbb{P}^4$ under transformasjonen.

5.2.3 Bildet av sekantar

Før vi går vidare til sekantvarieteten S_a, kan det vere interessant å spørre seg kva som skjer med ein enkelt sekant. Dersom sekanten ikkje er inneholdt i nokon av hyperplana, vil den skjere kvart hyperplan ein gong, men spørsmålet er kor sekanten skjer hyperplanet - er det i eit punkt som er ein del av den fundamentale mengda?

La oss anta at sekanten ikkje går gjennom nokon av dei fundamentale punkta. La oss også anta at linja ikkje skjer noko fundamentalt plan i det heile tatt. Graden til bildet av sekanten kan vi finne ved å ta eit generelt hyperplan i codomenet, trekkje dette tilbake til domenet, og sjå kor mange gonger inversbildet snittar sekanten utenom dei fundamentale punkta. Bildet av sekanten vil då vere ei kurve av grad 4, for alle dei 4 skjeringspunkta mellom sekanten og inversbildet av hyperplanet, som er ein kvartikk, vil vere punkt utanfor den fundamentale mengda. Billedkurva vil også gå gjennom kvart fundamentalt punkt i codomenet ein gong, sidan sekanten går gjennom hyperplana $H_a, H_b, ..., H_e$ ein gong kvar.

Dei 5 fundamentale punkta i codomenet, som er ein del av bildet til sekanten, ligg også på bildet av C_a sidan C_a skjer kvart definerande hyperplan i domenet ein gong i tillegg til i dei fundamentale punkta. Saman med dei to andre punkta frå C_a får vi at bildet av sekanten skjer den elliptiske kurva i heile 7 punkt.

Lemma 5.4. Ei 4-gradskurve k som går gjennom 7 punkt på C_a inkludert dei 5 fundamentale punkta til ϕ, vil bli ein sekant til $\phi(C_a)$.

Bevis. Inverterer vi eit generelt hyperplan frå codomenet, vil kvartikken vi då får i domenet skjere kurva i til saman 16 punkt. 15 av desse er imidlertid frå dei fundamentale punkta, sidan kvartikken er trippel i alle desse. Vi blir derav ståande igjen med at $\phi(k)$ må ha grad 1, og $\phi(k)$ må derav vere ein sekant. □

Ein sekant som skjer eit fundamentalt plan, men ikkje er inneholdt i det, sei planet gitt ved $H_a = 0$ og $H_b = 0$, vil skjere den fundamentale linja $A'B'$ i codomenet. Den vil derav ikkje gå gjennom verken punktet A' eller B' i codomenet, sidan det einaste punktet som går gjennom H_a ikkje blir avbilda på A'. Bildet av denne kurva vil då ha grad 3, sidan inversbildet av eit generelt hyperplan vil skjere sekanten i 3 punkt utenfor den fundamentale mengda. Hyperplanet vil skjære enkelt i det fundamentale planet som sekanten skjer.

På same måte vil ein sekant gjennom ei fundamental linje bli ei 2-gradskurve, medan ein sekant gjennom eit fundamentalt punkt vil bli ei linje. Sekanten gjennom eit fundamentalt plan og den einaste fundamentale linja som ikkje snittar dette planet vil også bli ei linje. Då har vi ikkje fleire mulighetar for sekantar.

5.2.4 Bildet av S_a og C_a

Men - la oss gå vidare til S_a. Her er det heilt klart eit naturleg spørsmål som kjem opp. Om vi utfører ϕ på C_1 og deretter finn sekantvarieteten til bildet til $\phi(C_a)$, vil dette vere lik $\phi(S_a)$? Kva skjer med S_a under Cremonatransformasjonen? Blir dette sekantvarieteten til ei eller anna elliptisk kurve? La oss vere spesifikke, og sjå på C_1 og S_1.

Teorem 5.5. $\phi(C_1)$ blir ei ny elliptisk kurve. Utfører vi derimot ϕ på alle kvadrikkane som C_1 er definert av, vil nullpunktsmengda til desse inneholde dei ti fundamentale linjene i tillegg til $\phi(C_1)$.

Bevis. Etter at vi har utført Cremonatransformasjonen på S_1 får vi eit nytt polynom. Også dette er eit 5-gradspolynom, og dimensjonen til nullpunktsmengda blir 3. Det er derav truleg at dette er sekantvarieteten til ei eller anna kurve. Dersom det er ei elliptisk kurve, veit vi no frå Lemma 4.3 at sekantvarieteten til denne er trippel langs heile kurva, så vi kan lett finne ut kva kurve dette i så fall må vere.

