

Universitetet i Oslo  
Matematisk institutt

# Homotopifikspunkter og Nielsen-teori

Ingrid Seem

Hovedfagsoppgave

17. september 2002





# Forord

Denne oppgaven er den skriftlige delen av min cand.scient.-grad i matematikk ved Universitetet i Oslo. Oppgaven ble til i tidsrommet 2001-02 under engasjerende veiledning av professor Bjørn Jahren, som ofte har hatt tid til å snakke med meg utover i de sene ettermiddagstimer.

En takk går til alle mine medstudenter, spesielt de på lesesal B601, for hyggelig samvær.

Oslo, 17. september 2002

Ingrid Seem



# Innhold

1	En tolkning av Reidemeister-tallet	9
2	Egenskaper for Reidemeister-trasen	19
3	En formel for Reidemeister-trasen	23
4	Utvidelse til endelige CW-komplekser	41



# Innledning

Et fikspunkt for en selvavbildning  $f : X \rightarrow X$  er et punkt  $x \in X$  som oppfyller likningen  $f(x) = x$ . Mengden av alle fikspunkter for  $f$  kalles  $Fix(f)$ . I fikspunktteori studeres egenskapene til  $Fix(f)$  for forskjellige  $X$  og  $f$ . Fikspunktene til  $f$  kan deles inn i klasser ved å se på løftningene til  $f \circ p$ , dvs avbildninger  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommuterer, der  $\tilde{X}$  er universaloverdekningsrommet til  $X$ . Løftningsklassene  $[\tilde{f}]$  til  $f$  defineres som konjugasjonsklassene til  $\tilde{f}$  med hensyn på fundamentalgruppen  $\pi_1(X)$  til  $X$ , eller med andre ord  $[\tilde{f}] = \{\alpha \tilde{f} \alpha^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X)\}$ . Undermengden  $p(Fix(\tilde{f})) \subset Fix(f)$  kalles fikspunktklassen til  $f$  bestemt av løftningsklassen  $[\tilde{f}]$ . Denne er uavhengig av valg av representant  $\tilde{f}$  for  $[\tilde{f}]$ , se Teorem 1.8. Fikspunktklassene er disjunkte undermengder av  $Fix(f)$ , og deres union er  $Fix(f)$ . For visse  $[\tilde{f}]$  kan fikspunktklassen  $p(Fix(\tilde{f}))$  være tom.

I Nielsen-teori studeres tallene Reidemeister-tallet  $R(f)$ , Nielsen-tallet  $N(f)$  og Lefschetz-tallet  $L(f)$ .  $R(f)$  er det totale antallet fikspunktklasser, mens  $N(f)$  er antallet essensielle fikspunktklasser, de som ikke forsvinner under homotopi. For en selvavbildning  $f : X \rightarrow X$  på et endelig CW-kompleks eller mer generelt et rom hvis homologigrupper er endelig genererte og forsvinner i høye dimensjoner, er Lefschetz-tallet

$$L(f) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X))$$

definert. Et velkjent teorem i fikspunktteori er Lefschetz' fikspunktteorem, som brukes til å vise eksistens av fikspunkter.

**Lefschetz' fikspunktteorem.** *La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning som ovenfor. Enhver avbildning homotop med  $f$  har et fikspunkt dersom  $L(f) \neq 0$ .*

Nielsen-teori baserer seg på teorien for overdekningsrom. En alternativ måte er å bruke veier isteden for overdekningsrom til å definere fikspunkt-klassene. Det fins en inklusjon  $Fix(f) \rightarrow \Lambda_f X$ , hvor  $\Lambda_f X$  er rommet av veier i  $X$  fra  $x$  til  $f(x)$ . Det viser seg at  $R(f)$  er gitt ved antallet veikomponenter i  $\Lambda_f X$ . Vi tar for oss denne tolkningen av  $R(f)$  i kapittel 1.

En videre generalisering av  $R(f)$  kan gjøres. Reidemeister-trasen  $\overline{R}(f)$  er et element i  $H_0(\Lambda_f X)$ . For å definere denne innføres begrepet fikspunktindeks, som vi vil gi en presis definisjon av i kapittel 2. Reidemeister-trasen  $\overline{R}(f)$  avbildes på Lefschetz-tallet  $L(f)$  ved avbildningen  $H_0(\Lambda_f X) \rightarrow H_0(X)$  induisert ved avbildningen  $\Lambda_f X \rightarrow X$  gitt ved  $\phi \mapsto \phi(0)$ . I kapittel 2 bevises egenskapene homotopiinvarians og kommutativitet av Reidemeister-trasen.

I kapittel 3 viser vi en formel for  $\overline{R}(f)$  når  $f : X \rightarrow X$  er en selvavbildning på en kompakt mangfoldighet  $X$ . Denne formelen gjør det enklere å bevise homotopiinvarians av  $\overline{R}(f)$  uten bruk av fikspunktindeks. I kapittel 4 utvides formelen til å gjelde også for visse endelige CW-komplekser.



# Kapittel 1

## En tolkning av Reidemeister-tallet

En fibrasjon er definert som en avbildning  $p : E \rightarrow B$  som har homotopiløftningsegenskapen med hensyn på alle rom. Avbildningen  $p : E \rightarrow B$  har homotopiløftningsegenskapen med hensyn på et rom  $A$  dersom gitt en homotopi  $h_t : A \rightarrow B$  og løftning  $\tilde{h}_0 : A \rightarrow E$  av  $h_0$ , dvs  $p \circ \tilde{h}_0 = h_0$ , så fins homotopi  $\tilde{h}_t : A \rightarrow E$  som løfter  $h_t$ .

Med avbildning menes heretter en kontinuerlig avbildning. Funksjonsrommet  $X^Y$  er definert som rommet av avbildninger  $Y \rightarrow X$ , hvor  $X^Y$  er utstyrt med den kompakt-åpne topologien, det vil si at en sub-basis for topologien består av mengder  $M(K, U)$  av avbildninger som tar en kompakt mengde  $K \subset Y$  inn i en åpen mengde  $U \subset X$ . La  $I$  være intervallet  $[0, 1]$ . I tilfellet  $Y = I$  får vi at  $X^I$  er rommet av veier i  $X$ .

**Lemma 1.1.** *Avbildningen*

$$X^I \rightarrow X$$

$$\gamma \mapsto \gamma(1)$$

*er en fibrasjon.*

*Bevis.* Gitt et topologisk rom  $Y$  med en homotopi  $g_t : Y \rightarrow X$  og en løftning  $\tilde{g}_0$  av  $g_0$ . Dette betyr at  $\tilde{g}_0(y)$  er en vei i  $X$  som slutter i  $g_0(y)$ .

$$\begin{array}{ccc} & X^I & \\ \tilde{g}_t \nearrow & \downarrow & \\ Y & \xrightarrow{g_t} & X \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ \gamma(1) \end{array}$$

For å bevise at  $X^I \rightarrow X$  har homotopiløftningsegenskapen, må vi finne en utvidelse av  $\tilde{g}_0$  som løfter  $g_t$ . En mulig utvidelse er avbildningen  $\tilde{g}_t(y) = \tilde{g}_0(y) \cdot \phi_t(y)$ , der  $\phi_t(y) = (s \mapsto g_{st}(y), s \in [0, 1])$ . Med  $f \cdot g$  menes sammensetningen av veier:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

**Lemma 1.2.** *Avbildningen*

$$X^I \longrightarrow X \times X$$

$$\gamma \longmapsto (\gamma(0), \gamma(1))$$

er en fibrasjon med fiber homotopiekvivalent med løkkerommet  $\Omega X$ , rommet av veier i  $X$  som starter og slutter i et valgt basispunkt.

*Bevis.* Gitt et topologisk rom  $Y$  med en homotopi  $f_t = (g_t, h_t) : Y \rightarrow X \times X$  og en løftning  $\tilde{f}_0$  av  $f_0$

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow \tilde{f}_t & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f_t} & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array}$$

En mulig utvidelse er nå  $\tilde{f}_t(y) = \psi_t(y) \cdot \tilde{f}_0(y) \cdot \phi_t(y)$ , der  $\psi_t(y) = (s \mapsto \bar{g}_{st}(y), s \in [0, 1])$ ,  $\phi_t(y) = (s \mapsto h_{st}(y), s \in [0, 1])$ . Dette er en vei i  $X$  fra  $g_t(y)$  til  $h_t(y)$ . Med  $\bar{g}_s(y)$  menes veien  $g_s(y)$  traversert baklengs. Fiberen er homotopiekvivalent med  $\Omega X$  siden

$$\begin{array}{ccc} \phi & \pi^{-1}(x_1, x_2) & = \{ \text{veier i } X \text{ fra } x_1 \text{ til } x_2 \} \\ \downarrow & \simeq \downarrow & \\ \phi \cdot \tau & \Omega X & \end{array}$$

er en homotopiekvivalens, der  $\tau$  er en valgt vei fra  $x_2$  til  $x_1$ .

□

**Definisjon 1.3.** *Gitt en fibrasjon  $p : E \rightarrow B$  og en avbildning  $f : A \rightarrow B$ , la*

$$f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$$

og la  $\pi : f^*(E) \rightarrow A$  være gitt ved projeksjon på første faktor. Avbildningen  $\pi : f^*(E) \rightarrow A$  er da en fibrasjon. Denne kalles den induuerte fibrasjonen til  $E \rightarrow B$  ved  $f$ .

**Definisjon 1.4.** La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning. La  $\Lambda_f X$  være definert som

$$\Lambda_f X = \{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(1) = f(\gamma(0))\}$$

med andre ord rommet av veier fra  $x$  til  $f(x)$  for alle  $x \in X$ .

**Lemma 1.5.** Avbildningen

$$\Lambda_f X \longrightarrow X$$

$$\gamma \longmapsto \gamma(0)$$

er en fibrasjon.

*Bevis.*  $\Lambda_f X \rightarrow X$  er induisert av fibrasjonen i Lemma 1.2 ved avbildningen  $\Gamma_f : X \rightarrow X \times X$  gitt ved  $x \mapsto (x, f(x))$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ \gamma(0) \end{array} & \begin{array}{ccc} \Lambda_f X & \hookrightarrow & X^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X \end{array} & \begin{array}{c} \gamma \\ \downarrow \\ (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array} \\ & x \longmapsto (x, f(x)) & \end{array}$$

□

La  $Fix(f)$  være mengden av fikspunkter for avbildningen  $f : X \rightarrow X$ , dvs  $Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ . Da finnes en inklusjon  $Fix(f) \rightarrow \Lambda_f X$ , der vi ser på elementene i  $Fix(f)$  som konstante veier i  $X$ . La heretter  $X$  være et veisammenhengende rom.

**Definisjon 1.6.** To fikspunkter  $x, y \in X$  er i samme fikspunktklasse dersom det eksisterer en vei  $\gamma$  i  $X$  fra  $x$  til  $y$  s.a  $f \circ \gamma \simeq \gamma$  relativt til endepunktene.

**Proposisjon 1.7.** Fikspunktene  $x, y \in Fix(f)$  er i samme fikspunktklasse hvis og bare hvis den konstante veien i  $x$  og den konstante veien i  $y$  ligger i samme veikomponent av  $\Lambda_f X$ .

□

Et rom er lokalt veisammenhengende dersom ethvert punkt har en vilkårlig liten veisammenhengende omegn. Man sier dessuten at et rom  $X$  er semilokalt 1-sammenhengende dersom hvert punkt  $x \in X$  har en omegn  $U$  slik at avbildningen  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  induisert ved inklusjonen er triviell.

La  $X$  være lokalt veisammenhengende og semilokalt 1-sammenhengende i tillegg til veisammenhengende, slik at universaloverdekningsrommet  $\tilde{X}$  kan konstrueres. For  $f : X \rightarrow X$ , la  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  være en løftning av  $f \circ p$ , dvs at  $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ p \downarrow & \circ & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Løftningsklassen  $[\tilde{f}]$  for  $\tilde{f}$  defineres som konjugasjonsklassen til  $\tilde{f}$  med hensyn på  $\pi_1(\tilde{X})$ , eller med andre ord  $[\tilde{f}] = \{\alpha \tilde{f} \alpha^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(\tilde{X})\}$ , hvor  $\pi_1(\tilde{X})$  identifiseres med gruppen av dekktranslasjoner, altså løftninger av  $id \circ p$ .

**Teorem 1.8.** 1.  $Fix(f) = \cup_{\tilde{f}} pFix(\tilde{f})$

2.  $pFix(\tilde{f}) = pFix(\tilde{f}')$  hvis  $[\tilde{f}] = [\tilde{f}']$

3.  $pFix(\tilde{f}) \cap pFix(\tilde{f}') = \emptyset$  hvis  $[\tilde{f}] \neq [\tilde{f}']$

*Bevis.* Se Jiang [5], kapittel I. □

Definisjon 1.6 gir en definisjon av ikke-tomme fikspunktklasser. Følgende definisjon er en utvidelse av dette begrepet:

**Definisjon 1.9.** *Delmengden  $p(Fix(\tilde{f}))$  av  $Fix(f)$  kalles fikspunktklassen til  $f$  bestemt av løftningsklassen  $[\tilde{f}]$ . La Reidemeister-tallet  $R(f)$  være antallet slike fikspunktklasser. En fikspunktklasse kan godt være tom. Reidemeister-tallet teller både tomme og ikke-tomme fikspunktklasser.*

**Proposisjon 1.10.** *Hvis  $f \simeq g$ , så er  $\Lambda_f X$  homotopiekvivalent med  $\Lambda_g X$ .*

*Bevis.* La  $\{h_t\} : f \simeq g : X \rightarrow X$  være en homotopi fra  $f$  til  $g$ . Avbildningen

$$\begin{aligned} F : \Lambda_f X &\rightarrow \Lambda_g X \\ \phi &\mapsto \phi \cdot \{t \mapsto h_t(\phi(0))\} \end{aligned}$$

og avbildningen

$$\begin{aligned} G : \Lambda_g X &\rightarrow \Lambda_f X \\ \psi &\mapsto \psi \cdot \{t \mapsto h_t(\psi(0))\} \end{aligned}$$

er homotopiinverser;  $G \circ F \simeq id_{(\Lambda_f X)}$  og  $F \circ G \simeq id_{(\Lambda_g X)}$ . □

**Lemma 1.11.** *Hvis  $\pi_1(X) = 0$ , så er  $\Lambda_f X$  veisammenhengende.*

*Bevis.* Fiberen til  $\Lambda_f X \rightarrow X$  er homotopiekvivalent med  $\Omega X$ . Denne er veisammenhengende når  $\pi_0(X) = 0$ . Basisrommet  $X$  er veisammenhengende, dermed er totalrommet  $\Lambda_f X$  også veisammenhengende.  $\square$

**Teorem 1.12.** *La  $X$  være et veisammenhengende og lokalt veisammenhengende rom. Da fins en 1-1-korrespondanse mellom løftningsklasser for  $f$  og veikomponenter i  $\Lambda_f X$ , dermed er  $R(f) = \#\pi_0(\Lambda_f X)$*

*Bevis:* Det skal vises at det til hver veikomponent av  $\Lambda_f X$  svarer en  $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$ , hvor  $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$  er isomorfiklassen som inneholder rommet  $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ , der  $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  er isomorf med  $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  dersom  $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$  for en dekktranslasjon  $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})$ , der  $\tilde{f}_1$  og  $\tilde{f}_2$  er løftninger av  $f$ . En induisert avbildning  $p_* : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_f X$  er gitt ved at veiene i  $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$  komponeres med  $p$ , og vi har et kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_f X & & \\ & \gamma \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \gamma \downarrow & \\ & \gamma(0) & \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X & \gamma(0) & \end{array}$$

De følgende tre punkter skal vises:

1. Det finnes en 1-1-korrespondanse  $F : \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  dersom  $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$  for en dekktranslasjon  $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})$ , der  $\tilde{f}_1$  og  $\tilde{f}_2$  er løftninger av  $f$ . Dette gir oss veldefinerte isomorfiklasser  $\Lambda_{[\tilde{f}]} \tilde{X}$  av rom  $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$ .
2.  $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  og  $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  avbildes på samme veikomponent i  $\Lambda_f X$  hvis og bare hvis  $\tilde{f}_1 = \gamma \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}$ .
3. Alle veikomponenter i  $\Lambda_f X$  treffes av en  $p_* : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_f X$  for en passende løftning  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ .

*Bevis for 1:* Avbildningen  $F : \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \rightarrow \Lambda_{\gamma \tilde{f} \gamma^{-1}} \tilde{X}$  gitt ved  $F(\phi) = \gamma \circ \phi$ , der  $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$  er en vei fra  $\tilde{x}$  til  $\tilde{f}(\tilde{x})$ , er veldefinert siden  $F(\phi)(1) = \gamma(\phi(1)) = \gamma(\tilde{f}(\tilde{x}))$ . Setter  $y = \gamma(\tilde{x})$ . Da er  $F(\phi)(0) = y$ ,  $F(\phi)(1) = \gamma \tilde{f} \gamma^{-1}(y)$ .  $F$  har dessuten en invers  $G$  gitt ved  $G(\phi) = \gamma^{-1} \circ \phi$ .

