



NORGES HANDELSHØYSKOLE  
Bergen, 7.juni.2007

# Teoretisk og numerisk prising av korrelasjonsavhengige kredittderivater

av

**Tor Åge Myklebust og Alex Shun Wei Li**

**Veileder: Knut Kristian Aase**

Masterutredning i Finansiell Økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Denne utredningen er gjennomført som et ledd i masterstudiet i økonomisk-administrative fag ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at høyskolen innestår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

## Sammendrag

Denne utredningen tar sikte på å studere og sammenligne ulike teoretiske modeller for prising av kredittderivater der underliggende aktivum er en portefølje av aktiva. Historiske data viser oss at konkurser har en tendens til å opptre uregelmessig og i klynger. Prisingsmodellene vi bruker for å prise slike kontrakter må derfor ta hensyn til denne korrelasjonsproblematikken på en tilfredsstillende måte. Viktig for oss er det også å vise hvordan disse modellene kan implementeres i praksis. Vi gjør dette gjennom å bruke relativt enkle numeriske eksempler.

Vi starter oppgaven med å gi en generell oversikt over hva begrepet kredittrisiko er, og hvordan denne risikoen måles i praksis. Vi gir så en oversikt over hvilke produkter som er sentrale i dagens kredittderivatmarked, og beskriver hvordan strukturen i disse produktene er bygd opp.

Videre følger en mer teoretisk del, der vi først presenterer to hovedtyper av kredittrisikomodeller; strukturerte modeller og redusert form modeller. Disse modellene danner selve fundamentet for de mer spesifikke modellene vi studerer senere i oppgaven.

Konkurskorrelasjoner er, sammen med individuelle konkurssannsynligheter og andel tilbakebetalt ved konkurs, den viktigste faktoren i prising av korrelasjonsavhengige kredittderivater. Etter en kort forklaring på hvordan de to første faktorene kan estimeres går vi videre med å beskrive hva korrelasjoner er og hvordan man kan estimere disse.

Siste del av oppgaven blir viet til en studie av flere ulike modeller som hver har sine måter å løse korrelasjonsproblematikken på. Vi fokuserer i hovedsak på modeller med solide teoretiske fundament, men inkluderer også en praktisk tilnærming til problemet. Styrkene og svakhetene til de ulike modellene blir kommentert.

# Innhold

Sammendrag.....	2
1. Forord.....	6
2. Kredittrisiko.....	7
3. Kreditderivater.....	12
3.1 Markedsoversikt.....	12
3.2 Aktører på markedet.....	14
3.3 Fordeler med kreditderivater.....	15
3.4 Kreditderivatmarkedet i Norge.....	16
4. Ulike typer kreditderivater.....	18
4.1 Credit Default Swaps (CDS).....	18
4.2 Total Return Swaps.....	19
4.3 Credit-linked Notes (CLN).....	20
4.4 First-to-default baskets.....	21
4.5 CDO – Collateralized debt obligations.....	21
4.5.1 Generell beskrivelse av CDO.....	22
4.5.2 Eksempel på CDO- struktur.....	23
4.5.3 Formål med CDO.....	24
4.5.4 Syntetisk CDO.....	25
4.5.5 Enkeltransje- CDO.....	26
4.5.6 Hvem investerer i CDO- er?.....	27
5. To grunnleggende modeller.....	29
5.1 Strukturerte kredittrisikomodeller.....	29
5.2 Redusert-form modeller.....	34
5.2.1 Poissonprosesser.....	35
6. Konstruksjon av kredittkurven.....	43
6.1 Recovery rates.....	43
6.2 Bruk av aksjepriser.....	46
6.3 Bruk av historiske data.....	46
6.4 Bruk av observerbare markedspriser.....	48
6.5 Bruk av Credit Default Swap Spreads.....	51
6.6 Faktiske versus risikonøytrale konkurssansynligheter.....	53
6.6.1 Hvilke sannsynligheter skal man bruke?.....	54

7. Konkurskorrelasjon .....	55
7.1 Definisjoner og sammenhenger .....	57
7.2 Estimering av korrelasjoner .....	59
7.2.1 Faktormodeller .....	60
7.2.2 Énfaktormodell .....	61
7.2.3 Multifaktormodeller .....	62
7.2.4 Kalibrering av modellen og estimering av korrelasjoner .....	62
8. Skissering av prisingsproblemene .....	66
8.1 Hvordan prise en default basket? .....	66
8.2 Hvorfor er korrelasjon viktig for default baskets? .....	67
8.3 Hvordan prise en CDO? .....	67
8.4 Korrelasjonstrading i CDO- markedene .....	70
9. To ekstreme tilfeller .....	72
9.1 Uavhengighet .....	72
9.2 Perfekt korrelasjon .....	74
9.3 Binomisk ekspansjonsteknikk (BET) .....	75
9.3.1 Eksempel på bruk av BET .....	77
10. Stor homogen portefølje (LHP) .....	81
10.1 LHP- metoden i praksis .....	86
10.1.1 Eksempel .....	88
11. Korrelerte konkurser i redusert form modeller .....	90
11.1 Korrelerte konkursintensiteter .....	91
11.2 Implementering av korrelerte konkursintensiteter .....	93
11.2.1 Overgang til en portefølje av aktiva .....	95
11.2.2 Cholesky- dekomposisjon .....	96
11.2.3 Prisingseksempel .....	97
11.2.4 Ulemper ved bruk av korrelerte konkursintensiteter .....	98
11.3 Simultane konkurshendelser .....	99
11.4 Smittsomme konkurser (Contagion models) .....	100
11.5 Copula- funksjoner .....	101
11.5.1 Eksempler på copulas .....	102
11.5.2 Gaussisk copula .....	105
11.5.3 T- copula .....	105
11.5.4 Hvordan simulere en multivariat konkursfordeling ved bruk av copulas? .....	106

11.5.5 Prisingseksempel.....	107
11.5.6 Implisitte korrelasjoner og korrelasjonssmil.....	109
12. Oppsummering og konklusjon.....	111
Kilder.....	114
Appendix A.....	117
Appendix B.....	119
Appendix C.....	120
Appendix D.....	121
Appendix E.....	123
Appendix F.....	124
Appendix G.....	125

# 1. Forord

Kredittrisiko og kredittderivater har i de senere år blitt viet stadig mer oppmerksomhet, både av praktikere og akademikere. Den enorme veksten i kredittderivatmarkedene verden over har ført til at man har fått nye muligheter for å handle og overføre kredittrisiko. Dette er selvfølgelig en stor fordel for aktører som sitter med mye kredittrisiko i sine porteføljer, men det representerer også en fin investeringsmulighet for investorer som ønsker å få opp risikonivået i sine porteføljer.

Forfatterne av denne oppgaven var begge på utveksling ved Tsinghua University i Beijing. Det var etter en gjesteforelesning her, holdt av Citibanks sjef for risikorådgivning og analyse i Asia, at vi forstod at kredittderivatmarkedet bestod av mange flere produkter enn det vi trodde. Ikke minst fikk vi vite at noe av det ”hotteste” i dagens marked var et produkt med betegnelsen CDO. Uten helt å skjønne hva dette var, ble interessen for å finne ut mer om temaet pirret. Nærmere undersøkelser viste seg at dette var et produkt i en ny gruppe av kredittderivater, der underliggende aktivum var en hel portefølje av aktiva. Vi fikk også forståelsen av at dette gav opphav til nye utfordringer på prisingsfronten. Dermed var idéen til denne masteroppgaven et faktum.

Når vi nå kan ta ett skritt tilbake å se på det ferdige produktet er det klart at det har vært et relativt omfattende prosjekt. Siden temaet er ganske nytt, har vi følt et behov for å gå litt bredt ut og forklare grunnlaget for prisingsmodellene vi har studert nøye. På samme tid har vi også hatt et stort læringsutbytte av å jobbe med denne oppgaven. Vi vil først og fremst takke vår veileder, Knut Aase, for konstruktive tilbakemeldinger og gode råd i løpet av denne prosessen.

Tor Åge vil også benytte anledningen til å takke sin familie for all støtte i løpet av de fem årene ved NHH. En stor takk rettes også til min gode venn og medforfatter Alex Shun Wei Li.

Alex vil også takke foreldrene og Rong for hjelp og støtte i denne lærerike perioden. Samtidig vil jeg takke Tor Åge for et fantastisk samarbeid med oppgaven og ellers i løpet av studietiden.

## 2. Kredittrisiko

Kredittrisiko blir ofte oppfattet å være synonymt med konkursrisiko, men det er mer enn som så. Vi kan dele kredittrisiko inn i to komponenter – konkursrisiko og ”credit spread” risiko.

### *Konkursrisiko*

Konkursrisiko handler om risiko knyttet til motpartens evne til å tilbakebetale et forhåndsbestemt beløp, enten deler av det eller hele. Dersom bedriften går konkurs, vil normalt en brøkdel av obligasjonenes verdi utbetales. Denne kaller vi ”recovery value”.

### *”Credit spread” risiko*

Selv om motparten ikke går konkurs, kan det fortsatt oppstå risiko knyttet til større ”credit spread” eller dårligere kredittkvalitet. Credit spread er forskjellen mellom internrentenivå til to gjeldspapir som har lignende forfall og løpetid. Denne renteforskjellen reflekterer den relative kredittverdigheten til utstederen, og referansen er ofte en statsobligasjon. Dermed er credit spread ofte brukt som et mål på kredittverdighet. En reduksjon av credit spread reflekterer en forbedring av lånerens kredittverdighet.

Vi kan dele credit spread risiko opp i ytterligere to deler:

- *Hopp i credit spread.* Dette kan komme av at et selskaps/ en obligasjons rating endres, dvs. opplever en oppgradering eller en nedgradering. Dette skyldes som regel ny positiv eller negativ informasjon som blir tilgjengelig for markedet.
- *Credit spread volatilitet* (kontinuerlig endring i credit spread). Over tid vil markedets syn på risiko kunne forandre seg, og for eksempel med større grad av risikoaversjon, så vil markedets risikopremie bli høyere. Dette kan da føre til at spreaden på en obligasjon kan forstørres eller forminskes uten at det er relatert til konkurssannsynlighet.

Ratingbyråene forsøker å måle kredittrisiko, og de bruker da alfa-numeriske symbol for å rangere blant annet selskapenes holdning til risiko, finansielle evner og muligheter til å innfri forpliktelse ved forfallstidspunkt. De tre mest kjente ratingselskapene i dag er Moody’s Investors Service, Standard & Poor’s (S&P), og Fitch IBCA. I tabellen under viser vi symbolene og definisjonen brukt av de ratingselskapene:

Rating	Interpretation
AAA/Aaa	Highest quality; Extremely strong
AA+/Aa1	
AA/Aa2	
AA-/Aa3	High quality
A+/A1	
A/A2	
A-/A3	Strong payment capacity
BBB+/Baa1	
BBB/Baa2	
BBB-/Baa3	Adequate payment capacity
BB+/Bb1	
BB/Ba2	
BB-/Ba3	Likely to fulfill obligations; ongoing uncertainty
B+/B1	
B/B2	
B-/B3	High risk obligations
CCC+/Caa1	
CCC/Caa2	
CCC-/Caa3	Current vulnerability to default
CC	
C/Ca	
D	In bankruptcy or default, or other market shortcoming

Kilde: "Managing Credit Risk" av John B. Caouette, Edward I. Altman, og Paul Narayanan

Under evaluering av kredittrisiko bruker ratingselskapene mye av det samme verktøy som en aksjeanalytiker bruker, bortsett fra at ratingselskapene typisk har en lengre tidshorisont. For eksempel så forklarer Standard & Poor's at når de rater en industriobligasjon, så fokuserer de på følgende områder:

*Foretningsrisiko:*

- Industrikarakteristikk
  - Styrke
  - Stabilitet
- Konkurransesposisjon:
  - Markedsføring
  - Teknologi
  - Effektivitet
- Ledelse



*Finansiell risiko:*

- Finansiell karakteristikk
- Finansiell politikk
- Profitabilitet
- Kapitalstruktur
- Kontantstrømbeskyttelse
- Finansiell fleksibilitet

Klassene AAA til og med BBB- omtales som "investment grade". Fra BB+ og ut skalaen finner vi "speculative grade" klassen, også ofte omtalt som "junk-bonds". Vi kan for eksempel ta Den norske Bank som er ratet A av S&P og A2 av Moody's. Ut fra definisjonen ser vi at DnB er et solidt selskap, men kan være noe mer påvirkelig for negative hendelser enn hva tilfellet er for høykvalitetselskapene i klassene over. Bergensbanken, som er ratet Baa2 av Moody's, er definert som en motpart med adekvat betalingskapasitet. DnB er altså i ratingselskapenes øyne en sikrere motpart enn Bergensbanken. Denne informasjonen er nyttig dersom vi kan kvantifisere forskjellen. Med et slikt tall kan vi beregne oss frem til meravkastningen/ risikopremien som trengs på Bergensbanken for at vi skal være indifferent mellom de to bankene.

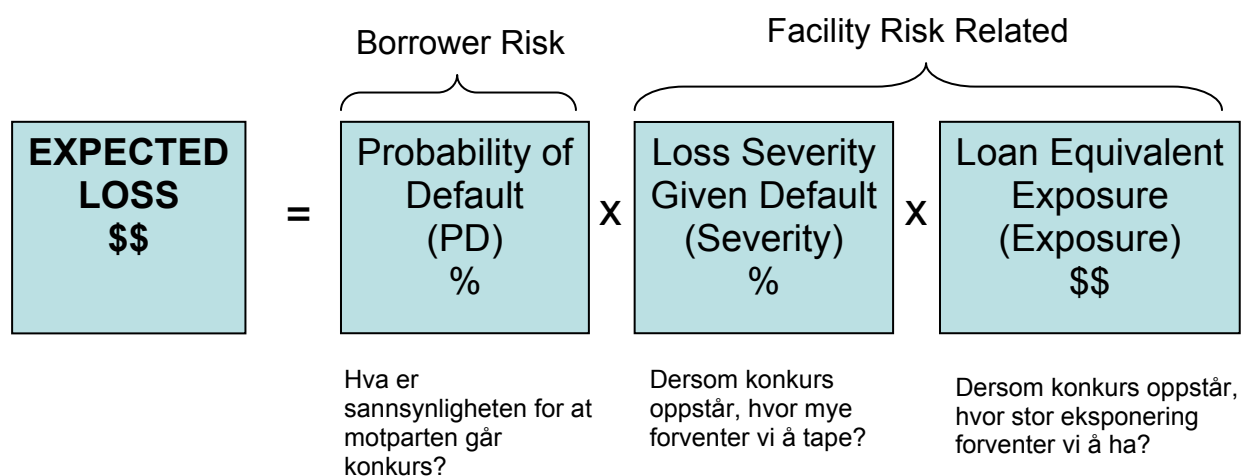
Kilder til slik informasjon er de historiske databasene til ratingselskapene. Disse gir blant annet historiske misligholdsfrekvenser per ratingklasse. Credit Metrics er et selskap hvor de blant annet beregner årlige misligholdsrater, betegnet EDF (expected default frequency). Disse er en funksjon av flere ratingselskapers historikk. Tabellen under viser historiske misligholdsfrekvenser per ratingklasse:

<b>Credit Metrics</b>	<b>Default</b>
AAA	0,01 %
AA	0,01 %
A	0,07 %
BBB	0,17 %
BB	1,08 %
B	4,95 %
CCC	19,15 %

*Kilde: Credit Metrics, Technical Document*

Fra tabellen ser vi at det er 0,17% sannsynlighet for at et selskap som er ranket BBB misligholder sine forpliktelser i løpet av 1 år. Dette er ca. 2,5 ganger mer enn for et A ranket selskap. Videre er det viktig å legge merke til at hoppet i EDF fra AAA til BBB er mindre enn en seksdel av hoppet mellom kategoriene BBB (investment grade) og BB (speculative grade). Videre nedover er EDF eksponentielt stigende ved fallende kredittverdighet.

Misligholdsraten er alene ikke en god nok definisjon på kredittrisiko. Man må også ta hensyn til hvor mye man kan tape ved et eventuelt mislighold. Forventet tap kan deles inn i tre komponenter:



Vi kan vise dette med et enkelt eksempel. Anta at du har en eksponering på 100 millioner kroner, og du forventer å tape halvparten av eksponeringen ved konkurs. Anta videre at sannsynligheten for at motparten går konkurs er 7 %. Da vil ditt forventa tap være:

$$7\% * 50\% * 100 \text{ mill} = \underline{3,5 \text{ mill}}$$

Moody's er det eneste ratingselskapet som eksplisitt har gått ut og stadfestet at deres rating er et uttrykk for forventet tap. For alle praktiske formål gjelder denne definisjonen også for de andre ratingselskapene. Det gis lavere rating til et selskaps ansvarlige lån enn til dets senior sikrede obligasjoner. (Selskap, i motsetning til nasjoner, kan ikke gå selektivt i mislighold, så en ratingforskjell må nødvendigvis være et uttrykk for sikkerhet.). For eksempel er Eksportfinans sin senior usikrede gjeld ratet AAA/Aaa av henholdsvis S&P og Moody's. De samme ratingselskapene tildeles den ansvarlige gjelden AA+/Aa1, altså nivået under.

Som vi har nevnt tidligere, kan det skje mer med et selskap enn mislighold/ikke mislighold. For eksempel kan selskapet bli utsatt for negative markedsendringer, og derigjennom få redusert sin evne til å gjøre opp for seg uten at dette nødvendigvis leder til mislighold. Dersom du sitter på obligasjoner utstedt av et slikt selskap, vil verdien på disse falle, og du vil måtte bokføre et tap.

Sannsynligheten for at et selskap blir dårligere eller bedre, eller forblir på samme kredittnivå, kan man finne ved hjelp av ratingselskapenes såkalte transisjonsmatriser:

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	<b>90,8 %</b>	8,3 %	0,7 %	0,1 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %	0,00 %
AA	0,7 %	<b>90,7 %</b>	7,8 %	0,6 %	0,1 %	0,1 %	0,0 %	0,00 %
A	0,1 %	2,3 %	<b>91,1 %</b>	5,5 %	0,7 %	0,3 %	0,0 %	0,06 %
BBB	0,0 %	0,3 %	<b>6,0 %</b>	<b>86,9 %</b>	5,3 %	1,2 %	0,1 %	<b>0,18 %</b>
BB	0,0 %	0,1 %	0,7 %	7,7 %	<b>80,9 %</b>	8,8 %	1,0 %	1,06 %
B	0,0 %	0,1 %	0,2 %	0,4 %	6,5 %	<b>86,5 %</b>	4,1 %	5,20 %
CCC	0,2 %	0,0 %	0,2 %	1,3 %	2,4 %	11,2 %	<b>64,9 %</b>	19,79 %

*Kilde: Standard & Poor's*

Som vi ser er det 86,9 % sannsynlighet for at et selskap som er ranket BBB i dag også er det om ett år. Videre ser vi at det er 0,18 % sannsynlighet for BBB ranket selskap misligholdes, og 6 % sannsynlighet for at det samme selskapet blir A ranket om ett år.

### 3. Kredittderivater

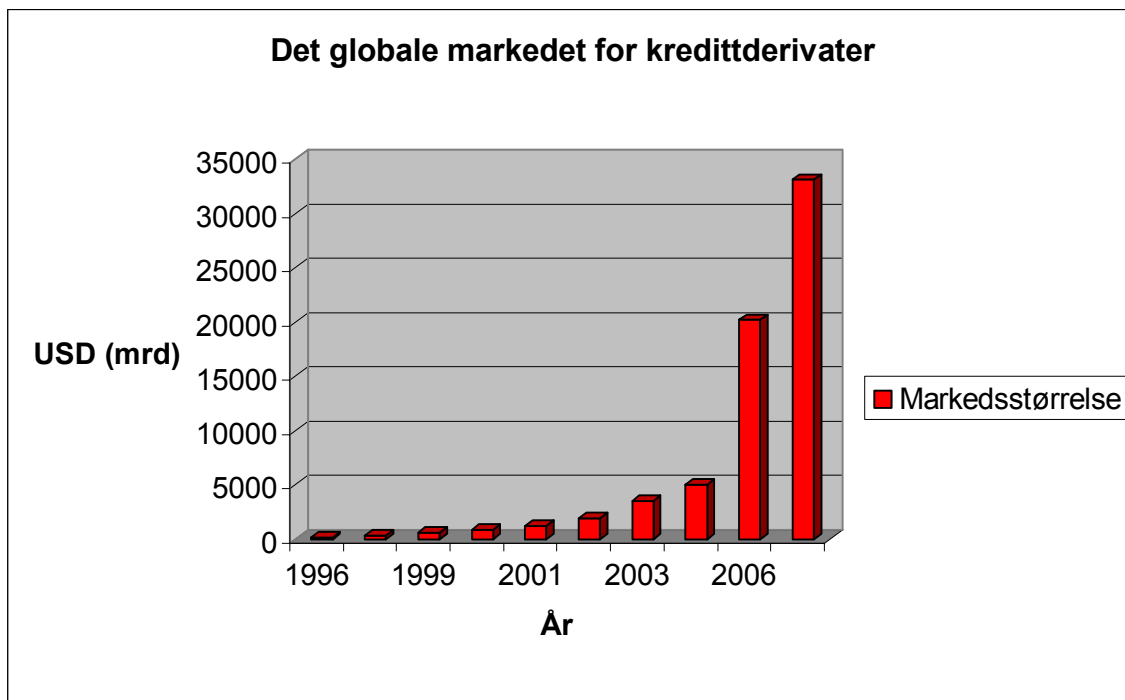
Kredittderivater ble introdusert på markedet ved begynnelsen av 90- tallet. Inntil da var kredittrisiko kanskje den aller største risikokomponenten som manglet skreddersydde risikostyringsprodukter. Lenge hadde man prøvd å kontrollere denne typen risiko ved hjelp av mer primitive hjelpemidler som pantsetting og ulike typer garantier. Introduksjonen av kredittderivater gav en hel ny verden av muligheter til å behandle kredittrisiko på en mer strukturert og profesjonell måte. På tross av den relativt korte historien er det kanskje derfor ikke så overraskende at bruken av denne typen derivater har opplevd en eksplosjonsartet vekst. Ikke minst kommer dette av at stadig flere aktører på markedet ser seg nytten av å bruke slike instrumenter aktivt for å kontrollere risiko, og oppnå avkastning. Mens det til å begynne med stort sett var banker som opererte i dette segmentet, ser vi i dag at for eksempel forsikringsselskaper, ulike typer fond, og ikke minst vanlige selskaper bruker kredittderivater aktivt for å skille ut og handle kredittrisiko.