Alle dei doble partiellderiverte til femtegradspolynomet gjev oss 25 tredjegradspolynom. Saturerer vi dette, finn vi at det saturerte idealet Sat er generert av 5 kvadrikkar! Slett ikkje dumt. Nullpunktsmengda til desse kvadrikkane er eindimensjonal, og det er naturleg å kunne mistenke at vi då har fått ei ny elliptisk kurve.

Dei kvadrikkane vi får, er:

$$x_1x_2-10x_2+14x_0x_3-10x_1x_3-8x_2x_3-4x_3+11x_0x_4-14x_1x_4+9x_2x_4-11x_3x_4+14x_4$$

$$x_0x_2+15x_2^2+2x_0x_3-13x_1x_3-6x_2x_3-7x_3^2+11x_0x_4-3x_1x_4+2x_2x_4+6x_3x_4$$

$$x_1^2-4x_2^2-9x_0x_3-5x_1x_3-x_3^2+4x_0x_4+9x_1x_4+15x_2x_4+10x_3x_4+13x_4^2$$

$$x_0x_1+2x_2^2+10x_0x_3-8x_1x_3-7x_2x_3+10x_3^2+13x_0x_4-5x_1x_4+9x_2x_4-11x_3x_4-5x_4^2$$

$$x_0^2-7x_2^2-9x_0x_3-9x_1x_3+3x_2x_3+9x_3^2-x_0x_4-2x_1x_4-7x_2x_4-15x_3x_4$$

Vår 5. grads hyperflate har då trippel multiplisitet i alle punkta som er ein del av nullpunktsmengda til desse kvadrikkane, noko som betyr at alle sekantar til kurva definert av denne nullpunktsmengda må vere inneholdt i hyperflata.

C_1 har grad 5. Graden til $\phi(C_1)$ kan vi finne, som med andre kurver tidlegare, ved å invertere eit hyperplan frå codomenet. Kvartikken som vi då får, vil skjere C_1 i $5 \cdot 4 = 20$ punkt, men 15 av desse tel vi frå dei fundamentale punkta, der kvartikken er trippel. Då vil vi få 5 snittpunkt igjen. Bildet av den elliptiske kurva har då faktisk grad 5 under ϕ.

Verdt å merke seg er då at bildet av C_1 ikkje ville hatt same grad om vi hadde valt ein Cremonatransformasjon der ei eller fleire av dei fundamentale punkta hadde vore punkt som ikkje låg på C_1. Då ville ikkje inversbildet av ein kvadrikk ha snitta kurva trippelt i 5 fundamentale punkt, og graden til bildet kunne då ha blitt alt frå 6 til og med 20. Det er med andre ord svært vesentleg for denne vakre teorien at våre fundamentale punkt er 5 punkt på C_1!

Bruker vi no Macaulay2, og finn $\phi(K_i)$ for alle dei 5 kvadrikkane K_i, får vi ut 5 polynom av grad 8. Men kvadrikkane vil ikkje bli hyperflater av grad 8. Ved å ta ei generell linje i codomenet, finn eg at inversbildet til denne har grad 4, og denne snittar då kvar kvadrikk i 8 punkt. Men no er det imidlertid slik at kvar kvadrikk skjer A, B, C, D og E enkelt, og det gjer også kurva, så desse 5 punkta tel ikkje med når vi skal finne graden til bildet. Vi får då at bildet av kvar kvadrikk blir ein kubikk.

For å finne desse kubikkane, faktoriserer vi polynoma av grad 8, og finn at alle dei 5 lineære formene i codomenet er faktorar i desse polynoma. Dei er bildet av A, B, C, D og E, og kan då delast vekk; det er ikkje desse vi er interessert i.