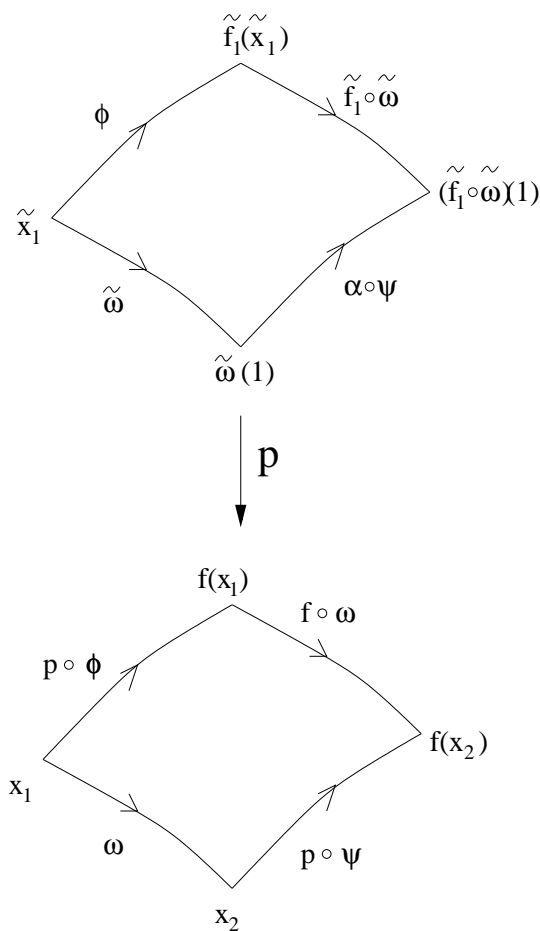
*Bevis for 2:* Anta  $\tilde{f}_1 \gamma = \gamma \tilde{f}_2$ . La  $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  være en vei i  $\tilde{X}$  fra  $\tilde{x}_1$  til  $\tilde{f}_1(\tilde{x}_1)$ .  $p_*(F(\phi)) = p \circ F(\phi) = p \circ \gamma \circ \phi = p \circ \phi = p_*(\phi)$ , dermed kommuterer

diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X} & & \\ \downarrow F & \searrow p_* & \\ \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_f X \end{array}$$

og siden  $F$  er 1-1 (ved punkt 1), vil  $p_*(\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}) = p_*(\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X})$ , og  $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  og  $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  avbildes på samme veikomponent i  $\Lambda_f X$  siden  $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$  er et veisammenhengende rom for alle løftninger  $\tilde{f}$  ved Lemma 1.11.

Anta motsatt at  $\Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  og  $\Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  avbildes på samme veikomponent i  $\Lambda_f X$ . La  $\phi \in \Lambda_{\tilde{f}_1} \tilde{X}$  være en vei i  $\tilde{X}$  fra  $\tilde{x}_1$  til  $\tilde{f}_1(\tilde{x}_1)$  og la  $\psi \in \Lambda_{\tilde{f}_2} \tilde{X}$  være en vei i  $\tilde{X}$  fra  $\tilde{x}_2$  til  $\tilde{f}_2(\tilde{x}_2)$ . Da er  $p \circ \phi$  en vei fra  $x_1$  til  $f(x_1)$  og  $p \circ \psi$  en vei fra  $x_2$  til  $f(x_2)$ . Ved antagelsen vet vi at det fins en homotopi  $\{h_t\} : p \circ \phi \simeq p \circ \psi$  med  $f(h_t(0)) = h_t(1)$ . La  $\omega = \{t \mapsto h_t(0)\}$ . Da er  $f \circ \omega = \{t \mapsto h_t(1)\}$ . Når  $\{h_t\}$  løftes til en homotopi  $\{\tilde{h}_t\}$  som starter i  $\phi$  vil den andre enden bli en eller annen løftning av  $p \circ \psi$ . Denne kan skrives  $\alpha \circ \psi$  for en eller annen  $\alpha \in \pi_1(X)$ .



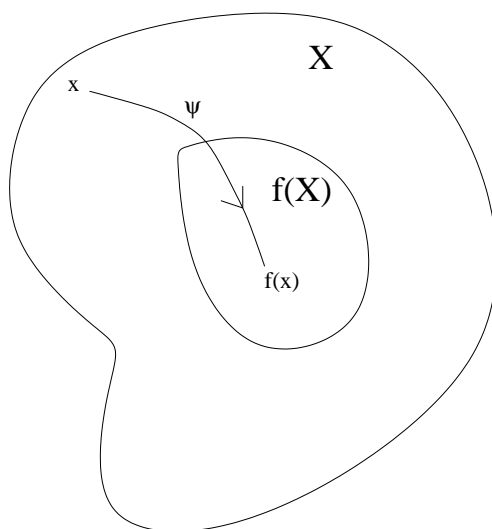
Av figuren ser vi at  $\alpha \circ \psi(0) = \tilde{\omega}(1)$  og  $\alpha \circ \psi(1) = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\omega}(1) = \tilde{f}_1(\tilde{\omega}(1))$ . Siden  $\psi(0) = \tilde{x}_2$  og  $\psi(1) = \tilde{f}(\tilde{x}_2)$  er dermed  $\alpha(\tilde{x}_2) = \tilde{\omega}(1)$  og  $\alpha \circ \tilde{f}_2(\tilde{x}_2) = \tilde{f}_1(\tilde{\omega}(1)) = \tilde{f}_1 \circ \alpha(\tilde{x}_2)$ . Dermed er  $\alpha \circ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ \alpha$  ved entydig veiløftnings-egenskap for overdekningsrommet  $\tilde{X} \rightarrow X$ .

*Bevis for 3:* La  $\phi \in \Lambda_f X$  være en vei i  $X$  fra  $x$  til  $f(x)$ . Anta at et basispunkt  $\tilde{x}$  i fiberen  $p^{-1}(x)$  er valgt. Da fins en entydig vei  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{X}$  med  $\tilde{\phi}(0) = \tilde{x}$ . Siden  $\tilde{\phi}$  løfter  $\phi$  er  $\tilde{\phi}(1) \in p^{-1}(f(x))$ . La  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  være en valgt løftning av  $f \circ p$ . La  $\alpha$  være dekktranslasjonen som avbilder  $\tilde{f}(\tilde{x})$  på  $\tilde{\phi}(1)$ . Da er  $\tilde{\phi} \in \Lambda_{\alpha \circ \tilde{f}} \tilde{X}$ .

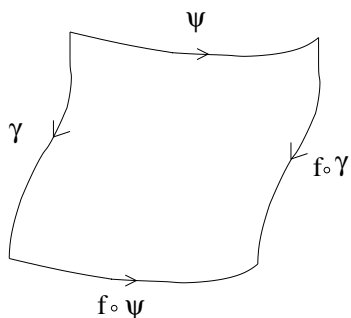
□

**Lemma 1.13.**  $\pi_0(\Lambda_f X) \approx \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$

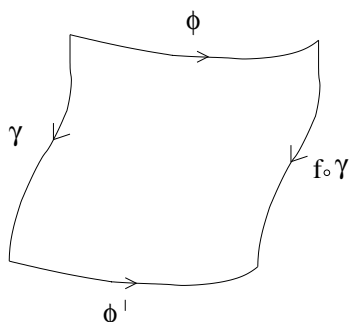
*Bevis.* Det fins en inklusjonsavbildning  $i : \Lambda_{f|f(X)} f(X) \rightarrow \Lambda_f X$ . Denne inducerer en avbildning  $i_* : \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X)) \rightarrow \pi_0(\Lambda_f X)$ . For å vise at denne er surjektiv, la  $[\psi] \in \pi_0(\Lambda_f X)$  være representert ved en vei  $\psi$  i  $X$  fra  $x$  til  $f(x)$ .



$[\psi] = [f \circ \psi]$  som elementer i  $\pi_0(\Lambda_f X)$  dersom det fins en vei  $\gamma$  fra  $\psi(0)$  til  $f \circ \psi(0)$  slik at  $\gamma \simeq \psi \cdot (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \psi)$  i  $X$  relativt til endepunktene.



Dette oppnås ved å velge  $\gamma = \psi$ , dermed kan ethvert element i  $\pi_0(\Lambda_f X)$  representeres ved en vei i  $f(X)$  fra  $x$  til  $f(x)$ . For injektivitet, anta at  $i_*[\phi] = i_*[\phi']$ , for  $[\phi], [\phi'] \in \pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$ . Dette betyr at det fins en vei  $\gamma$  i  $X$  slik at  $\gamma \simeq \phi \cdot (f \circ \gamma) \cdot \overline{\phi'}$  i  $X$  relativt til endepunktene.



Men da er også  $f \circ \gamma \simeq (f \circ \phi) \cdot (f \circ f \circ \gamma) \cdot (f \circ \overline{\phi'})$ . Dermed er  $[f \circ \phi] = [f \circ \phi']$  som elementer i  $\pi_0(\Lambda_{f|f(X)} f(X))$ . Men  $[f \circ \phi] = [\phi]$  og  $[f \circ \phi'] = [\phi']$ , dermed er  $[\phi] = [\phi']$ , og  $i_*$  er injektiv. □

**Eksempel 1.14.** La  $f : X \rightarrow X$  være den konstante avbildningen, dvs  $f(x) = x_0$  for alle  $x \in X$ . Da er  $R(f) = \#\pi_0(\Lambda_f X) = \#\pi_0(\Lambda_{f x_0}) = 1$ .

**Definisjon 1.15.** La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning og la  $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  være gitt ved  $\Phi([\gamma]) = [\gamma_0 \cdot (f \circ \gamma) \cdot \overline{\gamma_0}]$  der  $\gamma_0$  er en valgt vei i  $X$  fra  $x_0$  til  $f(x_0)$ . La  $[g_1] \sim [g_2]$  dersom det fins  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  slik at  $[g_1] = [\gamma][g_2]\Phi([\overline{\gamma}])$ . Klassene under denne ekvivalensrelasjonen kalles  $\Phi$ -konjugasjonsklasser.

**Teorem 1.16.**  $R(f) = \#\pi_1(X, x_0) / \sim$ , der  $\sim$  er ekvivalensrelasjonen som identifiserer elementer i samme  $\Phi$ -konjugasjonsklasse.

*Bevis.* Det fins en 1-1-korrespondanse



$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_0(F)$$

$$[\phi] \longmapsto [\phi \cdot \gamma_0]$$

der  $\gamma_0$  er en valgt vei fra  $x_0$  til  $f(x_0)$  og der  $F = p^{-1}(x_0)$  er fiberen til  $p : \Lambda_f X \rightarrow X$ . Dermed er  $\# \pi_1(X, x_0) / \sim = \# \pi_0(F) / \sim$  der ekvivalensrelasjonen på  $\pi_0(F)$  er definert ved  $[\psi_1] \sim [\psi_2]$  hvis og bare hvis  $[\psi_1] = [\gamma \cdot \psi_2 \cdot \overline{(f \circ \gamma)}]$  for en  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ . Dette er ekvivalent med at  $[\psi_1] = [\psi_2]$  som elementer i  $\pi_0(\Lambda_f X)$ , dermed er  $\# \pi_0(F) / \sim = \# \pi_0(\Lambda_f X)$ , og resultatet følger fra Teorem 1.12.  $\square$

**Eksempel 1.17.** La  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ha grad  $d$ . Ved et teorem av Hopf er  $f \simeq g$ , der  $g(z) = z^d$ , dermed er  $\Lambda_f S^1 \simeq \Lambda_g S^1$  ved Proposisjon 1.10. For enkelhets skyld kan vi sette  $x_0 = 1$  og  $\gamma_0 = 1$  (den konstante avbildningen).

La  $[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \approx \mathbb{Z}$ . Denne kan representeres ved  $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$  for en eller annen  $n \in \mathbb{Z}$ . Da er  $[\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{\Phi^{-1}(\gamma)}] = [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma_0 \cdot \overline{(f \circ \gamma)} \cdot \overline{\gamma_0}] = [\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{(f \circ \gamma)}]$  siden  $\gamma_0$  er den konstante veien. La  $[\gamma]$  være representert ved  $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$ . Da er  $\gamma \cdot \alpha \cdot \overline{(f \circ \gamma)} \simeq (t \mapsto e^{2\pi i k t}) \cdot (t \mapsto e^{2\pi i n t}) \cdot \overline{(t \mapsto e^{2\pi i d k t})} \simeq (t \mapsto e^{2\pi i(n+(1-d)kt)})$ . Dermed er  $R(f) = \# \mathbb{Z} / (1-d)\mathbb{Z} = |1-d|$  for  $d \neq 1$  og  $\infty$  for  $d = 1$ .

**Proposisjon 1.18.** La  $\tilde{f}$  være en løftning av  $f \circ p$ . Da er

$$\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \xrightarrow{p_*} p_*(\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}) \subset \Lambda_f X$$

et overdekningsrom, der  $p_*$  er avbildningen som komponerer veiene i  $\Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X}$  med  $p$ .

*Bevis:*  $\Lambda_f X$  ses på som et underrom av  $X^I$  med kompakt-åpen topologi, det vil si at en basis for topologien består av mengder  $\cap_{i=1}^n M(K_i, U_i)$ , der  $M(K_i, U_i)$  er mengden av avbildninger som tar en lukket mengde  $K_i$  inn i en åpen mengde  $U_i \subset X$ . La  $\{U_i\}$  være overdekningen av  $X$  gitt ved overdekningsrommet  $\tilde{X}$ . La  $V_i \subset \Lambda_f X$  være mengden av alle veier som starter i  $U_i$ . Da er  $V_i$  åpen i den kompakt-åpne topologien siden  $V_i = \cup_{n \in \mathbb{N}} M([0, 1/n], U_i)$ , som er en union av åpne mengder.

La  $\tilde{U}_i^\alpha$  være mengdene som avbildes homeomorft ned på  $U_i$  ved  $p$ , og la  $\tilde{V}_i^\alpha = \{\gamma \in \Lambda_{\tilde{f}} \tilde{X} \mid \gamma(0) \in \tilde{U}_i^\alpha\}$ . Avbildningen  $\tilde{V}_i^\alpha \rightarrow V_i$  gitt ved komposisjon med  $p$  er en 1-1 på grunn av entydig veiløftningsegenskap i  $\tilde{X} \rightarrow X$ . Det gjenstår å vise at den er kontinuerlig og har kontinuerlig invers.

De åpne mengdene i  $\tilde{V}_i^\alpha$  er gitt på formen  $M(K, A) \cap \tilde{V}_i^\alpha$ , der  $K \subset I$  er et lukket intervall og  $A \subset \tilde{X}$  er en åpen mengde. Bildet av denne mengden er  $M(K, p(A)) \cap V_i$ , som er åpen i  $V_i$ . Motsatt, la  $M(K, A)$  være mengden av

avbildninger som tar et lukket intervall  $K \subset I$  på en åpen mengde  $A \subset X$ . Inversbildet av denne i  $\tilde{V}_i^\alpha$  er  $M(K, p^{-1}(A)) \cap \tilde{V}_i^\alpha$  som er åpen i  $\tilde{V}_i^\alpha$ .  $\square$

# Kapittel 2

## Egenskaper for Reidemeister-trasen

La  $X$  være en kompakt  $n$ -mangfoldighet. I tillegg til Reidemeister-tallet  $R(f)$  til en avbildning  $f : X \rightarrow X$ ,  $R(f) \in \mathbb{Z}$  kan Reidemeister-trasen  $\overline{R}(f)$  defineres som et element i mengden  $\mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$ , dersom  $f$  antas å ha bare isolerte fikspunkter. Før dette kan gjøres må begrepet fikspunktindeks defineres. La  $x \in X$  være et isolert fikspunkt for  $f$ . En sfære  $S_x^{n-1}$  med sentrum i  $x$  kan velges liten nok til å ekskludere andre fikspunkter. På  $S_x^{n-1}$  er  $x - f(x) \neq 0$ , så et retningsfelt  $\phi : S_x^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $\phi(x) = (x - f(x))/(|x - f(x)|)$  er definert.

**Definisjon 2.1.**  $index(f, x) = deg\phi$

Fikspunktindeks til  $f$  i fikspunktklassen  $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)$  er definert ved  $index(f, [\gamma]) = \sum_{x_j} index(f, x_j)$ , sum over alle  $x_j$  slik at  $[\phi_{x_j}] = [\gamma]$  der  $\phi_{x_j}$  er den konstante veien i  $x_j$ .

**Definisjon 2.2.** La  $f : X \rightarrow X$ . Reidemeister-trasen  $\overline{R}(f)$  til  $f$  er definert som:

$$\overline{R}(f) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)} index(f, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$$

Vi definerer så korrespondanse mellom fikspunktklasser.

**Definisjon 2.3.** Fikspunktklassen  $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)$  korresponderer med  $[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$  via  $F_t$  dersom  $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$  er en homotopi slik at  $[\psi] = [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$ . Ved Proposisjon 1.10 er  $\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \approx \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$ .