Betegnelsen kredittderivater favner om en stor, og stadig voksende, mengde verdipapir. Schönbucher (2003) gir i sin bok en generell definisjon av kredittderivater, som dekker alle produkter i kategorien:

*A credit derivative is a derivative security whose payoff is materially affected by credit risk. (Schönbucher 2003)*

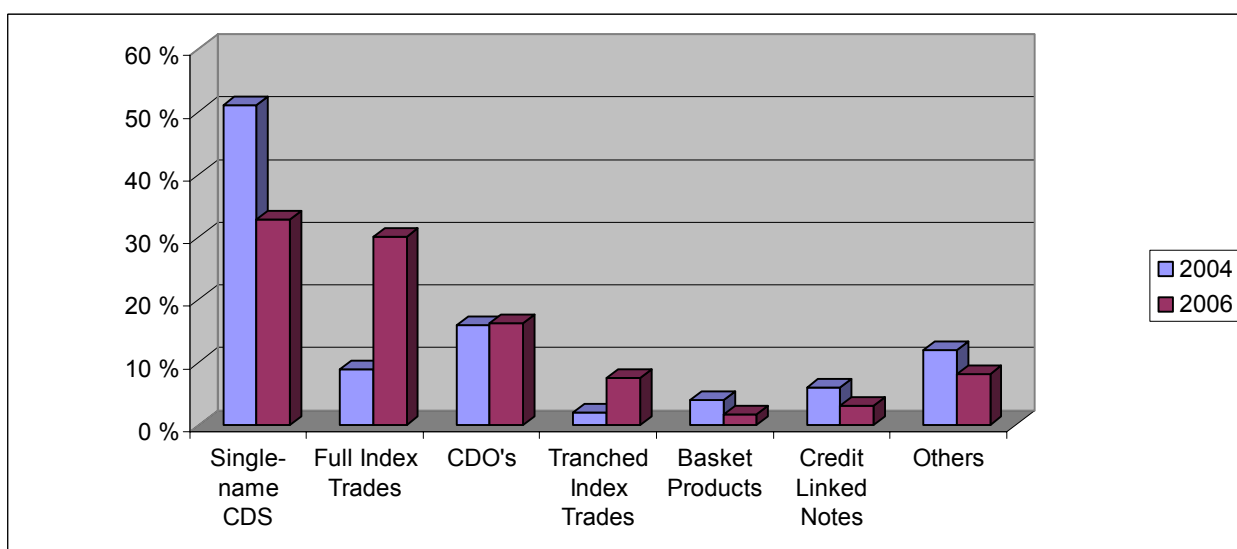
#### 3.1 Markedsoversikt

Naturlig nok ble de første kredittderivatene introdusert på de store finansmarkedene i London og New York på begynnelsen av 90 tallet. Siden den gang har den årlige veksten i dette markedet gang på gang overgått alle forventninger. For eksempel estimerte BBA (British Bankers Association) i 2004 en markedsstørrelse ved utgangen av 2006 på 8,2 trillioner USD. De siste estimatene som er tilgjengelig for 2006 viser en oppjustering med utrolige 150 % til over 20 trillioner USD. Diagrammet nedenfor viser utviklingen i det globale markedet for kredittderivater.



Kilde: BBA Credit derivatives Report 2006

De siste 8-10 årene har markedet for kredittderivater også opplevd en rivende utvikling i nye og spennende produkter. Mens det til å begynne med var standard CDS- kontrakter som var enerådende, ser man i dag en sterk vekst i blant annet indeksbaserte kontrakter og CDO- er. Vi vil senere i oppgaven gi en utfyllende forklaring på hva som kjennetegner de ulike produktene. Diagrammet nedenfor skisserer trendene i markedssammensetningen de siste årene.



Kilde: BBA Credit Derivatives Report 2006

Det er viktig å nevne at man de seneste årene har fått etablert CDS- indekser som gir investorer hyppig markedsinformasjon om CDS- er notert på en rekke utvalgte selskap. Pr. i dag er det de såkalte Dow Jones iTraxx- indeksene som er mest kjent og brukt. Dette er indekser som består av ulike statiske porteføljer, som i sin tur er satt sammen av de mest handlede CDS- ene på markedet ([www.iboxx.com](http://www.iboxx.com)). iTraxx- indeksene dekker både det Europeiske, Australske og Asiatiske markedet. Slike indekser har bidratt til å øke likviditeten i kredittderivat- markedet, og i tillegg gjort markedet mer transparent. Det har også ført til en sterk økning av indeksbaserte kredittderivater, som nettopp pga. likviditet er blitt stadig mer populære investeringsalternativ.

### **3.2 Aktører på markedet**

Tradisjonelt har det vært banker som har vært de ledende aktørene i kredittderivatmarkedet. Dette er ikke veldig overraskende, da det er naturlig at banker har et behov for å kontrollere risikoeksponeringen i de store låneporteføljene sine. Tabellen nedenfor viser markedsandelene til de største aktørene basert på hvem som selger, og hvem som kjøper beskyttelse. Tallene er fra 2001, så de gir ikke et fullstendig bilde av dagens marked, men vi får likevel en pekepinn på de viktigste trekkene. Generelt kan vi si at introduksjonen av nye produkter de siste 5-6 årene, har ført til at hedge fond er blitt en klart større aktørgruppe på salgssiden siden 2001.

<b>Counterparty</b>	<b>Protection Buyer</b>	<b>Protection Seller</b>
Banks	63 %	47 %
Securities Firms (Meglerhus)	18 %	16 %
Insurance Companies	7 %	23 %
Corporations	6 %	3 %
Hedge Funds	3 %	5 %
Mutual Funds	1 %	2 %
Pension Funds	1 %	3 %
Government/Export Credit Agencies	1 %	1 %

Kilde: BBA Credit derivatives Report 2001

### **3.3 Fordeler med kredittderivater**

Som vi veldig kort har vært inne på før er formålet med kredittderivater å skille ut, pakke inn og handle kreditt risiko fra et underliggende aktivum. Før introduksjonen av denne typen instrumenter var dette noe som var vanskelig gjennomførbart. Å risikostyre en låneportefølje på denne tiden betydde gjerne en diversifiseringsstrategi kombinert med restriktive grenser for hvor mye man kunne låne ut. Kredittderivatene har ført til at aktørene i finansmarkedene har fått til rådighet verktøy, som med en helt annen presisjon enn tidligere, kan brukes til å isolere og overføre visse aspekter av kreditt risiko. Vi vil kort presentere noen klare fordeler som kanskje kan være med på å overbevise leseren om at kredittderivater har sin rettmessige plass i dagens finansmarkeder.

I en kredittderivat- transaksjon trenger man kun én kjøper og én selger. Anta at en bank ønsker å kvitte seg med litt av den kreditt risikoen som låneeksponeringen mot deres største kunde utgjør. Banken kan da overføre denne risikoen ved å kjøpe seg sikkerhet gjennom et utstedt kredittderivat (for eksempel utstedt av et hedge fond). Dette kan gjøres uten at bankens kunde trenger å være involvert, eller faktisk vite om transaksjonen i det hele tatt. Slik konfidensialitet gjør altså banken i stand til å håndtere sin risikoeksponering uten å berøre et viktig kundeforhold.

Eksistensen av et velutviklet kredittderivat- marked, gjør det også mulig å shortselle kredittinstrumenter med en fornuftig grad av likviditet, og unngå at man blir låst i korte posisjoner. Mens det bortimot er praktisk umulig å shortselle et banklån, kan man i stedet oppnå samme risikoreduksjon gjennom å kjøpe beskyttelse vha. et kredittderivat. Dette åpner i sin tur også en verden av nye arbitrasjemuligheter. I dagens kredittmarked finnes det mange eksempler på lite konsistent prising av kreditt risiko på tvers av markeder, valuta, forfallstider osv. (J.P Morgan). Slike scenario oppstår som en konsekvens av at spekulanter ikke har hatt mulighet til å kjøpe billige obligasjoner mot å short- selge overprisede for å oppnå en arbitrasjegevinst. Utviklingen av likvide kredittderivater vil derfor være med på å bedre effisiensen i markedene.

Kredittderivater har også gjort det mulig for investorer, som tradisjonelt ikke har vært særlig aktive i kredittmarkedene, å se til disse markedene for nye avkastningsmuligheter. Det mest tydelige utviklingstrekket her er den stadig økende graden av eksponering hedge fond har til

dette markedet. Tidligere var det sjelden aktuelt for fond og andre ikke-bank investorer å investere i for eksempel banklån. Dette kom i stor grad av den administrative byrden som fulgte med slike transaksjoner. Det var også vanskelig å finansiere slike investeringer på en enkel måte, noe som gjerne førte til at avkastningen ble for liten. Ved hjelp av kredittderivater kan man i dag enkelt oppnå en eksponering mot slike aktivaklasser uten å bli belastet med formelt eierskap og administrative byrder. De siste årene har investeringer i kredittmarkedet gitt et solid bidrag til avkastning for mange investorer.

### **3.4 Kredittderivatmarkedet i Norge**

I Norge har bruken av kredittderivater vært svært begrenset. Markedet er preget av få aktører, og kapitalen knyttet til kredittrisikooverføringsaktiviteter utgjør bare en liten andel av institusjonenes forvaltningskapital. Tall fra Kredittilsynet viste at ved utgangen av 2005 var størrelsen på dette markedet estimert til 1,5 milliarder NOK, mens det totale derivatmarkedet var av en størrelsesorden på 4,5 trillioner NOK. En av grunnene til dette kan være at regelverket på finansområdet faktisk har fungert som en barriere for kredittrisikooverføring, eller har vært for lite fleksibelt til at markedsaktørene har blitt tilstrekkelig interesserte.

Det norske regelverket har, inntil nylig vanskeliggjort verdipapirisering, blant annet fordi banker måtte ha særskilt samtykke fra låntaker før de kunne overføre lån til spesialforetak som ikke var gitt konsesjon som kredittinstitusjon. Verdipapirisering kan defineres som *transaksjoner som gjennomføres når en fordringsmasse eller låneportefølje overdras til et særskilt foretak og hvor kjøpesummen for fordringsmassen finansieres gjennom utstedelse av obligasjoner i markedet* (Bergli, 2004). Et av motivene for verdipapirisering er nettopp å overføre risikoen til spesialforetak, som ikke er underlagt de kravene til tilsyn og kapitaldekning, som gjelder for kredittinstitusjoner. Grunnen til at spesialforetakene ikke er underlagt et slikt regelverk, er at de kun fungerer som videreformidler av risiko. Reglene har forbedret seg etter januar 2004. Låntaker kan som før nekte samtykke til overdragelse, men dette må skje innen en fastsatt tid. Dersom låntaker ikke nekter innen den fastsatte tiden, vil låntakeren automatisk anses å ha gitt samtykke. Videre kan låntakere som ikke er forbrukere, på forhånd frafalle retten til å nekte samtykke. Selv om bankenes muligheter til å overføre utlånsporteføljer til spesialforetaket er blitt bedre, oppfatter likevel mange banker at regelverket samlet sett er for lite fleksibelt til at de vil gjøre dette. Det er nemlig en del regler



som sterkt begrenser overføring av nye lån til spesialforetaket og spesialforetakets muligheter til å legge ut flere obligasjonslån.

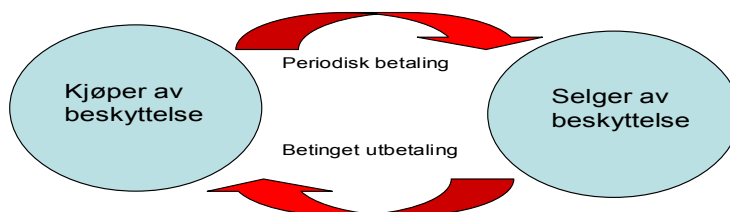
I de siste årene er det registrert en økende pågang av banker som ønsker å stille CDOer som sikkerhet for lån i Norges Bank. Dette tyder på at instrumentet er i ferd med å få en viss utbredelse. Utviklingen ser imidlertid ut til å ha sakkett akterut på grunn av begrensninger og uklarheter i regelverket, som har ført til at finansinstitusjoner er avventende i forhold til å ta i bruk slike instrumenter. Blant annet blir kredittderivater behandlet som garantier når disse derivatene tilfredsstillende kriteriene som stilles til garantier. Denne usikkerheten om hvordan de vil behandles har bidratt til at norske banker har vært tilbakeholdne med å bruke kredittderivater på regulær basis, før det foreligger presise regler om dette.

## 4. Ulike typer kredittderivater

Vi vil i dette kapittelet gi en mer detaljert oversikt over de mest vanlige kredittderivatene som i dag blir omsatte på markedet. Siden oppgaven har hovedfokus på korrelasjonsavhengige kredittderivater vil vi vie størstedelen av oppmerksomheten til CDO-er og ”first-to-default” produkter, som nettopp representerer denne typen kredittderivater. Disse produktene vil få en relativt grundig gjennomgang siden det er sentralt for den videre lesning å forstå hvordan disse er satt sammen.

### 4.1 Credit Default Swaps (CDS)

CDS representerer det enkleste og mest vanlige produktet på dagens kredittderivat-marked. Den tilbyr kort forklart forsikring mot konkurs av en utsteder eller en spesifikk obligasjon. Mer formelt kan en CDS forklares som en bilateral finansiell kontrakt der en av partene betaler en periodisk sum til motparten, mot at denne forplikter seg til å betale et forhåndsdefinert beløp ved en såkalt kreditthendelse. Den periodiske summen er som oftest uttrykt i basispoeng p.a. av pålydende beløp. Rammene rundt en slik avtale er i stor grad opp til partene selv å bestemme, og i så måte er CDS et fleksibelt produkt. Figuren nedenfor illustrerer strukturen i en CDS:

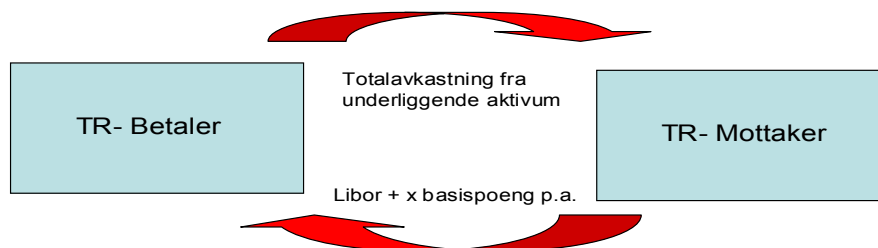


En kreditthendelse refererer i hovedsak til det tidspunkt et selskap går konkurs, men det kan også være hendelser som lavere rating eller restrukturering av gjeld. Den betingede ubetalingen kan for eksempel være laget for å dekke det tapet i markedsverdi som obligasjonseieren får ved kreditthendelsen. Typisk forplikter selgeren av CDS-en seg til å

kjøre obligasjonen for pålydende verdi etter en kreditthendelse. Dersom utbetalingen er spesifisert som et kontantbeløp kalles dette en binær CDS.

## 4.2 Total Return Swaps

En TR swap er i likhet med CDS en bilateral finansiell kontrakt som er laget for å overføre kredittrisiko mellom to parter. Det er imidlertid en vesentlig forskjell mellom disse derivatene. En TR swap bytter den totale økonomiske avkastningen fra et spesifisert aktivum med en forhåndsavtalt sikker kontantstrøm. Her er altså utbetalingen ikke betinget av at det skjer en kreditthendelse, men av markedets vurdering av det underliggende aktivum. Den totale avkastningen fra et aktivum består av summen av renter (evt. andre utbetalinger), samt endringen i markedsverdi på underliggende. Strukturen i et slikt derivat er vist i figuren under:



I praksis er det vanlig at den parten som mottar totalavkastningen fra underliggende aktivum betaler motparten en periodisk flytende sum definert som Libor pluss en forhåndsavtalt spread. Det er også viktig å merke seg at dersom fallet i markedsverdi på underliggende er tilstrekkelig stort kan dette resultere i en betaling fra TR- mottaker til TR- betaler. Slike ”verdi- forandrings- utbetalinger” kan gjøres i bestemte perioder, eller ved utløpsdatoen for avtalen.

### 4.3 Credit-linked Notes (CLN)

I en standard CDS vil parten som kjøper beskyttelse være eksponert mot risikoen for at motparten går konkurs. Sett at det oppstår en kreditthendelse på det underliggende aktivum, og CDS- selgeren går konkurs. Det er da ikke sikkert at kjøperen mottar den avtalte kompensasjonen. Mens utstederen av en CDS ikke trenger å sette til side noen form for sikkerhetskapsital, er en CLN et finansiert alternativ som fjerner slik motpartsrisiko. En CLN kan sees på som en obligasjon med en innbakt CDS. Strukturen i en slik kontrakt er best forklart gjennom et eksempel:

Sett at LilleBank ønsker å redusere sin risikoeksponering mot Norsk Hydro ved hjelp av en CLN. LilleBank oppretter da et spesialforetak som utsteder en obligasjon i sitt eget navn. Innebygd i denne obligasjonen er det en CDS som sier at LilleBank ønsker å kjøpe beskyttelse mot sin risikoeksponering mot Hydro. Anta videre at det finnes en investor som ønsker nettopp en tilsvarende risikoeksponering mot Hydro. Han vil da kjøpe obligasjonen fra spesialforetaket. Denne "up- front" betalingen blir så plassert i et tilnærmet risikofritt aktivum, og dermed elimineres all motpartsrisiko for LilleBank. Vi ser at en CLN egentlig kan sies å være en fullfinansiert CDS. Kontantstrømmene er illustrert i figuren under:



#### **4.4 First-to-default baskets**

Basket default swaps er en mer avansert type CDS, der en kjøper av et slikt derivat blir forsikret mot den første konkursen i en kurv av underliggende utstedere. Som et alternativ til å kjøpe en CDS på flere forskjellige obligasjoner, vil dette naturligvis være vesentlig billigere, men da også bare dekke en del av risikoen i porteføljen. Nettopp på grunn av at risikodekningen i større porteføljer lett blir for liten er det etter hvert blitt populært med såkalte "first-m-of-n-to-default" swaps. Et slikt derivat forsikrer kjøperen mot konkurser på de m første utstederene i en gruppe på n utstedere. En annen variant er også å la derivatet dekke et forhåndsbestemt intervall av konkurser. For eksempel kan man tenke seg at det gis dekning for konkurs nr 5 til 10, i en gruppe på 50 utstedere. En "first-m-of-n-to-default" swap er et komplisert produkt, og prising av denne typen kontrakter innebærer at man må være i stand til å modellere konkursegenskaper til hele porteføljer av aktiva. Vi vil komme tilbake til disse problemstillingene senere i oppgaven.

#### **4.5 CDO – Collateralized debt obligations**

CDO-er har de seneste årene utviklet seg til å bli et av de raskest voksende kredittderivatene på markedet. Ikke minst har banker og finansinstitusjoner bidratt til denne utviklingen gjennom en stadig økende grad av verdipapirisering (securitization). Verdipapirisering startet først ved at homogene finansielle instrumenter, som boliglån og kredittkortgjeld, ble pakket i porteføljer og solgt til et spesialforetak. Et spesialforetak er definert som et foretak som blir opprettet utelukkende for et bestemt formål, og i denne forbindelse altså for å finansiere og kjøpe en portefølje av lån eller gjeld. Etter hvert som vi har fått stadig bedre systemer for kredittvurdering, og mer velutviklede obligasjonsmarkeder, har omfanget av verdipapiriseringen økt.

Markedet for CDO-er har som sagt vokst eventyrlig raskt etter at denne typen kredittderivater ble introdusert på begynnelsen av 90-tallet. Faktisk så har den årlige gjennomsnittsvæksten siden 1998 vært på utrolige 150% (Celent, markedsrapport 2005). De fleste eksperter er også enige om at markedet, de kommende årene, fortsatt vil oppleve sterk vekst. Figuren nedenfor viser estimater på den globale CDO markedsstørrelsen.



Kilde: Celent, markedsrapport oktober 2005

#### 4.5.1 Generell beskrivelse av CDO

En CDO kan defineres som *et gjeldsinstrument med sikkerhet i en underliggende portefølje av en eller flere typer verdipapirer, lån eller andre aktiva* (Rakkestad 2006). En CDO ligner mye på tradisjonell verdipapirisering, med to viktige unntak. Den underliggende porteføljen i en CDO består ofte av mer heterogene og mindre standardiserte verdipapir. I tillegg er gjeldspapirene som spesialforetaket utsteder, inndelt i ”biter” med ulike risiko og avkastningskarakteristika. Disse ”bitene” blir referert til som transjer, og de ulike transjene gis forskjellig prioritet til kontantstrømmene fra den underliggende porteføljen (og dermed også ulik risiko og avkastningsprofil). Summen av alle disse transjene utgjør det som kalles for kapitalstrukturen til CDO-en. I prinsippet står utstederen av en CDO helt fritt til å definere antall transjer, og avkastnings- og risikoprofil for hver transje. Det er imidlertid mest vanlig å dele transjene i tre hovedkategorier:

- ✓ Seniortransje
- ✓ Mesanintransje
- ✓ Egenkapitaltransje

Disse hovedkategoriene kan så deles inn i flere underkategorier. Seniortransjen er den transjen som har høyest prioritet til kontantstrømmene fra den underliggende porteføljen, mens egenkapitaltransjen har lavest prioritet. Da skjønner vi at seniortransjen har lavest risiko og lavest forventet avkastning. I praksis er det vanlig at en utstedt seniortransje har en kredittrating på A eller bedre. Til sammenligning har en mesanintransje ofte en kredittrating på BBB, mens egenkapitaltransjen ikke er kredittvurdert i det hele tatt.

De ulike transjene blir videre tilordnet såkalte innslags- og utslagspunkter. Disse er med på å bestemme risikoen, og dermed forventet avkastning, for transjen. Typisk har en egenkapitaltransje innslagspunkt på 0%, og utslagspunkt på 3%. Dette betyr at egenkapitaltransjen må dekke alle tap i intervallet 0-3 % i den underliggende porteføljen. Dersom de totale tapene i porteføljen overstiger 3 % vil ikke egenkapitaltransjen lenger ha noen verdi. Tabellen nedenfor viser de mest vanlige innslags- og utslagspunktene for de ulike transjene.

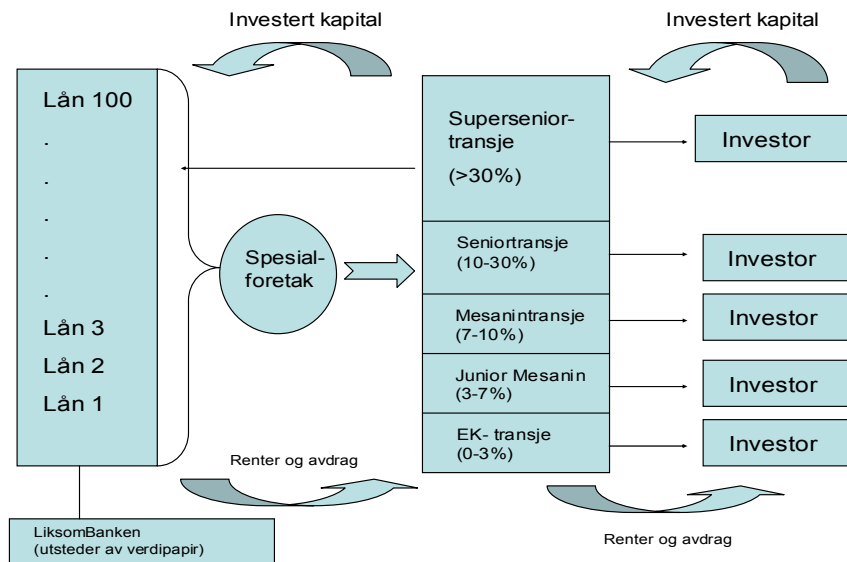
Transje	Innslagspunkt	Utslagspunkt
Egenkapital	0 %	3 %
Mesanin	3 %	10 %
Senior	10 %	30 %

Dersom de totale tapene i porteføljen skulle overstige det som dekkes av transjene vil disse normalt måtte dekkes av tilrettelegger, dvs den institusjon som legger CDO- en ut for salg i førstehåndsmarkedet (oftest investeringsbanker). Normalt vil egenkapitaltransjen ikke ha noen spesifisert løpetid, mens de andre transjene vil ha en løpetid som ligger nært opp til løpetiden på de underliggende aktiva.