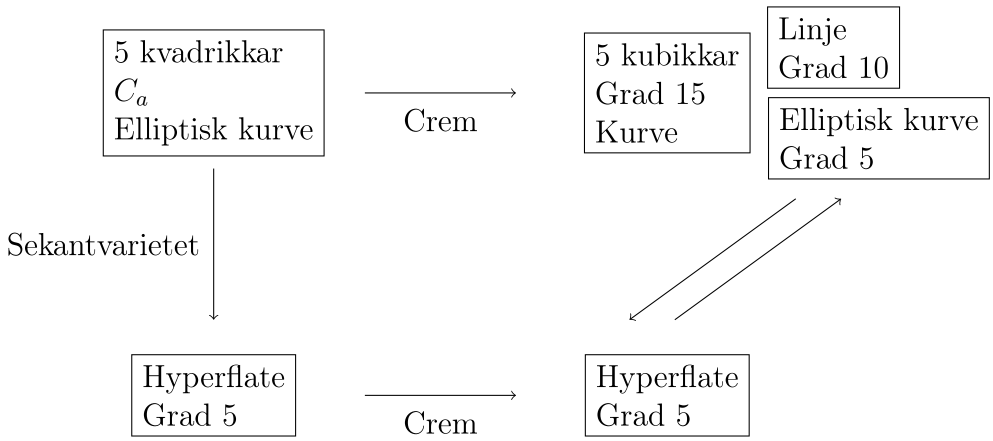
Vi får då eit nytt ideal J generert av 5 kubikkar. Den felles nullpunktsmengda til desse kubikkane gjev oss ei kurve av grad 15. Dette kan då ikkje vere ei elliptisk kurve. Det viser seg imidlertid at kurva $Z(Sat)$ er inneholdt i denne nullpunktsmengda! Idealet til kubikkane er nemleg inneholdt i idealet til kvadrikkane. Kva er det då for noko ekstra som har snike seg med?

Det ekstra som har kome med, finn vi ved å ta idealkvotienten $(J : Sat)$. Då får vi ei kurve R av grad 10. Det som er interessant, er at kurva av grad 15 har 5 singulære punkt, og det har også kurva vår av grad 10! Men idealsummen $R + Sat$ gjev ikkje same Hilbertpolynom som enhetsidealet, så desse to kurvene snittar kvarandre.

Det er truleg at dette ekstra som kjem med, har noko med den fundamentale mengda å gjere. Om vi tek ein kvadrikk i idealet til C_a, og restrikterer denne kvadrikken til eit av dei ti plana, vil vi få ei andregradskurve i $\mathbb{P}^2$. Samtidig må vi ta hensyn til dei 3 fundamentale punkta, der andregradskurva skal gå gjennom alle saman sidan C_1 skal gå gjennom alle saman. Generelt betyr dette at for kvart par av to fundamentale punkt, vil alle kvadrikkane snitte linja gjennom desse fundamentale punkta kun i dei fundamentale punkta.

Sidan vi har sett i Lemma 3.2 at kvart plan ikkje kan inneholde 4 punkt frå C_1, vil ikkje snittet av alle desse kvadrikkane restriktert til planet inneholde noko anna enn dei 3 fundamentale punkta sjølv. Men for kvar kvadrikk blir alle punkta på kvadrikken i dette planet avbilda på ei linje.

Denne linja vil då vere med i bildet til alle kvadrikkane, og derav også vere ein del av snittet. Derfor blir linja som er unionen av alle dei 10 linjene som går gjennom to punkt, med i bildet til idealet til den elliptiske kurva. Dette må då vere R, sidan R er av grad 10. □



Figur 5.5: Det som skjer med ei elliptisk kurve og sekantvarieteten under Cremonatransformasjonen

Det som er, er at dersom vi finn dei førstederiverte til kurva definert av nullpunktsmengda til J, får vi 10 singulære punkt på kurva, telt med multiplisitet. Vi veit at den elliptiske kurva og resten min skjer kvarandre i 5 punkt, men finst det 5 punkt til som dei skjer kvarandre i?

Svaret er nei. Dersom det faktisk hadde vore fleire skjeringspunkt mellom linjene og kurva enn dei 5 vi allereie veit om, måtte eit slikt punkt ha lege på ei linje, slik at vi hadde fått ei linje med tre punkt frå den elliptiske kurva. Men det finst ikkje tre punkt på den elliptiske kurva som ligg på linje - ei linje i $\mathbb{P}^4$ vil skjære ei 2-grads hyperflate i maks 2 punkt, og då kan umulig snittet av 5 slike hyperflater skjære ei linje i fleire punkt enn 2.

$Z(Sat)$ og R må derav snitte dobbelt i kvart av dei fundamentale punkta i codomenet.

Kurva definert av dei 5 nye kvadrikkane i codomenet har altså grad 5, og vi kan lett finne at kurva er singulær og har genus 1. Det betyr at dette er ei elliptisk kurve. Denne nye elliptiske kurva er imidlertid ikkje i nærheten av å vere definert av like enkle kvadrikkar som dei vi hadde i domenet. Den er då heller ikkje invariant under H sidan den ligg i Proj S og ikkje i Proj R.