Teorem 1.12 sier at det til hver fikspunktklasse  $[\gamma]$  svarer en løftningsklasse  $[\tilde{F}_0]$ . Definisjon 2.3 er ekvivalent med at  $[\tilde{F}_0]$  korresponderer med  $[\tilde{F}_1]$  dersom

det eksisterer en homotopi  $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$  som lar seg løfte til en homotopi  $\tilde{F}_t : \tilde{F}_0 \simeq \tilde{F}_1 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\gamma} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & \Lambda_{[\tilde{F}_0]} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_{F_0} X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \tilde{\gamma} \cdot \tilde{F}_t(\tilde{\gamma}(0)) & \Lambda_{[\tilde{F}_1]} \tilde{X} & \xrightarrow{p_*} & \Lambda_{F_1} X & \\
 & & & & \downarrow \gamma \\
 & & & & \gamma \cdot F_t(\gamma(0))
 \end{array}$$

Da er  $\text{index}(F_0, [\gamma]) = \text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))])$ , se Jiang [5]. Det neste resultatet sier at Reidemeister-trasen er en homotopiinvariant.

**Teorem 2.4.** *La  $F_t : F_0 \simeq F_1 : X \rightarrow X$  være en homotopi. Da er  $\overline{R}(F_1) = \tilde{\Theta}(\overline{R}(F_0))$ , der  $\tilde{\Theta} : \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$  er isomorfien induisert ved homotopiekvivalensen  $\Lambda_{F_0} X \simeq \Lambda_{F_1} X$  i Proposisjon 1.10.*

*Bevis.* Trasene  $\overline{R}(F_0)$  og  $\overline{R}(F_1)$  er gitt ved

$$\overline{R}(F_0) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_0, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X)$$

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_1} X)} \text{index}(F_1, [\gamma])[\gamma] \in \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$$

Vi har en homotopiekvivalens

$$\Lambda_{F_0} X \longrightarrow \Lambda_{F_1} X$$

$$\gamma \longmapsto \gamma \cdot F_t(\gamma(0))$$

som vist i Proposisjon 1.10. Denne induserer en isomorfi  $\Theta : \pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \pi_0(\Lambda_{F_1} X)$ . Dermed er

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))])[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$$

Men  $\text{index}(F_1, [\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]) = \text{index}(F_0, [\gamma])$  siden  $[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))]$  korresponderer med  $[\gamma]$  via  $F_t$ . Dermed får vi at

$$\overline{R}(F_1) = \Sigma_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{F_0} X)} \text{index}(F_0, [\gamma])[\gamma \cdot F_t(\gamma(0))] = \tilde{\Theta}(\overline{R}(F_0))$$

der  $\tilde{\Theta} : \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_0} X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_{F_1} X)$  er gitt ved  $\Sigma n_i[\phi_i] \mapsto \Sigma n_i\Theta[\phi_i]$ . □

Enhver selvavbildning  $f : X \rightarrow X$  induserer en avbildning  $f_{\#} : \Lambda_f X \rightarrow \Lambda_f X$ , som er gitt ved komposisjon med  $f$ . Denne induserer igjen en avbildning  $f_{*} : \pi_0(\Lambda_f X) \rightarrow \pi_0(\Lambda_f X)$  gitt ved  $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ .

**Lemma 2.5.** *Enhver selvaabildning  $f : X \rightarrow X$  induserer identiteten på  $\pi_0(\Lambda_f X)$*

*Bevis.* La  $[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_f X)$ . Da er  $[\gamma] = [f \circ \gamma]$  siden diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 & f(x) & & f \circ \gamma & & f \circ f(x) \\
 & \downarrow \omega & & \downarrow f \circ \omega & & \\
 & x & & \gamma & & f(x)
 \end{array}$$

lar seg utvide ved å velge  $\omega = \gamma$ .

□

Resultatet ovenfor betyr at hvis vi har avbildninger  $r : X \rightarrow Y$  og  $s : Y \rightarrow X$ , så vil de indusere en 1-1-korrespondanse mellom  $\pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)$  og  $\pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)$ :

$$\pi_0(\Lambda_{s \circ r} X) \xrightarrow{r_*} \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y) \xrightarrow{s_*} \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)$$

siden  $s_* \circ r_* = id$  og  $r_* \circ s_* = id$ . Dette gir oss kommutativitet av Reidemeister-trasen:

**Teorem 2.6.** *For to avbildninger  $r : X \rightarrow Y$  og  $s : Y \rightarrow X$  er  $r_* \overline{R}(s \circ r) = \overline{R}(r \circ s)$*

*Bevis.* Reidemeister-trasen til den sammensatte avbildningen  $s \circ r$  er gitt ved  $\overline{R}(s \circ r) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)} index(s \circ r, [\gamma])[\gamma]$ . Ved å anvende  $r_*$  på dette får vi

$$r_* \overline{R}(s \circ r) = \sum_{[\gamma] \in \pi_0(\Lambda_{s \circ r} X)} index(s \circ r, [\gamma])[r\gamma]$$

Vi setter  $[\psi] = [r\gamma]$ , slik at  $[s\psi] = [\gamma]$

$$= \sum_{[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)} index(s \circ r, [s\psi])[\psi]$$

men  $index(s \circ r, [s\psi]) = index(r \circ s, [\psi])$ , se Jiang [5].

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{[\psi] \in \pi_0(\Lambda_{r \circ s} Y)} index(r \circ s, [\psi])[\psi] \\
 &= \overline{R}(r \circ s)
 \end{aligned}$$

□

Siden  $H_0(X)$  er den frie gruppen generert av veikomponentene til  $X$ , kan vi identifisere  $\mathbb{Z}\pi_0(X)$  kanonisk med  $H_0(X)$ . Dermed kan vi se på  $\overline{R}(f)$  som et element i  $H_0(\Lambda_f X)$  i stedet for i  $\mathbb{Z}\pi_0(\Lambda_f X)$ . Vi vil nå ta for oss to eksempler hvor vi ser på de samme avbildningene som vi så på i kapittel 1, nemlig  $f : X \rightarrow X$  den konstante avbildningen, og  $f : S^1 \rightarrow S^1$  en avbildning av grad  $d$ .

**Eksempel 2.7.** La  $f : X \rightarrow X$  være den konstante avbildningen gitt ved  $f(x) = x_0$  for alle  $x \in X$ . Da er  $x_0$  det eneste fikspunktet for  $f$ , og  $index(f, x_0) = deg\phi$ , der  $\phi$  er retningsfeltet  $\phi(x) = (x - f(x))/(|x - f(x)|)$  definert på en sfære om  $x_0$ . Her blir  $deg\phi = 1$ , og  $\Lambda_f X$  er veisammenhengende, dermed er  $\overline{R}(f) = 1 \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z}$ .

**Eksempel 2.8.** La  $f : S^1 \rightarrow S^1$  være en avbildning av grad  $d$ . Da vet vi at  $f \simeq g$ , der  $g(z) = z^d$ , dermed er  $\Lambda_f S^1 \simeq \Lambda_g S^1$ . Når  $d = 1$  er  $f$  homotop med en avbildning uten fikspunkter. En slik homotopi framkommer ved at vi foretar en rotasjon ved en liten vinkel  $\theta$ . Dermed er  $\overline{R}(f) = 0$  i dette tilfellet. For  $d = 0$  har vi tilfellet i forrige eksempel, og  $\overline{R}(f) = 1 \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z}$ . For  $d = -1$  har  $g$  to fikspunkter som kan kalles  $-1$  og  $1$ . I dette tilfellet er  $index(g, 1) = index(g, -1) = 1$  og  $\overline{R}(f) = (1, 1) \in H_0(\Lambda_f X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

For  $d > 1$  er  $index(g, z) = -1$ , der  $z$  er fikspunktene for  $g$ , med andre ord løsningene av likningen  $z^d = z$ . Disse kan uttrykkes på formen  $z = e^{2\pi ik/(d-1)}$  for  $k = 0, \dots, (d-2)$ , dermed er  $\overline{R}(f) = (-1, -1, \dots, -1) \in H_0(\Lambda_f X)$  som er isomorf med den direkte sum av  $|1 - d|$  kopier av  $\mathbb{Z}$ , mens for  $d < -1$  er  $index(g, z) = 1$ , og  $\overline{R}(f) = (1, 1, \dots, 1) \in H_0(\Lambda_f X)$ .

# Kapittel 3

## En formel for Reidemeister-trasen

La  $\pi : E \rightarrow B$  være en orientert  $q$ -diskbunt. For hver fiber  $F$  er vi gitt en generator  $\mu_F \in H^q(F, F_0; \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}$ . Med  $E_0$  menes komplementet til nullseksjonen, og med  $F_0$  menes  $E_0 \cap F$ . Koeffisientene i homologi og kohomologi er heretter  $\mathbb{Q}$  dersom ingenting annet er angitt. Vi ser nå på  $\overline{R}(f)$  som et element i  $H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Q})$  via den naturlige avbildningen  $H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\Lambda_f X; \mathbb{Q})$ . Vi vil få bruk for følgende teorem.

**Thoms isomorfitheorem 3.1.** *Det fins en og bare en kohomologiklasse  $U \in H^q(E, E_0)$  hvis restriksjon til  $(F, F_0)$  er lik  $\mu_F$  for hver fiber  $F$ . Denne klassen kalles Thom-klassen til  $\pi : E \rightarrow B$ . Følgende avbildning er en isomorfi*

$$H^j(B) \xrightarrow[\approx]{\pi^*} H^j(E) \xrightarrow[\approx]{-\cup U} H^{j+q}(E, E_0)$$

dessuten finnes det en tilsvarende isomorfi for homologi:

$$H_{j+q}(E, E_0) \xrightarrow[\approx]{-\cap U} H_j(E) \xrightarrow[\approx]{\pi_*} H_j(B)$$

*Bevis.* Se Milnor [7]

□

La  $M^n$ ,  $N_1^p$  og  $N_2^q$  være kompakte, orienterbare, glatte og sammenhengende mangfoldigheter uten rand,  $N_1, N_2 \subset M$ ,  $p + q = n$ . Når  $N_i$  og  $M$  er glatte fins tubulær omegn  $E_i$  om  $N_i$ . En tubulær omegn om  $N_i$  er det samme som en omegn  $U$  om  $N_i$  i  $M$  som er homeomorf med totalrommet til en vektorbunt  $p : E_i \rightarrow N_i$ , slik at vi har et kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{\approx} & U \\ s_i \uparrow & \nearrow i^* & \\ N_i & & \end{array}$$

der  $s_i$  er nullseksjonen  $s_i : N_i \rightarrow E_i$ . For eksistens av tubulær omegn, se Bredon [1] for det kompakte tilfellet, eller Lang [6] for det generelle tilfellet.

Siden  $N_i$  ikke har rand er  $SE_i = \partial E_i \simeq E_i - N_i$ , der  $SE_i$  er sfærebunten over  $N_i$ . Anta at orienteringer på  $N_1$ ,  $N_2$  og  $M$  er valgt.  $E_1$  og  $E_2$  orienteres som undermangfoldigheter av  $M$ . Orienteringen av fiberne i  $\pi : E_1 \rightarrow N_1$  velges slik at Thom-klassen  $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$  kan uttrykkes ved

$$[E_1] \cap U_1 = \pi_*^{-1}([N_1]) \in H_p(E_1) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N_1)$$

der  $[E_1] \in H_{p+q}(E_1, SE_1) \approx H_n(M|N_1)$  er fundamentalklassen til  $E_1$  og  $[N_1] \in H_p(N_1)$  er fundamentalklassen til  $N_1$ , hvor  $H_n(M|N_1)$  er forkortelse for  $H_n(M, M - N_1)$ .

La  $[\overline{N_1}]$  være bildet av  $[N_1]$  under avbildningen  $H_p(N_1) \rightarrow H_p(M)$ , og la  $\overline{U_1}$  være bildet av  $U_1$  i  $H^q(M)$ :

$$U_1 \in H^q(E_1, SE_1) \xleftarrow{i_*} H^q(M|N_1) \longrightarrow H^q(M) \ni \overline{U_1}$$

Fiberne i  $\pi : E_2 \rightarrow N_2$  orienteres tilsvarende, slik at

$$[E_2] \cap U_2 = \pi_*^{-1}([N_2]) \in H_p(E_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N_2)$$

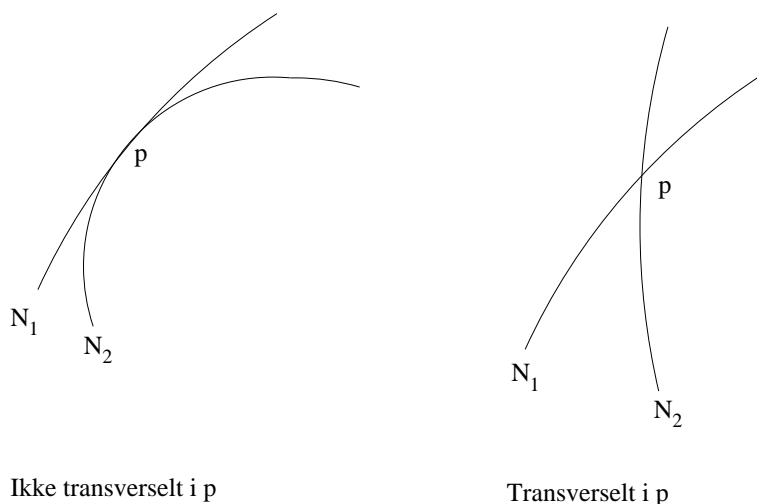
og  $[\overline{N_2}]$  og  $\overline{U_2}$  defineres tilsvarende som  $[\overline{N_1}]$  og  $\overline{U_1}$ . La snittproduktet  $[N_1] \cdot [N_2]$  være definert ved

$$[N_1] \cdot [N_2] = \mu_M(\mu_M^{-1}[\overline{N_1}] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N_2}])$$

der  $\mu_M$  er isomorfen gitt ved Poincaré-dualiteten  $H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$ ,  $x \mapsto [M] \cap x$ . En god referanse for Poincaré-dualitet kan være Hatcher's bok [4].

**Definisjon 3.2.** *To undermangfoldigheter  $N_1, N_2 \subset M$  snitter hverandre transverselt i punktet  $p \in N_1 \cap N_2$  dersom  $T_p(N_1) + T_p(N_2) = T_p(M)$ , der  $T_p(N_1)$  betyr tangentrommet til  $N_1$  i punktet  $p$ .*





**Definisjon 3.3.** Anta at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt i  $x_i \in N_1 \cap N_2$ . Snittegnet i punktet  $x_i$  defineres da som  $\text{sgn}(x_i) = [M]_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2)$ , der  $r_{x_i} : (V, V - N_i) \rightarrow (E_i, E_i - N_i) \simeq (E_i, SE_i)$  er inklusjonen, hvor  $V = A \times B \approx D^n$  er en omegn om  $x_i$  med  $A \subset N_1$  og  $B \subset N_2$ .  $[M]_{x_i}$  betyr restriksjonen av  $[M]$  til  $H_n(M|x_i)$ .  $V$  velges liten nok til at den ekskluderer andre punkter i  $N_1 \cap N_2$ . Snittegnet er avhengig av rekkefølgen av  $N_1$  og  $N_2$ .

Dersom  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt i  $x_i$  følger det at  $\text{sgn}(x_i) = \pm 1$ . Vi sier at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt dersom de snitter hverandre transverselt i alle punkter  $x_i \in N_1 \cap N_2$ .

**Lemma 3.4.** La  $N_1^p, N_2^q$  og  $M^n$  være kompakte, orienterbare, glatte og sammenhengende mangfoldigheter uten rand, med  $n = p + q$  og  $N_1^p, N_2^q \subset M^n$ . Anta at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt. Da er

$$[N_1] \cdot [N_2] = \sum \text{sgn}(x_i)$$

der  $x_i$  er snittpunktene til  $N_1$  og  $N_2$ .