#### 4.5.2 Eksempel på CDO- struktur

For å forklare litt tydeligere hvordan en CDO kan tenkes å se ut, og hvordan risiko og avkastning blir overført mellom partene, vil vi her prøve å illustrere med et eksempel. Anta nå at LiksomBanken har en portefølje med 100 billån, som alle har like pålydende beløp. LiksomBanken setter disse sammen i en portefølje og oppretter et spesialforetak. Spesialforetaket kjøper hele låneporteføljen, deler denne opp i ønskede transjer og selger de ulike transjene ut til investorer. Investorenes investerte kapital går tilbake til LiksomBanken

gjennom spesialforetaket, og investorene får utbetalt en periodevis sum for å ta på seg risikoen kjøpet av en transje innebærer. Figuren nedenfor gjør et forsøk på å illustrere strukturen i denne aktuelle CDO- en.



Normalt vil utstederen av CDO- en selv bære risikoen for egenkapitaltransjen. Det betyr at banken må ta tapene dersom de første tre lånene (3 % \* 100 lån) skulle bli misligholdt. Junior mesanin- transjen bærer deretter risikoen for mislighold av de fire neste lånene osv.

#### 4.5.3 Formål med CDO

Når vi snakker formålet med å utstede instrumenter som CDO, er det først å fremst to element som peker seg ut:

- Balansestyring
- Utnyttelse av arbitrasjemuligheter

Formålet med balansestyring kommer av kapitaldekningskravet i Basel II avtalen. Etter dagens regler skal finansinstitusjonene ha en kapital som utgjør minst 8 % av den risikoeksponering som utlånsvirksomhet, handel med verdipapirer m.v. innebærer (BIS,2004). Ved å overføre risikoen for en låneportefølje til andre investorer, vil altså en bank kunne frigjøre signifikante mengder kapital, som kan brukes til andre investeringer. La oss gå tilbake til eksempelet med LiksomBanken. Før banken satte sammen og utstedte den aktuelle CDO- en hadde de en risikoeksponering mot hele porteføljen på 100 lån. Ved utstedelse av de ulike



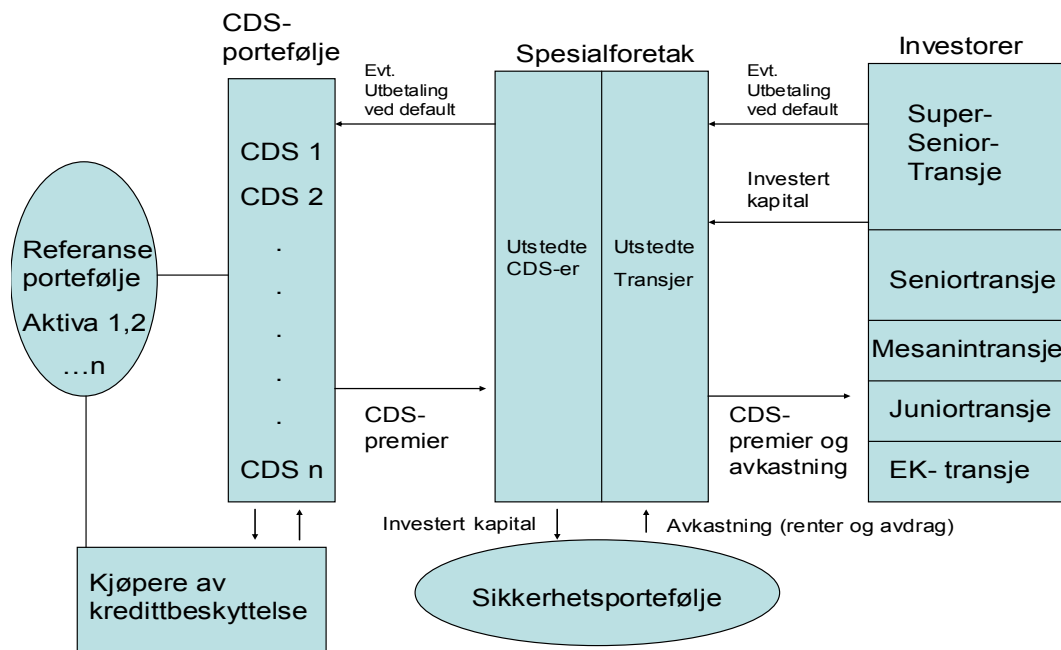
transjene sitter banken igjen med en risikoeksponering som tilsvarer størrelsen på egenkapitaltransjen (i dette tilfellet 3 lån). Kapitalkravet som banken må møte er derfor redusert med en faktor på 33.

En arbitrasje- CDO blir enkelt og greitt opprettet for å utnytte avkastningsforskjeller på den underliggende porteføljen og den avkastningen som tilfaller transjeinvestorene. I 2005 utgjorde balansestyrings- CDO kun 20% av det totale markedet, mens arbitrasje- CDO utgjorde hele 80% (Lehman Brothers, 2005).

#### **4.5.4 Syntetisk CDO**

I de seneste årene har såkalte syntetiske CDO- er blitt stadig mer populære. I motsetning til tradisjonelle CDO- er overtar spesialforetaket her ikke det juridiske eierskapet til den underliggende porteføljen. I stedet blir risiko og avkastning knyttet til aktivaene i porteføljen, overført gjennom at spesialforetaket utsteder standard kredittderivater på en referanseportefølje, og i de aller fleste tilfeller er det da credit default swaps (CDS) som blir brukt. Dette betyr at kontantstrømmene til transjeinvestorene vil bestå dels av de periodiske premieinnbetalingene fra CDS- kontraktene, og dels av avkastningen på referanseporteføljen.

Syntetiske CDO- er skiller seg fra hverandre med hensyn til det som betegnes som finansieringsgrad. En CDO sies å være fullfinansiert hvis pålydende verdi av de utstedte transjene er tilnærmet lik pålydende verdi av referanseporteføljen. Dette kan konstrueres gjennom at spesialforetaket utsteder CDS- er på en referanseportefølje, og deretter plasserer den innbetalte kapitalen fra transjene i en såkalt sikkerhetsportefølje. En sikkerhetsportefølje skal som navnet tilsier ha lav risiko, og består dermed ofte av statsobligasjoner eller selskapsobligasjoner med høy rating. Dersom det skulle oppstå uforutsette hendelser vil sikkerhetsporteføljen være med på å minimere faren for at spesialforetaket ikke kan imøtekomme sine betalingsforpliktelser. Dersom pålydende verdi av de utstedte transjene er null kalles CDO- en for ufinansiert. Dette betyr at investorene ikke betaler inn kapital til spesialforetaket før en eventuell kreditthendelse inntreffer. I praksis er det mest vanlig å benytte seg av delvis finansierte CDO- er. Typisk vil pålydende verdi av de utstedte transjene være ganske lav i forhold til referanseporteføljen (5-15 %), og det er i tillegg svært vanlig at finansieringsgraden varierer mellom transjene. Nedenfor har vi illustrert strukturen i en syntetisk CDO:



#### 4.5.5 Enkeltransje- CDO

Det kommer nok ikke som noen overraskelse på leseren at en enkeltransje- CDO består av en enkelt utstedt transje. Selve strukturen i et slikt instrument er helt lik de generelle CDO-ene vi har beskrevet over (med unntak av antall transjer). Det mest vanlige på dagens marked er syntetiske, ufinansierte enkeltransjer. Oftest har disse instrumentene en standardisert CDS-indeks som referanseportefølje. Denne standardiseringen har ført til et relativt likvid annenhåndsmarked for disse transjene, og på tross av at det er en CDO blir ofte disse produktene referert til som indekstransje- CDS.

En av fordelene med å kunne utstede enkeltransje- CDO, er muligheten til å skreddersy transjer. Man har altså muligheten til å sette sammen en referanseportefølje som er spesialtilpasset investorens ønsker. I praksis er det mest vanlig å utstede en mesanintransje til investorer. Denne typen CDO er naturlig nok lite likvide, og som oftest er de beregnet å holde til forfall.

Ved tilrettelegging av en enkeltransje- CDO oppstår det fort en del nye utfordringer. Ikke minst gjelder dette risikoeksponeringen som oppstår for tilrettelegger. Husk at i vanlige syntetiske CDO- er (der samtlige transjer utstedes), vil tilrettelegger oppnå en kredittbeskyttelse gjennom utstedelsen av transjene. Denne beskyttelsen vil igjen nøytralisere risikoen som oppstod når spesialforetaket utstedte CDS- er, siden CDO- transjene og CDS- kontraktene har samme underliggende eksponering og pålydende. I en enkeltransje- handel vil tilretteleggeren imidlertid være eksponert overfor betydelig risiko i referanseporteføljen, siden pålydende på den ene transjen er vesentlig mindre enn pålydende på de utstedte CDS- ene. I praksis vil tilrettelegger her gå til markedet for å gjøre nødvendige sikringer. Typisk vil disse bestå av å kjøpe CDS- indekstraktater, eller et antall enkeltforetaks- CDS-er. Fordelen med indekstraktater er at disse er likvide. På den annen side gir de ikke den samme optimale sikringen som for eksempel flere enkeltforetaks-CDS-er ville ha gitt.

Tabellen nedenfor forsøker å gi et mer oversiktlig bilde over de ulike typene CDO- er, og på hvilke måter de skiller seg fra hverandre.

Underliggende portefølje	Kredittrisikooverføring	Betegnelse
Banklån eller andre lån	Virkelig Salg/Kredittderivater	Collateralized Loan Obligation (CLO)
Obligasjoner	Virkelig Salg/Kredittderivater	Collateralized Bond Obligation (CBO)
Fond	Virkelig Salg/Kredittderivater	Collateralized Fund Obligation (CFO)
Aksjer	Virkelig Salg/Kredittderivater	Collateralized Equity Obligation (CEO)
Kredittderivater	Kredittderivater	Single-Tranche CDO
Strukturerte Produkter	Virkelig Salg/Kredittderivater	CDO av Asset Backed Securities* (ABS) / CDO av CDO
Hybrid- porteføljer	Virkelig Salg/Kredittderivater	CDO

\*Asset Backed Securities er obligasjoner med pant i aktiva

Kilde: Rakkestad/Weme (2006)

#### 4.5.6 Hvem investerer i CDO- er?

Mulighetene for transjeringen av en underliggende portefølje gjør det mulig å sette sammen investeringsobjekt med svært ulik risiko- og avkastningsprofil. Dette har ført til at CDO har vært, og er interessante investeringsmuligheter for en rekke ulike investorer. Tradisjonelt er det aktører som er interesserte i relativt lav risiko som investerer i senior- transjene. Det mest typiske eksempelet her er pensjonsfond. På samme måte er kjøpere av mesanintransjene typisk investorer som er ute etter å ta litt mer risiko, og gjerne forsøker å få opp

risikoeksponeringen i sin portefølje. Det klassiske eksempelet her er hedgefond. Etter hvert som CDO- markedet har blitt bedre utviklet og mer likvid, har hedge fond også vært stadig mer villige til å investere i egenkapitaltransjer, og i så måte gjort det lettere for tilretteleggere og også kvitte seg med denne risikoen dersom det er ønskelig. I tillegg til de nevnte aktørene er også forsikringsselskaper og andre typer fond viktige brikker i CDO- markedet. Fortsatt er likevel banker den største aktøren også på kjøpersiden i dette markedet.

## 5. To grunnleggende modeller

Hittil i oppgaven har leseren forhåpentligvis fått en grei innføring i hva et kredittderivat er, og således et fundament for å kunne følge det videre arbeidet når vi nå retter fokus mot den mer teoretiske prisingsdelen. Det første vi trenger er å få på plass et matematisk grunnlag for hvordan vi kan modellere og kalkulere konkurrisiko. I kredittisiko- litteraturen er det to hovedtyper av modeller, som peker seg ut til dette formålet:

- Strukturerte kredittisikomodeller
- Redusert form modeller

Begge disse modellene vil være helt sentrale fundament for modellene vi skal se på senere i oppgaven, og de trenger derfor en grundig presentasjon.

### 5.1 Strukturerte kredittisikomodeller

Strukturerte modeller bruker utviklingen av et firmas ”strukturvariable”, som verdien på gjeld og eiendeler, til å bestemme ”tiden til konkurs”. I så måte appellerer slike modeller sterkt til vår intuisjon og sunne fornuft, da de gir oss en link mellom et firmas kredittkvalitet, og dets finansielle og økonomiske tilstand. Den første artikkelen om strukturerte kredittisiko-modeller kom allerede i 1974. Pionèrarbeidet ble gjort av Robert Merton, og bygger mye på de samme resultatene som Fisher Black og Myron Scholes publiserte i 1973. Han foreslo her en modell der et selskaps egenkapital kan sees som en kjøpsopsjon på selskapets totale aktiva (Merton 1974). I denne modellen befinner vi oss i den kjente Black-Scholes verdenen, som kjennetegnes av perfekte markeder og kontinuerlig trading.

Sentrale forutsetninger som ligger til grunn for Mertons modell er som følger:

- Det eksisterer ingen transaksjonskostnader og skatter.
- Antallet investorer er så stort at en investor kan selge og kjøpe så mye han vil av et aktivum til markedspris.
- Låning og plassering kan gjøres til samme rente.
- Short- salg er tillatt.
- Modigliani- Millers teorem om at et selskaps verdi er uavhengig av kapitalstruktur gjelder.

- Rentens terminstruktur er flat og med sikkerhet kjent.
- Selskapet har kun utstedt gjeld i form av en nullkupongsobligasjon med forfallstidspunkt T.

Definer følgende:

$V_0$ : Verdien av selskapets totale aktiva i dag.

$V_T$ : Verdien av selskapets totale aktiva på tidspunkt T.

$E_0$ : Verdien av selskapets egenkapital i dag.

$E_T$ : Verdien av selskapets egenkapital på tidspunkt T.

D: Pålydende verdi av selskapets gjeld.

$\sigma_V$ : Volatiliteten til selskapets totale aktiva (antas konstant i denne modellen).

$\sigma_E$ : Volatiliteten til selskapets egenkapital.

Merton begynner med å anta at et selskaps aktiva ( $V_t$ ) følger en geometrisk brownsk bevegelse beskrevet ved den stokastiske differensialligningen:

$$dV_t = \mu(t)V_t dt + \sigma(t)V_t dW_t \quad (5.1)$$

Her er  $\mu$  driften eller avkastningen til firmaets aktiva mens  $\sigma$  betegner standardavviket til firmaets aktiva.  $W_t$  er en Wienerprosess og representerer usikkerheten i modellen. La oss bruke Ito's lemma for å finne ut hvordan avkastningsprosessen på selskapets aktiva ser ut. Definer  $R_t = \ln(V_t/V_0)$  som den logaritmiske avkastningen på selskapets aktiva.

Sett  $x = V_t$  og anta at vi har en funksjon  $f(x,t) = \ln(x/V_0) = \ln(x) - \ln(V_0)$

$$f_1(x,t) = \frac{1}{x} \quad f_{11}(x,t) = -\frac{1}{x^2} \quad f_2(x,t) = 0$$

Vi får da:

$$dR_t = \left[ \frac{1}{V_t} V_t \mu(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{V_t^2} V_t^2 \sigma(t)^2 + 0 \right] dt + \frac{1}{V_t} V_t \sigma(t) dW_t$$

$$dR_t = \left[ \mu(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right] dt + \sigma(t) dW_t$$

$$R_t = R_0 + \int_0^t \left( \mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \quad (5.2)$$

Siden  $\frac{V_t}{V_0} = e^{R_t}$  følger det av (5.2) at  $V_t$  er beskrevet ved følgende prosess:

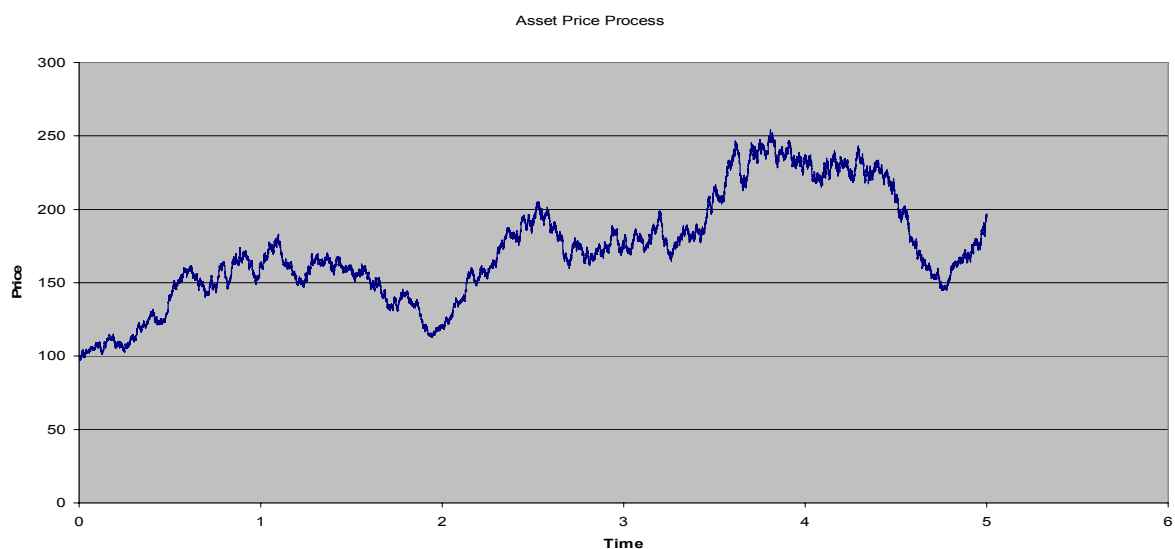
$$V_t = V_0 e^{\int_0^t \left[ \mu(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u) \right] + \int_0^t \sigma(u) dW_u}, \quad (5.3)$$

der  $\mu(t)$  og  $\sigma(t)$  er deterministiske funksjoner av tiden  $t$ .

Nedenfor har vi simulert en slik prosess i Excel for å illustrere hvordan den kan tenkes å se ut.

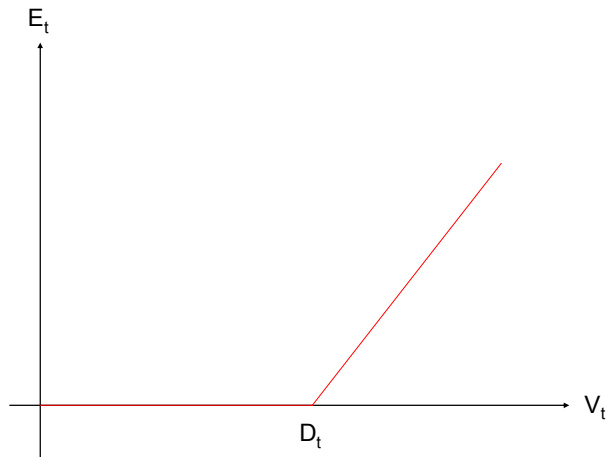
Parametrene vi har brukt er som følger:

$\mu$	0,1
Sigma	0,25
$V_0$	100
$T$	5



Merton fortsetter med å anta at et selskap kun kan gå konkurs på forfallstidspunktet til gjelden. Dersom  $V_T < D$  vil verdien av egenkapitalen være 0, mens dersom  $V_T > D$  vil egenkapitalen være verdt  $V_T - D$ . Ergo kan vi skrive verdien av egenkapitalen slik:

$E_T = \max(V_T - D, 0)$ , som er helt ekvivalent med en kjøpsopsjon. Utbetalingen fra en slik opsjon er illustrert i diagrammet under.



Vi kan nå bruke Black- Scholes formelen direkte for å finne verdien på egenkapitalen slik:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad (5.4)$$

$$\text{der } d_1 = \frac{\ln V_0 / D + (r + \sigma_V^2 / 2)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad \text{og} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

Verdien av selskapets gjeld vil da være  $V_0 - E_0$ . I tillegg har vi at den risikonøytrale sannsynligheten for konkurs er gitt ved  $N(-d_2)$ . Problemet med å bruke Mertons modell er at vi trenger estimater for  $V_0$  og  $\sigma_V$ . Disse er ikke direkte observerbare, men dersom selskapet er børsnotert kan vi observere  $E_0$ . Fra (5.4) har vi derfor en sammenheng som må tilfredstilles av  $V_0$  og  $\sigma_V$ . Dersom vi antar at selskapets egenkapital følger en geometrisk brownsk bevegelse under det risikonøytrale sannsynlighetsmålet  $Q$ , definert som følger:

$$dE_t = rE_t dt + \sigma_E E_t dW_t, \quad (5.5)$$



og i tillegg at verdien på egenkapitalen er en glatt funksjon av tid og verdien på selskapets eiendeler,

$$E_t = f(V_t, t)$$

Da kan vi bruke Ito's lemma igjen for å finne prosessen til  $dE_t$ :

$$dE_t = \left[ \frac{\partial f(V_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(V_t, t)}{\partial V_t} V_t r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(V_t, t)}{(\partial V_t)^2} (V_t \sigma_V)^2 \right] dt + \frac{\partial f(V_t, t)}{\partial V_t} V_t \sigma_V dW_t \quad (5.6)$$

Sammenlign så de to siste leddene i (5.5) og (5.6):

$$\sigma_E E_t = \frac{\partial f(V_t, t)}{\partial V_t} V_t \sigma_V \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq T$$

Dermed er (for  $t = 0$ ):

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0$$

eller siden  $\frac{\partial E}{\partial V}$  er lik  $N(d_1)$  kan uttrykket også skrives slik:

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0 \quad (5.7)$$

Gjennom å kombinere ligningene (5.4) og (5.7) kan vi da finne estimater på  $V_0$  og  $\sigma_V$

La oss nå ta et talleksempel for å illustrere nytten av de utledede formlene.

Anta at verdien av et selskaps egenkapital er NOK 10 millioner, og at volatiliteten til egenkapitalen (basert på historiske tall) er estimert til 40 %. Den utestående gjelden til selskapet forfaller om nøyaktig 2 år, og pålydende er NOK 15 millioner. I tillegg vet vi at den årlige risikofrie renten er på 4 %. Vi kan da sette opp 2 likningssett som løses simultant for å finne estimatene på  $\sigma_V$  og  $V_0$ :

$$V_0 N\left(\frac{\ln V_0 / 15'' + (0,04 + \sigma_V^2 / 2) * 2}{\sigma_V \sqrt{2}}\right) - 15'' e^{-0,04 * 2} N\left(\frac{\ln V_0 / 15'' + (0,04 - \sigma_V^2 / 2) * 2}{\sigma_V \sqrt{2}}\right) = 10''$$

$$0,4 * 10'' = N\left(\frac{\ln V_0 / 15'' + (0,04 + \sigma_V^2 / 2) * 2}{\sigma_V \sqrt{2}}\right) \sigma_V V_0$$

Å løse et slikt likningssett med to ikke- lineære likninger kan gjøres på følgende måte:

- Observer at begge likningene er på formen  $F(x,y)$  og  $G(x,y)$ .
- Sett  $F(x,y) = 0$  og  $G(x,y) = 0$
- Bruk problemløseren i Excel til å finne de verdier av  $x$  og  $y$  som minimierer:

$$[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$$

Med våre tall, gav minimeringen i Excel oss et estimat på  $\sigma_V = 0,1693$  og  $V_0 = 23,83''$

Ved å plugge dette inn i Black-Scholes formelen finner vi at parameteren  $d_2 = 2,14768$  og at  $N(-d_2) = 0,016$ . Sannsynligheten for at selskapet går konkurs på tidspunkt  $T$  er altså, gitt tallene i dette scenarioet, lik 1,6 %.