Macaulay2-kode 3. :
D = $ZZ/31[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$; <Koordinatringen til domenet, merk at eg brukar ein endeleg kropp>
C = $ZZ/31[y_0, y_1, y_2, y_3, y_4]$; <Koordinatringen til codomenet>
hypa = $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ <Dei 5 hyperplana>
hypb = $14 * x_0 + 14 * x_1 + 3 * x_2 + 3 * x_3 + 14 * x_4$
hypc = $26 * x_0 + 26 * x_1 + 15 * x_2 + 4 * x_3 + 15 * x_4$
hypd = $12 * x_0 + 23 * x_1 + 12 * x_2 + x_3 + x_4$
hype = $2 * x_0 + 13 * x_1 + 13 * x_2 + 2 * x_3 + 2 * x_4$
xtily = map$(S, R, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ <Identitetsavbildninga mellom koordinatringane>
ytilx = map$(R, S, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ <Inversen til sistnevnte>
yhypa = xtily(hypa)
yhypb = xtily(hypb)
yhypc = xtily(hypc)
yhypd = xtily(hypd)
yhype = xtily(hype)
faca = hypb*hypc*hypd*hype <Produktet av kvart utval av 4 hyperplan>
facb = hypa*hypc*hypd*hype
facc = hypa*hypb*hypd*hype
facd = hypa*hypb*hypc*hype
face = hypa*hypb*hypc*hypd
trans0 = faca/11-facb/11+facc/11-face/11 <Det y_0 avbildast på>
trans1 = facb/11-facc/11+facd/11 <Det y_1 avbildast på>
trans2 = -2*faca/11-facb/11+facc/11-facd/11+face/11 <etc>
trans3 = 16*faca/11-facc/11+facd/11-face/11
trans4 = -4*faca/11+facb/11-facd/11+face/11
x0pa = xtily(trans0)
x1pa = xtily(trans1)
x2pa = xtily(trans2)
x3pa = xtily(trans3)
x4pa = xtily(trans4)
Crem = map(S, R, x0pa, x1pa, x2pa, x3pa, x4pa) <ϕ>
Q1 = $x_0 * x_0 + x_2 * x_3 - x_1 * x_4$ <Dei 5 kvadrikkane som definerer C_1>
Q2 = $x_1 * x_1 + x_3 * x_4 - x_0 * x_2$
Q3 = $x_2 * x_2 + x_4 * x_0 - x_1 * x_3$
Q4 = $x_3 * x_3 + x_0 * x_1 - x_2 * x_4$
Q5 = $x_4 * x_4 + x_1 * x_2 - x_0 * x_3$
I = ideal(Q1,Q2,Q3,Q4,Q5) <Idealet hvis nullpunktsmengde er C_1>
dim I
degree I
J = jacobian I
S1 = det J <Sekantvarieteten S_1
S2 = Crem(S1)
prodliny = yhypa*yhypb*yhypc*yhypd*yhype
S2 = S2/(prodliny^3) <Deler ut med bildet av dei 5 fundamentale punkta, dvs dei 5 hyperplana i codomenet, 3 gonger>

S2 = numerator S2 <Den nye sekantvarieteten>
der1S2 = ideal(jacobian ideal(S2))
dim der1S2
degree der1S2
der1S2 == saturate der1S2
nyttid = ideal(jacobian der1S2)
nyttid == saturate nyttid
nyttid = saturate nyttid <Det som viser seg å vere bildet av C_1>
dim nyttid
degree nyttid
kva1 = Crem(Q1) <Eg utfører Cremonatransformasjonen på kvar av dei 5 hyperplana C_1 er definert ved>
kva2 = Crem(Q2)
kva3 = Crem(Q3)
kva4 = Crem(Q4)
kva5 = Crem(Q5)
kva1 = kva1/(prodliny) <Deler ut med bildet av alle dei fundamentale punkta>
kva2 = kva2/(prodliny)
kva3 = kva3/(prodliny)
kva4 = kva4/(prodliny)
kva5 = kva5/(prodliny)
kva1 = numerator kva1
kva2 = numerator kva2
kva3 = numerator kva3
kva4 = numerator kva4
kva5 = numerator kva5
creI = ideal(kva1,kva2,kva3,kva4,kva5)
isSubset(creI, nyttid) <Finn ut at den elliptiske kurva eg fann via sekantvarieteten er inneholdt i bildet av idealet>
dim creI
degree creI
saturate creI
rest = quotient(creI, nyttid) <Ser på kva "resten" blir, det som altså er dei ti linjene>
dim rest
degree rest
intersect(rest, nyttid)
der1creI = ideal(jacobian creI)
dim der1creI
degree der1creI <Finn at nullpunktsmengda til bildet av kvadrikkane som definerer C_1 har 10 singulære punkt inkludert multiplisitet>