*Bevis.* Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 & & H^q(E_1, SE_1) & \xrightarrow{[E_1] \cap -} & H_p(E_1) & & \pi_*^{-1}([N_1]) \\
 \downarrow & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 \overline{U}_1 & & H^q(M, cl(M - E_1)) & \xrightarrow{i_* [E_1] \cap -} & H_p(M) & & [N_1] \\
 & & \downarrow & \nearrow \mu_M & & & \\
 & & H^q(M) & & & & 
 \end{array}$$

siden  $[E_1] \in H_n(E, SE)$  og  $[M] \in H_n(M)$  begge avbildes på  $i_*[E_1] \in H_n(M, cl(M - E_1))$ , der  $i$  er inklusjonen av  $E$  inn i  $M$ . Dermed er  $\mu_M^{-1}[\overline{N_1}] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N_2}] = \overline{U_1} \cup \overline{U_2} = \overline{U_1 \cup U_2}$  der  $\overline{U_1 \cup U_2}$  er bildet av  $U_1 \cup U_2$  under avbildningen  $H^n(M|N_1 \cap N_2) \rightarrow H^n(M)$ , siden følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 \cup U_2 & & H^n(M|N_1 \cap N_2) & \longrightarrow & H^n(M) & & \overline{U_1 \cup U_2} \\
 \uparrow & & \cup U_2 \uparrow & & \uparrow \cup \overline{U_2} & & \uparrow \\
 & & H^q(M|N_1) & \longrightarrow & H^q(M) & & \overline{U_1} \\
 & & \downarrow \approx i^* & & & & \\
 \overline{U_1} & & H^q(E_1, SE_1) & & & & 
 \end{array}$$

og vi har at  $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U_1 \cup U_2})$ . Cup-produktet  $r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2$  ligger i  $H^n(V|x_i)$  Dessuten er  $r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2 = s_{x_i}^*(U_1 \cup U_2)$  der  $s_{x_i} : (V, V - x_i) \rightarrow (M, M - N_1 \cap N_2)$  er inklusjonen, og  $U_1$  og  $U_2$  ses på som elementer i  $H^q(M, M - N_1)$  og  $H^p(M, M - N_2)$  hhv. Følgende diagram er kommutativt

$$\begin{array}{ccc}
 [M]_{N_1 \cap N_2} & & H_n(M|N_1 \cap N_2) \xrightarrow[\approx]{\text{eksisjon}} H_n(\coprod(V|x_i)) \\
 \downarrow & & \downarrow \swarrow \approx \\
 \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} & & \oplus H_n(V|x_i)
 \end{array}$$

der  $[M]_{N_1 \cap N_2}$  er bildet av fundamentalklassen  $[M]$  under avbildningen  $H_n(M) \rightarrow H_n(M|N_1 \cap N_2)$ . Dermed blir også følgende diagram kommutativt

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(M|N_1 \cap N_2) & \xrightarrow{[M]_{N_1 \cap N_2} \cap -} & H_0(M) \\
 \oplus s_{x_i}^* \downarrow & & \parallel \\
 \oplus_{x_i \in N_1 \cap N_2} H^n(V|x_i) & \xrightarrow{\Sigma[M]_{x_i} \cap -} & H_0(M)
 \end{array}$$

dermed er  $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U_1 \cup U_2}) = [M]_{N_1 \cap N_2} \cap (U_1 \cup U_2) = \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} \cap s_{x_i}^*(U_1 \cup U_2) = \Sigma_{x_i \in N_1 \cap N_2} [M]_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2) = \Sigma_{x_i} \text{sgn}(x_i)$

□

La så  $M^n$ ,  $N_1^p$  og  $N_2^q$  være kompakte, sammenhengende, glatte og orienterte mangfoldigheter med rand,  $N_1, N_2 \subset M$ ,  $p + q = n$ ,  $N_i \cap \partial M = \partial N_i$ , for  $i = 1, 2$ . Da er  $\partial E_1 = SE_1 \cup E_{1\partial N_1}$ , der  $E_{1\partial N_1}$  betyr restriksjon av bunten  $E_1 \rightarrow N_1$  til  $\partial N_1$ . La igjen fiberne være orientert slik at Thom-klassen  $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$  oppfyller

$$[E_1] \cap U_1 = \pi_*^{-1}([N_1]) \in H_p(E_1, E_{1\partial N_1}) \xrightarrow[\pi_*]{\approx} H_p(N_1, \partial N_1)$$

der  $[E_1] \in H_n(E_1, \partial E_1) \approx H_n(M, M - \text{int} E_1)$  er fundamentalklassen til  $E_1$ . Vi definerer  $[\overline{N}_1]$  som bildet av  $[N_1]$  under avbildningen  $H_p(N_1, \partial N_1) \rightarrow H_p(M, \partial M)$ , og definerer  $\overline{U}_1$  som bildet av  $U_1$  i  $H^q(M)$ :

$$U_1 \in H^q(E_1, SE_1) \xleftarrow[\approx]{\text{eksisjon}} H^q(M, cl(M - E_1)) \longrightarrow H^q(M) \ni \overline{U}_1$$

$U_2$  defineres tilsvarende. Anta at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt og at  $N_1 \cap N_2 \subset \text{int} M$ . Cup-produktet  $U_1 \cup U_2$  ligger i  $H^n(M|N_1 \cup N_2)$ . Snittproduktet  $[N_1] \cdot [N_2]$  er fortsatt definert som

$$[N_1] \cdot [N_2] = \mu_M(\mu_M^{-1}[\overline{N}_1] \cup \mu_M^{-1}[\overline{N}_2])$$

der  $\mu_M$  er isomorfien gitt ved Poincaré-dualiteten  $H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M, \partial M)$ ,  $x \mapsto [M] \cap x$ , hvor  $[M]$  nå er fundamentalklassen for  $M$  som ligger i  $H_n(M, \partial M)$ .

**Lemma 3.5.** *La  $N_1^p, N_2^q$  og  $M^n$  være mangfoldigheter med rand med betingelsene gitt ovenfor. Da er*

$$[N_1] \cdot [N_2] = \sum \text{sgn}(x_i)$$

hvor vi summerer over alle  $x_i \in N_1 \cap N_2$ .

*Bevis.* Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & & H^q(E_1, SE_1) & \xrightarrow[\approx]{[E_1] \cap -} & H_p(E_1, E_{1\partial N_1}) & & \pi_*^{-1}([N_1]) \\ & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\ & & H^q(M, cl(M - E_1)) & \xrightarrow{i_* [E_1] \cap -} & H_p(M, E_{1\partial N_1}) & & \\ & & \downarrow i^* & & \downarrow i_* & & \\ \overline{U}_1 & & H^q(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_p(M, \partial M) & & [\overline{N}_1] \end{array}$$

der  $i_*[E_1]$  i andre rad ses på som et element i  $H_n(M, M - \text{int} E_1)$ . Dermed er  $[N_1] \cdot [N_2] = [M] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = [M] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2)$ . Resten av beviset er tilsvarende som i tilfellet uten rand.  $\square$

La  $\overline{X^I}$  være kvotientrommet  $X^I / \sim$ , der  $\phi_1 \sim \phi_2$  dersom  $\phi_1$  er homotop med  $\phi_2$  relativt til endepunktene. La  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$  være  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  delt ut med diagonalvirkningen av  $\pi_1(X)$ . Når  $X$  er en orienterbar mangfoldighet, er også  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$  en orienterbar mangfoldighet.

$X^I$  er utstyrt med den kompakt-åpne topologien, det vil si at en basis for topologien består av mengder  $\cap_{i=1}^k M(K_i, U_i)$ , der  $M(K_i, U_i)$  er mengden av avbildninger som tar en lukket mengde  $K_i \subset I$  inn i en åpen mengde  $U_i \subset X$ .  $\overline{X^I}$  gis kvotienttopologien.

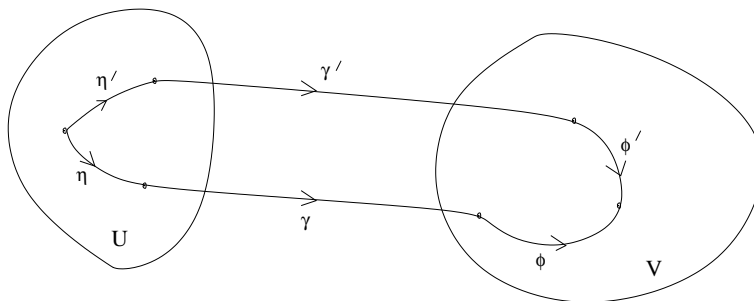
Universaloverdekningsrommet  $\tilde{X}$  for  $X$  konstrueres ved  $\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ er en vei i } X \text{ med } \gamma(0) = x_0\}$ . Da er  $\tilde{X} \times \tilde{X} = \{([\gamma], [\phi]) \mid \gamma(0) = \phi(0) = x_0\}$ . En topologi på  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  kan konstrueres som følger. La  $\mathcal{U}$  være samlingen av åpne mengder  $U \subset X$  som er slik at avbildningen  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$  er triviell. La  $U, V \in \mathcal{U}$  og la  $\gamma_1$  være en vei fra  $x_0$  til et punkt i  $U$  og la  $\gamma_2$  være en vei fra  $x_0$  til et punkt i  $V$ . Vi definerer så  $UV_{([\gamma_1], [\gamma_2])} = \{([\gamma_1\eta], [\gamma_2\phi]) \in \tilde{X} \times \tilde{X} \mid \eta \text{ er en vei i } U \text{ med } \eta(0) = \gamma_1(1), \phi \text{ er en vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma_2(1)\}$ . Mengdene  $UV_{([\gamma_1], [\gamma_2])}$  danner basis for en topologi på  $\tilde{X} \times \tilde{X}$ .  $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  gis kvotienttopologien. Avbildningen  $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \rightarrow X \times X$ ,  $([\gamma], [\phi]) \mapsto (\gamma(1), \phi(1))$  er et overdekningsrom siden  $\tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow X \times X$  er det.

**Lemma 3.6.**  $\overline{X^I} \rightarrow X \times X, [\phi] \mapsto (\phi(0), \phi(1))$  er et overdekningsrom.

*Bevis.* La  $UV_{[\gamma]} = \{[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] \mid \eta \text{ er en vei i } U \text{ med } \eta(1) = \gamma(0) \text{ og } \phi \text{ er en vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma(1)\}$ , der  $U, V \in \mathcal{U}$  og  $\gamma$  er en vei i  $X$  med  $\gamma(0) \in U$  og  $\gamma(1) \in V$ . Mengden  $UV_{[\gamma]}$  er åpen i den kompakt-åpne topologien fordi den er homotopiklassen til mengden av avbildninger  $\psi : I \rightarrow X$  som avbilder  $[0, 1/3]$  inn i  $U$ ,  $[1/3, 2/3]$  inn i  $W$  og  $[2/3, 1]$  inn i  $V$ , der  $W \in \mathcal{U}$  er en passende omegn om  $\gamma(I)$  i  $X$ , hvor  $\gamma$  er en passende representant for  $[\gamma]$ .

Projeksjonen  $p : UV_{[\gamma]} \rightarrow U \times V$  er injektiv siden forskjellige valg av  $\eta$  fra en fast  $u \in U$  til  $\gamma(0)$  alle er homotop i  $X$ , det samme er forskjellige valg av  $\phi$  fra  $\gamma(1)$  til en fast  $v \in V$ . Den er surjektiv siden  $U$  og  $V$  er veisammenhengende.

Anta  $UV_{[\gamma]} \cap UV_{[\gamma']} \neq \emptyset$ , dvs at det fins veier  $\eta, \phi, \eta', \phi'$  slik at  $[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] = [\eta' \cdot \gamma' \cdot \phi']$ .



ethvert element i  $UV_{[\gamma]}$  kan skrives på formen  $[\eta_2 \cdot \eta \cdot \gamma \cdot \phi \cdot \phi_2]$  siden enhver vei i  $U$  med endepunkt i  $\eta(1)$  og startpunkt i  $u$  er homotop med  $\eta_2 \cdot \eta$  for en vilkårlig vei  $\eta_2$  i  $U$  med  $\eta_2(0) = u$  og  $\eta_2(1) = \eta(0)$ . Tilsvarende er enhver vei i  $V$  med

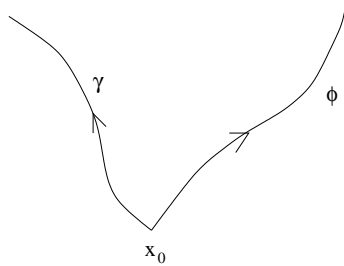
startpunkt  $\phi(0)$  og endepunkt i  $v \in V$  homotop med  $\phi \cdot \phi_2$  for en vilkårlig vei  $\phi_2$  i  $V$  med  $\phi_2(0) = \phi(1)$  og  $\phi_2(1) = v$ . Men  $[\eta_2 \cdot \eta \cdot \gamma \cdot \phi \cdot \phi_2] = [\eta_2 \cdot \eta' \cdot \gamma' \cdot \phi' \cdot \phi_2]$ , et element i  $UV_{[\gamma']}$ , dermed vil  $UV_{[\gamma]} \subset UV_{[\gamma']}$ . Et tilsvarende argument kan brukes for den motsatte inklusjonen, så  $UV_{[\gamma]} \cap UV_{[\gamma']} \neq \emptyset$  vil implisere at  $UV_{[\gamma]} = UV_{[\gamma']}$ .

Avbildningen  $p : UV_{[\gamma]} \rightarrow U \times V$  er en homeomorfi. For la  $U_1 \times V_1$  være en åpen mengde i  $U \times V$ . Da er  $p^{-1}(U_1 \times V_1) = \{[\eta \cdot \gamma \cdot \phi] \mid \eta \text{ vei i } U \text{ med } \eta(0) \in U_1, \eta(1) = \gamma(0), \phi \text{ vei i } V \text{ med } \phi(0) = \gamma(1), \phi(1) \in V_1\} = U_1 V_{1[\gamma]}$ , som er åpen i  $UV_{[\gamma]}$ .

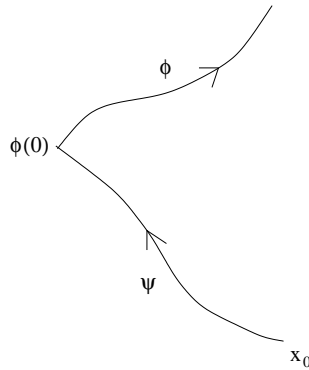
De åpne mengdene i  $UV_{[\gamma]}$  ser ut som  $U_1 V_{1[\gamma]}$  der  $U_1, V_1$  er åpne i  $U$  og  $V$ . Dermed er  $p(U_1 V_{1[\gamma]})$  åpen i  $U \times V$ . □

**Lemma 3.7.**  $\overline{X^I}$  er homeomorf med  $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ .

*Bevis.* Det finnes en avbildning  $\Phi : \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \rightarrow \overline{X^I}$  gitt ved  $([\gamma], [\phi]) \mapsto [\bar{\gamma} \cdot \phi]$ .  $\Phi$  er veldefinert, for anta at  $([\gamma'], [\phi']) \in \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  er slik at  $([\gamma], [\phi]) = ([\gamma'], [\phi'])$  i  $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ , det vil si at  $([\gamma'], [\phi']) = ([e \cdot \gamma], [e \cdot \phi])$  for en  $[e] \in \pi_1(X, x_0)$ . Da er  $\Phi([\gamma'], [\phi']) = \Phi([e \cdot \gamma], [e \cdot \phi]) = [\bar{e} \cdot \bar{\gamma} \cdot e \cdot \phi] = [\bar{\gamma} \cdot \bar{e} \cdot e \cdot \phi] = [\bar{\gamma} \cdot \phi]$ .



Det fins også en avbildning motsatt vei  $F : \overline{X^I} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  gitt ved  $[\phi] \mapsto ([\psi], [\psi \cdot \phi])$ , hvor  $\psi$  er en vilkårlig vei fra  $x_0$  til  $\phi(0)$ .



$F$  er veldefinert, for la  $\psi'$  være en annen vei fra  $x_0$  til  $\phi(0)$ . Da er  $([\psi'], [\psi' \cdot \phi]) = e([\psi], [\psi \cdot \phi])$ , hvor  $e(-, -)$  betyr diagonalvirkningen av  $e = [\psi' \cdot \psi^{-1}] \in$

$\pi_1(X, x_0)$ . Det er lett å sjekke at  $\Phi \circ F = id$  og at  $F \circ \Phi = id$ . Dermed gir  $\Phi$  oss en isomorfi av overdekningsrom, dermed er  $\Phi$  også en homeomorfi, så  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X} \approx \overline{X^I}$ .  $\square$

Vi vil nå ta for oss tilfellet hvor  $X$  er en kompakt mangfoldighet uten rand,  $N_1 = \Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times X\}$  er grafen til  $f$ ,  $N_2 = \Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$  diagonalen og  $M = X \times X$ .

**Teorem 3.8.** *La  $B = \{\alpha\}$  være en basis for  $H^*(X)$ . La  $\{\alpha^\circ\}$  være en dual basis for  $H^*(X)$ , m.a.o*

$$\langle \alpha^\circ \cup \beta, [X] \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$$

Da er

$$\overline{U}_2 = \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha^\circ \times \alpha \in H^n(X \times X)$$

*Bevis.* se Bredon [1], kap VI.  $\square$

En kompakt mangfoldighet  $X$  har endelig genererte homologigrupper som er forskjellige fra null i et endelig antall dimensjoner, dermed er Lefschetz-tallet  $L(f) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X))$  definert.

**Teorem 3.9.**

$$L(f) = [\Gamma] \cdot [\Delta]$$

*Bevis.* La  $f^*(\alpha) = \sum_{\beta} f_{\beta, \alpha} \beta$  hvor  $\alpha, \beta$  løper over en basis for  $H^*(X; \mathbb{Q})$ .

$$\begin{aligned} [\Gamma] \cdot [\Delta] &= [X \times X] \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = ([X \times X] \cap \overline{U}_1) \cap \overline{U}_2 \\ &= \overline{[\Gamma]} \cap \overline{U}_2 \end{aligned}$$

der  $\overline{[\Gamma]}$  er bildet av fundamentalklassen  $[\Gamma] \in H_n(\Gamma)$  i  $H_n(X \times X)$ , som er lik  $\Gamma_{f*}[X]$  for  $[X] \in H_n(X)$  fundamentalklassen til  $X$ .

$$= \Gamma_{f*}[X] \cap \overline{U}_2 = \Gamma_{f*}([X] \cap \Gamma_f^* \overline{U}_2) = [X] \cap \Gamma_f^* \overline{U}_2$$

siden  $\Gamma_{f*} = id$  på  $H_0(X) = H_0(X \times X)$

$$\begin{aligned} &= [X] \cap \Gamma_f^* (\sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha^\circ \times \alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} [X] \cap (\alpha^\circ \cup f^*(\alpha)) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} [X] \cap (\alpha^\circ \cup \sum_{\beta} f_{\beta, \alpha} \beta) \\ &= \sum_{\alpha \in B} (-1)^{\deg(\alpha)} f_{\alpha, \alpha} \\ &= L(f) \end{aligned}$$

$\square$

Dersom  $f$  ikke har fikspunkter er  $L(f) = [\Gamma] \cdot [\Delta] = 0$  siden  $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$  i dette tilfellet. Dette er det kontrapositive av Lefschetz' fikspunktteorem som sier at  $f$  har minst ett fikspunkt dersom  $L(f) \neq 0$ .