## 5.2 Redusert-form modeller

I forhold til strukturerte kredittrisikomodeller tar redusert-form modeller ikke hensyn til bedriftens kapitalstruktur. Istedenfor modellerer man konkurs som en plutselig eller overraskende hendelse. Dette kan gjøres ved å innføre et enkelt begrep som kalles for stoppetid. Den tilfeldige tiden  $\tau \leq t$  er definert som en stoppetid gitt at vi ved ethvert tidspunkt  $t$  kan vite om hendelsen har inntruffet eller ikke. En stoppetid kan igjen beskrives ved hjelp av en enkel indikatorfunksjon  $N_\tau(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$ , som altså tar verdien 1 når konkurs inntreffer, og null ellers. Ved hjelp av stoppetidsbegrepet kan vi også definere et annet meget sentralt begrep, hasardraten. La  $\tau > t$  være en stoppetid og  $F(t, T) = P[\tau \leq T | F_t]$  være den betingede fordelingen til  $\tau$ , gitt informasjonen som er tilgjengelig ved tidspunkt  $t$ , og la  $f(t, T)$  være den tilhørende sannsynlighetstettheten. Hasardraten er da definert som:

$$h(t, T) = \frac{f(t, T)}{1 - F(t, T)} \quad (5.8)$$

Når vi nå skal modellere konkurssannsynligheter er vi ikke interesserte i bare én enkelt hendelse. Har vi for eksempel en portefølje med aktiva vil vi gjerne også tillate flere konkurser i porteføljen. Dette gjøres enkelt ved å innføre en telleprosess:

$$N(t) = \sum_i 1_{\{\tau_i \leq t\}} = \text{antall konkurser ved tid } t \quad (5.9)$$

La oss nå bygge videre på dette modellverktøyet og prøve å komme frem til modeller som kan reprodusere realistiske konkurssannsynligheter. Det naturlige steget er da å ta i bruk såkalte Poissonprosesser.

### 5.2.1 Poissonprosesser

En Poissonprosess er ofte brukt i matematikk for å modellere sjeldne hendelser (for eksempel innenfor forsikringsmatematikk) eller diskrete tellbare hendelser (for eksempel antall kunder som står i en minibank- kø). Den første registrerte bruken av Poissonprosesser daterer seg tilbake til det prøyssiske kavaleri. De brukte denne typen prosess for å beregne det antallet av deres soldater som ble drept av spark fra sine egne hester. Poissonprosesser passer godt til konkursmodellering, fordi disse som oftest er sjeldne og diskrete hendelser. Poissonprosesser har blant annet følgende egenskaper:

- Prosessen har ingen hukommelse. Sannsynligheten for  $n$  hopp i intervallet  $[t, t + s]$  er uavhengig av  $N(t)$  og annen historikk før  $t$ . Et hopp blir ikke mer sannsynlig bare fordi forrige hopp skjedde for en stund siden og det er ”på tide” med et nytt hopp.
- To eller flere hopp på eksakt samme tidspunkt har sannsynlighet null.

En Poisson prosess,  $N(t)$ , er altså en økende prosess med verdier  $0, 1, 2, 3, \dots$  (de naturlige tall). Vi antar nå at sannsynligheten for et hopp i neste tidsintervallet  $\Delta t$  er proporsjonal med  $\Delta t$ :

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t, \quad (5.10)$$

samtidig forekommer det ikke mer enn ett hopp, og hopp i disjunkte tidsintervaller skjer uavhengig av hverandre. Parameteren  $\lambda$  blir betegnet som intensiteten til prosessen. Motsatt betyr det at sannsynligheten for at prosessen forblir uendret er:

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 0] = 1 - \lambda\Delta t, \quad (5.11)$$

og over tidsintervallet  $[t, 2\Delta t]$  blir sannsynligheten:

$$\begin{aligned} &P[N(t + 2\Delta t) - N(t) = 0] \\ &= P[N(t + \Delta t) - N(t) = 0] \times P[N(t + 2\Delta t) - N(t + \Delta t) = 0] \\ &= (1 - \lambda\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Vi deler nå intervallet  $[t, T]$  inni  $n$  del-intervaller med lengde  $\Delta t = (T - t) / n$ . I hver av disse del-intervallene kan prosessen  $N$  hoppe en gang med sannsynlighet  $\Delta t\lambda$ . Observer at dette ligner mye på en situasjon med uavhengige binomiske eksperimenter, og at vi derfor kan bruke en standard binomisk fordeling for å regne på sannsynlighetene for at hopp oppstår. La oss først kort rekapitulere hva som kjennetegner en binomisk fordeling.

En binomisk situasjon kjennetegnes av følgende forutsetninger:

Det utføres  $N$  binomisk forsøk;

1. Hvert forsøk gir enten suksess eller fiasko.
2. Sannsynligheten  $p$  for suksess er den samme i hvert forsøk.
3. Forsøkene er uavhengige.

Antall suksesser  $X$  i løpet av de  $n$  forsøkene observeres.

Dersom vi har en binomisk forsøksrekke kan vi regne på sannsynlighetsfordelingen til  $X$  ved hjelp av følgende formler:

**Binomisk fordelingsfunksjon  $b(n; N, p)$** , oppgir sannsynligheten for å observere  $n$  suksesser:

$$b(n; N, p) := P[X = n] = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.12)$$

**Kumulativ Binomisk fordelingsfunksjon**  $B(n; N, p)$ , oppgir sannsynligheten for å observere  $n$  eller færre suksesser:

$$B(n; N, p) := P[X \leq n] = \sum_{m=0}^n \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} \quad (5.13)$$

La oss nå gå tilbake til vår Poissonprosess. Her hadde vi en situasjon med  $n$  uavhengige binomiske eksperimenter med en sannsynlighet på  $\Delta t \lambda$  for at det oppstår et hopp.

Sannsynligheten for at det ikke oppstår hopp i tidsintervallet  $[t, T]$  er gitt ved (5.12):

$$P[N(T) = N(t)] = \binom{n}{0} \Delta t \lambda^0 (1 - \Delta t \lambda)^{n-0} = (1 - \Delta t \lambda)^n \quad (5.14)$$

Husk at  $\Delta t = \frac{1}{n}(T - t)$ , slik at vi kan skrive sannsynligheten som:

$$P[N(T) = N(t)] = \left(1 - \frac{1}{n}(T - t)\lambda\right)^n \quad (5.15)$$

Siden  $(1 + x/n)^n \rightarrow e^x$  når  $n \rightarrow \infty$ , vil dette konvergere til:

$$P[N(T) = N(t)] \rightarrow e^{-(T-t)\lambda} \quad (5.16)$$

La oss nå prøve å generalisere dette ved å se på sannsynligheten for  $n$  hopp i tidsintervallet  $[t, T]$ :

$$\begin{aligned}
P[N(T) - N(t) = m] &= \binom{n}{m} \Delta t \lambda^m (1 - \Delta t \lambda)^{n-m} = \left( \frac{n!}{m!(n-m)!} \right) \Delta t \lambda^m (1 - \Delta t \lambda)^{n-m} \\
&= \frac{n}{m!} \left( \frac{(T-t)}{n} \lambda \right)^m \left( 1 - \frac{1}{n} (T-t) \lambda \right)^{n-m} \\
P[N(T) - N(t) = m] &= \frac{n}{m!} \left( \frac{(T-t)}{n} \lambda \right)^m \frac{\left( 1 - \frac{1}{n} (T-t) \lambda \right)^n}{\left( 1 - \frac{1}{n} (T-t) \lambda \right)^m} \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Når  $n \rightarrow \infty$  kan uttrykket over forenkles til:

$$P[N(T) - N(t) = m] = \frac{1}{m!} (T-t)^m \lambda^m e^{-(T-t)\lambda} \tag{5.18}$$

La oss nå se på hvordan resultatene vi har kommet frem til kan brukes når vi ønsker å se på konkurssannsynligheter. Fra (5.16) ser vi at sannsynligheten for at ingen konkurs oppstår i tidsintervallet  $[0, T]$  vil være gitt ved følgende enkle uttrykk:

$$P(0, T) = e^{-\lambda T} \tag{5.19}$$

Dette betegnes også ofte som overlevelsessannsynligheten, og basert på resultatet over kan vi nå prise en konkursutsatt obligasjon med pålydende verdi 1 på følgende enkle måte:

$$B(0, T) = e^{-rT} \times e^{-\lambda T} = e^{-(r+\lambda)T}$$

I tillegg kan hasardraten  $H$  uttrykkes på følgende måte:

$$H(t, T, T + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \tag{5.20}$$

eller når vi lar  $\Delta t \rightarrow 0$

$$h(t, T) = \lambda. \quad (5.21)$$

Husk at hasardraten her betegner betinget sannsynligheten for konkurs på tidspunkt  $t$  gitt ingen tidligere konkurs. Det er verdt å merke seg at verken  $H$  eller  $h$  er avhengig av nåværende tid  $t$  eller fremtidig tidspunkt  $T$ . Derfor vil vi, når vi bruker en Poisson prosess med konstant  $\lambda$  som intensitet, få en flat kredittkurve, som ikke endrer seg over tid (når  $t$  blir endret). Kredittkurven er svært sentral når vi senere skal prise kredittderivater, men vi vil komme tilbake til denne kurven i neste kapittel.

I virkeligheten er ikke kredittkurven flat. For å tilnærme seg en mer realistisk form på kurven, må vi tillate konkursintensiteten (hasardraten) å endre seg over tid. Hvis vi lar intensiteten  $\lambda$  til en Poissonprosess være en funksjon av tid  $\lambda(t)$ , oppnår vi en inhomogen Poissonprosess. Den har egenskaper som er svært lik en homogen Poissonprosess. Dersom vi begynner med den lokale hopp-sannsynligheten:

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda(t)\Delta t$$

Kan vi kalkulere sannsynligheten for ingen hopp i intervallet  $[t, T]$  (her bruker vi at  $\ln(1-x) = -x$  for små  $x$ ):

$$P[N(T) - N(t) = 0] = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda(t + i\Delta t)\Delta t), \quad (5.22)$$

$$\ln P[N(T) - N(t) = 0] = \sum_{i=1}^n \ln(1 - \lambda(t + i\Delta t)\Delta t) \approx \sum_{i=1}^n -\lambda(t + i\Delta t)\Delta t$$

$$\rightarrow -\int_t^T \lambda(s) ds \quad \text{når } \Delta t \rightarrow 0$$

Tilsvarende kan vi finne frem til en generell formel for sannsynligheten for  $n$  hopp i en inhomogen Poisson prosess i tidsintervallet  $[t, T]$ :

$$P[N(T) - N(t) = n] = \frac{1}{n!} \left( \int_t^T \lambda(s) ds \right)^n e^{-\int_t^T \lambda(s) ds} \quad (5.23)$$

Intensiteten  $\lambda(t)$  er en ikke-negativ funksjon, og kun avhengig av tiden. Den eneste forskjellen mellom en homogen og en inhomogen Poisson prosess er at  $\lambda(T - t)$  blir erstattet av intergralet av  $\lambda(s)$  over tidsperioden.

Fra ligningen ovenfor kan vi utlede sannsynligheten for ikke-konkurs:

$$P(0, T) = e^{-\int_0^T \lambda(s) ds} \quad (5.24)$$

og hasardraten blir da definert slik:

$$H(t, T, T + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \left( e^{\int_t^{T+\Delta t} \lambda(s) ds} - 1 \right) \quad (5.25)$$

og dersom vi lar  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$h(t, T) = \lambda(T) \quad (5.26)$$

Nå ser vi altså at kredittkurven ikke lenger vil være flat, men gitt ved  $\lambda(T)$ .

Ved bruk av en inhomogen Poissonprosess er konkursintensiteten deterministisk. Dette fører til at hasardratefunksjonen er glatt, og vi får resultater (les: priser) med liten variasjon.

Markedsdata viser at vi bare veldig sjelden vil oppleve glatte/ jevne priser over tid. Ofte har vi derfor behov for en mer fleksibel modell som kan fange opp dynamikken i for eksempel risikable obligasjonspriser eller CDS- spreads. Det er flere grunner til at vi trenger stokastisk dynamikk i kredittkurven:



- Når vi ønsker å prise kredittderivater hvor deres utbetalinger er direkte knyttet til volatilitet.
- Når utbetaling til kredittderivater er korrelert med endringer i spreads.
- Når vi generelt ønsker å ha en modell som kan måle, kontrollere og hedge denne type risiko.

En prosess som er godt egnet til dette er såkalte Cox- prosesser. Kort fortalt er en Coxprosess en Poissonprosess med stokastisk intensitet. Anta at vi har en Poissonprosess som vi har nevnt tidligere, der hoppersannsynligheten til prosessen  $N(t)$  over et lite tidsintervall  $\Delta t$  er gitt ved:

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda(t)dt, \quad (5.27)$$

men her er  $\lambda(t)$  en stokastisk prosess. La oss anta at  $\lambda(t)$  følger en standard geometrisk brownsk bevegelse, og kan skrives på følgende form:

$$d\lambda(t) = \mu_t \lambda(t)dt + \sigma_t \lambda(t)dW(t) \quad (5.28)$$

Igjen foretar vi  $n$  binomiske eksperimenter for å simulere hoppene til  $N$ , et for hvert tidsintervall  $\Delta t$ , men nå er sannsynligheten til et hopp i  $[t, t + \Delta t]$  gitt ved:

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda(t)\Delta t, \quad (5.29)$$

hoppersannsynligheten er altså proporsjonal med den realiserte verdi av  $\lambda(t)$  på tiden  $t$ .

Hoppene er nå korrelerte via "stien" som dannes av  $\lambda(t)$ . Dersom det oppstår et hopp på tidspunkt  $T_1$ , fører det til at  $\lambda(t)$  sannsynligvis blir stor rundt  $T_1$ , som igjen betyr at sannsynligheten for at neste hopp vil skje snart øker. Denne korrelasjonen er bare indirekte, via konkursintensiteten.

Dersom vi kjenner den fulle realisasjon av  $\lambda(t)$  på forhånd (for eksempel hele "stien"  $\{\lambda(t); t \geq 0\}$ ), får vi da en inhomogen Poissonprosess som vi har beskrevet tidligere. Den eneste forskjellen mellom en inhomogen Poissonprosess og en Coxprosess er at ved bruk av

Coxprosess blir  $\lambda(t)$  mer irregulær. Sannsynligheten for  $n$  hopp til en inhomogen Poissonprosess var gitt ved ligning (5.23):

For en Coxprosess kan den samme sannsynligheten skrives ved å ta med forventningen over alle mulige ”stier” som  $\lambda$  kan ta:

$$P[N(T) - N(t) = n] = E[P[N(T) - N(t) = n | \lambda]] \quad (5.30)$$

$$= E \left[ \frac{1}{n!} \left( \int_t^T \lambda(s) ds \right)^n e^{-\int_t^T \lambda(s) ds} \right]$$

Overlevelsessannsynligheten under en Coxprosess blir da gitt ved:

$$P(0, T) = E \left[ e^{-\int_0^T \lambda(s) ds} \right] \quad (5.31)$$

der forventningen altså tas over sannsynlighetsfordelingen til  $\lambda$ .

## 6. Konstruksjon av kredittkurven

Helt sentralt i prising av alle typer kredittderivater er spørsmålet om hvordan man skal lage en relevant kredittkurve. Vi vet at utbetalingen fra et kredittderivat er betinget av en kredithendelse, og at i de aller fleste tilfeller vil denne kredithendelsen være definert som en konkurs. Det er nettopp her vi får bruk for en såkalt kredittkurve. En kredittkurve gir den instantane konkurssansynligheten til et selskap på et hvilket som helst tidspunkt i fremtiden. På samme måte som terminkurven er helt avgjørende for prising av renteavhengige derivater, er kredittkurven avgjørende for prising av kredittderivater. Selv om poenget med en kredittkurve er å finne konkurssansynligheter for et selskap, finnes det mange ulike måter å utlede en slik kurve på. Viktig er det å huske at den utledede kurven på best mulig måte skal reflektere de korrekte konkurssansynlighetene. Før vi går videre med en drøfting av hvordan kredittkurven kan utledes, skal vi først se på en annen faktor som i stor grad vil påvirke de estimerte konkurssansynlighetene vi ønsker å beregne.

### 6.1 Recovery rates

”Recovery rates”, eller andel tilbakebetalt ved konkurs, er også en av de viktigste faktorene å ta hensyn til når man ønsker å prise kredittderivater. Dette fordi de er med på å bestemme hvor mye en eier av et verdipapir taper ved en eventuell konkurs, og dermed hvor mye en utsteder av derivatkontrakten må forvente å betale ut. I tillegg er denne andelen også med på å påvirke estimatene vi gjør av et aktivums konkurssansynligheter. I litteraturen finnes det hovedsakelig tre måter å behandle ”recovery rates” på:

1. *Recovery of face value.* Denne måten måler den tilbakebetalte verdien for en investor som en brøkdel av pålydende verdi til en konkursrisikabel obligasjon. Dette er kanskje det nærmeste vi kommer til dagens rettspraksis, fordi gjeld med samme prioritet typisk blir gitt en andel tilbakebetalt, som er avhengig av utestående pålydende verdi, men ikke av forfallstidspunkt og kupongrenter. Mange ratingselskaper bruker denne metoden i sine beregninger, historiske data indikerer at andelen ofte ligger rundt 40 % (Lando, 2004). For å estimere størrelsen på ”recovery raten” trenger man her bare observerbare markedspriser etter konkurs.

2. *Recovery of market value.* Her måler man endringen i den risikable obligasjonens markedsverdi ved konkurstidspunktet. Dette gir også en god økonomisk mening, siden dette må være tapet som kommer direkte som følge av konkurs. For å kunne beregne denne recovery raten trenger vi her både priser før og etter konkurs. Det kan være vanskelig å måle en før-konkurs pris fordi man ofte kan være usikker på når prisen begynner å falle. Typisk vil ikke prisfallet komme som et enkelt fall, men som en fallende sammenhengende kurve.
  
3. *Recovery of treasury.* Her antar man at andel tilbakebetalt er en gitt eksogen andel av verdien til en risikofri obligasjon, altså en statsobligasjon. Dersom obligasjonen går konkurs vil den bli erstattet av en statsobligasjon med samme forfall men med redusert utbetaling. Dette blir sett på som en mer sofistikert måte enn ”recovery of face value”, fordi man med denne måten prøver å korrigere for at utbetalinger med lengre tid til forfall bør bli neddiskontert mer enn utbetalinger med kortere tid til forfall.

Hvordan disse ulike måtene å behandle andel tilbakebetalt beløp på vil påvirke estimerte konkurssannsynligheter kan vises med et enkelt eksempel. Anta at vi har en risikofri nullkupongsobligasjon med pålydende verdi 1. Prisen på tidspunkt null for denne obligasjonen betegnes  $P(T)$ . Anta så at vi har en tilsvarende risikabel nullkupongsobligasjon med pålydende verdi 1 og pris  $PC(T)$ . De observerte prisene kan da sammenlignes, og gitt at den eneste risikoen som er tilstede er konkurrrisiko, kan vi beregne konkurssannsynligheten  $Q(T)$ . Anta først at vi har ingen recovery. Konkurssannsynligheten kan da beregnes slik:

$$PC(T) = (1 - Q(T))P(T)$$

$$e^{-y(T)T} = (1 - Q(T)) \times e^{-y^*(T)T}$$

$$1 - Q(T) = e^{-[y(T) - y^*(T)]T}$$

$$Q(T) = 1 - e^{-[y(T) - y^*(T)]T}$$

Der  $y(T)$  og  $y^*(T)$  betegner henholdsvis internrenten på den risikable obligasjonen og internrenten på den risikofrie obligasjonen.

Vi kan nå lett gjøre de samme beregningene med en antagelse om andel tilbakebetalt beløp ved konkurs. Her betegner  $RF$ ,  $RM$  og  $RT$  henholdsvis ”recovery of face value”, ”recovery of market value” og ”recovery of treasury”:

$$PC(T) = (1 - Q(T))P(T) + Q(T) \times RF$$

$$PC(T) = (1 - Q(T))P(T) + Q(T) \times PC(T) \times RM$$

$$PC(T) = (1 - Q(T))P(T) + Q(T) \times P(T) \times RT$$

Typisk vil  $RF < RT < RM$ , og de estimerte ubetingede konkurssannsynlighetene vil være gitt ved følgende tre uttrykk:

$$Q(T) = \frac{1 - e^{-[y(T) - y^*(T)]T}}{1 - RF \times e^{-y^*(T)T}}$$

$$Q(T) = \frac{1 - e^{-[y(T) - y^*(T)]T}}{1 - RM \times e^{-[y(T) - y^*(T)]T}}$$

$$Q(T) = \frac{1 - e^{-[y(T) - y^*(T)]T}}{1 - RT}$$

Med dette som bakgrunn kan vi nå gå tilbake til diskusjonen om hvordan vi kan konstruere en kredittkurve. Det finnes i all hovedsak tre ulike måter å gjøre dette på:

1. Ved bruk av aksjepriser
2. Ved bruk av historiske data
3. Gjennom bruk av observerbare markedspriser

## **6.2 Bruk av aksjepriser**

Bruken av aksjepriser for å finne konkurssansynligheter er relatert til strukturerte kredittrisikomodeller. Fra presentasjonen litt tidligere i oppgaven husker vi at ved å bruke Mertons modell kunne vi finne den risikonøytrale sannsynligheten for konkurs gitt ved størrelsen  $N(-d_2)$ . Argumentet for å bruke aksjepriser som en basis for å utlede kredittkurven er at disse inneholder all tilgjengelig informasjon om det aktuelle selskapet, og ikke minst at de oppdateres hele tiden. Altså vil de estimerte konkurssansynlighetene vi finner være basert på oppdatert informasjon, og i så måte kan de tenkes å reflektere de ”sanne” sannsynlighetene. Problemet ved å bruke Mertons modell er som vi vet at dagens selskaper og deres komplekse kapitalstruktur ikke oppfyller modellens strenge antagelser. I tillegg er det få selskaper som har gjeld som forfaller på mange ulike tidspunkt, noe som gjør det vanskelig å estimere nok punkter på kredittkurven vår. Disse problemene gjør at denne fremgangsmåten ikke er noe særlig utbredt eller anerkjent i praksis. Derfor nøyer vi oss i denne oppgaven med å forklare metoden kort, og henviser til eksempelet som ble brukt under kapittelet om Mertons modell, for hvordan man kan finne  $N(-d_2)$ .

## **6.3 Bruk av historiske data**

Alle de store ratingselskapene har over tid akkumulert mye informasjon om hvordan konkurssansynlighetene til et selskap, gitt dets rating, historisk sett har utviklet seg (jf. Kapittel 2). Det er basert på denne lett tilgjengelige informasjonen vi kan estimere det som betegnes som historiske konkurssansynligheter. Tabellen nedenfor viser Moody's estimater på de gjennomsnittlige kumulative konkursratene betinget av hvilken ratingklasse selskapet befinner seg i.