5.2.5 Dei 12 pentagona

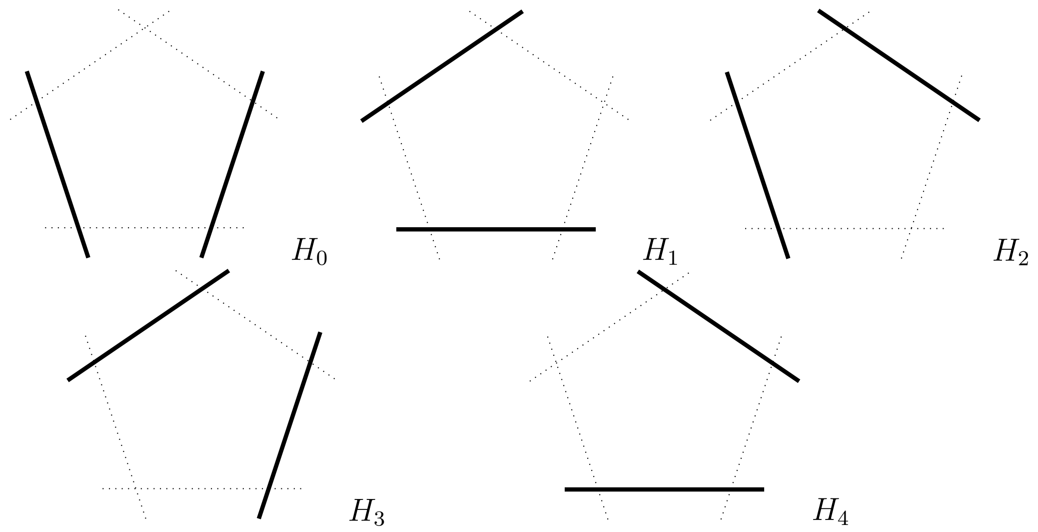
No har vi sett på kva som skjer med dei elliptiske kurvene C_a som er glatte, men kva skjer med dei 12 pentagona om vi gjer ein tilsvarande studie av desse? På samme måte som med dei glatte kurvene vil eg velje 5 punkt som ligg på den elliptiske kurva til å definere Cremonatransformasjonen min. Her er det forskjell på resultatet ut frå kva punkt på den elliptiske kurva eg vel.

Når eg skal velje desse punkta, er eg som i tilfellet med dei glatte elliptiske kurvene nødt til å velje 5 punkt som ikkje ligg i det same hyperplanet. Det er derfor totalt uaktuelt at tre punkt kan ligge på same linje eller at 4 punkt kan ligge i same plan, for då vil alle dei 5 punkta ligge i det samme hyperplanet.

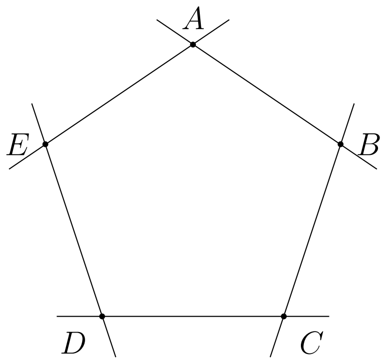
Vi har då til saman 20 forskjellige måtar å velje punkta på opp til symmetri, og eg vil sjå på kva som skjer i kvart av desse tilfella. I kvart tilfelle vil eg kalle dei fem fundamentale punkta mine for A, B, C, D og E, og dei 5 definerande hyperplana for P_a, P_b, P_c, P_d og P_e. A', B' osv. er punkta i codomenet som henholdsvis P_a, P_b osv. går på, og $P_{a'}, P_{b'}$ osv. er dei hyperplana som inneheld alle punkta utenom henholdsvis A', B' osv.

Eg vel å utelukkande sjå på den elliptiske kurva $C_0 = C$, og I er idealet slik at $C = Z(I)$. J er idealet generert av kubikkane som genererer I når eg har delt kvar av dei ut med dei lineære formene. $C_{ny} = \phi(C)$. Då vil $S = Q_{-1}$ vere sekantvarieteten min, og $S_{ny} = \phi(S)$. Eg vil beteikne dei ti linjene mellom dei fundamentale punkta i codomenet for *overskuddslinjer*.

Her er korleis eg definerer hyperplana mine i figurane eg brukar seinare. Hyperplana er gitt ved unionen av alle moglege sekantar til dei to markerte linjene.