**Korollar 3.10.** *La  $X$  være en glatt, kompakt og orienterbar mangfoldighet uten rand,  $f : X \rightarrow X$  glatt, og anta at  $\Gamma$  og  $\Delta$  snitter hverandre transverselt. Da er*

$$L(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(\det(I - f_{*x}))$$

*Bevis.*  $\text{sgn}(x) = 1$  dersom orienteringen til  $\Gamma_x \approx \mathbb{R}^n$  etterfulgt av orienteringen til  $\Delta_x \approx \mathbb{R}^n$  gir orienteringen til  $X \times X \approx \mathbb{R}^n$  i  $x$ , og  $-1$  ellers.

Basisskiftematrixa fra standard basis for  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  til standard basis for  $\Gamma_x$  etterfulgt av standard basis for  $\Delta_x$  er gitt ved

$$\begin{pmatrix} I & I \\ f_{*x} & I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I - f_{*x} & 0 \\ f_{*x} & I \end{pmatrix}$$

Dermed er

$$\text{sgn}(x) = \text{sgn}(\det \begin{pmatrix} I - f_{*x} & 0 \\ f_{*x} & I \end{pmatrix}) = \text{sgn}(\det(I - f_{*x}))$$

og Lemma 3.4 og Teorem 3.9 gir resultatet.  $\square$

**Lemma 3.11.** *La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning med betingelser som ovenfor. Da er  $\text{sgn}(x) = \text{index}(f, x)$  for alle  $x \in \Gamma \cap \Delta$ .*

*Bevis.* Vi har at  $\text{sgn}(\det(I - f_{*x})) = \text{index}(f, x)$ , se Jiang [5].  $\square$

Dette resultatet gir oss at  $\overline{R}(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(x)[\sigma_x]$ , der  $\sigma_x$  er nullcykelen med bilde i  $x$ .

**Teorem 3.12.**  $L(f) = \mu_X(\Gamma_f^*(\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]))) \in H_0(X) = \mathbb{Q}$ .

*Bevis.* Generelt gjelder  $z \cap (\phi \cup \psi) = (z \cap \phi) \cup (z \cap \psi)$  for  $z \in H_*(X)$  og  $\phi, \psi \in H^*(X)$ . Derfor får vi

$$\begin{aligned} [\Gamma] \cdot [\Delta] &= [X \times X] \cap (\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Gamma}]) \cup \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}])) \\ &= ([X \times X] \cap \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Gamma}])) \cup ([X \times X] \cap \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}])) \\ &= [\overline{\Gamma}] \cup \mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]) \end{aligned}$$

Betrakt diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
[\overline{\Delta}] \in H_n(X \times X) & \xleftarrow{\mu_{X \times X}} & H^n(X \times X) \xrightarrow{[\overline{\Gamma}] \cap -} H_0(X \times X) \\
& & \Gamma_f^* \downarrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \Gamma_{f*} \\
& & H^n(X) \xrightarrow{[\overline{X}] \cap -} H_0(X)
\end{array}$$

Kvadratet kommuterer siden  $g_*(z \cap g^*\phi) = g_*z \cap \phi$ , for enhver  $g : X \rightarrow Y$ ,  $z \in H_*(X)$  og  $\phi \in H^*(Y)$ . Siden  $X$  er veisammenhengende er  $\Gamma_{f*} = id$  på  $H_0(X) = H_0(X \times X)$ . Dermed er  $L(f) = \mu_X(\Gamma_f^*(\mu_{X \times X}^{-1}([\overline{\Delta}]))) \in H_0(X) = \mathbb{Q}$ .  $\square$

La  $\overline{\Lambda}_f = \Lambda_f X / \sim$ , der  $\phi_1 \sim \phi_2$  dersom  $\phi_1$  er homotop med  $\phi_2$  relativt til endepunktene. Fibrasjonen  $\pi : \overline{\Lambda}_f \rightarrow X$  er den induserte fibrasjonen til  $p : \overline{X^I} \rightarrow X \times X$  ved  $\Gamma_f$ :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\Lambda}_f & \xrightarrow{i} & \overline{X^I} \xrightarrow{\approx} \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\
\downarrow \pi & & \downarrow p \\
\tilde{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X \\
x \longmapsto & & (x, f(x))
\end{array}$$

dermed er også  $\pi : \overline{\Lambda}_f \rightarrow X$  et overdekningsrom. Når  $X$  er en orienterbar mangfoldighet er også  $\overline{\Lambda}_f$  en orienterbar mangfoldighet.

Fibrasjonen  $\Lambda_f X \rightarrow X$ ,  $\omega \mapsto \omega(0)$  induserer en avbildning  $\pi_* : \pi_0(\Lambda_f X) = \pi_0(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow \pi_0(X) = 1$ .  $\pi_*$  er dermed en konstant avbildning som avbilder alt på 1.  $\pi_*$  induserer også en avbildning  $\pi_* : \mathbb{Q}\pi_0(\overline{\Lambda}_f) = H_0(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow \mathbb{Q}\pi_0(X) = H_0(X) = \mathbb{Q}$ . Denne vil avbilde  $\overline{R}(f) = \sum_{x \in \Gamma \cap \Lambda} \text{sgn}(x)[\phi_x]$  på  $L(f) = \sum \text{sgn}(x)$ .

La  $\tilde{\Delta} : X \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  være løftningen av  $\Delta$  gitt ved  $\tilde{\Delta}(x) = ([\phi], [\phi])$ , der  $\phi$  er en vilkårlig vei i  $X$  fra  $x_0$  til  $x$ .

$$\begin{array}{ccc}
& & \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\
& \nearrow \tilde{\Delta} & \downarrow p \\
X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X
\end{array}$$

$\tilde{\Delta}$  er veldefinert, for la  $\psi$  være en annen vei i  $X$  fra  $x_0$  til  $x$ . Da er  $([\psi], [\psi]) = g([\phi], [\phi])$ , diagonalvirkningen av  $g = [\psi \cdot \overline{\phi}] \in \pi_1(X)$ . Da vil  $[\tilde{\Delta}] = \tilde{\Delta}_*[X]$  avbildes på  $[\overline{\Delta}] = \Delta_*[X]$  ved  $p_*$ :



$$\begin{array}{ccc}
& & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & [\tilde{\Delta}] \\
& \nearrow \tilde{\Delta}_* & \downarrow p_* & \downarrow \\
[X] & H_n(X) \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(X \times X) & [\Delta]
\end{array}$$

For de ikke-kompakte mangfoldighetene  $\bar{\Lambda}_f$  og  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$  har vi Poincaré-dualitetene  $\mu_{\bar{\Lambda}_f} : H_c^{n-k}(\bar{\Lambda}_f) \rightarrow H_k(\bar{\Lambda}_f)$  og  $\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}} : H_c^{2n-k}(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_k(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$ , hvor  $H_c^n(X)$  er definert som den direkte grensen  $\varinjlim_K H^n(X, X-K)$ , grensen over alle kompakte undermengder  $K \subset X$ .

Hvis  $N_1^p, N_2^q$  og  $M^n$  er orienterte mangfoldigheter uten rand, hvor  $N_2$  er kompakt,  $M$  og  $N_2$  sammenhengende, defineres snittproduktet  $[N_1] \cdot [N_2]$  ved  $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1}(j^*(\mu_M^{-1}([\bar{N}_2])))$ , der  $[\bar{N}_2]$  er bildet av  $[N_2] \in H_q(N_2) \approx H_q(E_2)$  under avbildningen  $H_q(N_2) \rightarrow H_q(M)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^p(N_1) & \xleftarrow{j^*} & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M) \ni [\bar{N}_2] \\
\downarrow \mu_{N_1} & & \downarrow & & \\
H_0(N_1) & \xrightarrow{j_*} & H_0(M) & & 
\end{array}$$

Orienteringen til fiberne i  $E_2$  velges fortsatt slik at  $U_2 \in H^p(E_2, SE_2)$  oppfyller  $[E_2] \cap U_2 = \pi_*^{-1}([N_2]) \in H_q(E_2)$  der  $[E_2] \in H_n(E_2, SE_2)$  er fundamentalklassen til  $E_2$ .

Orienteringen til fiberne i  $E_1$  velges slik at Thom-klassen  $U_1 \in H^q(E_1, SE_1)$  oppfyller  $\mu_x \cap r_x^*(U_1) = \mu_x^{N_1}$  for alle  $x \in N_1 \cap N_2$ , der  $\mu_x \in H_n(V, V-x)$  er den valgte generatoren for  $M$  i  $x$  og  $\mu_x^{N_1} \in H_p(N_1, N_1-x) \approx H_p(V, V-N_2)$  er den valgte generatoren for  $N_1$  i  $x$ .  $V = A \times B$  er en omegn om  $x$  liten nok til å ekskludere andre snittpunkter, der  $A \subset N_1$  og  $B \subset N_2$  og  $r : (V, V-N_1) \rightarrow (E_1, E_1-N_1)$  er inklusjonen. La  $\mu_{N_1 \cap N_2} \in H_n(M|N_1 \cap N_2)$  være det unike elementet som avbildes på den valgte generator  $\mu_x$  for alle  $x \in N_1 \cap N_2$ , og la  $\mu_{N_1} \in H_p(N_1|N_1 \cap N_2)$  være det unike elementet som avbildes på den valgte generator  $\mu_x^{N_1}$  for alle  $x \in N_1 \cap N_2$ . Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
\oplus \mu_x & \oplus H_n(V | x) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M | N_1 \cap N_2) & \mu_{N_1 \cap N_2} \\
\downarrow & \downarrow \oplus -\cap r^* U_1 & & \downarrow & \downarrow \\
\oplus \mu_x^{N_1} & \oplus H_p(V | N_2) & & & \\
\downarrow & \downarrow \approx & & \downarrow -\cap U_1 & \\
\mu_{N_1} & \oplus H_p(N_1 | x) & & & \\
\downarrow & \downarrow \approx & & & \\
\mu_{N_1} & H_p(N_1 | N_1 \cap N_2) & \xrightarrow{j_*} & H_p(M | N_2) & \mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1
\end{array}$$

Isomorfin  $\oplus H_n(V | x) \rightarrow H_n(M | N_1 \cap N_2)$  avbilder  $\oplus \mu_x$  på  $\mu_{N_1 \cap N_2}$ .

**Lemma 3.13.** *La  $N_1^p, N_2^q$  og  $M^n$  være mangfoldigheter uten rand med  $n = p + q$ ,  $N_1^p, N_2^q \subset M^n$ ,  $N_2$  kompakt,  $M$  og  $N_2$  sammenhengende. Anta at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt. Da er*

$$[N_1] \cdot [N_2] = \sum \text{sgn}(x_i)$$

der  $x_i$  er snittpunktene til  $N_1$  og  $N_2$ .

*Bevis.* Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccccc}
U_2 & H^p(E_2, SE_2) & \xrightarrow{[E_2] \cap -} & H_q(E_2) & \pi_*^{-1}([N_2]) \\
\downarrow & \uparrow \approx i^* & & \downarrow i_* & \downarrow \\
\overline{U_2} & H^p(M | \text{int } E_2) & \xrightarrow{i_* [E_2] \cap -} & H_q(M) & \downarrow \\
\downarrow & \downarrow \approx & & \downarrow = & \downarrow \\
\overline{U_2} & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M) & \overline{[N_2]}
\end{array}$$

dermed er  $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1}(j^*(\overline{U_2})))$ . Men  $\overline{U_2}$  er representert ved elementet  $U_2 \in H^p(M, M - N_2)$ , så  $\mu_{N_1}$  vil da være gitt ved cap-produkt med det unike elementet  $\mu_{N_1} \in H_n(N_1 | N_1 \cap N_2)$  som avbildes på den valgte generator  $\mu_x^{N_1} \in H_p(N_1 | x)$  for alle  $x \in N_1 \cap N_2$ . Dermed er  $[N_1] \cdot [N_2] = j_*(\mu_{N_1} \cap j^* U_2) = (j_* \mu_{N_1}) \cap U_2$ . Ved kommutativitet av diagrammet øverst på siden er  $j_* \mu_{N_1} = \mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1$ . Da er  $[N_1] \cdot [N_2] = (\mu_{N_1 \cap N_2} \cap U_1) \cap U_2 = \mu_{N_1 \cap N_2} \cap (U_1 \cup U_2) = \sum x_i (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2) \mu_{x_i} = \sum \text{sgn}(x_i)$ .

□

**Lemma 3.14.** La  $N_1^p, N_2^q$  og  $M^n$  være mangfoldigheter med rand med  $n = p + q$ ,  $N_1^p, N_2^q \subset M^n$ ,  $N_2$  kompakt,  $M$  og  $N_2$  sammenhengende. Anta at  $N_1$  og  $N_2$  snitter hverandre transverselt. Anta at  $N_i \cap \partial M = \partial N_i$  og at  $N_1 \cap N_2 \subset \text{int} M$  for  $i = 1, 2$ . Da er

$$[N_1] \cdot [N_2] = \Sigma \text{sgn}(x_i)$$

*Bevis.* Beviset er tilsvarende som for Lemma 3.13, men diagrammet ser nå ut som følger

$$\begin{array}{ccccc}
 U_2 & & H^p(E_2, SE_2) & \xrightarrow{[E_2] \cap -} & H_q(E_2, E_{2\partial N_2}) & & \pi_*^{-1}([N_2]) \\
 \downarrow & & \uparrow \approx & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 \overline{U}_2 & & H^p(M, cl(M - E_2)) & \xrightarrow{i_* [E_2] \cap -} & H_q(M, E_{2\partial N_2}) & & \downarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow i_* & & \downarrow \\
 & & H_c^p(M) & \xrightarrow{\mu_M} & H_q(M, \partial M) & & [\overline{N}_2]
 \end{array}$$

□

Underrommet  $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(X) \subset \tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$  er sammenhengende og kompakt, dermed kan Lemma 3.13 anvendes på  $N_1 = \overline{\Lambda}_f$ ,  $N_2 = \tilde{\Delta}$  og  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X} = M$ . Da er  $[\overline{\Lambda}_f] \cdot [\tilde{\Delta}] = \Sigma_{\tilde{x}_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}} \text{sgn}(\tilde{x}_i)$ , og  $[\Gamma] \cdot [\Delta] = \Sigma_{x_i \in \Gamma \cap \Delta} \text{sgn}(x_i)$ . Prosjeksjonen  $p$  er lokalt en orienteringsbevarende homeomorfi, så  $\text{sgn}(x_i) = \text{sgn}(p(\tilde{x}_i))$ . Det er klart at  $p(\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}) \subset \Gamma \cap \Delta$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta} & \subset & \tilde{\Delta} \\
 \downarrow p|_{\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}} & & \approx \downarrow p|_{\tilde{\Delta}} \\
 \Gamma \cap \Delta & \subset & \Delta
 \end{array}$$

Siden  $p$  avbilder  $\tilde{\Delta}$  homeomorft på  $\Delta$  er  $p|_{\overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}}$  injektiv. For surjektivitet, la  $x \in \Gamma \cap \Delta$ .  $\tilde{\Delta}(x)$  er da gitt ved  $([\gamma], [\gamma])$ , der  $\gamma$  er en vei i  $X$  fra  $x_0$  til  $x$ . Som element i  $\overline{X^I}$  svarer  $\gamma$  til elementet  $[\gamma^{-1} \cdot \gamma] = [\phi_x]$ , homotopiklassen til den konstante veien i  $x$ , som ligger i  $\overline{\Lambda}_f$  siden  $x$  er et fikspunkt for  $f$ . Dermed vil isomorfien  $p_* : H_0(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_0(X \times X)$  avbilde  $[\overline{\Lambda}_f] \cdot [\tilde{\Delta}]$  på  $[\Gamma] \cdot [\Delta]$ , eller med andre ord  $p_* \mu_{j\overline{\Lambda}_f} \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1} [\tilde{\Delta}] = [\overline{\Gamma}] \cap \mu_{X \times X}^{-1} [\overline{\Delta}]$ , der  $\mu_{j\overline{\Lambda}_f}$  er avbildningen som får øvre venstre kvadrat på neste side til å kommutere:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^n(\overline{\Lambda}_f) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & & [\overline{\Delta}] \\
\approx \downarrow \mu_{\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow \mu_{j\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow p_* & & \downarrow \\
\overline{R}(f) & & H_0(\overline{\Lambda}_f) & \xrightarrow{j_*} & H_0(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) & & \\
\downarrow L(f) & & \downarrow \pi_* & & \approx \downarrow p_* & & \\
H_0(X) & \xrightarrow[\approx]{\Gamma_{f*}} & H_0(X \times X) & & & & \\
\approx \uparrow \mu_X & & \uparrow [\overline{\Gamma}] \cap - & & & & \\
H^n(X) & \xleftarrow[\approx]{\Gamma_f^*} & H^n(X \times X) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{X \times X}} & H_n(X \times X) & & [\underline{\Delta}]
\end{array}$$

Følgende teorem er en formel for Reidemeister-trasen, tilsvarende som formelen for Lefschetz-tallet i Teorem 3.12

**Teorem 3.15.** *La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning mellom kompakte mangfoldigheter. Dersom  $X$  har rand, anta at  $f(\partial X) \subset X - \partial X$ , slik at  $f$  ikke har noen fikspunkter på randa til  $X$ , og anta at grafen til  $f$  og diagonalen i  $X \times X$  snitter hverandre transverselt. Da er*

$$\overline{R}(f) = \mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1}([\overline{\Delta}])$$

der  $\mu_{\overline{\Lambda}_f} : H_c^n(\overline{\Lambda}_f) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_f)$  og  $\mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}} : H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}) \rightarrow H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$  er Poincaré-dualitet for  $\overline{\Lambda}_f$  og  $\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$  hhv.