### Average cumulative default rates (%), 1970 - 2003 (Kilde: Moody's)

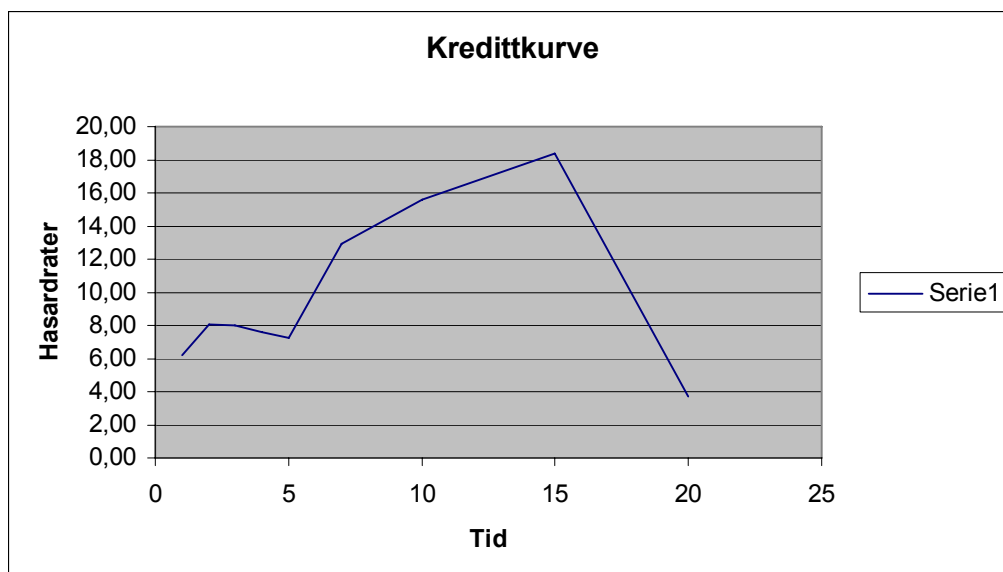
Years	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0,00	0,00	0,00	0,04	0,12	0,29	0,62	1,21	1,55
Aa	0,02	0,03	0,06	0,15	0,24	0,43	0,68	1,51	2,70
A	0,02	0,09	0,23	0,38	0,54	0,91	1,59	2,94	5,24
Baa	0,20	0,57	1,03	1,62	2,16	3,24	5,10	9,12	12,59
Ba	1,26	3,48	6,00	8,59	11,17	15,44	21,01	30,88	38,56
B	6,21	13,76	20,65	26,66	31,99	40,79	50,02	59,21	60,73
Caa	23,65	37,20	48,02	55,56	60,83	69,36	77,91	80,23	80,23

Ikke uventet ser vi at det er et inverst forhold mellom rating og konkurssannsynligheter. Ved å bruke slike historiske data blir estimeringen av en kredittkurve veldig enkel, og den eneste informasjonen vi trenger å finne er ratingen til det aktuelle selskapet. La oss ta for oss et eksempel:

Sett at vi har et selskap som har utstedt obligasjoner som er B- rated av Moody's. Fra tabellen over kan vi da finne at den kumulative konkurssannsynligheten 4 år frem i tid vil være 26,66 % for disse obligasjonene. Dette betyr igjen at den ubetingede sannsynligheten for konkurs i løpet av år 4 vil være  $26,66 - 20,65 = 6,01$  %. Dette er altså sannsynligheten for konkurs i løpet av år 4 sett fra tidspunkt 0. Sannsynligheten for at selskapet ikke går konkurs i løpet av de 3 første årene er  $100 - 20,65 = 79,35$  %. Vi kan nå finne sannsynligheten for at selskapet går konkurs i år 4 betinget av ingen tidligere konkurs ved å bruke definisjonen på hasardraten:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{0,0601}{0,7935} = 7,57\%$$

Denne beregningen gjentar vi så for alle de tilgjengelige årene i tabellen, og på den måten kan vi finne frem til kredittkurven for selskapet, eller for å være mer presis, deler av gjelden til selskapet. For å kunne trekke en hel linje gjennom de estimerte punktene bruker vi lineær interpolering.



#### 6.4 Bruk av observerbare markedspriser

Å bruke en eller annen form for markedsinformasjon er den mest vanlige metoden for å estimere en kredittkurve. I praksis finnes det flere måter å tilnærme seg dette problemet på. Den ene er å sammenligne utstedte selskapsobligasjoner med lignende risikofrie obligasjoner, og på denne måten estimere konkurssannsynligheter basert på forskjeller i priser på disse. Her antar man da at den eneste grunnen til at en selskapsobligasjon blir solgt til en lavere pris er pga. konkurrisiko. I praksis kan dette være en holdbar antagelse for obligasjoner som er hyppig omsatt, men for mindre likvide obligasjoner vil det ofte også være innbakt en likviditetspremie i prisen. La oss videre se på et eksempel som bedre forklarer denne metoden. Vi regner i dette eksempelet med kontinuerlig forrentning.

Anta at vi har et selskap som har utstedt obligasjoner med forfall på flere ulike tidspunkter. Alle obligasjonene betaler en halvårlig kupong. Anta videre at det finnes risikofrie alternativer som er sammenlignbare med de obligasjonene vårt selskap har utstedt, og at risikofri rente er 3,5 % for alle forfallstidspunkt. Vi har en konstant andel tilbakebetalt ved konkurs, og antar at denne andelen beregnes av det risikofrie alternativet (jf. "Recovery of Treasury"). All relevant informasjon er oppsummert i tabellen nedenfor:



Utstedte obligasjoner	Ob1	Ob2	Ob3	Ob4	Ob5	Ob6
Tid til forfall	1	2	3	5	7	10
Årlige kuponger	4 %	4 %	4 %	4 %	4 %	4 %
Yields	4 %	4,25 %	4,45 %	4,75 %	5 %	5,30 %
Recovery Rate	40 %	40 %	40 %	40 %	40 %	40 %
Priser	99,9609	99,4395	98,6117	96,4515	93,7997	89,4996
Risikofritt alternativ	100,4571	100,8984	101,3246	102,1334	102,8876	103,9243
Prisdifferanse	0,4962	1,4589	2,7129	5,6819	9,0879	14,4247

Prisen på obligasjon 1 fremkommer ved å neddiskontere kontantstrømmene fra obligasjonen med obligasjonens internrente (yield). Siden den årlige kupongen er på 4 %, vil den halvårlige kupongutbetalingen være på 2, og prisen er gitt som følger:

$$2 \times e^{-0,04 \times 0,5} + 102 \times e^{-0,04 \times 1} = 99,9609$$

Prisen på det risikofrie alternativet beregnes på samme måte, men nå neddiskonterer vi kontantstrømmene med den risikofrie renten:

$$2 \times e^{-0,035 \times 0,5} + 102 \times e^{-0,035 \times 1} = 100,4571$$

Poenget er nå at denne prisdifferansen antas å komme av at det er en viss risiko for at foretaksobligasjonen kan gå konkurs. Denne risikoen kan tallfestes ved å beregne den implisitte konkurssannsynligheten. Dette kan gjøres ved å sette opp følgende tabell:

#### Ob1

Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	102,2305	61,3383	0,9827	60,2742Q1
Total						60,2742Q1

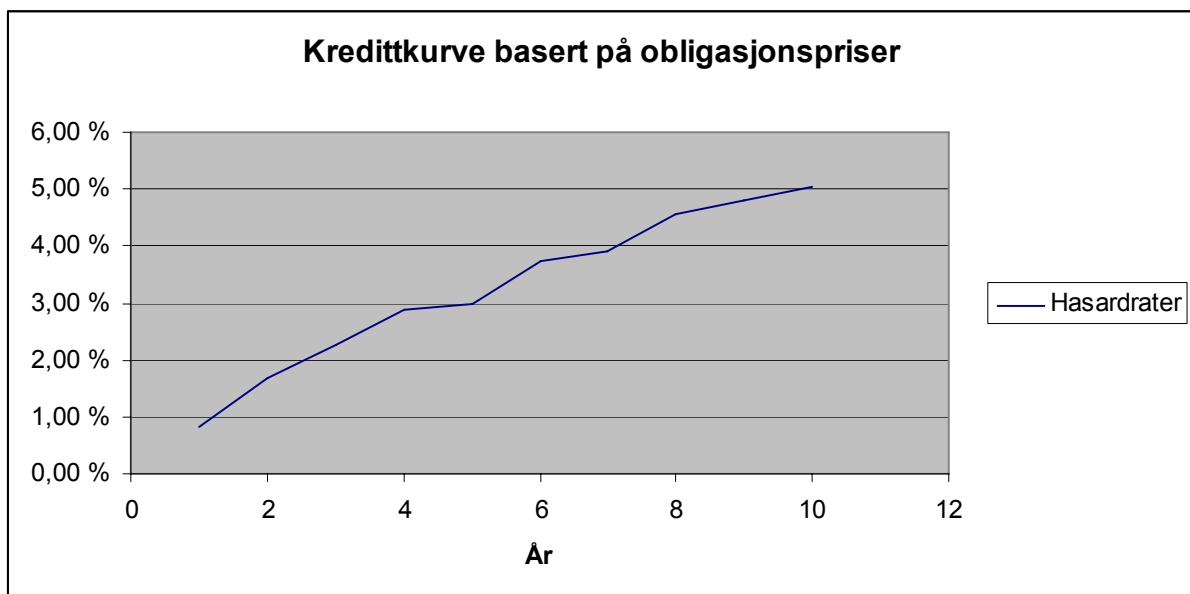
La oss forklare hvordan tallene i tabellen fremkommer. Vi antar her at konkurs kan forekomme på tidspunktene 0.5, 1.5, 2.5 osv (altså umiddelbart før kupongutbetaling). Den risikofri verdien fremkommer slik:  $2 + 102 \times e^{-0,035 \times 0,5} = 102,2305$

Ved å multiplisere denne verdien med (1- recovery) finner vi den summen vi taper gitt at en konkurs oppstår (Loss Given Default). Dette diskonteres videre med risikofri rente for å finne nåverdien av det forventede tapet. Summer deretter alle de forventede tapene for å finne totalt forventet tap. Dette settes da lik prisdifferansen mellom foretaksobligasjonen og det risikofrie alternativet for å beregne konkurssannsynligheten for det første året (Q<sub>1</sub>):

$$60,2742Q_1 = 0,4962 \Rightarrow Q_1 = 0,8232\%$$

Ved å gjøre disse beregningene for hver av de tilgjengelige obligasjonene kan vi finne de ulike konkurssannsynlighetene for hvert tidspunkt. Det er imidlertid viktig å huske på at dette er ubetingede konkurssannsynligheter, mens det vi ønsker å finne er hasardratene på de aktuelle tidspunktene. Disse finner vi enkelt ved å bruke definisjonen på hasardrater, slik vi gjorde i eksempelet med historiske data. Detaljer for disse beregningene kan finnes i appendix A.

Vi kan nå sette opp følgende kredittkurve for det aktuelle selskapet:



I praksis er det ofte vanlig å bruke såkalte asset swap spreads for å estimere konkurssannsynlighetene. Dette gjøres hovedsakelig fordi dette er lett tilgjengelig data og ikke minst fordi beregningene er både enklere og raskere. Anta at vi har en asset swap spread på den ettårige obligasjonen, som er notert til 75 basispoeng. Dette betyr at den ene parten i swopen betaler obligasjonens kuponger, mens den andre parten betaler risikofri rente (LIBOR) pluss 75 basispoeng. Vi fortsetter med å anta at betalingene skjer hvert halvår. Poenget her er da at nåverdien av asset swap spreaden tilsvarer nøyaktig den prisdifferansen som eksisterer mellom foretaksobligasjonen og det risikofri alternativet. I så måte vil beregningen av  $Q_1$  bli som følger:

$$0,375 \times e^{-0,035 \times 0,5} + 0,375 \times e^{-0,035 \times 1} = 60,2742Q_1$$

$$0,730597 = 60,2742Q_1$$

$$Q_1 = 1,2121\%$$

## 6.5 Bruk av Credit Default Swap Spreads

Å bruke markedsspreads på noterte CDS er en tredje måte å tilnærme seg kredittkurveproblemet på. Denne metoden går ut på å bruke prisingen av en CDS til å finne såkalte implisitte konkurssannsynligheter. Metoden er mye brukt i praksis, og er ekvivalent med praksisen i opsjonsmarkedene hvor man beregner implisitte volatiliteter. Informasjonen som er tilgjengelig i markedet er bid – ask spreads for hver CDS. Ved å ta snittet av disse to finner vi såkalte mid- market spreads, og det er disse vi ønsker å bruke til å estimere konkurssannsynligheter. For å vise hvordan dette kan gjøres i praksis, er det viktig å forklare hvordan man kan sette opp prisingsproblemet i en CDS. Poenget med en CDS er å finne den premien som gjør at forventede utbetalinger er lik forventede innbetalinger. Forventede utbetalinger er kun knyttet til sannsynlighet for konkurs og andel tilbakebetalt. Forventede innbetalinger består av to elementer; premie og påløpte premier. En påløpt premie må betales dersom det oppstår konkurs på et tidspunkt mellom to regulære premieinnbetalinger. Dette forklares bedre gjennom et eksempel:

Vi ønsker å prise en 2- årig CDS utstedt på en vilkårlig obligasjon med pålydende verdi NOK 1. Anta at konkurs inntreffer halvveis i hvert år, og at premiene på CDS- en betales ved slutten av hvert år. Vi bruker videre en risikofri rente på 3,5 % og en konstant recovery rate på 40 %. Vi definerer den årlige konkurssannsynligheten for  $Q(t)$ , og den årlige premien  $s$  slik at  $s$  betegner en årlig rate. Prisen på CDS- en fremkommer gjennom følgende sammenheng:

$$NV(\text{forventede premiebetalinger}) + NV(\text{forventede påløpte premiebetalinger}) = NV(\text{forventede utbetalinger})$$

De tre beregningene kan da gjøres ved å sette opp følgende tabeller:

**NV(forventa premiebetaling)**

Tid (år)	Sannsynlighet for overlevelse	Forventa betaling	Diskonteringsfaktor	NV forventa betaling
1	1-Q(1)	$(1-Q(1))*s$	0,9656	$(1-Q(1))*s*0,9656$
2	1-Q(2)	$(1-Q(2))*s$	0,9324	$(1-Q(2))*s*0,9324$

**NV(forventa påløpt premiebetaling)**

Tid (år)	Konkurssannsynlighet	Forventa påløpt premie	Diskonteringsfaktor	NV forventa påløpt premie
0,5	Q(1)	$Q(1)*s*0,5$	0,9827	$Q(1)*s*0,5*0,9827$
1,5	Q(2)	$Q(2)*s*0,5$	0,9489	$Q(2)*s*0,5*0,9489$

**NV(forventa utbetaling)**

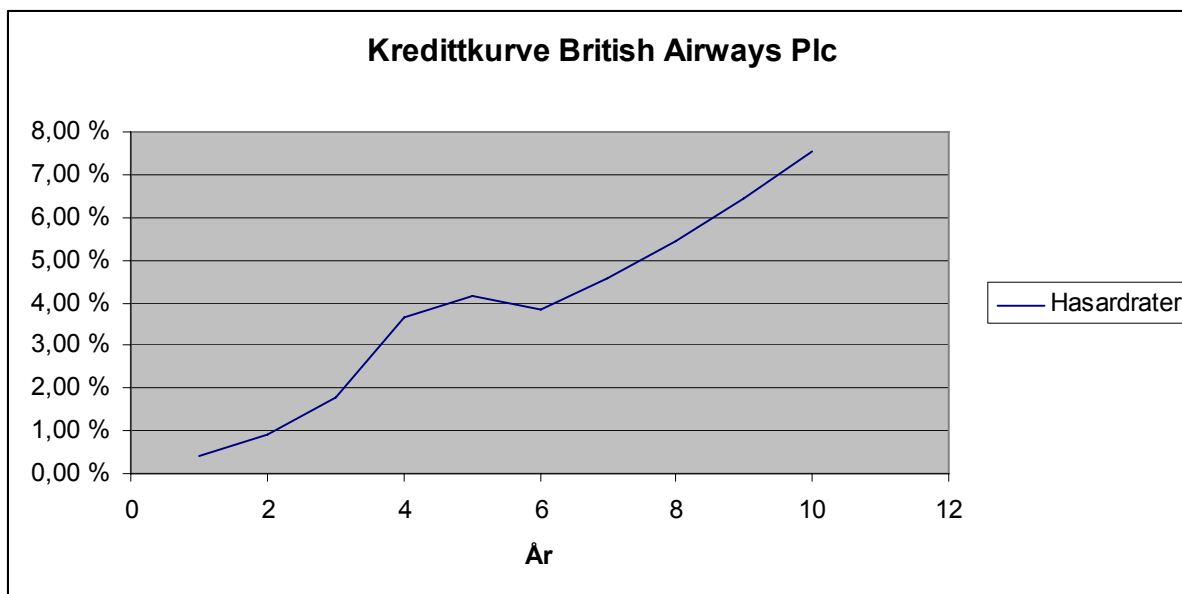
Tid (år)	Konkurssannsynlighet	Recovery rate	Forventa utbetaling	Diskonteringsfaktor	NV forventa utbetaling
0,5	Q(1)	0,4	$(1-0,4)*Q(1)$	0,9827	$(1-0,4)*Q(1)*0,9827$
1,5	Q(2)	0,4	$(1-0,4)*Q(2)$	0,9489	$(1-0,4)*Q(2)*0,9489$

Vi ser at de to eneste ukjente variablene i prisberegningene er konkurssannsynlighetene og premieraten  $s$ . Ved å bruke observerbare mid- market spreads kan vi da regne oss tilbake til de implisitte konkurssannsynlighetene. Det ideelle scenarioet er å ha flere noterte CDS- spreads med ulike forfallstidspunkt. Vi kan da finne ulike implisitte konkurssannsynligheter for flere år. Igjen må vi huske på at dette er ubetingede konkurssannsynligheter, slik at disse må gjøres om til hasardrater ved hjelp av fremgangsmåten vi har brukt tidligere i kapittelet. La oss fullføre eksempelet over ved å bruke reelle markedsdata som input i modellen. Fra iTraxx- indeksen (se appendix B) har vi hentet følgende data om CDS- spreads på British Airways (11 april 2006):

**Mid-market Spreads**

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
British Airways Plc	25,0	40,0	62,0	99,0	125,5	139,0	152,5	166,3	180,2	194,0

Den 10- årige kredittkurven for British Airways ser da slik ut:



## 6.6 Faktiske versus risikonøytrale konkurssannsynligheter

Konkurssannsynlighetene som vi utleder gjennom bruk av historiske data er såkalte faktiske sannsynligheter. Dersom vi derimot velger å bruke markedsdata er estimatene vi får ut risikonøytrale sannsynligheter. Fordelen med risikonøytrale sannsynligheter er at man kan bruke risikofrie renter til å neddiskontere fremtidige forventede kontantstrømmer. Vi slipper altså her å ta hensyn til investorenes holdning til risiko. Det er verdt å merke seg at det så å si alltid er slik at risikonøytrale konkurssannsynligheter er høyere enn de faktiske. Tabellen nedenfor viser forholdet mellom historiske og markedsbaserte konkurssannsynligheter, og hvordan disse henger sammen men ratingklassene:

**Seven- year average default intensities (% per annum)**

Rating	Historical default intensities	Default intensities from bonds	Ratio	Difference
Aaa	0,04	0,67	16,75	0,63
Aa	0,06	0,78	13,00	0,72
A	0,13	1,28	9,85	1,15
Baa	0,47	2,38	5,06	1,91
Ba	2,47	5,07	2,05	2,60
B	7,69	9,02	1,17	1,33
Caa	16,9	21,3	1,26	4,40

Kilde: Hull, Options Futures and Other Derivatives (2006)

Ikke overraskende ser vi at konkurssannsynlighetene er økende jo dårligere kredittratingen er. Vi merker oss også at det er en tendens til at forholdet mellom de faktiske og de

risikonøytrale sannsynlighetene minker jo dårligere ratingene blir. Det finnes flere forklaringer på hvorfor risikonøytrale konkurssannsynligheter er høyere enn faktiske. De mest vanlige er som følger:

- Foretaksobligasjoner er relativt illikvide, og investorer forlanger ekstra avkastning for å kompensere for dette.
- De subjektive konkurssannsynlighetene investorene har kan være mye høyere enn de historiske, dersom man tar høyde for ekstreme utfall (risikoaversjon).
- Obligasjoner tenderer til å gå konkurs samtidig, og det eksisterer derfor systematisk risiko som ikke lar seg diversifisere bort.
- Avkastning fra obligasjoner er skjevfordelte med en begrenset oppside. Dette gjør at det er mye vanskeligere å diversifisere bort risiko i en obligasjonsportefølje, enn i en aksjeportefølje.

### **6.6.1 Hvilke sannsynligheter skal man bruke?**

Dersom formålet med konkurssannsynligheter er verdsettelse av kredittderivater er det bare et enkelt svar på dette spørsmålet – bruk risikonøytrale sannsynligheter. I sin artikkel ”Constructing a credit curve” nevner David Li noen momenter til fordel for bruk av markedsbaserte konkurssannsynligheter:

- Beregning av profitt og tap er kritisk avhengig av den fremtidige markedsutviklingen. Denne utviklingen er reflektert gjennom dagens markedspriser.
- Ratingbyråer bruker såkalte klassifikasjonsteknikker for å tilordne risiko til bransjer og industrier. Slik klassifisering har en tendens til å overse selskapsspesifikk informasjon.
- Ratingbyråer reagerer mye senere enn markedet når det kommer til forventninger om fremtidig kredittverdighet.
- Rating- data blir primært brukt til å kalkulere konkursfrekvens, og ikke størrelsen på konkurser. Utbetalingene fra et kredittderivat er strengt avhengig av begge disse faktorene.
-

## 7. Konkurskorrelasjon

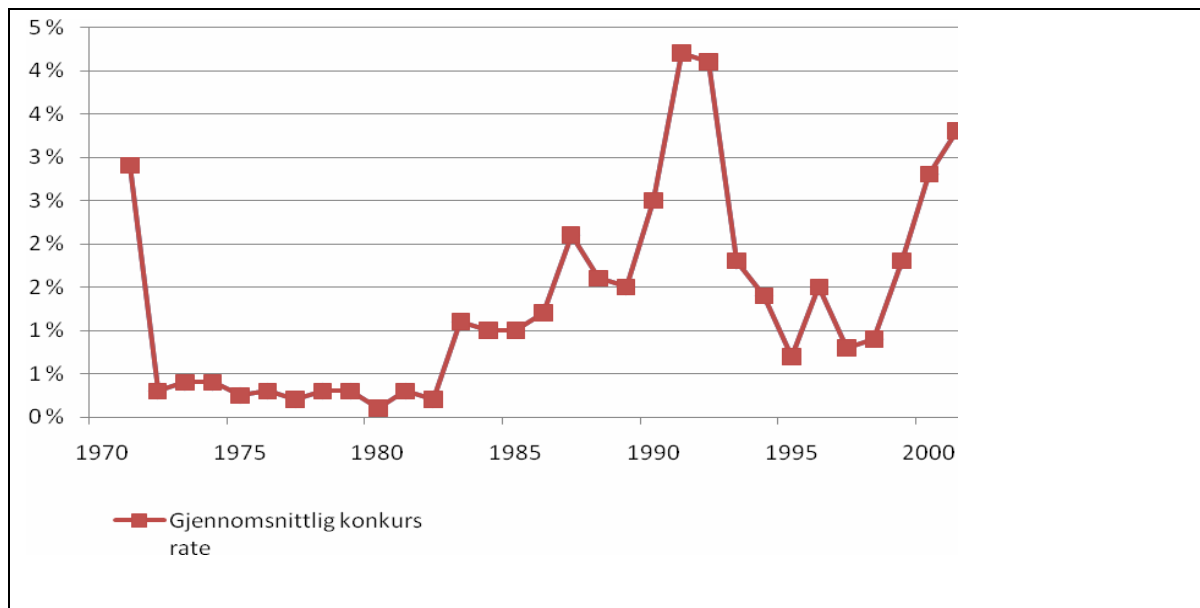
I forrige kapittel sa vi at de individuelle konkurssannsynlighetene, og andel tilbakebetalt ved konkurs var to avgjørende faktorer når man ønsket å priske et kredittderivat. For kredittderivater som har en hel portefølje som underliggende aktivum vil i tillegg konkurskorrelasjoner ha en stor innvirkning på prisingen. Dette problemet kan faktisk dukke opp allerede når vi verdsetter en enkel CDS med ett underliggende referanseaktivum. Det potensielle problemet her er at det kan være konkursavhengighet mellom referanseaktivumet og kontraktsselgeren.