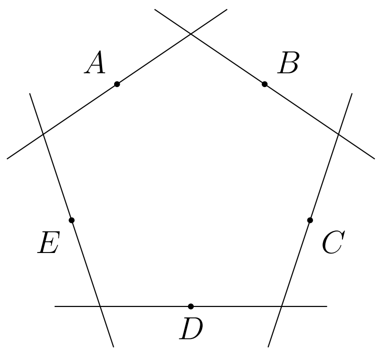
Dei 5 punkta som definerer Cremonatransformasjonen er dei 5 singulære punkta



C vil då utelukkande ligge på 5 linjer mellom to fundamentale punkt. Desse linjene blir kvar og ein avbilda på eit plan under *phi*. C_{ny} blir då unionen av 5 plan! Det er to ulike pentagon som går gjennom akkurat desse fundamentale punkta, og biletet til unionen av desse to kurvene vert til saman alle dei 10 plana i den fundamentale mengda for ϕ. 5 av dei er bildet av den eine, og 5 av dei er bildet av den andre.

Men kva vil S_{ny} bli? Vil vi få sekantvarieteten til unionen av dei 5 plana, eller noko heilt anna? Vel, S_{ny} er unionen av nøyaktig dei same $\mathbb{P}^3$-ane som definerer ϕ! Det betyr at ϕ avbildar S på 5 punkt, dei 5 fundamentale punkta i codomenet!

Eit punkt frå kvar linje, ingen av dei singulære punkta



Dersom vi i staden vel 5 punkt på C som ikkje er dei 5 singulære punkta, eit frå kvar linje, kva skjer då?

$Z(J)$ vil no nok ein gong vere ei kurve av grad 15. Om vi tek inn tidlegare erfaring, kan vi no fjerne linja som er unionen av dei ti linjene, og då bør vi forvente at det resterande bildet er ei elliptisk kurve. Slik som tidlegare er det nemleg sånn i dette tilfellet at når vi restrikterer kvar kvadrikk til eit plan, vil kvadrikken snitte linjene mellom dei tre fundamentale punkta som ligg i dette planet, kun i dei fundamentale punkta. J vil derav inneholde dei 10 overskuddslinjene.

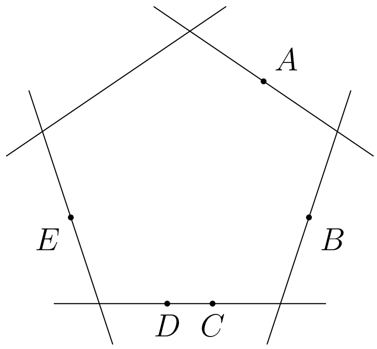
Idealet O hvis nullpunktsmengde er unionen av overskuddslinjene, finn vi ved å snitte alle dei ti ideala som har nullpunktsmengde lik ei linje mellom to punkt. Tek vi så idealkvotienten $(J : O)$, finn vi eit ideal generert av 5 kvadrikkar! Vi har fått ut C_{ny}, som denne gongen faktisk er ei elliptisk kurve.

Så til S_{ny}. Ser vi på kvart hyperplan H_i for seg sjølv, er det enklare å finne bildet til S på den måten. H_0 snittar dei fundamentale plana i 4 plan. Desse 4 plana blir avbilda på dei 4 linjene $A'B', A'C', A'D'$ og $A'E'$ i codomenet. Dersom vi ser på den opne mengda utanfor dei 5 hyperplana som definerer ϕ, vil jo ϕ vere ein isomorfi, og den sender hyperplanet H_0 på eit hyperplan som går gjennom B', C', D' og E'. Dei 4 andre linjene er ikkje med i dette hyperplanet, og derav vil $\phi(H_0)$ bli eit hyperplan og fire linjer.

Om vi no finn bildet til H_1, H_2, H_3 og H_4 vil også kvar av desse vere unionen av eit hyperplan og 4 linjer. Alle linjene er no inneholdt i minst eit av hyperplana, så bildet av sekantvarieteten blir ein union av 5 hyperplan.

Finn vi sekantvarieteten til den nye elliptiske kurva mi i codomenet, finn vi akkurat dei samme hyperplana. Vi har igjen komt til det same resultatet uavhengig av reiseveg.

To punkt frå ei linje og eit frå dei to nærliggande. Ingen singulære



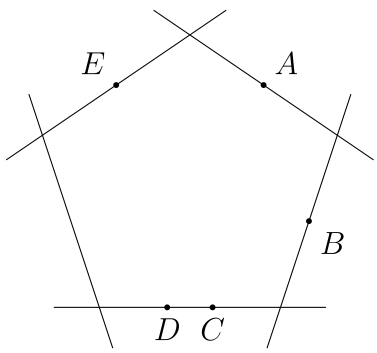
Om vi i staden vel to punkt frå den same linja, og ingen av dei fundamentale punkta, vil $Z(J)$ inneholde eit plan! Dersom vi ser på kvar av linjene for seg sjølv, er det enklare å sjå kva bildet deira blir. CD blir no avbilda på planet gjennom A', B' og E'. Linjene gjennom E, A og B blir avbilda på 3 linjer gjennom henholdsvis E', A' og B'.