*Bevis.* Vi begynner med å regne ut høyre side.

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \mu_{\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}}^{-1}([\overline{\Delta}]) &= \mu_{\overline{\Lambda}_f} j_* \overline{U}_2 \\
&= \mu_\Lambda \cap j_* U_2
\end{aligned}$$

der den første likheten kommer fra kommutativitet av diagrammet i beviset for Lemma 3.13, med  $N_2 = \tilde{\Delta}$  og  $M = \tilde{X} \times_\pi \tilde{X}$ . Den andre likheten kommer av at  $\overline{U}_2 \in H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X})$  er representert ved elementet  $U_2 \in H^n(E_2, SE_2) \approx H^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \tilde{X} \times_\pi \tilde{X} - \tilde{\Delta})$ , som trekkes tilbake til elementet  $j_* U_2 \in H^n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta})$ . Homologiklassen  $\mu_\Lambda \in H_n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta})$  er det unike elementet som avbildes på den valgte generatoren  $\mu_{x_i}^\Lambda \in H_n(\overline{\Lambda}_f, \overline{\Lambda}_f - x_i) \approx H_n(\overline{\Lambda}_f \cap V, \overline{\Lambda}_f \cap V - x_i)$  for alle  $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$ . Ved å regne ut dette lokalt, får vi at

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda \cap j_* U_2 &= \sum i_* (\mu_{x_i}^\Lambda \cap k^* r_{x_i}^* U_2) \\
&= \sum i_* k_*^{-1} (k_* \mu_{x_i}^\Lambda \cap r_{x_i}^* U_2)
\end{aligned}$$

der  $i_* : H_0(\overline{\Lambda}_f \cap V) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_f)$  er induisert av inklusjonene  $i : \overline{\Lambda}_f \cap V \hookrightarrow \overline{\Lambda}_f$  for omegner  $V$  om de ulike  $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$ , og der isomorfien  $k^* : H^n(V, V - \tilde{\Delta}) \rightarrow H^n(\overline{\Lambda}_f \cap V, \overline{\Lambda}_f \cap V - x_i)$  er induisert av inklusjonen  $k : \overline{\Lambda}_f \cap V \hookrightarrow V$ . Ved å anvende definisjonen av  $U_1$  får vi

$$\begin{aligned}
&= \Sigma i_* k_*^{-1}((\mu_{x_i} \cap r_{x_i}^* U_1) \cap r_{x_i}^* U_2) \\
&= \Sigma i_* k_*^{-1}(\mu_{x_i} \cap (r_{x_i}^* U_1 \cup r_{x_i}^* U_2)) \\
&= \Sigma i_* k_*^{-1}(\text{sgn}(x_i)) \\
&= \Sigma \text{sgn}(x_i) [\sigma_{x_i}] \\
&= \overline{R}(f)
\end{aligned}$$

der summen ovenfor egentlig løper over alle  $x_i \in \overline{\Lambda}_f \cap \tilde{\Delta}$ , men  $\text{sgn}(x_i) = \text{sgn}(p(x_i))$  ved kommentaren på side 35. Vi ser her på  $\text{sgn}(x_i)$  i 3. linje som et element i en  $H_0(V)$ .

For tilfellet med rand, splitter vi opp randa til  $X \times X$  ved  $\partial(X \times X) = X \times \partial X \cup \partial X \times X$ . La  $[\tilde{\Delta}] \in H_n(X \times X, X \times \partial X)$  være bildet av fundamentalklassen  $[X] \in H_n(X, \partial X)$  under  $\Delta_*$ , og la  $[\tilde{\Gamma}] \in H_n(X \times X, \partial X \times X)$  være bildet av  $[X]$  under  $\Gamma_*$ . Tilsvarende vil randa til  $\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  splittes opp i to deler,  $\partial_1 = p^{-1}(X \times \partial X)$  og  $\partial_2 = p^{-1}(\partial X \times X)$ . Det gjenstår å analysere randa til  $\overline{\Lambda}_f$ :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\Lambda}_f & \xrightarrow{i} & \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\
\downarrow \pi & & \downarrow p \\
\tilde{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times X
\end{array}$$

Randa til  $\overline{\Lambda}_f$  vil avbildes inn i  $\partial_2$  ved i siden  $p \circ i(\partial \overline{\Lambda}_f) = \Gamma_f \circ \pi(\partial \overline{\Lambda}_f) \subset \Gamma_f(\partial X) \subset \partial X \times X$ . Diagrammet ser da ut som følger:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^n(\overline{\Lambda}_f, \partial \overline{\Lambda}_f) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}}} & H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1) \\
\approx \downarrow \mu_{\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow \mu_{j\overline{\Lambda}_f} & & \downarrow p_* \\
H_0(\overline{\Lambda}_f) & \xrightarrow{j_*} & H_0(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}) & & \\
\downarrow \pi_* & & \approx \downarrow p_* & & \\
H_0(X) & \xrightarrow[\approx]{\Gamma_{f*}} & H_0(X \times X) & & \\
\approx \uparrow \mu_X & & \uparrow [\Gamma] \cap - & & \\
H^n(X, \partial X) & \xleftarrow[\Gamma_f^*]{} & H^n(X \times X, \partial X \times X) & \xrightarrow[\approx]{\mu_{X \times X}} & H_n(X \times X, X \times \partial X)
\end{array}$$

Det gjenstår å vise at avbildningene  $\mu_{\overline{\Lambda}_f}$  og  $\mu_{\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}}$  er isomorfier, dvs å vise Poincaré-dualitet for ikke-kompakte mangfoldigheter med rand. Det blir gjort i Teorem 3.16 nedenfor.  $\square$

Vi definerer  $H_c^n(M, A)$  som den direkte grensen  $\varinjlim_K H^n(M, (M - K) \cup A)$  over alle kompakte mengder  $K \subset M$ . Et element i  $H_c^n(M, A)$  er representert ved en kohomologiklasse  $[\phi] \in H^n(M, (M - K_\phi) \cup A)$  for en eller annen kompakt mengde  $K_\phi$ .

**Teorem 3.16.** *La  $M$  være en metriserbar  $n$ -mangfoldighet med rand,  $\partial M = \partial_1 \cap \partial_2$ , der  $\partial \partial_1 = \partial \partial_2 = \partial_1 \cap \partial_2$ . Da fins Poincaré-isomorfi*

$$\begin{aligned} H_c^{n-k}(M, \partial_2) &\rightarrow H_k(M, \partial_1) \\ [\phi] &\mapsto \mu_{K_\phi} \cap [\phi] \end{aligned}$$

*gitt ved cap-produkt med  $\mu_{K_\phi} \in H_n(M, (M - K_\phi) \cup \partial M)$  det unike elementet som avbildes på den valgte generatoren for  $H_n(M, (M - x) \cup \partial M)$  for alle  $x \in K_\phi$*

*Bevis.* Siden  $M$  er metriserbar kan den skrives som en union  $M = \cup_{i=1}^\infty M_i$  av kompakte mangfoldigheter  $M_i$  på en slik måte at  $M_i \subset \text{int } M_{i+1}$ . La  $M'_i = M_i \cup (cl(\partial M_i - \partial M) \times [0, \epsilon])$ . Med dette menes at  $M_i$  er utstyrt med en kraveomegn i  $M$ , hvor  $\epsilon$  velges slik at  $M'_i \subset M'_{i+1}$ . Da er også  $M = \cup_{i=1}^\infty M'_i$ . Det fins isomorfi

$$\varinjlim H_k(M'_i, \partial_1 \cap M'_i) \rightarrow H_k(M, \partial_1)$$

fordi:

**surjektivitet:** la  $\sum n_i \sigma_i$  være en relativ sykel i  $M$ . Bildet av denne er kompakt, så det er dermed inneholdt i en  $M'_i$ .

**injektivitet:** la  $\sum n_i \sigma_i$  være en relativ sykel i en  $M'_i$  og anta den er rand i  $M$ . Ved kompakthet er den rand i en  $M_i$ , dermed representerer den null i  $\varinjlim H_k(M'_i, \partial_1 \cap M'_i)$ .

La  $\partial_1^i = \partial_1 \cap M_i$ ,  $\partial_2^i = cl(\partial M_i - \partial_1^i)$ ,  $\partial_1^{i'} = \partial_1 \cap M'_i$ ,  $\partial_2^{i'} = cl(\partial M'_i - \partial_1^{i'})$ . Vi har da et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} H_k(M, \partial_1) & \xleftarrow{\approx} & \varinjlim H_k(M'_i, \partial_1^{i'}) \\ \uparrow & & \uparrow \approx \cap [M'_i] \\ \varinjlim H^{n-k}(M, (M - M_i) \cup \partial_2) & \xrightarrow[\text{eksisjon}]{\approx} & \varinjlim H^{n-k}(M'_i, \partial_2^{i'}) \\ \parallel & & \\ H_c^{n-k}(M, \partial_2) & & \end{array}$$

der den vertikale avbildningen til høyre er grensen av Poincaré-dualitetene  $H^{n-k}(M'_i, \partial_2^{i'}) \rightarrow H_k(M'_i, \partial_1^{i'})$  som er vist i Hatcher [4] i dette kompakte tilfellet. Eksisjonsisomorfien  $H_n(M'_i, \partial M'_i) \rightarrow H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M)$  avbilder  $[M'_i]$  på  $\mu_{M_i} \in H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M)$ , det unike elementet som avbildes på en generator for  $H_n(M, (M - x) \cup \partial M)$  for alle  $x \in M_i$ , siden diagrammet

$$\begin{array}{ccc} H_n(M'_i, \partial M'_i) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M, (M - M_i) \cup \partial M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M'_i, (M'_i - x) \cup \partial M'_i) & \xrightarrow{\approx} & H_n(M, (M - x) \cup \partial M) \end{array}$$

kommuterer for  $x \in M_i$ . Ved dualitet kommuterer også diagrammet med kohomologi.  $\square$

Formelen i Teorem 3.15 kan brukes som definisjon av Reidemeister-tallet. I Definisjon 2.2 antok vi at fikspunktene for  $f$  var isolerte, for at  $index(f, x)$  skulle gi mening for alle  $x \in Fix(f)$ . Ved å bruke formelen i Teorem 3.15 som definisjon av  $\overline{R}(f)$  har vi ikke lenger bruk for begrepet fikspunktindeks, så vi trenger heller ikke anta at fikspunktene for  $f$  er isolerte. Formelen for  $\overline{R}(f)$  kan altså ses på som en utvidelse av Definisjon 2.2. En annen fordel med formelen for  $\overline{R}(f)$  i Teorem 3.15 er at vi lettere kan bevise homotopiinvarians av Reidemeister-trasen, uten bruk av fikspunktindeksen.

**Teorem 3.17.** *La  $f_t : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow X$  være en homotopi. Da vil isomorfien  $H_0(\overline{\Lambda}_{f_0}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda}_{f_1})$  indukert av homotopiekvivalensen i Proposisjon 1.10 avbilde  $\overline{R}(f_0)$  på  $\overline{R}(f_1)$*

*Bevis.* La  $\Lambda_F$  være rommet  $\Lambda_F = \{(\phi, t) | \phi(1) = f_t(\phi(0))\}$ . Da er  $\overline{\Lambda}_F \rightarrow X \times I$  den induserte fibrasjonen til  $\overline{X^I} \rightarrow X \times X$ :

$$\begin{array}{ccccc} (\phi, t) & & \overline{\Lambda}_F & \xrightarrow{\quad} & \overline{X^I} & & \phi \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \downarrow \\ (\phi(0), t) & & X \times I & \longrightarrow & X \times X & & (\phi(0), \phi(1)) \end{array}$$

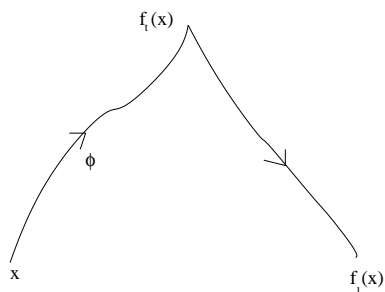
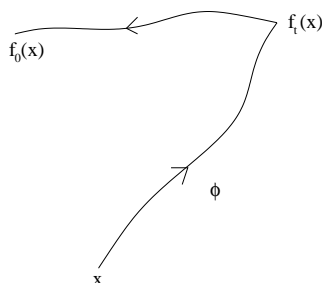
$$(x, t) \longmapsto (x, f_t(x))$$

$\overline{\Lambda}_F$  inneholder  $\overline{\Lambda}_{f_0}$  og  $\overline{\Lambda}_{f_1}$  som deformasjonsretrakter

$$\overline{\Lambda}_{f_0} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} \\ \xleftarrow{r_0} \end{array} \overline{\Lambda}_F$$

$$\overline{\Lambda}_{f_1} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xleftarrow{r_1} \end{array} \overline{\Lambda}_F$$

hvor  $r_0$  er gitt ved  $r_0(\phi, t) = \phi \cdot (s \mapsto f_{(1-s)t}(x), s \in [0, 1])$ , og  $r_1 : \overline{\Lambda}_F \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_0}$  er gitt ved  $r_1(\phi, t) = \phi \cdot (s \mapsto f_{(1-s)t+s}(x), s \in [0, 1])$ .



Den sammensatte avbildningen  $r_{1*} \circ i_{0*}$  er induert av homotopiekvivalensen  $\overline{\Lambda}_{f_0} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_1}, [\phi] \mapsto [\phi \cdot f_t(\phi(0))]$ . Diagrammet nedenfor kommuterer

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Lambda}_F & \xrightarrow{j_F} & \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} \\ i_0 \uparrow & \nearrow j_0 & \\ \overline{\Lambda}_{f_0} & & \end{array}$$

der  $j_F$ ,  $i_0$  og  $j_0$  er inklusjoner. Vi kan lage et tilsvarende diagram for  $f_1$ . Dermed kommuterer følgende diagram.

$$\begin{array}{ccccc} H_0(\overline{\Lambda}_{f_0}) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_0}) & & \\ \approx \downarrow i_{0*} & & \uparrow i_0^* & \swarrow j_0^* & \\ H_0(\overline{\Lambda}_F) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_F) & \xleftarrow{j_F^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}) \xrightarrow[\approx]{\mu_{\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}}} H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}) \\ \approx \downarrow r_{1*} & & \downarrow i_1^* & \swarrow j_1^* & \\ H_0(\overline{\Lambda}_{f_1}) & \xleftarrow{\approx} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_1}) & & \end{array}$$

Dette gir oss at  $r_{1*} \circ i_{0*}(\overline{R}(f_0)) = \overline{R}(f_1)$ . □



# Kapittel 4

## Utvidelse til endelige CW-komplekser

I kapittel 3 viste vi en formel for Reidemeister-trasen for avbildninger mellom kompakte mangfoldigheter. I dette kapitlet ønsker vi å utvide formelen til å gjelde for endelige CW-komplekser med egenskapen at de kan embeddes som underkomplekser av  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathbb{R}^n$  er utstyrt med en passende CW-struktur. Endelige CW-komplekser har egenskapen at de kan embeddes i  $\mathbb{R}^n$  som reakt av en euklidsk omegn, se Hatcher [4].

La  $U \in H^k(E, SE)$  være Thom-klassen til en  $k$ -diskbunt  $p : E \rightarrow X$ . La  $f : (A, \partial A) \rightarrow (X, \partial X)$  være en avbildning. Da er  $p_2^*(U) \in H^k(f^*(E), Sf^*(E))$  Thom-klassen til den induerte bunt  $f^*(E) \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

siden fibrene er homeomorfe.