Går vi tilbake og ser på historiske data, viser disse tydelig at konkurser har en tendens til å være korrelerte, eller dukke opp i klynger. Det har blant annet USA flere eksempler på:

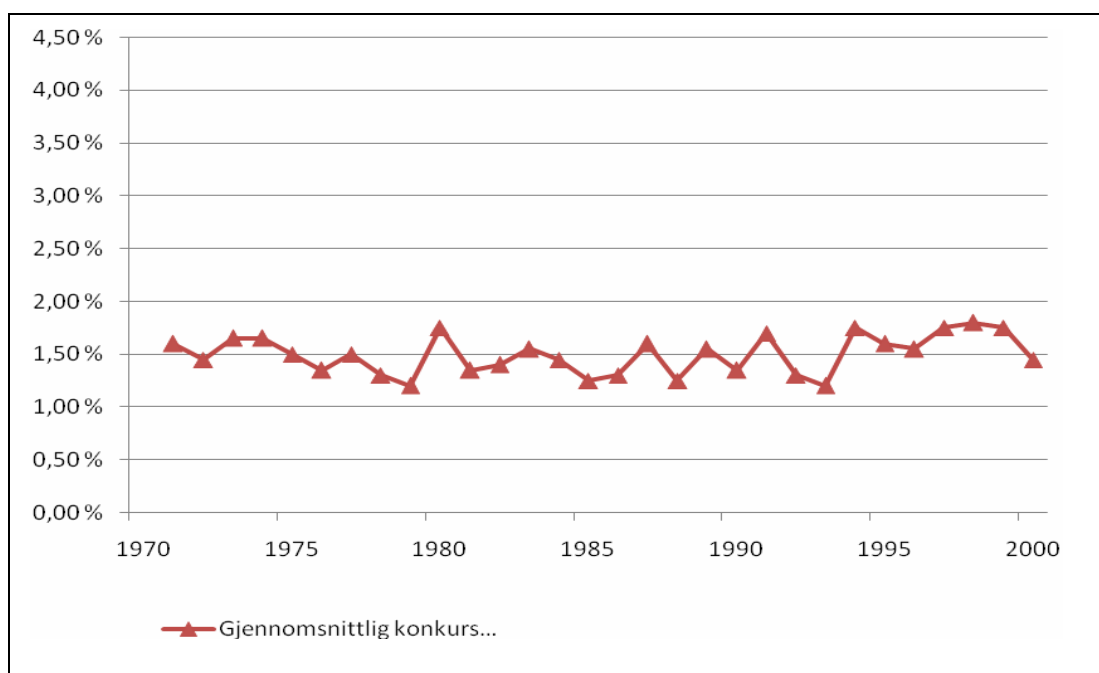
- Oljeindustri: 22 selskaper gikk konkurs i 1982-1986
- Flyselskaper: 3 selskaper gikk konkurs i 1970-1971, 5 selskaper gikk konkurs i 1989-1990.
- Kasino/hotell bransje: 10 selskaper gikk konkurs i 1990.
- Bygg/eiendom: 4 selskaper gikk konkurs i 1992.

*Kilder: "Credit derivatives pricing models", Schönbucher.*

Dersom disse konkursene hadde vært uavhengige, ville ikke slike klynger av konkurser ha oppstått.



Kilde: Moody's Investors Service



Kilde: Credit Derivatives pricing models; Schönbucher

Tabellen øverst viser den gjennomsnittlige 12-månedes konkursraten til amerikanske statsobligasjoner fra 1970 til 2000, som er utgitt av Moody's. Den nedre tabllen viser et simulert resultatet av en hypotetisk portefølje som har tilsvarende sammensetning som i den øverste tabellen, men her med uavhengige konkurser.



Her ser vi tydelig at den historiske tidsserie viser mye høyere variasjon enn den simulerte tidsserien. Den simulerte serien ligger innenfor variasjon av 1-2%, men den historiske serien varierer en del mer. Fra den øverste tabellen ser vi at det må være en systematisk påvirkning som forårsaker enten veldig mange felles konkurser (som i 1991-1992) eller veldig få felles konkurser (som i 1972-1982). I tillegg ser vi at det er serieavhengighet av konkurser i de påfølgende år. Når det er høy konkurstrate i et år, er det stor sannsynlighet for at neste år har en konkurstrate som er over gjennomsnittet. Der samme gjelder i det motsatte tilfellet, hvor et år med lav konkurstrate, med stor sannsynlighet blir etterfulgt av et år med konkurstrate fortsatt lavere enn gjennomsnittet.

## 7.1 Definisjoner og sammenhenger

Selv om konkursskorrelasjon er blitt mye nevnt, har ordet ikke vært veldefinert og forstått innen finans. Typisk vil man, når man hører ordet korrelasjon, tenke på en standard lineær korrelasjonskoeffisient. I denne oppgaven kommer vi til å bruke flere uttrykk for å beskrive avhengigheter mellom aktiva. Vi vil derfor først definere og forklare forskjellene og sammenhengene mellom lineær konkursskorrelasjon, betinget konkurssannsynlighet, og felles konkurssannsynlighet.

La oss først rekapitulere den standardiserte definisjonen på den lineære korrelasjonen mellom to tilfeldige variabler:

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)} \quad (7.1)$$

Vi betrakter nå to aktiva,  $A$  og  $B$ , og en bestemt tidshorisont  $T$ . Sannsynligheten for at  $A$  går konkurs før  $T$  betegner vi  $p_A$ , og konkurssannsynlighet for  $B$  før  $T$  er  $p_B$ .

Felles konkurs sannsynlighet,  $p_{AB}$ , er sannsynligheten for at både  $A$  og  $B$  går konkurs før  $T$ . Betinget konkurssannsynligheter  $p_{A|B}$  og  $p_{B|A}$ , er sannsynlighetene for at henholdsvis  $A$  går konkurs før  $T$ , gitt at  $B$  har gått konkurs før  $T$ , og sannsynligheten for at  $B$  går konkurs før  $T$ , gitt at  $A$  har gått konkurs før  $T$ . De to siste kan beregnes ved hjelp av Bayes' lov:

$$p_{A|B} = \frac{p_{AB}}{p_B}, \quad p_{B|A} = \frac{p_{BA}}{p_A} \quad (7.2)$$

La oss nå representere hvorvidt et aktivum går konkurs ved hjelp av en konkursindikator  $y_i$ , som bare antar to verdier 1 og 0. 1 dersom vi får en konkurs og null i motsatt tilfelle. I så måte kan vi skrive den lineære konkursskorrelasjonen mellom to aktiva  $i$  og  $j$  slik:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(y_i, y_j)}{\sigma(y_i)\sigma(y_j)} \quad (7.3)$$

La oss se nærmere på nevneren i uttrykket over. Fra definisjonen av variansen til en tilfeldig variabel vet vi at:

$$\sigma^2(y_i) = P(y_i = 1)(1 - E(y_i))^2 + P(y_i = 0)(0 - E(y_i))^2$$

Men  $E(y_i)$  vil jo være det samme som  $P(y_i = 1)$ . La oss derfor sette  $P(y_i = 1) = p_i$  og sette dette inn i uttrykket over. Vi får da:

$$\begin{aligned} \sigma^2(y_i) &= p_i(1 - p_i)^2 + (1 - p_i)(0 - p_i)^2 = p_i(1 - p_i)^2 + p_i^2(1 - p_i) \\ &= p_i(1 - p_i) \end{aligned} \quad (7.4)$$

La oss så se nærmere på telleren fra (7.3). For å evaluere kovariansuttrykket kan vi bruke det velkjente resultatet:  $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) + \text{cov}(X_1, X_2)$ . Dette gir oss følgende uttrykk:

$$\text{cov}(y_i, y_j) = E(y_i y_j) - E(y_i)E(y_j) = p_{ij} - p_i p_j \quad (7.5)$$

Der  $p_{ij}$  betegner den felles konkurssannsynligheten  $P(y_i = 1, y_j = 1)$ . Ved å sette (7.4) og (7.5) inn i (7.3) finner vi at konkursskorrelasjonen da kan uttrykkes fullstendig gjennom individuelle og felles konkurssannsynligheter:

$$\rho_{ij} = \frac{p_{ij} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1 - p_i)p_j(1 - p_j)}}, \quad (7.6)$$

Eller for vårt tilfelle med aktiva A og B:

$$\rho_{AB} = \frac{P_{AB} - P_A P_B}{\sqrt{P_A(1-P_A)P_B(1-P_B)}}$$

Poenget med øvelsen vi har gjort over er bare å vise at korrelasjon kan være et intuitivt og enkelt begrep. På tross av dette, og på tross av at det fins mange ulike metoder å estimere korrelasjoner mellom to variabler på, så er det en enormt stor oppgave og skulle analysere risikoen i en portefølje basert på slike parvise konkursskorrelasjoner. Tabellen under viser hvor mange korrelasjonskoeffisienter som må estimeres avhengig av størrelsen på porteføljen.

Antall aktiva (n)	Antall parvise korrelasjoner
10	45
50	1225
100	4950
200	19900
500	124750
1000	499500

Vi ser at antallet parvise korrelasjoner øker voldsomt raskt. Generelt gjelder det at i en portefølje med n aktiva vil det være nødvendig å estimere  $(n^2 - n)/2$  korrelasjoner, n individuell konkurs sannsynligheter, og  $2^n$  mulige felles konkurstilfeller.

## 7.2 Estimering av korrelasjoner

For å estimere konkursskorrelasjoner kan vi benytte data fra flere ulike kilder, selv om ingen av datakildene i utgangspunktet er perfekt tilpasset til dette formålet:

- *Historisk observert felles rating og konkursbegivenheter*: Den mest sentrale informasjonskilden til konkursskorrelasjon er de historiske observasjoner av felles konkursbegivenheter mellom lignende bedrifter på samme tidspunkt. Slike data gir en god beskrivelse av konkursskorrelasjon, men siden felles konkurser er sjeldne hendelser, har man samlet veldig lite data om det. Man må nemlig ha et stort antall observasjoner for at det skal kunne brukes til statistisk formål.
- *Kreditspread*: Disse ”spreadene” inneholder mye informasjon om konkurssrisikoen til obligasjoner, og endringer i kreditspread reflekterer endringer i markedets syn på

risikonivå til disse investeringene. Dersom kredittspredene til to obligasjoner er sterkt korrelerte, er det stor sannsynlig for at konkursene av de to aktiva også er sterkt korrelert. På den annen side er det ulemper knyttet til tilgjengelighet og kvalitet på denne typen data, og det finnes heller ingen teori om størrelse og styrke på tilknytningen mellom kredittspread- korrelasjon og konkursskorrelasjon.

- *Aksjekorrelasjon*: Data om aksjepriser er mye mer tilgjengelig og har bedre kvalitet enn kredittspread- data. Ulempen med det er at linken mellom aksjepriser og kredittrisiko er mer uklar.

Vi ser her at selv om vi har datakilder for å estimere konkursskorrelasjoner, så er det ingen av disse som direkte kan forklare konkurssavhengighet. Vi har derfor behov for en teoretisk modell som kan hjelpe oss med dette.

### 7.2.1 Faktormodeller

I praksis er det vanlig å innføre en slags forenklet struktur som reduserer det antall parametere som trengs å estimeres. Det vanlige er da å la konkursen være en funksjon av en eller flere kontinuerlige variabler, og innføre en del faktorer som påvirker avhengigheten mellom disse variablene, derav navnet faktormodeller. La oss kalle disse latente variablene for  $A_i$ .

Konkursindikatoren kan da skrives som følger:

$$\text{Konkurs}_i \quad \Leftrightarrow y_i = 1 \Leftrightarrow A_i \leq k_i$$

$$\text{Ingen konkurs}_i \quad \Leftrightarrow y_i = 0 \Leftrightarrow A_i > k_i$$

Her er  $k_i$  en kritisk grense som markerer at aktivum  $i$  går konkurs dersom variabelen  $A_i$  faller under grensen.

Dersom vi nå tolker variabelen  $A_i$  som verdien på et firmas eiendeler ser vi at vi er tilbake i en verden som ligner veldig på den strukturerte modellen til Merton, som vi presenterte i kapittel 5.1. Vi husker at i denne modellen så ble en konkurs trigget gjennom at verdien på firmaets eiendeler falt under en forhåndsspesifisert grense ved forfallstidspunktet  $T$ . Med dette som grunnlag går vi videre og ser på den enkleste og mest brukte av faktormodellene.

## 7.2.2 Énfaktormodell

I den enkle énfaktormodellen forutsetter vi at verdien på et firmas eiendeler  $A_i$  blir drevet av en felles, systematisk og standard normalfordelt faktor  $Y$ , og en idiosynkratisk standard normalfordelt faktor  $\varepsilon_i$ . Modellen ser da slik ut:

$$A_i = \sqrt{\rho_i}Y + \sqrt{1-\rho_i}\varepsilon_i \quad (7.7)$$

I tillegg antar vi at  $Y$  og  $\varepsilon_i$  er uavhengige variabler, slik at

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j \quad \text{og} \quad \text{cov}(Y, \varepsilon_i) = 0, \forall_i$$

Gjennom å spesifisere faktorene slik vi har gjort her vil også variabelen  $A_i$  bli en standard normalfordelt variabel. I denne modellen vil derfor korrelasjonen mellom eiendelene til to firma være fullstendig bestemt av faktorsensitivitetene  $\rho_i$ . Dette kan lett vises:

$$\rho_{ij}^{asset} = \frac{\text{cov}(A_i, A_j)}{\sigma(A_i)\sigma(A_j)} = \frac{\text{cov}(\sqrt{\rho_i}Y + \sqrt{1-\rho_i}\varepsilon_i, \sqrt{\rho_j}Y + \sqrt{1-\rho_j}\varepsilon_j)}{1 \times 1}$$
$$\rho_{ij}^{asset} = \text{cov}(\sqrt{\rho_i}Y, \sqrt{\rho_j}Y) = \sqrt{\rho_i}\sqrt{\rho_j} \text{var}(Y) = \sqrt{\rho_i}\sqrt{\rho_j}$$

Den systematiske faktoren  $Y$  kan vi se på som en indikator for den generelle tilstanden i økonomien, mens den idiosynkratiske faktoren  $\varepsilon_i$  kan sees på som en faktor som fanger opp firma- spesifikke effekter som påvirker verdien på eiendelene. Dette kan for eksempel være kvaliteten på ledelsen i firmaet, organisering, innovasjonsevne osv.

Poenget med denne modellen er at så lenge vi vet hvilken realisering av  $Y$  vi får, så vil konkursene til de ulike firmaene være uavhengige fra hverandre. Den eneste funksjonen  $Y$  har er å flytte ”verdiprosessene” til de ulike firmaene nærmere, eller lenger bort fra den kritiske grensen  $k_i$ . Dersom vi for eksempel kommer inn i en økonomisk boom (høy positiv  $Y$ - verdi) vil vi oppleve færre konkurser enn dersom vi kommer inn i en økonomisk resesjon (lav negativ  $Y$ - verdi).

### 7.2.3 Multifaktormodeller

Man kan spørre seg om det er slik at én systematisk faktor er nok til å fange opp all kredittrisiko- korrelasjon mellom firmaer eller aktiva? Et utfyllende svar på dette mangler nok fortsatt. Likevel har flere forsøkt seg på å utvikle mer sofistikerte multifaktormodeller.

I en multifaktormodell, vil variabelen  $A_i$  være avhengig av flere ulike faktorer. Modellen kan skrives som følger:

$$A_i = \sqrt{\rho_1} Y_1 + \dots + \sqrt{\rho_J} Y_J + \sqrt{1 - \rho_1 - \dots - \rho_J} \varepsilon_i \quad (7.8)$$

der  $Y_j$  for  $j = 1, \dots, J$  er ulike systematiske faktorer, og  $\varepsilon_i$  er et firmas idiosynkratiske faktor.

Som før er korrelasjonsstrukturen gitt gjennom koeffisientene  $\rho_1, \dots, \rho_J$ .

Selv om multifaktormodeller er mer sofistikerte i sin oppbygning, og potensielt kan være mer realistiske, er de også desto mer krevende å implementere. Det viser seg også at man i praksis kommer langt med å bruke bare en faktor, i hvertfall ser dette ut til å ha blitt en slags industristandard. Videre i oppgaven kommer vi derfor til å bruke énfaktormodellen konsekvent.

### 7.2.4 Kalibrering av modellen og estimering av korrelasjoner

For å kunne estimere korrelasjoner ved hjelp av énfaktormodellen er vi nødt å gjøre det som kalles for en kalibrering av modellen. La oss først minne om at konkurssannsynligheten  $p_i$  for et enkelt aktivum (husk at vi antok at disse var standard normalfordelte) vil være:

$$P(A_i \leq k_i) = p_i$$
$$p_i = N(k_i) \Leftrightarrow N^{-1}(p_i) = k_i$$

På samme måte kan den felles konkurssannsynligheten mellom to aktiva skrives som:

$$P(A_i \leq k_i, A_j \leq k_j) = p_{ij}$$
$$p_{ij} = N_2(k_i, k_j, \rho_{ij}^{asset})$$

der  $N_2(\bullet, \bullet, \rho)$  betegner en standard bivariat normalfordeling med korrelasjonskoeffisient  $\rho$ .

Når vi nå skal kalibrere modellen ønsker vi å bestemme  $k$ -ene og  $\rho$ -ene, slik at resultatene fra modellen stemmer overens med de individuelle og felles konkurssannsynlighetene vi har observert i markedet. Dette kan gjøres på flere ulike måter, noen mer kompliserte og sofistikerte enn andre. Her vil vi bruke en enkel metode som ofte blir omtalt som "method of moments".

Anta at vi har samlet konkursdata for en gruppe av aktiva over flere år. La  $D_t$  betegne det antallet aktiva som gikk konkurs i periode  $t$ , og  $N_t$  være det totale antall aktiva som tilhørte gruppen ved starten av perioden  $t$ . Anta i det følgende at en periode tilsvarer ett år, og at vi har data observert over  $T$  år.

Den informasjonen vi trenger for vårt formål er den individuelle konkurssannsynligheten og den felles konkurssannsynligheten. Den gjennomsnittlige individuelle konkurssannsynligheten kan estimeres ved å ta snittet av de årlige konkurssannsynlighetene:

$$p = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{N_t} \quad (7.9)$$

På grunn av begrenset informasjon fra dataene vi har til rådighet, og for å gjøre beregningene enklere, antar vi at alle aktiva har samme konkurssannsynlighet, dvs. at vi kan sette

$$p_i = p_j = p \text{ og dermed er den kritiske grensen gitt ved } k_i = k_j = k = N^{-1}(p).$$

Videre kan vi estimere den felles konkurssannsynligheten på en lignende måte, nemlig ved å se på forholdet mellom observerte felles konkurser, og det mulige antallet felles konkurser.

Dersom det er observert  $D_t$  konkurser, vil antallet par av faktiske konkurser være gitt fra standard kombinatorikk:

$$\binom{D_t}{2} = \frac{D_t(D_t - 1)}{2} \quad (7.10)$$

Det maksimale mulige antall parvise konkurser vil være gitt ved:

$$\binom{N_t}{2} = \frac{N_t(N_t - 1)}{2} \quad (7.11)$$

Vi kan da finne den felles konkurseraten i år  $t$  gjennom å dele det faktiske antall parvise konkurser på det mulige antall parvise konkurser:

$$p_{2t} = \frac{(D_t(D_t - 1))/2}{(N_t(N_t - 1))/2} = \frac{D_t(D_t - 1)}{N_t(N_t - 1)} \quad (7.12)$$

Siden vi her har observert data over  $T$  år vil vi endelig komme frem til den ønskede estimatoren for den felles konkurssannsynligheten ved å ta snittet over hvert av årene. Dette forutsetter igjen forenklingen at alle aktiva har samme felles konkurssannsynlighet:

$$p_2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_{2t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{D_t(D_t - 1)}{N_t(N_t - 1)} \quad (7.13)$$

Husk nå at korrelasjonen mellom 2 aktiva var gitt ved uttrykket:

$$p_{ij} = N(d_i, d_j, \rho_{ij}^{asset})$$

Vi kan nå enkelt estimere  $p_{ij}$  fra (7.13), og  $d_i, d_j$  fra (7.9). Uttrykket over blir da redusert til en ligning med bare en ukjent, nemlig korrelasjonskoeffisienten. Denne kan vi finne relativt enkelt ved å gjøre bruk av de numeriske teknikkene som vi har til rådighet i excel (goal seek, solver). For å evaluere den standard bivariante normalfordelingen er det mulig å laste ned skreddersydde excel- funksjoner for dette formålet<sup>1</sup>.

I tabellen nedenfor finner du resultatene vi fikk ved å bruke denne metoden på konkursdata fra Standard & Poor's i perioden 1981 – 2005. Vi har beregnet korrelasjoner for to ulike grupper av aktiva, nemlig ”investment grade” og ”speculative grade”. Selve dataene som er brukt er gjengitt i appendix C.

<sup>1</sup> <http://mgordy.tripod.com/software/bivnorf.zip>





## 8. Skissering av prisingsproblemene

Når vi nå har presentert og forklart de viktigste problemstillingene vi må ta hensyn til ved prisingen av kredittderivater, ønsker vi nå å gå over til hvordan dette faktisk kan gjøres. Som tittelen på oppgaven tilsier fokuserer vi på det vi kaller korrelasjonsavhengige kredittderivater, og vi ønsker å ta for oss ulike modeller som kan brukes til å prise slike kontrakter. Fra kapittel 4 er det i så måte to typer produkter som peker seg ut som interessante, nemlig CDO og "first-to-default" baskets. Etter hvert som vi presenterer de ulike teoretiske prisingsmodellene vil vi prøve å vise hvordan disse kan brukes i praksis gjennom å prise enkle selvkomponerte derivatprodukter.

Før vi går videre er det viktig å vise hvordan man fastsetter en riktig pris for disse produktene.

### 8.1 Hvordan prise en default basket?

Når vi her skisserer prisingsproblemet for en default basket ser vi på det mest generelle tilfellet. En såkalt "first m-of-n to default". En slik kontrakt tilbyr kjøperen beskyttelse mot de m første konkursene i en portefølje av n aktiva. Typisk kan den underliggende porteføljen (n) variere i størrelsesorden 5-100 ulike aktiva, der 10-20 nok er det mest vanlige. M vil også nødvendigvis måtte være mindre eller lik n, og typisk ser man at m er ganske mye mindre enn n.