Linja som ikkje går gjennom nokon av punkta vil bli avbilda på ei kurve, men av kva grad? Jo, vi kan som vanleg sjå på kor mange gonger linja skjer eit vilkårleg hyperplan i codomenet. Trekkjer vi tilbake hyperplanet til domenet, får vi ei hyperflate av grad 4, og då vil linja skjære denne hyperflata i 4 punkt. Graden til kurva vi får i codomenet blir då 4. Til saman får vi då at C_{ny} vil vere unionen av eit plan, ei kurve av grad 4 og 3 linjer. I tillegg får vi ut 7 overskuddslinjer i $Z(J)$.

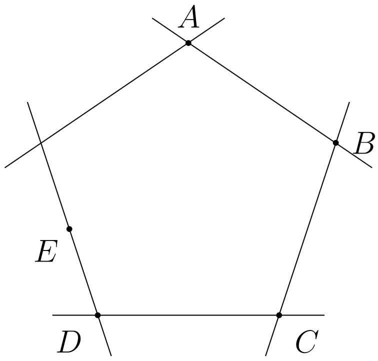
S_{ny} vil vere ein union av 3 hyperplan og ei 2-grads hyperflate. Dei tre hyperplana som kvar inneheld 3 av dei fundamentale punkta, blir nemleg avbilda på tre hyperplan kvar. Det hyperplanet som inneheld to fundamentale punkt, blir som vi har sett tidlegare avbilda til ei 2-grads hyperflate, medan det siste hyperplanet blir avbilda på eit punkt sidan det er identisk med eit av dei fundamentale hyperplana.

To punkt frå kvar linje og eit frå dei to nærliggande. Ingen singulære

Her vil vi få det samme som variant 1 når vi tek bildet av den elliptiske kurva. Men bildet av sekantvarieteten vil bli unionen av to 2-grads hyperflater og eit hyperplan.



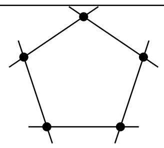
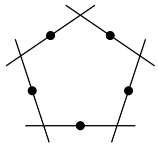
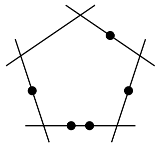
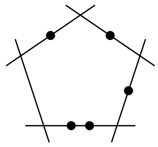
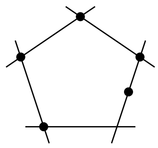
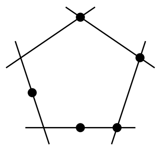
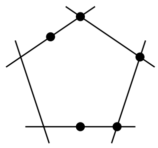
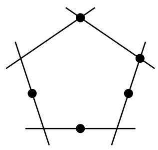
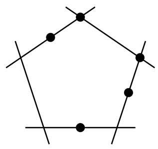
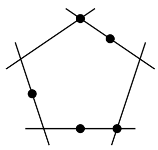
4 singulære punkt pluss eit frå ei av linjene som ikkje ligg mellom to singulære punkt



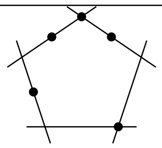
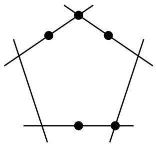
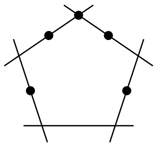
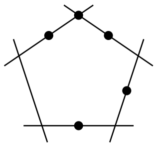
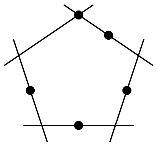
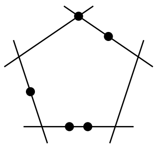
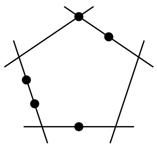
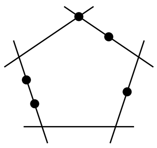
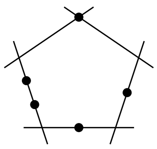
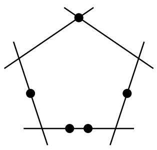
Her vil det for 4 av dei 10 linjene som vi får frå dei fundamentale punkta i ϕ vere slik at alle kvadrikkane inneheld denne linja. Det betyr at vi får ut 4 plan på andre sida, og ei kurve av grad 4 når vi har tatt vekk overskuddslinjene.