**Lemma 4.1.** *Diagrammet av induerte bunter ovenfor gir oss kommutativitet av Thom-isomorfier*

$$\begin{array}{ccc} H_{k+l}(f^*(E), Sf^*(E)) & \xrightarrow{p_{2*}} & H_{k+l}(E, SE) \\ \downarrow -\cap p_2^*U & & \downarrow -\cap U \\ H_l(f^*(E), f^*(E)_{\partial A}) & \xrightarrow{p_{2*}} & H_l(E, E_{\partial X}) \\ \downarrow p_{1*} & & \downarrow p \\ H_l(A, \partial A) & \xrightarrow{f} & H_l(X, \partial X) \end{array}$$

der de vertikale avbildningene er Thom-isomorfierne for de to diskbuntene.

*Bevis.* Diagrammet kommuterer siden  $p_{2*}(-) \cap U = p_{2*}(- \cap p_2^*U)$  og ved naturlighet av homologi.  $\square$

La  $X$  være et CW-kompleks med embedding  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  med egenskapen at det fins en CW-struktur på  $\mathbb{R}^n$  slik at  $h(X)$  er et underkompleks av  $\mathbb{R}^n$ . La  $f : X \rightarrow X$  være en avbildning. For en åpen omegn  $N$  om  $h(X)$  med deformasjonsretrakt  $r : N \rightarrow h(X)$ , kan vi definere en utvidelse av  $f$  til  $N$  ved  $f_N : N \rightarrow N$  gitt ved  $f_N(x) = i \circ f \circ r$ , der  $i : h(X) \hookrightarrow N$  er inklusjonen. I resten av kapitlet vil vi forkorte  $\overline{\Lambda_{f_N} N}$  med  $\overline{\Lambda_{f_N}}$  for å forenkle notasjonen.  $r$  induserer en isomorfi  $r_* : H_0(\overline{\Lambda_{f_N}}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda_f})$ . Dermed kan Reidemeister-trasen til  $f$  defineres som  $\overline{R}(f) = r_* \overline{R}(f_N) \in H_0(\overline{\Lambda_f})$ .

**Teorem 4.2.** *Definisjonen av  $\overline{R}(f)$  er uavhengig av valg av  $N$  og  $h$ , det vil si at for to embeddinger  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  og  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  og for to valg av omegner  $N$  og  $M$  med  $g(X) \subset N \subset \mathbb{R}^n$  og  $h(X) \subset M \subset \mathbb{R}^m$ , der  $r_N : N \rightarrow g(X)$  og  $r_M : M \rightarrow h(X)$  er deformasjonsretrakter, så er*

$$r_{N*}(\overline{R}(f_N)) = r_{M*}(\overline{R}(f_M))$$

For å bevise Teorem 4.2 trenger vi følgende to resultater.

**Lemma 4.3.** *La  $X$  og  $Z$  være kompakte  $n$ -mangfoldigheter med rand, anta  $X \subset \text{int}Z$  og at  $r : Z \rightarrow X$  er en avbildning slik at  $i \circ r \simeq \text{id}$  og  $r \circ i \simeq \text{id}$ , der  $i : X \hookrightarrow Z$  er inklusjonen. La  $f_X : X \rightarrow X$  være en avbildning og la  $f_Z = i \circ f_X \circ r : Z \rightarrow Z$ . Da vil isomorfien*

$$i_* : H_0(\overline{\Lambda_{f_X}}) \rightarrow H_0(\overline{\Lambda_{f_Z}})$$

avbilde  $\overline{R}(f_X)$  på  $\overline{R}(f_Z)$ .

*Bevis.* Det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f_Z} & Z \\ \downarrow r & & \uparrow i \\ X & \xrightarrow{f_X} & X \end{array}$$

gir oss homotopiekvivalenser

$$\overline{\Lambda_{f_X}} \begin{array}{c} \xrightarrow{i\#} \\ \xleftarrow{r\#} \end{array} \overline{\Lambda_{f_Z}}$$

og

$$\overline{X^I} \begin{array}{c} \xrightarrow{i\#} \\ \xleftarrow{r\#} \end{array} \overline{Z^I}$$

der  $i\#$  og  $r\#$  er gitt ved komposisjon med  $i$  og  $r$  hhv.  $i\#$  er proper (inversbildet av en kompakt mengde er kompakt) siden den er inklusjonen av et lukket underrom:  $\overline{\Lambda_{f_X}} = \pi^{-1}(X)$  er lukket i  $\overline{\Lambda_{f_Z}} = \pi^{-1}(Z)$ . La  $K \subset \overline{\Lambda_{f_Z}}$  være kompakt. Da er  $K \cap \overline{\Lambda_{f_X}}$  lukket i  $\overline{\Lambda_{f_Z}}$  og i  $K$ , dermed er  $K \cap \overline{\Lambda_{f_Z}}$  kompakt. Eksisjonsisomorfiene

$$H_n(Z, Z - \text{int}X) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(Z, Z - (\text{int}X - \partial X \times (0,1))) \xleftarrow[\approx]{i_*} H_n(X, \partial X)$$

gir oss en isomorfi

$$H_n(X, \partial X) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(Z, Z - \text{int}X)$$

Siden diagrammet nedenfor kommuterer, vil fundamentalklassen  $[Z]$  avbildes på fundamentalklassen  $[X]$ :

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [X] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(Z, Z - \text{int}X) \xleftarrow[\approx]{} H_n(X, \partial X) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ H_n(Z, Z - x) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & H_n(Z, Z - x) \xleftarrow{\quad\quad\quad} H_n(X, X - x) \end{array}$$

der  $x \in \text{int}X$  og alle avbildningene er gitt ved inklusjoner. Følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [\Delta_Z] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(Z \times Z, Z \times \partial Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(Z, Z - \text{int}X) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(Z \times Z, Z \times (Z - \text{int}X)) \\ \approx \uparrow & & \uparrow \approx \\ H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_n(X \times X, X \times \partial X) \end{array}$$

$$[X] \xrightarrow{\quad\quad\quad} [\Delta_X]$$

der de vertikale avbildninger er indusert av inklusjoner. Dermed vil  $[\Delta_Z]$  avbildes på  $[\Delta_X]$ . Ved å løfte deformasjonsretraktene får vi isomorfiene

$$\begin{array}{c} H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) \\ \approx \downarrow i_* \\ H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - (\text{int}X - \partial X \times (0, 1)))))) \end{array}$$

og

$$H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \xrightarrow[\approx]{i_*} H_n(p^{-1}(Z \times X), p^{-1}(Z \times \partial X))$$

der  $\partial_1 = p^{-1}(X \times \partial X)$ . Dessuten har vi eksisjonsisomorfien

$$\begin{array}{c} H_n(p^{-1}(Z \times X), p^{-1}(Z \times \partial X)) \\ \approx \downarrow i_* \\ H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - (\text{int}X - \partial X \times (0, 1)))))) \end{array}$$

Ved å sette sammen disse tre isomorfiene får vi at

$$i_* : H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \rightarrow H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X)))$$

er en isomorfi. Dermed får vi et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} [Z] & \xrightarrow{\quad} & [\tilde{\Delta}_Z] \\ \\ H_n(Z, \partial Z) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_1) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ H_n(Z, Z - \text{int}X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) \\ \approx \uparrow i_* & & \approx \uparrow i_* \\ H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \\ \\ [X] & \xrightarrow{\quad} & [\tilde{\Delta}_X] \end{array}$$

og  $[\tilde{\Delta}_Z]$  avbildes på  $[\tilde{\Delta}_X]$  via den høyre vertikale avbildningen ovenfor som svarer til den øverste horisontale avbildningen nedenfor:

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_1) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}(Z \times (Z - \text{int}X))) & \xleftarrow{i_*} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1) \\
\uparrow \text{P} \approx & & \uparrow \approx & & \uparrow \text{P} \approx \\
H_c^n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, \partial_2) & \xleftarrow{i_*} & H_c^n(\tilde{Z} \times_\pi \tilde{Z}, p^{-1}((Z - \text{int}X) \times Z)) & \xrightarrow{i_*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_2) \\
\downarrow j^* & & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\
H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_Z}, \partial \bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xleftarrow{=} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_Z}, \partial \bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_X}, \partial \bar{\Lambda}_{f_X}) \\
\downarrow \text{P} \approx & & \downarrow \text{P} \approx & & \downarrow \text{P} \approx \\
H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xrightarrow{=} & H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z}) & \xleftarrow{i_*} & H_0(\bar{\Lambda}_{f_X})
\end{array}$$

der P står for Poincaré-dualiteten i Teorem 3.16. Den midtre vertikale isomorfien øverst kan bevises på samme måte som Teorem 3.16. Siden diagrammet ovenfor kommuterer vil  $\bar{R}(f_X) \in H_0(\bar{\Lambda}_{f_X})$  avbildes på  $\bar{R}(f_Z) \in H_0(\bar{\Lambda}_{f_Z})$  via  $i_*$ .  $\square$

**Lemma 4.4.** *La  $X$  være en kompakt  $n$ -mangfoldighet med rand,  $E$  en kompakt  $k+n$ -mangfoldighet med rand, og anta at  $p : E \rightarrow X$  er en  $k$ -diskbunt. La  $f_X : X \rightarrow X$  være en avbildning og la  $f_E : E \rightarrow E$  være gitt ved  $f_E(e) = i \circ f_X \circ p(e)$ , der  $i : X \hookrightarrow E$  er nullseksjonen. Da vil isomorfien*

$$i_* : H_0(\bar{\Lambda}_{f_X}) \rightarrow H_0(\bar{\Lambda}_{f_E})$$

avbilde  $\bar{R}(f_X)$  på  $\bar{R}(f_E)$ .

*Bevis.* La  $proj_1 : E \times E \rightarrow E$  være projeksjon på første faktor og la  $proj_2 : E \times E \rightarrow E$  være projeksjon på andre faktor. La tilsvarende  $pr_1 : E \oplus E \rightarrow E$  være projeksjon på første faktor for den direkte summen av  $E$  med seg selv, og la  $pr_2 : E \oplus E \rightarrow E$  være projeksjon på andre faktor. Da kommuterer følgende diagram

$$\begin{array}{ccc}
E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
& \searrow pr_i & \downarrow proj_i \\
& & E
\end{array}$$

for  $i = 1, 2$ .

Vi vil begynne med å sette opp fire diagrammer av induuerte bunter

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\Lambda}_{f_E} & \xrightarrow{\pi} & E \\
\bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\
\bar{\Lambda}_{f_X} & \xrightarrow{\pi} & X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
 \downarrow pr_2 & & \downarrow p \times id \\
 E & \xrightarrow{\Delta'} & X \times E
 \end{array}$$

der  $\Delta' = (p \times id) \circ \Delta$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E \times E & \xrightarrow{proj_1} & E \\
 \downarrow p \times id & & \downarrow p \\
 X \times E & \xrightarrow{p_1} & X
 \end{array}$$

der  $p_1(x, e) = x$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E \oplus E & \xrightarrow{i} & E \times E \\
 \downarrow p \circ pr_1 = p \circ pr_2 & & \downarrow p \times p \\
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X
 \end{array}$$

Hvis  $U \in H^k(E, SE)$  er Thom-klassen til  $p : E \rightarrow X$ , så er  $proj_1^*U \in H^k(E \times E, SE \times E)$  Thom-klassen til  $p \times id : E \times E \rightarrow X \times E$ , og  $i^*(proj_1^*U) = pr_1^*U$  er Thom-klassen til  $pr_2 : E \oplus E \rightarrow E$  ved kommentaren før Lemma 4.1. Hvis  $U^\times \in H^{2k}(E \times E, S(E \times E))$  er Thom-klassen til  $E \times E \rightarrow X \times X$ , så er  $i^*U^\times \in H^{2k}(E \oplus E, S(E \oplus E))$  Thom-klassen til  $E \oplus E \rightarrow X$  av samme grunn. Ved Lemma 4.1 vil dermed øvre og nedre kvadrat i diagrammet nedenfor kommutere.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{n+k}(E \times E, E \times \partial E) & \xleftarrow{\Delta_*} & H_{n+k}(E, \partial E) & & [E] \\
 \uparrow \approx \scriptstyle{-\cap proj_1^*U} & & \uparrow \approx \scriptstyle{-\cap pr_1^*U} & \searrow \scriptstyle{-\cap U} & \downarrow \\
 H_{n+2k}(E \times E, (SE \times E) \cup (E \times \partial E)) & \xleftarrow{i_*} & H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_{n+2k}(E \times E, S(E \times E) \cap (E \times E_{\partial X})) & \xleftarrow{i_*} & H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & & \\
 \downarrow \approx \scriptstyle{-\cap U^\times} & & \downarrow \approx \scriptstyle{-\cap i^*U^\times} & \nearrow & \\
 H_n(X \times X, X \times \partial X) & \xleftarrow{\Delta_*} & H_n(X, \partial X) & & [X]
 \end{array}$$

Den høyre delen av diagrammet med den buede pilen kommuterer opp til et tegn  $\pm 1$ , for la oss starte med et element  $x \in H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E))$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{n+2k}(E \oplus E, \partial(E \oplus E)) & \xrightarrow{-\cap i^* U^\times} & H_n(E \oplus E, E \oplus E_{\partial X}) & \xrightarrow{(p \circ pr_2)_*} & H_n(X, \partial X) \\
 \downarrow -\cap pr_1^* U & & & & \uparrow p_* \\
 H_{n+k}(E \oplus E, E \oplus E_{\partial E}) & & & & \\
 \downarrow pr_{2*} & & & & \\
 H_{n+k}(E, \partial E) & \xrightarrow{-\cap U} & H_n(E, E_{\partial X}) & & 
 \end{array}$$

bildet av  $x$  ved de to horisontale avbildningene øverst er

$$p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^* U^\times)$$

mens ved å gå den andre veien får vi

$$\begin{aligned}
 & p_*(pr_{2*}(x \cap pr_1^* U) \cap U) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}((x \cap pr_1^* U) \cap pr_2^* U) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap (pr_1^* U \cup pr_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap (i^* \circ proj_1^* U \cup i^* \circ proj_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^*(proj_1^* U \cup proj_2^* U)) \\
 &= p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^*(U \times U)) \\
 &= (-1)^{kn} p_* \circ pr_{2*}(x \cap i^* U^\times)
 \end{aligned}$$

Den siste likheten følger av at  $U^\times = (-1)^{kn} U \times U$ , der  $U \in H^k(E, SE)$  er Thom-klassen til  $E \rightarrow X$ , og  $U^\times \in H^{2k}(E \times E, S(E \times E))$  er Thom-klassen til  $E \times E \rightarrow X \times X$ , siden vi for to generelle rom  $A$  og  $B$  har formelen  $(a \times b) \cap (\alpha \times \beta) = (-1)^{\deg(\beta)(\deg(a) - \deg(\alpha))} (a \cap \alpha) \times (b \cap \beta)$  for  $\alpha \in H^*(A)$ ,  $\beta \in H^*(B)$ ,  $a \in H_*(A)$  og  $b \in H_*(B)$ , se Bredon [1], kap VI. I Bredons bok er det et annet tegn i formelen enn det som er skrevet opp ovenfor. Dette kommer av at Bredons definisjon av cup-produkt og dermed også av kryssproduktet  $\alpha \times \beta$  i kohomologi avviker med en faktor  $(-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)}$  fra definisjonen som fins i Hatcher [4], som er den vi bruker her. Thom-klassen  $U^\times$  er definert ved  $[E \times E] \cap U^\times = [X \times X]$ . Formelen ovenfor gir oss  $[E \times E] \cap (U \times U) = ([E] \times [E]) \cap (U \times U) = (-1)^{k(n+k-k)} ([E] \cap U) \times ([E] \cap U) = (-1)^{kn} [X] \times [X] = (-1)^{kn} [X \times X]$ . Dette beviser at  $U^\times = (-1)^{kn} U \times U$ .

Dermed vil  $[X]$  avbildes på  $(-1)^{kn}[E]$  ved de tre vertikale avbildningene til høyre i diagrammet nederst på side 46.