Vi setter her T lik lengden på kontrakten som blir inngått. På de ulike tidspunktene  $0 < T_1, T_2, \dots, T_m \leq T$  må kjøperen av kontrakten betale en fast premie s til selgeren. Normalt vil disse premiene bli betalt kvartalsvis eller halvårlig. Dersom den m-te konkursen blir et faktum før kontrakten utløper vil disse premiebetalingene opphøre og selger må innfri sine forpliktelser overfor kjøper. Definer følgende variabler:

M = Pålydende verdi på kontrakten

K = Antall perioder pr. år

R(m) = Recovery rate

a = påløpte premiebetalinger mellom to innbetalingsdatoer (her notert i prosent av pålydende)

$\tau(m)$  = tidspunkt for m-te konkurs

Ved verdsettelse av slike kontrakter er standard metode å bestemme s slik at forventet utbetalinger er lik forventet innbetalinger, ergo at forventet verdi på kontrakten ved inngåelse skal være lik null. Dette gir oss følgende sammenheng:

$$E \left[ \sum_{i=1}^{k \times T} \left( e^{-\int_0^{\frac{i}{k}} r(s) ds} \times M \times \frac{S}{K} \times 1_{\{\tau(m) > \frac{i}{k}\}} \right) - e^{-\int_0^{\tau(m)} r(s) ds} \times M \times (1 - R(m) - a) \times 1_{\{\tau(m) < T\}} \right] = 0 \quad (8.1)$$

Det første leddet i forventningen er de periodiske innbetalingene fra kjøper til selger. Det andre leddet er forventet utbetalinger fra selger til kjøper ved m-te konkurs.

## 8.2 Hvorfor er korrelasjon viktig for default baskets?

Det bør ikke være så vanskelig å innse at korrelasjoner vil spille en betydelig rolle når man ønsker å prise en default basket. Dette er lettest å se dersom vi tar i betraktning de to ekstremtilfellene – perfekt korrelasjon eller full uavhengighet. Dersom vi har perfekt korrelasjon vil det ikke spille noen rolle hvilken n vi velger i vår default basket. Her vil nemlig alle eller ingen aktiva i den underliggende porteføljen gå konkurs, og dermed vil det koste like mye å forsikre seg mot den første konkursen som mot den siste konkursen. Dersom vi har full uavhengighet i porteføljen vår, vil sannsynligheten for utøvelse av en kontrakt synke jo høyere n vi velger (gitt at m er konstant), og det vil dermed være dyrere å forsikre seg mot den første konkursen enn mot konkurs 2, eller 3 osv. Selvfølgelig vil den faktiske korrelasjonen ligge en plass mellom disse ekstremtilfellene, og det er heller ikke usannsynlig at den også vil variere i løpet av kontraktperioden.

## 8.3 Hvordan prise en CDO?

Å prise en CDO er i prinsippet ikke så ulikt å prise en default basket, men det faktum at vi må ta hensyn til flere ulike transjer kompliserer problemet noe. Vi følger også her det generelle prinsippet om at forventa utbetalinger skal være lik forventa innbetalinger. Husk fra tidligere kapittel at en transje absorberer tap som forekommer i referanseporteføljen mellom to forhåndsspesifiserte grenser,  $K_A$  og  $K_D$ . Vi definerer videre  $M(t)$  lik det kumulative tapet til en

gitt transje, og  $L(t)$  lik det kumulative tapet til referanseporteføljen på tidspunkt  $t$ . Funksjonen  $M(t)$  ser da slik ut:

$$M(t) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } L(t) \leq K_A \\ L(t) - K_A & \text{hvis } K_A \leq L(t) \leq K_D \\ K_D - K_A & \text{hvis } L(t) \geq K_D \end{cases}$$

Vi ser av funksjonsbeskrivelsen over at det å kunne bestemme tapsfunksjonen til referanseporteføljen er det som er sentralt for å kunne prisse en CDO- transje.

Anta nå at vi har  $N$  aktiva i den underliggende referanseporteføljen, hver med en pålydende verdi på  $A_n$  og en recovery rate på  $R_n$ . La  $L_n = (1-R_n)A_n$  betegne tapet gitt at aktivum  $n$  går konkurs. Anta videre at  $\tau_n$  betegner konkurstidspunktet for aktivum  $n$ . Vi innfører så en telleprosess  $N_n(t) = 1_{\{\tau_n < t\}}$  som hopper fra 0 til 1 når aktivum  $n$  går konkurs. Vi kan da skrive porteføljens totale tap som:

$$L(t) = \sum_{n=1}^N L_n N_n(t) \quad (8.2)$$

Det kan være verdt å merke seg at  $L(t)$  og derfor også  $M(t)$  er rene hoppeprosesser. Ved hvert hopp i  $M(t)$  må transjeinvestoren betale et beløp til forsikringskjøperen.

Vi antar nå for enkelhets skyld at  $R_n$  og  $A_n$  er de samme for hvert aktivum i porteføljen. Vi kan da skrive det forventede prosentvise kumulative tapet (i diskret tid) på en gitt transje som:

$$\begin{aligned} EL_{(K_A, K_D)}(t_i) &= \frac{E[M(t_i)]}{K_D - K_A} \\ &= \frac{1}{K_D - K_A} \sum_{n=1}^N (\min(L_n(t_i), K_D) - K_A)^+ p_n \end{aligned} \quad (8.3)$$

Dersom vi beveger oss over til en kontinuerlig fordelingsfunksjon for porteføljens tap viser Schönbucher (2001) at vi kan skrive det forventede prosentvise kumulative tapet for en gitt transje slik:

$$EL_{(K_A, K_D)}(t_i) = \frac{1}{K_D - K_A} \left( \int_{K_A}^1 (x - K_A) dF(x) - \int_{K_D}^1 (x - K_D) dF(x) \right) \quad (8.4)$$

Vi ønsker nå å bestemme en premie  $W$  slik at forventede utbetalinger fra transjens investor er lik forventede premieinnbetalinger fra sikringskjøperen. La  $0 \leq t_0 < \dots < t_{m-1}$  betegne tidspunktene da premiene skal betales. La oss videre betegne de forventede diskonterte innbetalingene som:

$$PB = \sum_{i=1}^m \Delta t_i WP(t_0, t_{i-1}) [1 - EL_{(K_A, K_D)}(t_{i-1})] \quad (8.5)$$

der  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  og  $P(t_0, t_{i-1})$  betegner diskonteringsfaktoren. Vi ser tydelig at det forventede prosentvise tapet reduserer det pålydende beløpet, som i sin tur er det beløpet som ligger til grunn for størrelsen på premieinnbetalingene.

Dernest ønsker vi å finne et uttrykk for de forventede utbetalingene som følge av at konkurser oppstår i porteføljen. Vi betegner dette uttrykket som  $DB$  (default betalinger), og i kontinuerlig tid kan vi skrive uttrykket slik:

$$DB = \int_{t_0}^{t_m} B(t_0, s) dEL_{(K_A, K_D)}(s) \quad (8.6)$$

som i sin tur kan skrives på diskret form ved følgende tilnærming:

$$DB \approx \sum_{i=1}^m B(t_0, t_i) (EL_{(K_A, K_D)}(t_i) - EL_{(K_A, K_D)}(t_{i-1})) \quad (8.7)$$

Den korrekte prisen på en gitt CDO transje er da definert som den periodiske premien  $W^*$  slik at  $PB(W^*) - DB(W^*) = 0$

Setter vi inn for PB og DB kommer vi frem til følgende uttrykk:

$$W^* = \frac{\sum_{i=1}^m B(t_0, t_i) (EL_{(K_A, K_D)}(t_i) - EL_{(K_A, K_D)}(t_{i-1}))}{\sum_{i=1}^m \Delta t_i B(t_0, t_{i-1}) [1 - EL_{(K_A, K_D)}(t_{i-1})]} \quad (8.8)$$

Igjen ser vi fra uttrykket over at prisingsproblemet er trivielt så lenge vi er i stand til å beregne det forventede tapet i den underliggende porteføljen. Dette er derimot ikke et trivielt problem, og vårt mål videre i oppgaven vil være å presentere ulike metoder for hvordan man kan beregne en slik tapsfordeling.

#### **8.4 Korrelasjonstrading i CDO- markedene**

At korrelasjoner spiller en betydningsfull rolle i korrekt prising av en CDO transje er ingen godt bevart hemmelighet. Sett fra sikringskjøper sin side vil for eksempel alltid en egenkapitaltransje være dyrere dersom korrelasjonene i den underliggende porteføljen er lave, enn dersom korrelasjonene er høye. Det motsatte argumentet gjelder for senior-/superseniortransjen. Denne transjen blir dyrere for sikringskjøper jo høyere korrelasjonene i den underliggende porteføljen er. Hvordan har så dette seg? La oss illustrere poenget i en litt mer hverdagslig setting.

Se for deg to ulike mus. Den ene musen har, som mus flest, bare ett liv. Den andre musen er imidlertid mer spesiell, og har i likhet med katten, hele ni liv. Se nå for deg at de to musene kommer inn i et stort rom, der gulvet i rommet er dekket med musefeller. Begge heltene i historien har ikke spist på flere dager, og det er derfor helt nødvendig for disse å krysse over til den andre siden av rommet for å kunne komme seg inn i spisskammerset. Det er bare en hake ved oppdraget – det må gjøres med bind for øynene. Den første musen som bare har ett liv vil i denne situasjonen foretrekke at musefellene er plassert i klynger. Den vil likevel dø dersom den går i en felle, men dersom fellene er plasserte i klynger vil musen faktisk ha en liten sjanse til å overleve ferden over gulvet. For den andre musen gjelder det motsatte. Dersom denne musen går i en klynge med feller vil den miste alle sine ni liv og dø med en gang. Dersom den går i bare en felle mister den bare ett liv. Denne musen vil derfor

foretrekke at musefellene er spredt jevnt utover gulvet, for slik kan den maksimere sine sjanser for å komme over gulvet med minst ett liv i behold.

La oss nå trekke parallellene tilbake til den finansielle verden. Musen med ett liv kan sammenlignes med en egenkapitaltransje- investor. Dersom aktivaene i den underliggende porteføljen er preget av høye korrelasjoner (musefeller plassert i klynger) vil sannsynligheten for at investoren må innfri betalingsforpliktelser være lavere enn ved lave korrelasjoner. På samme måte kan musen med ni liv sammenlignes med en seniortransje- investor. Her vil høye korrelasjoner føre til økte sjanser for at store deler av porteføljen går konkurs og dermed at seniortransjen må møte sine betalingsforpliktelser.

Denne erkjennelsen av at korrelasjoner har så mye å bety for de ulike transjene i en CDO har resultert i at mange i dagens CDO- markeder driver med det man kaller for korrelasjonstrading. Her kan man altså utføre transaksjoner basert på egne forventninger om hvordan korrelasjoner i markedet skal utvikle seg. La oss ta et eksempel på dette:

Du er en aktiv trader som følger CDO- markedet tett. Du mener å ha gode grunner til å tro at de implisitte korrelasjonene i dagens marked er for lave, og at disse skal stige fremover. Hvordan kan du posisjonere deg for å tjene penger på dette? Jo, du kan gjøre følgende transaksjoner:

1. Short egenkapitaltransjer
2. Kjøp Seniortransjer

Ved å ta disse grepene vil du ha en posisjon som kan betegnes som å være lang korrelasjon. Dersom korrelasjonsforventningene i markedet stiger i fremtiden vil prisen på egenkapitaltransjene synke, mens prisen på seniortransjene vil stige. I denne situasjonen vil du kunne realisere en gevinst. På samme måte kan du ved å gjøre de motsatte grepene, gå short korrelasjon.

## 9. To ekstreme tilfeller

Vi viste i forrige kapittel, at dersom man kunne beregne tapsfordelingen til den underliggende porteføljen, så ville prisfastsettelse av et gitt kredittderivat være redusert til et trivielt problem. La oss derfor starte med det enkleste først, og se på de to ekstreme tilfellene der vi har henholdsvis uavhengighet og perfekt korrelasjon. Dette vil også hjelpe oss å få en bedre forståelse av BET- metoden, som vi skal presentere senere i dette kapitlet.

### 9.1 Uavhengighet

Her ser vi på følgende situasjon:

- Vi betrakter konkurs eller overlevelse av en portefølje inntil en bestemt tidshorisont  $T$ . Antar renten er null.
- Vi har en portefølje bestående av  $N$  eksponeringer til  $N$  forskjellige aktiva.
- Hver av eksponeringene har størrelse  $L$ , og har identisk "recovery rate"  $\pi$ .
- Konkurs av hvert aktivum skjer uavhengige av hverandre, og hvert aktivum har konkurssannsynlighet  $p$ .

Vi kan kalle  $X$  for antall konkurser i perioden frem til  $T$ . Det totale tapet ved konkursene er da:

$$X(1 - \pi)L,$$

Dersom vi antar at konkurser skjer uavhengig av hverandre og sannsynligheten for konkurs er konstant  $p$  over tidsperiode  $T$ , kan vi beskrive tapsfordelingen til porteføljen av  $N$  antall lån ved hjelp av en enkel binomisk fordeling. La oss repetere hva som kjennetegner denne:

#### **Binomisk situasjon**

Det utføres  $N$  binomisk forsøk;

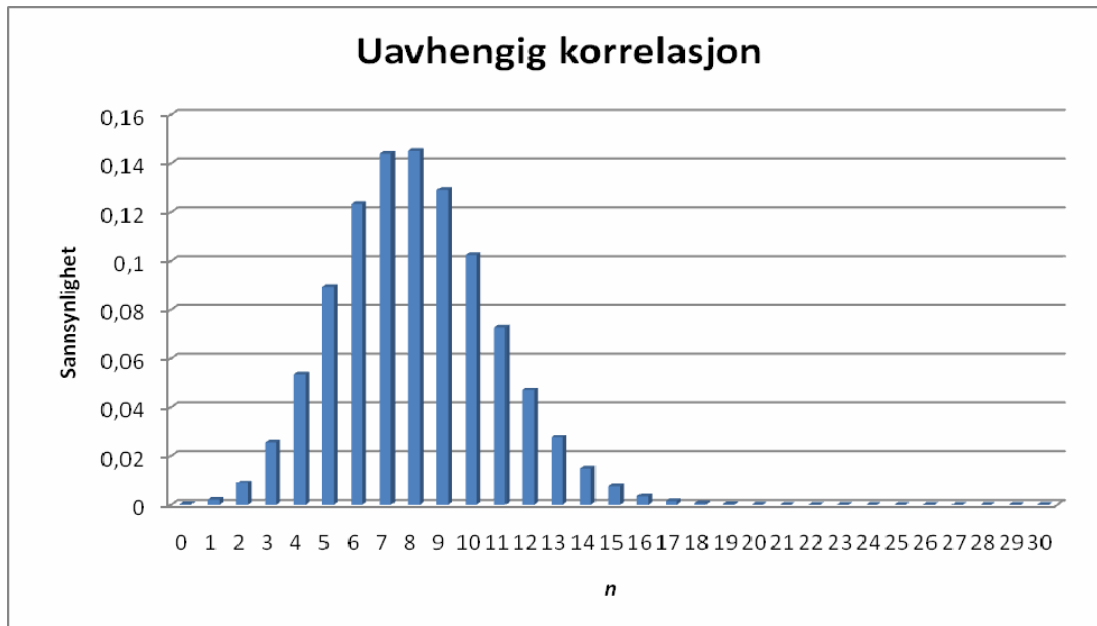
1. Hvert forsøk gir enten suksess eller fiasko.
2. Sannsynligheten  $p$  for suksess er den samme i hvert forsøk.
3. Forsøkene er uavhengige.

Antall suksesser  $X$  i løpet at de  $N$  forsøkene observeres.

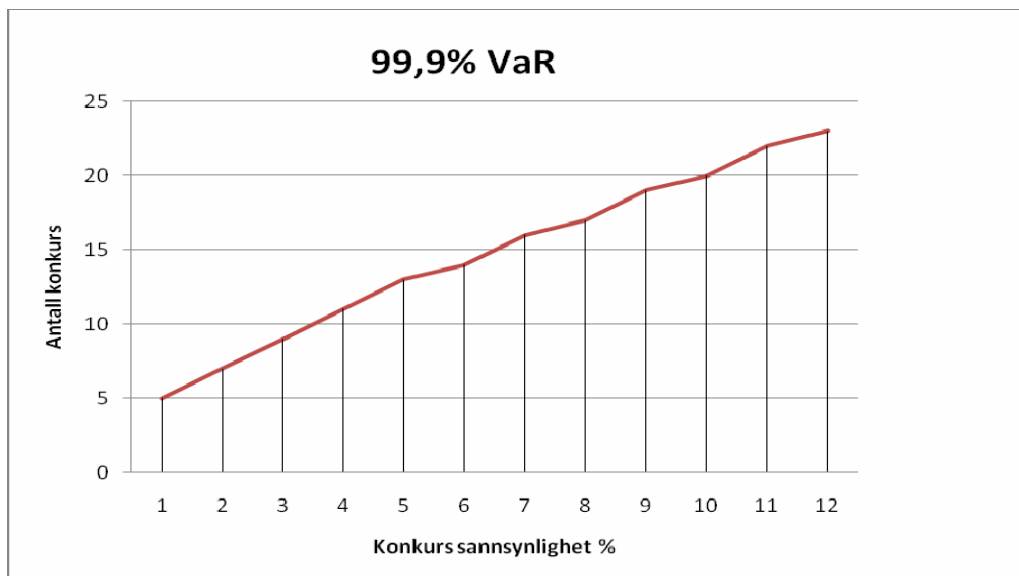


Formlene (5.12) og (5.13) fra kapittel 5 gir angir henholdsvis den binomiske fordelingsfunksjonen  $[b(n; N, p)]$ , og den binomiske kumulative fordelingsfunksjonen  $[B(n; N, p)]$ .

I vårt tilfelle blir  $b(n; N, p)$  lik sannsynligheten av eksakt  $X = n$  konkurser innen tidsperiode  $T$ , og  $B(n; N, p)$  lik sannsynligheten for antall konkurser lavere eller lik  $n$ .



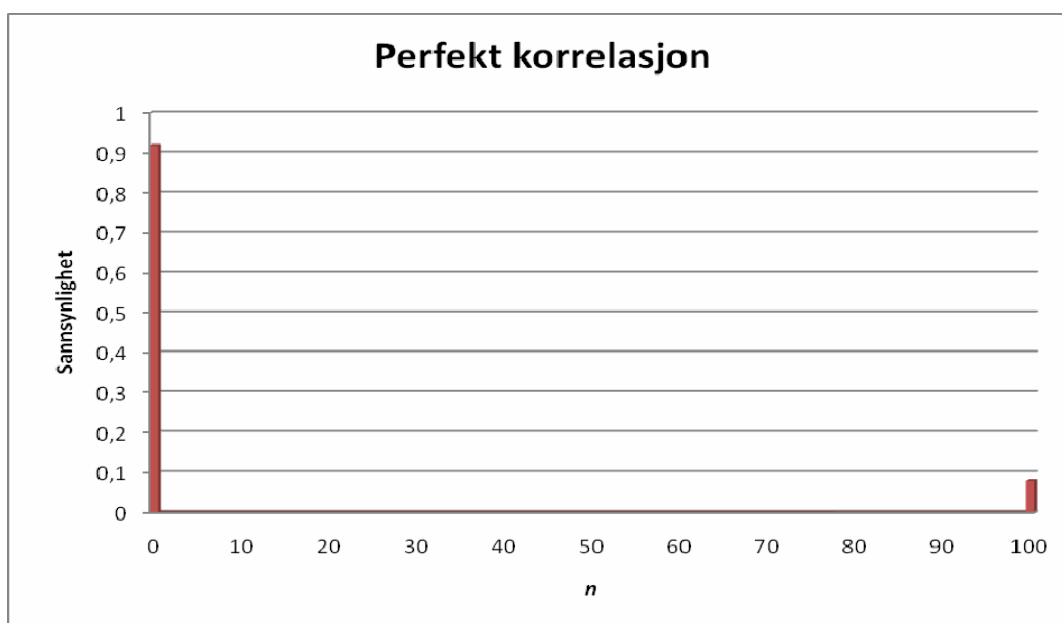
Diagrammet ovenfor viser fordeling av tapene ved konkurs under uavhengighet. Her har vi brukt antall aktiva  $N = 100$  og individuell konkurssannsynlighet  $p = 8\%$ . Vi ser at diagrammet er klokkeformet, som betyr at konkurssannsynlighetene er tilnærmet normalfordelte. Vi ser også at fordelingen har veldig tynn hale. Dette kan uttrykkes ved hjelp av VaR. Med 8% konkurssannsynlighet ligger 99% VaR på 15 konkurs. Det betyr at det er 99% sikker at det ikke oppstår mer enn 15 konkurs innen tidsperiode  $T$ . Med VaR-metoden får vi altså et mål på nedsiderisikoen for investering. 99,9% VaR ligger på 17 konkurser, og 99,99% VaR på 20 konkurser. Tabellen nedenfor viser 99,9% VaR for ulike individuelle konkurssannsynligheter:



## 9.2 Perfekt korrelasjon

En situasjon med perfekt korrelasjon vil være beskrevet ved følgende karakteristika:

- Enten alle aktiva går konkurs (i dette tilfellet 8 % sannsynlighet)
- Eller ingen av aktiva går konkurs (100 % – 8 % = 92 % sannsynlighet)



Figuren ovenfor viser fordelingen av konkursbegivenheter når konkurser er perfekt korrelerte. Her har vi tatt utgangspunkt i de samme tallene som tidligere brukt;  $N = 100$  og  $p = 8\%$ . I denne sammenhengen gir VaR ingen meningsfulle mål på porteføljens risiko, fordi VaR verdien vil være på 100 konkurser for alle nivåer over 92 %.

De to ekstreme tilfellene vi har sett på til nå er svært enkle å regne på, siden vi kan gjøre bruk av den binomiske fordelingen. Verden er imidlertid ikke karakterisert av verken uavhengighet eller perfekt korrelasjon, og dette gjør det atskillig vanskeligere å nyttegjøre seg av den binomiske fordelingen som regneverktøy. Moody's har imidlertid utviklet en metode som prøver å løse dette problemet.

### **9.3 Binomisk ekspansjonsteknikk (BET)**

Den binomiske ekspansjonsteknikken er en metode som ble utviklet av, og brukes av ratingselskapet Moody's for å måle konkursrisiko til obligasjons- og låneporteføljer. Dette var en av de første metodene som forsøkte å kvantifisere risiko til porteføljer av risikable aktiva. Denne metoden er ikke basert på en formell teoretisk modell, men er snarere en praktisk tilnæringsmåte. Metoden kan derfor være unøyaktig, men den er likevel blitt en slags markedsstandard innen risikomåling av porteføljer.

Det er noen fordeler med å bruke BET:

- Den klarer å fange opp effekter av "hale begivenheter" ved å telle alle mulige konkurs scenarioer.
- Den er relativt enkel å implementere i forhold til andre modeller som for eksempel krever Monte Carlo simulering.

Rasjonale for å bruke en BET- tilnærming kan forklares gjennom å se på følgende tenkte situasjon. Anta at vi har den samme låneportefølje som vi brukte tidligere i kapittelet, der  $N = 100$  lån med samme størrelse hver. Hvert lån i porteføljen har også samme tap  $L$  ved konkurs og samme konkurssannsynlighet  $p = 8\%$ . La oss videre definere tapsbeløpet ( $X$ ) ved konkurs som  $X = nL$ , der  $n$  nå er antallet konkurser i porteføljen. Ved uavhengighet kan vi regne på sannsynligheten for et gitt tap ved hjelp av formel (5.12):

$$P[X = nL] = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} =: b(n; N, p).$$

På den andre siden, dersom vi antar at konkursene er perfekt korrelerte (enten alle eller ingen aktiva går konkurs). Da har vi:

$$P[X > 0] = p = 8\% = P[X = NL],$$

$$P[X = 0] = 1 - p = 92\% = P[X = 0].$$

I dette tilfellet er det 8 % sjanse for at tapet blir på hele  $NL$ .