4 av hyperplana i sekantvarieteten avbildast på 4 punkt under ϕ. Det siste hyperplanet vil gå på eit nytt hyperplan, så vi får unionen av eit hyperplan og fire punkt. Det nye hyperplanet vil gå gjennom A', B' og C'.

Det er fortsatt 15 fleire val av punkt opp til isomorfi, men eg vil ikkje gå inn i detalj på desse. Alle resultata er oppsummert i tabell 5.4 og tabell 5.5.

	C_{ny}				S_{ny}		
Val av punkt	Linje	4-grad	Plan	OL	Punkt	HP	2-grads
			5		5		
	5			10		5	
	3	1	1	7		1	2
	3	1	1	7		3	1
	1		4	1	1	1	
	2		3	3		2	
		1	4	1		2	
	3		2	5		3	
	1	1	3	3		3	
	3		2	4		3	

Tabell 5.4: Antalet irredusible komponentar av kvar type for C_{ny} og S_{ny} etter ϕ. "4-grad" er fjerdegradskurver, "OL" er overskuddslinjer, "HP" er hyperplan og "2-grads" er 2-grads hyperflater.

	C_{ny}				S_{ny}		
Val av punkt	Linje	4-grad	Plan	OL	Punkt	HP	2-grads
	3		2	5		1	1
	1	1	3	2		1	1
	2	1	2	5		2	1
	2	1	2	5		2	1
	4		1	7		4	
	2	1	2	4		2	1
	2	1	2	4		2	1
	2	1	2	4		4	
	4		1	7		2	1
	4		1	7			2

Tabell 5.5: Antalet irredusible komponentar av kvar type for C_{ny} og S_{ny} etter ϕ. "4-grad" er fjerdegradskurver, "OL" er overskuddslinjer, "HP" er hyperplan og "2-grads" er 2-grads hyperflater.

Avslutning

I denne oppgåva har vi jobba hovudsakleg med koordinatar for å få fram dei svara vi er ute etter. Ein annan vinkel å sjå problemstillingar frå, er ved å trekkje inn lineære system av divisorar.

Ei ny avbildning

Ein kan starte i $\mathbb{P}^2$ og fiksere eit punkt P. Mengda av kjeglesnitt som går gjennom dette punktet utgjer eit 5-dimensjonalt vektorrom av kvadrikkar gitt ved ein basis $\langle q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \rangle$. Ein kan då definere ei avbildning

$$\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4 : a \to q_0(a), q_1(a)..., q_4(a).$$

Så kan ein fiksere ei elliptisk kurve C som går gjennom dette punktet i $\mathbb{P}^2$, og sjå på avbildninga restriktert til denne kurva. Kva får ein då? Jo, ei elliptisk kurve i $\mathbb{P}^4$!

Snittar vi denne med eit vilkårleg hyperplan får vi ein divisor av grad 5. Ser vi på kvart hyperplan som eit punkt i $(\mathbb{P}^4)^*$ gjev det oss eit lineært system av grad 5, der alle punkta er forskjellige.

Vi kan sjå at vi faktisk har eit unikt lineært system for kvart punkt på den elliptiske kurva, og vi har då til saman ein eindimensjonal familie av lineære system på ei elliptisk kurve, parametrisert av kurva sjølv.

Vidare kan vi, gitt ei elliptisk kurve C, eit punkt $P \in C$ og fem punkt på $\psi_P(C)$, finne ein unik $Q \in C$ slik at dei fem punkta på $\psi_P(C)$ dannar ein Cremonatransformasjon som transformerer $\psi_P(C)$ til $\psi_Q(C)$.

Flater som inneheld C_a

C_a ligg på ei mengd flater av grad 3 i $\mathbb{P}^4$ som blir kalt kubiske skruar. Dette er unionen av linjer som går gjennom C_a. Desse kan vere verdt ein studie. Sekantvarieteten er ein slik einparameterfamilie av skruar.

Ein annleis Cremonatransformasjon

C_a er gitt som snittet av 5 kvadrikkar. Desse 5 kvadrikkane definerer også ei interessant birasjonal avbildning θ frå $\mathbb{P}^4$ til $\mathbb{P}^4$, som er ein isomorfi utanfor S_a i domenet. Den fundamentale mengda er no C_a sjølv, men denne gongen er ikkje θ sin eigen invers.

Bibliografi

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[2] Audun Holme. *A Royal Road to Algebraic Geometry*. Springer Science Business Media, 2011.

[3] Klaus Hulek. *Projective geometry of elliptic curves*. Société mathématique de france, 1986.