Thom-klassen  $\tilde{U} \in H^{2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$  til  $\pi : \tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$  er gitt ved  $p^*U^{\times}$  der  $p$  er overdekningsrommet  $\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ , siden fiberne til de to buntene

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} & \xrightarrow{p} & E \times E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \times X \end{array}$$

er de samme. For å forenkle notasjonen definerer vi  $\partial_1^E = p^{-1}(E \times \partial E)$ ,  $\partial_2^E = p^{-1}(\partial E \times E)$ ,  $\partial_1^X = p^{-1}(X \times \partial X)$  og  $\partial_2^X = p^{-1}(\partial X \times X)$ . Da kommuterer også følgende diagram

$$\begin{array}{ccc} (-1)^{kn} \tilde{\Delta}_*[E] & \xrightarrow{\quad} & (-1)^{kn} \Delta_*[E] \\ \\ H_{n+k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+k}(E \times E, E \times \partial E) \\ \uparrow -\cap p^*(proj_1^*U) & & \uparrow -\cap proj_1^*U \\ H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+2k}(E \times E, (SE \times E) \cup (E \times \partial E)) \\ \parallel & & \parallel \\ H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) & \xrightarrow{p^*} & H_{n+2k}(E \times E, S(E \times E) \cup (E \times E_{\partial X})) \\ \downarrow -\cap \tilde{U} \approx & & \downarrow \approx -\cap U^{\times} \\ H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X) & \xrightarrow{p^*} & H_n(X \times X, X \times \partial X) \\ \\ \tilde{\Delta}_*[X] & \xrightarrow{\quad} & \Delta_*[X] \end{array}$$

der  $proj_1^*U \in H^k(E \times E, SE \times E)$  og  $p^*proj_1^*U \in H^k(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E))$ . Dermed vil  $[\tilde{\Delta}_X] = \tilde{\Delta}_*[X] \in H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X)$  avbildes på  $(-1)^{kn}[\tilde{\Delta}_E] = (-1)^{kn}\tilde{\Delta}[E] \in H_n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \partial_1^E)$  ved komposisjonen av de tre vertikale avbildningene til venstre i diagrammet ovenfor. Det gjenstår å vise kommutativitet av følgende diagram:



$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{R}(f_E) & \longleftarrow & & & & & \longrightarrow [\tilde{\Delta}_E] \\
\\
H_0(\overline{\Lambda}_{f_E}) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^{n+k}(\overline{\Lambda}_{f_E}, \partial \overline{\Lambda}_{f_E}) & \xleftarrow{j^*} & H_c^{n+k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \partial_2^E) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \partial_1^E) \\
\uparrow \approx & & \uparrow -\cap j^*(p^*(proj_1^*U)) & & \uparrow -\cup(p^*(proj_1^*U)) & & \uparrow -\cap p^*(proj_1^*U) \\
H_k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, p^{-1}(E_{\partial^X} \times E)) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E) \cup \partial_1^E) \\
\uparrow = & & \uparrow = & & \uparrow = & & \uparrow = \\
H_k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial(\overline{\Lambda}_{f_X}))) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_2^X)) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_\pi \tilde{E}) \cup \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\
\downarrow \approx & & \downarrow -\cap j^* p^* proj_1^* U & & \downarrow \approx p^* & & \downarrow \approx -\cap \tilde{U} \\
H_0(\overline{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{\approx \text{P}} & H_c^n(\overline{\Lambda}_{f_X}, \partial \overline{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{j^*} & H_c^n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_2^X) & \xrightarrow{\approx \text{P}} & H_n(\tilde{X} \times_\pi \tilde{X}, \partial_1^X) \\
\overline{R}(f_X) & \longleftarrow & & & & & \longrightarrow [\tilde{\Delta}_X]
\end{array}$$

I diagrammet på forrige side står  $P$  for Poincaré-dualitet.  $[\tilde{\Delta}_X]$  avbildes på  $(-1)^{kn}[\tilde{\Delta}_E]$ , så hvis diagrammet er veldefinert og kommuterer opp til en faktor  $(-1)^{kn}$ , så vil  $\overline{R}(f_X)$  avbildes på  $\overline{R}(f_E)$  via de vertikale isomorfier til venstre i diagrammet, hvor komposisjonen av disse er gitt ved  $i_*$ . La  $S(\overline{\Lambda}_{f_E})$  være sfærebunten til  $\overline{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \overline{\Lambda}_{f_X}$ . Da er  $S(\overline{\Lambda}_{f_E}) \subset p^{-1}(SE \times E)$  siden vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} (\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{j} & (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E)) \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ (E, SE) & \xrightarrow{\Gamma_f} & (E \times E, SE \times E) \end{array}$$

hvor  $S(\overline{\Lambda}_{f_E})$  avbildes på sfærebunten  $SE$  til  $E \rightarrow X$  siden

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Lambda}_{f_E} & \xrightarrow{\pi} & E \\ \overline{p} \downarrow & & p \downarrow \\ \overline{\Lambda}_{f_X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

er et diagram av induuerte bunter. Dermed er  $j^*p^*proj_i^*U \in H^k(\overline{\Lambda}_{f_E}, S(\overline{\Lambda}_{f_E}))$  og det store diagrammet på forrige side er veldefinert. Den nedre høyre delen

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_2^X)) & \xrightarrow[\approx]{P} & H_{n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}) \cup \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\ \approx \uparrow \pi^* & & \downarrow -\cap \tilde{U} \approx \\ H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X) & \xrightarrow[\approx]{P} & H_n(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, \pi^{-1}(\partial_1^X)) \\ & & \downarrow \pi_* \\ & & H_n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_1^X) \end{array}$$

kommuterer, for la en klasse i  $H_c^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X)$  være representert ved  $[\phi] \in H^n(\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}, \partial_2^X \cup (\tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X} - K))$  for en kompakt  $K$ . La  $\mu_K^E \in H_{2n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} - \pi^{-1}(K)) \cup \partial(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$  være det unike elementet som avbildes på en valgt generator for  $H_{2n+2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} - x) \cup \partial(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$  for enhver  $x \in \pi^{-1}(K)$ , og la  $\tilde{U} \in H^{2k}(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, S(\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}))$  være Thom-klassen til  $\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E} \rightarrow \tilde{X} \times_{\pi} \tilde{X}$ . Diagrammet kommuterer siden

$$\begin{aligned} & \pi_*((\mu_K^E \cap \pi^*[\phi]) \cap \tilde{U}) = \pi_*(\mu_K^E \cap (\pi^*[\phi] \cup \tilde{U})) \\ & = \pi_*(\mu_K^E \cap (\tilde{U} \cup \pi^*[\phi])) \quad (\text{siden dimensjonen er jevn}) \\ & = \pi_*((\mu_K^E \cap \tilde{U}) \cap \pi^*[\phi]) = \pi_*[\mu_K^E \cap \tilde{U}] \cap [\phi] \\ & = \mu_K^X \cap [\phi] \end{aligned}$$

Vi vil også bevise kommutativitet av det nedre venstre kvadratet på side 49:

$$\begin{array}{ccc}
 H_k(\bar{\Lambda}_{f_E}, S(\bar{\Lambda}_{f_E})) & \xleftarrow{\text{P}} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_E}, \pi^{-1}(\partial\bar{\Lambda}_{f_X})) \\
 \downarrow -\cap j^* p^* \text{proj}_1^* U & & \uparrow \bar{p}^* \approx \\
 H_0(\bar{\Lambda}_{f_E}) & & \\
 \approx \downarrow \bar{p}_* & & \\
 H_0(\bar{\Lambda}_{f_X}) & \xleftarrow{\text{P}} & H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_X}, \partial(\bar{\Lambda}_{f_X}))
 \end{array}$$

La et element i  $H_c^n(\bar{\Lambda}_{f_X}, \partial(\bar{\Lambda}_{f_X}))$  være representert ved  $[\phi] \in H^n(\bar{\Lambda}_{f_X}, (\bar{\Lambda}_{f_X} - K) \cup \partial(\bar{\Lambda}_{f_X}))$ . La  $\mu_K^X \in H_n(\bar{\Lambda}_{f_X}, (\bar{\Lambda}_{f_X} - K) \cup \partial(\bar{\Lambda}_{f_X}))$  og  $\mu_K^E \in H_{n+k}(\bar{\Lambda}_{f_E}, (\bar{\Lambda}_{f_E} - \bar{p}^{-1}(K)) \cup \partial(\bar{\Lambda}_{f_E}))$  være de unike elementene som avbildes på en valgt generator i de lokale homologigruppene om  $x \in K$  eller  $\pi^{-1}(K)$  hhv. Diagrammet kommuterer opp til en faktor  $\pm 1$  fordi

$$\begin{aligned}
 & \bar{p}_*((\mu_K^E \cap \bar{p}^*[\phi]) \cap j^* p^* \text{proj}_1^* U) \\
 &= (-1)^{kn} \bar{p}_*(\mu_K^E \cap j^* p^* \text{proj}_1^* U) \cap [\phi] \\
 &= (-1)^{kn} \mu_K^X \cap [\phi]
 \end{aligned}$$

Den siste likheten følger av at  $j^* p^* \text{proj}_1^* U$  er Thom-klassen til  $\bar{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \bar{\Lambda}_{f_X}$ , siden vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc}
 (\bar{\Lambda}_{f_E}, S\bar{\Lambda}_{f_E}) & \xrightarrow{j} & (\tilde{E} \times_{\pi} \tilde{E}, p^{-1}(SE \times E)) \\
 \downarrow \pi & \Gamma_f & \downarrow p \\
 (E, SE) & \xrightarrow{\text{proj}_1} & (E \times E, SE \times E)
 \end{array}$$

hvor  $\text{proj}_1 \circ \Gamma_f = id_E$  og  $\text{proj}_1 \circ p \circ j = p \mid \bar{\Lambda}_{f_E} = \pi$ .  $\pi^* : H^k(E, SE) \rightarrow H^k(\bar{\Lambda}_{f_E}, S\bar{\Lambda}_{f_E})$  tar Thom-klassen til  $E \rightarrow X$  på Thom-klassen til  $\bar{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \bar{\Lambda}_{f_X}$ , siden sistnevnte er den induserte bunten til den første via  $\pi : \bar{\Lambda}_{f_E} \rightarrow \bar{\Lambda}_{f_X}$ . Kommutativitet av de andre kvadratene er trivielt.  $\square$

**Bevis for Teorem 4.2.** La  $X$  være et CW-kompleks og la  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  være en embedding slik at  $g(X)$  er et underkompleks av  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathbb{R}^n$  er utstyrt med en passende CW-struktur. La  $N_1$  og  $N_2$  være åpne omegner om  $g(X)$  i  $\mathbb{R}^n$  slik at  $r_1 : N_1 \rightarrow g(X)$  og  $r_2 : N_2 \rightarrow g(X)$  er deformasjonsretrakter. Da vil  $N_1 \cap N_2$  inneholde en omegn  $N_{12}$  om  $g(X)$  slik at det fins deformasjonsretrakt  $r_{12} : N_{12} \rightarrow g(X)$ , ved Proposisjon A.5 i Hatcher [4]. Da vil Lemma 4.3 gi oss likheter

$$\begin{aligned}\overline{R}(f_{N_1}) &= i_{1*}\overline{R}(f_{N_{12}}) \\ \overline{R}(f_{N_2}) &= i_{2*}\overline{R}(f_{N_{12}})\end{aligned}$$

der  $i_1$  og  $i_2$  er inklusjonene  $i_1 : N_{12} \hookrightarrow N_1$  og  $i_2 : N_{12} \hookrightarrow N_2$ . Vi har at  $i_1 \circ i_{12} = j_1$  siden diagrammet av inklusjoner

$$\begin{array}{ccc} & & N_1 \\ & \nearrow^{j_1} & \uparrow^{i_1} \\ g(X) & \xrightarrow{i_{12}} & N_{12}\end{array}$$

kommuterer. Dette gir oss at  $r_{12} \simeq (r_{12} \circ j_1) \circ r_{12} = r_{12} \circ (i_1 \circ i_{12}) \circ r_{12} \simeq r_{12} \circ i_1$ . Dermed er  $r_{12*}\overline{R}(f_{N_1}) = r_{12*}(i_{1*}\overline{R}(f_{N_{12}})) = r_{12*}\overline{R}(f_{N_{12}})$ . Ved et symmetrisk argument er også  $r_{2*}\overline{R}(f_{N_2}) = r_{12*}\overline{R}(f_{N_{12}})$ .

Anta så at  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  og  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  er embeddinger. La  $g \times h : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  være gitt ved  $(g \times h)(x) = (g(x), h(x))$ . La  $N$  være en omegn om  $g(X)$  i  $\mathbb{R}^n$  og la  $M$  være en omegn om  $h(X)$  i  $\mathbb{R}^m$ . Da er  $N \times M$  en omegn om  $(g \times h)(X)$  i  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Betrakt det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & g(X) & \xrightarrow{i_N} & N \\ & \searrow & & & \downarrow b \\ & & & & N \times M \\ & & & \nearrow k & \\ & & & & \end{array}$$

der  $b$  er gitt ved  $b(u) = (u, i_M \circ h \circ g^{-1} \circ r_N(u))$ ,  $k$  er gitt ved  $k(x) = (i_N \circ g(x), i_M \circ h(x))$ , der  $r_N, i_N, r_M$  og  $i_M$  er deformasjonsretrakt og inklusjon

$$N \begin{array}{c} \xrightarrow{r_N} \\ \xleftarrow{i_N} \end{array} g(X)$$

og

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{r_M} \\ \xleftarrow{i_M} \end{array} h(X)$$

La  $E_N$  være en tubulær omegn om  $b(N)$  i  $N \times M$ , denne kan ses på som en  $m$ -diskbunt  $\pi_N : E_N \rightarrow b(N) \approx N$ .  $E_M$  defineres tilsvarende. Da er

$$\begin{aligned}\overline{R}(f_{E_N}) &= i_*\overline{R}(f_N) \\ \overline{R}(f_{E_M}) &= i_*\overline{R}(f_M)\end{aligned}$$

ved Lemma 4.4. Men  $\overline{R}(f_{E_N}) \in H_0(\Lambda_f E_N)$  og  $\overline{R}(f_{E_M}) \in H_0(\Lambda_f E_M)$  avbildes på samme element i  $H_0(\Lambda_f X)$  ved Lemma 4.3, siden de begge er omegner om  $(g \times h)(X)$  i  $\mathbb{R}^{n+m}$  med  $(g \times h)(X)$  som deformasjonsretrakt. □

# Bibliografi

- [1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag GTM 139, 1993.
- [2] Robert F. Brown. *The Lefschetz Fixed Point Theorem*. Scott, Foresman, Chicago, 1971.
- [3] R. J. Daverman and R. B. Sher. *Handbook of Geometric Topology*. Elsevier, 2001.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] B. J. Jiang. Lectures on nielsen fixed point theory. *Contemporary Math.*, Vol 14, RI 1983.
- [6] Serge Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer GTM 191, 1999.
- [7] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

# Register

- basisrom, 13
- basisskifte, 31
- cap-produkt, 23–27, 30–38, 41, 46–51
- cup-produkt, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 34, 37–39, 47, 49, 50
- CW-kompleks, 7, 8, 41, 42, 51
- CW-struktur, 41, 42, 51
- deformasjonsretrakt, 39, 42, 44, 49, 51, 52
- dekktranslasjon, 12, 13, 15
- diagonalvirkning, 27, 29, 32
- direkte grense, 33, 38
- direkte sum, 22
- diskbunt, 23, 41, 45, 52
- dual basis, 30
- eksisjon, 26, 27, 38, 39, 43, 44
- embedding, 41, 42, 51, 52
- fiber, 10, 13, 15, 17, 23, 24, 26, 33, 41
- fibrasjon, 9–11, 32
- fikspunkt, 7, 8, 11, 12, 19, 22, 31, 35, 36, 39
  - isolert, 19
- fikspunktindeks, 8, 19–22, 39
- fikspunktklasse, 7, 8, 11, 12, 19
  - essensiell, 7
  - korrespondanse mellom, 19
- fri gruppe, 22
- fundamentalklasse, 24, 26, 27, 30, 33, 37, 43
- homotopiekvivalens, 10, 12, 13, 20, 40, 42
- homotopiinvarians, 8, 39
- homotopiløftningsegenskapen, 9
- indusert bunt, 41, 45, 50, 51
- indusert fibrasjon, 10, 11, 32, 39
- kompakt-åpen topologi, 9, 17, 28
- konjugasjonsklasse, 7, 12
- kraveomegn, 38
- kryssprodukt, 47
- løftning, 7, 9, 10, 12–15, 17, 32
- løftningsklasse, 7, 12, 13, 19
- løkkerom, 10
- Lefschetz' fikspunktteorem, 7, 31
- Lefschetz-tallet, 7, 8, 30, 31, 36
- lokalt veisammenhengende, 11–13
- mangfoldighet, 19, 23, 25–27, 30–38, 41, 45
  - med rand, 26, 27, 35, 36, 38, 42, 45
  - metriserbar, 38
  - orienterbar, 23, 27, 31, 32
  - orientert, 26
- Nielsen-tallet, 7
- nullseksjonen, 23, 45
- orienteringsbevarende avbildning, 35
- overdekningsrom, 8, 15, 17, 28, 30, 48
  - isomorfi av, 30

- Poincaré-dualitet, 24, 27, 33, 37–39, 45, 49, 50  
proper avbildning, 43
- Reidemeister-tallet, 7, 12, 13, 17, 19  
Reidemeister-trasen, 8, 19–23, 36, 39–42  
retrakt, 41
- semilokalt 1-sammenhengende, 11, 12  
sfærebunt, 24, 50  
snittegn, 25–27, 31, 34  
snittprodukt, 24–27, 30, 31, 33–35  
standard basis, 31  
sub-basis, 9  
sykel, 38
- tangentrom, 24  
Thom-isomorfi, 23, 41  
Thom-klasse, 23, 24, 26, 33, 41, 46, 47, 50, 51  
Thoms isomorfiteorem, 23  
totalrom, 13  
transverselt, 24, 25, 27, 31, 34, 35  
tubulær omegn, 23, 24, 52
- underkompleks, 41, 42  
undermangfoldighet, 24  
universaloverdekningsrommet, 7, 12, 28
- veikomponent, 8, 11, 13, 14, 22  
veiløftningsegenskapen, 15, 17  
veisammenhengende, 11–14, 22, 32