Dermed har vi fått følgende resultater:

Ved perfekt uavhengighet med  $N = 100$  med tap  $L$  og sannsynlighet for tap  $p = 8\%$  hver. Sannsynligheten for tap  $X$  mindre enn  $x$  er:

$$P[X \leq x] = B(n; N, p)$$

Hvor parametrene er:

- $N = 100$
- $n = [x/L]$
- $p = 8\%$

Ved perfekt avhengighet blir den justerte  $N' = 1$  aktivum med tap  $L' = NL$  og en taps sannsynlighet  $p = 8\%$ . Tapsfordelingen er da gitt ved:

$$P[X \leq x] = B(n'; N', p)$$

Hvor:

- $N' = 1$
- $n' = [x/L']$
- $p = 8\%$

Det Moody's i praksis gjør er å sammenligne de to ekstreme tilfellene, og deretter tilnærme seg en grad av avhengighet i porteføljen ved å velge  $N' = D < N$  uavhengige aktiva, hver med

et tap gitt ved  $L' = \frac{LN}{D}$ . Parameteren  $D$  kalles diversifiseringsscoren til porteføljen, og det er denne parameteren som er selve hovedessensen i BET metoden. Poenget er at vi kan sette sammen en hypotetisk portefølje av uavhengige aktiva ved å bruke denne faktoren  $D$ , som vil ha de samme konkursegenskapene som den opprinnelige porteføljen. Mer bestemt kan egenskapene til den opprinnelige porteføljen bli modellert ved hjelp av en fiktiv portefølje bestående av  $D$  uavhengige obligasjoner med samme pålydende verdi, og samme konkurssansynlighet (bestemt som den vektete gjennomsnittlige konkurssansynligheten til den opprinnelige porteføljen). Vi kommer tilbake til hvordan denne diversifiseringsscoren kan beregnes.

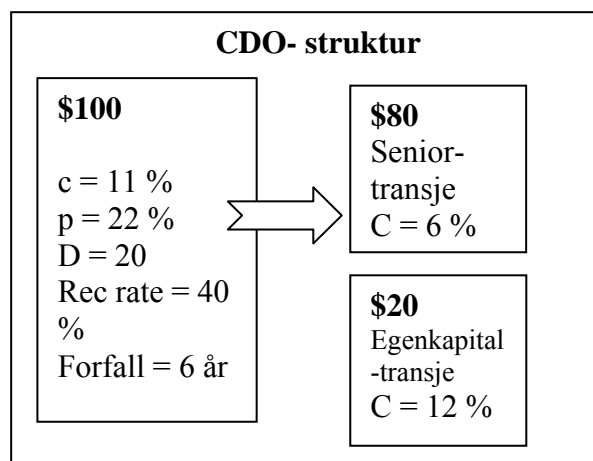
Den kumulative tapsfordelingen til "BET- porteføljen" med diversifiseringsscore  $D$  vil se slik ut:

$$p^{BET}(x; N, K, D) := B\left(\left[\frac{x}{L'}\right]; D, p\right) \quad (9.1)$$

hvor  $N$  er antall aktiva i porteføljen,  $K$  er total potensiell tap ved konkurs,  $p$  er gjennomsnittlig individuell konkurssansynlighet, og  $L' = K/D$ .

### 9.3.1 Eksempel på bruk av BET

I dette eksempelet skal vi se på hvordan Moody's beregner risiko for en CDO. Anta at den underliggende porteføljen har en diversifiserings score  $D = 20$ , gjennomsnittlig konkurssansynlighet på 22 %, "recovery rate" på 40 %, 6 år til forfall, og betaler en gjennomsnittlig kupong på 11 %. Figuren nedenfor illustrerer strukturen i CDO- en:



I utgangspunktet har seniortransjen da følgende kontantstrøm (halvårlig basis):

Senior CFs	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	82,40 %
------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------

Vi betegner nå  $E_j$  som tap under hvert senario  $j$ . Tapet, uttrykkes som prosent, og beregnes ved å ta nåverdien av kontantstrømmen til seniortransjen, og ved å anta det er  $j$  konkurser.

Kupongrenten blir brukt som diskonteringsrente (her: 6 %). Deretter kan vi beregne det totale forventede tapet for seniortransjen slik:

$$\text{Forventet tap} = \sum_{j=1}^D P_j E_j$$

I dette tilfellet vil seniortransjen ikke tape noe så lenge antall konkurser ligger under 11.

Dersom antall konkurser ligger på 11 eller større, vil seniortransjen måtte realisere et tap som øker med antall konkurser. Beregningene som følger under er for et scenario med 11 konkurser. Senior delen vil da få følgende kontantstrøm og netto nåverdi:

Senior CFs	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	81,99 %
Senior NPV	79,71 %												

Her antok vi, som Moody's har gjort som standard, at konkursene er "front loaded", det vil si at 50 % inntreffer ved slutten av første året og 10 % inntreffer ved slutten av hvert år for 5 etterfølgende år:

Year	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Loss distrib	0 %	50 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %

For å finne sannsynligheten for 11 konkurser har vi brukt den standard binomiske fordelingen, som vi har forklart tidligere:

$$P(X = 11) = \binom{20}{11} 0,22^{11} (1 - 0,22)^9 = 0,1049\%$$

Tapet under 11 konkurser blir beregnet slik:

$$\frac{80 - 79,71}{80} = 0,3637\%$$

For grundigere forklaringer på hvordan kontantstrømmene blir beregnet henviser vi leseren til appendix D.

I tabellen under har vi oppsummert resultatet av BET beregningen. Første kolonnen viser antall konkurs under hvert scenario. Den andre kolonnen viser sannsynlighet for at det scenarioet vil oppstå. Den tredje kolonnen viser tapet under hvert senario.

Oppsummering av BET beregningen		
Antall konkurs	Sannsyn. for konkurs (%)	Tapet (%)
0	0,6949%	0,0000 %
1	3,9197 %	0,0000 %
2	10,5027 %	0,0000 %
3	17,7738 %	0,0000 %
4	21,3058 %	0,0000 %
5	19,2299 %	0,0000 %
6	13,5595 %	0,0000 %
7	7,6490 %	0,0000 %
8	3,5058 %	0,0000 %
9	1,3184 %	0,0000 %
10	0,4090 %	0,0000 %
11	0,1049 %	0,3637 %
12	0,0222 %	4,4721 %
13	0,0039 %	8,5806 %
14	0,0005 %	12,6890 %
15	0,0001 %	16,7975 %
16	0,0000 %	20,9059 %
17	0,0000 %	25,0144 %
18	0,0000 %	29,1228 %
19	0,0000 %	32,4388 %
20	0,0000 %	35,2443 %

Den totale forventet tap blir beregnet følgende:

$$\text{Forventet tap} = 0,6949\% \times 0,0000\% + 3,9197\% \times 0,0000\% + \dots + 0,0000\% \times 35,2443\% = 0,0018\%$$

Moody's har selv utviklet en tabell som kan brukes for å fastslå ratingnivå, basert på kumulativt forventet tap (se appendix E). Basert på denne tabellen vil seniortransjen i dette eksemplet være ratet Aaa ("cut-off" verdi er 0,00220).

Den mest kritiske faktoren i BET beregningen er som vi har sagt før diversifiseringsscoren  $D$ . Det er denne faktoren som til slutt bestemmer konkursegenskapene til den underliggende porteføljen. Moody's har utviklet en rekke regler for hvordan man kan beregne diversifiseringsscoren. Her viser vi noen eksempler på disse:

- Eksponeringsstørrelse: I tilfeller der man har porteføljer som er preget av en konsentrasjon av få og store eksponeringer vil dette bidra til å redusere diversifiseringsscoren. Dersom man i motsatt fall har mange ulike eksponeringer med identiske størrelser, vil dette øke diversifiseringsscoren.
- Bransjediversifikasjon: Dersom det er flere aktiva som tilhører samme bransje, vil diversifiseringsscoren reduseres. I motsatt tilfelle vil  $D$  være høy dersom få aktiva tilhører samme bransje.

BET metoden blir fortsatt brukt av Moody's og andre for å modellere konkursavhengighet, selv om modellen har sine svakheter, som for eksempel subjektiv fastsettelse av  $D$ . BET er først og fremst utviklet for å identifisere og tallfeste risiko, og bør derfor ikke brukes til prisingsformål. Modellen er basert på historisk erfaring og ikke på markedsdata. Dette egner seg god til måling av risiko, men ikke til prising. I tillegg gir modellen ikke presise nok estimat av tapsfordelingene, og tidsdimensjonen er heller ikke tatt hensyn til i modellen.



## 10. Stor homogen portefølje (LHP)

I dette kapitlet ønsker vi å presentere en modell som leder til den eneste ”closed form” løsningen på våre prisingsproblem i denne oppgaven. En ”closed form” løsning er attraktiv på den måten at den er enkel å implementere, og at den kan gi en pekepinn på hvilket område man kan forvente at prisen på for eksempel en CDO transje kommer til å ligge. Modellen vi skal presentere bygger på arbeid gjort av Vasicek (1987, 1991 og 2002), og kalles for ”stor homogen portefølje” tilnærmingen (LHP).

Selve byggsteinene i denne modellen er énfaktormodellen som vi presenterte i kapittel 7. Ved å bruke denne og legge til et sett med antagelser vil vi kunne være i stand til å komme fram til en relativt enkel sluttformel. Vi skal i fortsettelsen gå gjennom hver enkelt av antagelsene som ligger til grunn for modellen, og til slutt ønsker vi å vise hvilke resultat modellen gir oss sammenlignet med mer realistiske simuleringsteknikker.

Den første antagelsen vi skal gjøre er at korrelasjonskoeffisientene mellom hvert par av aktiva i den underliggende porteføljen er like. Dette var den samme antagelsen vi gjorde når vi estimerte korrelasjoner i kapittel 7.3.1. Mer formelt kan vi skrive antagelsen på følgende form:

$$\text{korr}(A_{i,t}, A_{j,t}) = \rho_{i,j,t} = \rho_t \quad \text{for alle } i \neq j$$

Vi minner igjen om at korrelasjonene er drevet av vår velkjente énfaktormodell, som består av en systematisk faktor  $Y$  og en idiosynkratisk faktor  $\varepsilon$  :

$$A_i = \sqrt{\rho_i} Y + \sqrt{1 - \rho_i} \varepsilon_i$$

Vi husker også at logikken i modellen var at først får vi materialisert en  $Y$ - verdi, og betinget av tilstanden i økonomien så er hver konkurs uavhengig av hverandre. Hvert aktivum går konkurs med en konkurssannsynlighet  $p_i(y_t)$ , som altså er avhengig av den økonomiske tilstanden  $Y$ . Konkurs inntreffer dersom verdien på eiendelene faller under den kritiske grensen  $k_i$ .

Vi kan da skrive den betingede konkurssannsynligheten slik:

$$p_i(y_t) = P[A_{i,t} < k_{i,t} | Y_t = y] \quad (10.1)$$

$$= P[\sqrt{\rho_t} Y_t + \sqrt{1 - \rho_t} \varepsilon_{i,t} < k_{i,t} | Y_t = y]$$

$$= P\left[\varepsilon_{i,t} < \frac{k_{i,t} - \sqrt{\rho_t} Y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}} \mid Y_t = y\right]$$

$$= N\left(\frac{k_{i,t} - \sqrt{\rho_t} y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}}\right) \quad (10.2)$$

Vi antar nå at vi vet de individuelle konkurssannsynlighetene for hvert aktivum på de ulike tidspunktene  $t$ . Dette betyr at vi kan finne verdien på den kritiske grensen  $k_{i,t}$  for hvert aktivum basert på følgende sammenheng (jf. Kapittel 7):

$$P(A_{i,t} \leq k_{i,t}) = p_{i,t}$$

$$p_{i,t} = N(k_{i,t}) \Leftrightarrow N^{-1}(p_{i,t}) = k_{i,t}$$

Setter vi dette uttrykket inn (10.2) får vi:

$$p_i(y_t) = N\left(\frac{N^{-1}(p_{i,t}) - \sqrt{\rho_t} y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}}\right) \quad (10.3)$$

Vi forenkler ytterligere ved å anta at konkurssannsynligheten er den samme for hvert aktivum i den underliggende porteføljen, og forenkler uttrykket (10.3) til:

$$p(y_t) = N\left(\frac{N^{-1}(p_t) - \sqrt{\rho_t} y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}}\right) \quad (10.4)$$

La oss stoppe opp litt her og se på hvordan fordelingen av konkurssannsynlighetene i den underliggende porteføljen ser ut, gitt de resultatene vi nå har kommet frem til. For enkelhets skyld dropper vi nå fotskriften t.

Sannsynligheten for å se akkurat n konkurser i en portefølje med N aktiva vil være gitt ved gjennomsnittet av de betingede sannsynlighetene for n konkurser på bakgrunn av alle mulige verdier Y kan anta, og deretter vektet med tetthetsfunksjonen til Y, her betegnet som  $n(y)$ :

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = n|Y = y]n(y)dy \quad (10.5)$$

Betinget av realiseringen av den systematiske faktoren Y vil sannsynligheten for å se n konkurser være gitt ved en vanlig binomisk fordeling (siden konkursene da er uavhengige):

$$P[X = n|Y = y] = \binom{N}{n} (p(y))^n (1 - p(y))^{N-n} \quad (10.6)$$

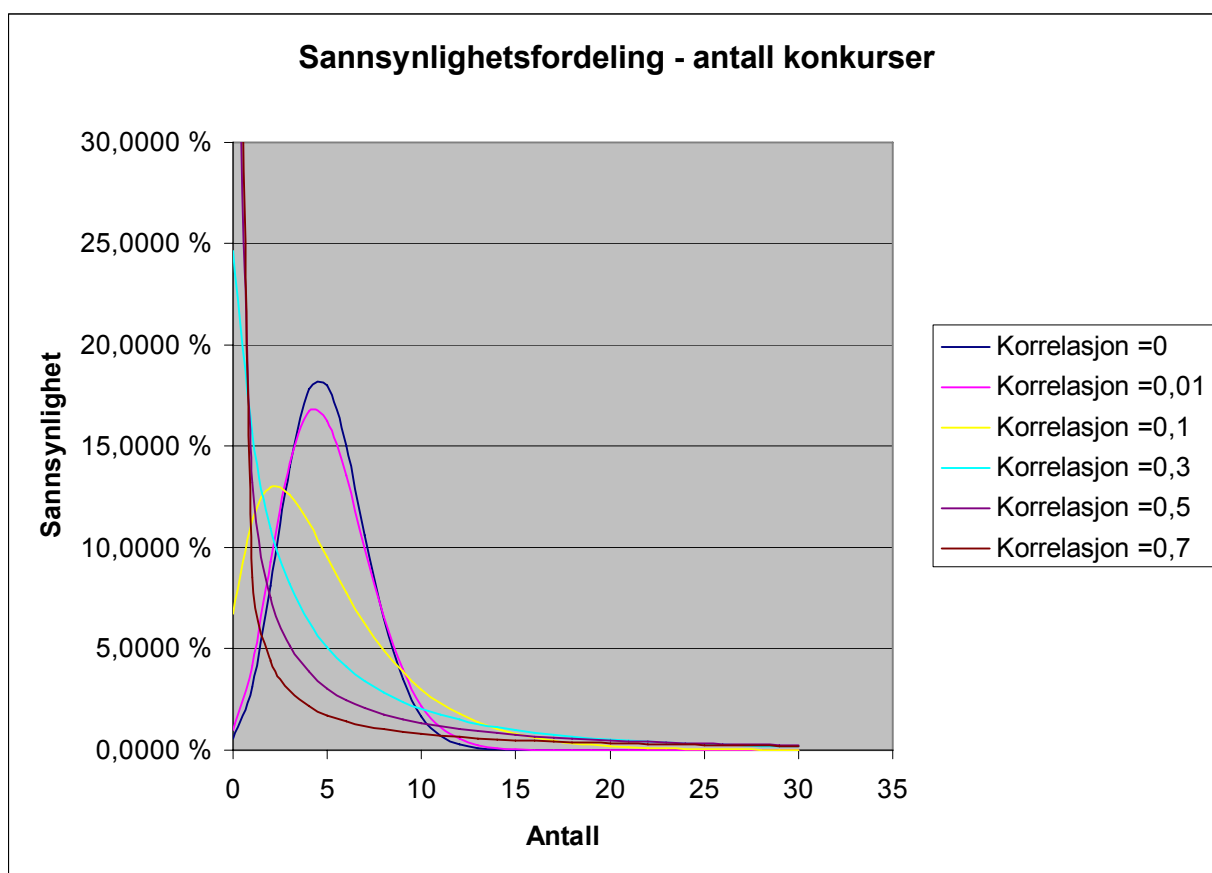
Vi kan nå sette (10.4) og (10.6) inn i (10.5) og få følgende uttrykk:

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{n} \left( N \left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^n \left( 1 - N \left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^{N-n} n(y)dy \quad (10.7)$$

Og til slutt kan vi da skrive den endelige sannsynlighetsfordelingen for antall konkurser i porteføljen som:

$$P[X \leq m] = \sum_{n=0}^m \binom{N}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left( N \left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^n \left( 1 - N \left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^{N-n} n(y)dy \quad (10.8)$$

Denne sannsynlighetsfordelingen er fullt mulig å evaluere i et verktøy som excel. I figuren under illustrere vi hvordan den ser ut for ulike verdier av korrelasjonskoeffisienten  $\rho$ . Vi antar her at vi har en underliggende portefølje med 100 aktiva, og de individuelle konkurssannsynlighetene er 5 %.



Vi ser, som vi ville forventet, at sannsynligheten for å se verdier som ligger langt ut i halen på fordelingen øker når korrelasjonen øker.

Selv om vi fant en grei måte å håndtere sannsynlighetsfordelingen til den underliggende porteføljen vår, har vi fremdeles et stykke til vi kan oppnå en enkel analytisk løsning på problemet. Dermed innfører vi en ny antagelse som kan hjelpe oss til å nå målet. Vi antar nå at vår underliggende portefølje består av et uendelig antall aktiva. Vi antar også at pålydende verdi på hvert aktivum er like stor, og at tapet gitt konkurs (recovery rate) er lik for alle aktiva. Det kan høres en tanke søkt ut å innføre så mange begrensninger, og i praksis er det selvsagt umulig å finne en portefølje med uendelig mange aktiva. Det viser seg likevel at resultatene denne modellen produserer er ganske gode. Dette kommer vi tilbake til senere.

Kort fortalt så viser Vasicek at gjennom å anta at vi har en uendelig stor underliggende portefølje, så følger det av de store talls lov, at den prosentvise andelen av porteføljen som går konkurs vil konvergere mot den individuelle konkurssannsynligheten, som jo er antatt å være lik for alle aktiva. La oss nå betegne  $X$  som andelen av porteføljen som går konkurs på et gitt

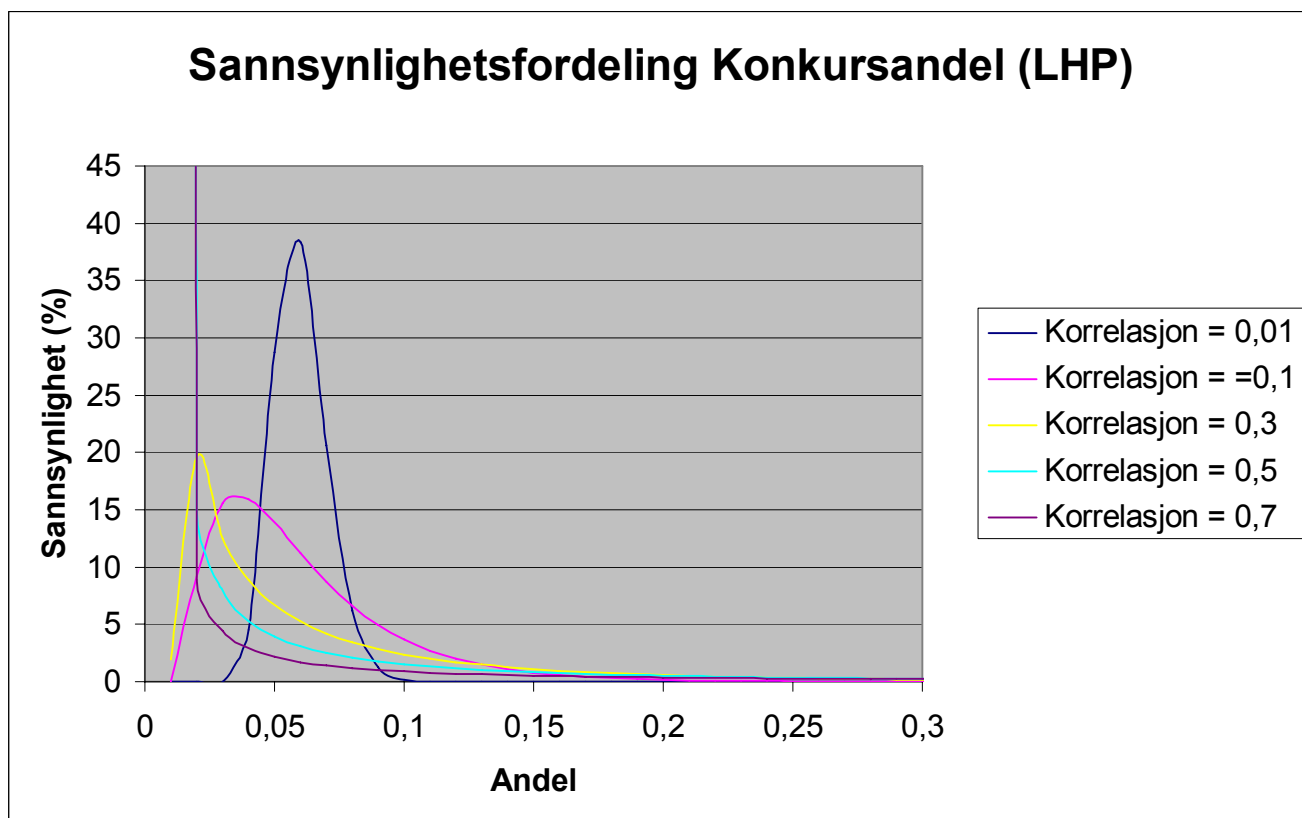
tidspunkt – eller konkurssraten til porteføljen. Husk også at vi antok at  $Y$  var en standard normalfordelt variabel (jf. Kapittel 7). Den ubetingede kumulative fordelingsfunksjonen til konkurssraten  $X$  for en portefølje med konkurssannsynlighet  $p(y)$  vil da være definert som:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P[X \leq x] && (10.9) \\
 &= P[p(y) \leq x] \\
 &= P\left[ N\left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \leq x \right] \\
 &= P\left[ Y \geq \left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right) \right] \\
 &= 1 - N\left( \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right) \\
 &= N\left( \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) && (10.10)
 \end{aligned}$$

Ved å derivere funksjonen vi nå har kommet frem til kan vi finne funksjonen for sannsynlighetstettheten. Schönbucher (2001) viser at denne kan skrives som:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left\{ \frac{1}{2}(N^{-1}(x))^2 - \frac{1}{2}(N^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x))^2 \right\} \quad (10.11)$$

Vi har nå endelig kommet frem til et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen til porteføljen vår som er veldig enkel å ha med å gjøre. Figuren nedenfor skisserer fordelingen for den samme porteføljen som vi skisserte i forrige figur. Legg merke til at vi her ikke har inkludert  $\rho = 0$ , siden dette ikke gir mening i formelen over:



Vi ser at fordelingen i denne figuren ligner fordelingen fra forrige figur. Bare for veldig små tapsandeler, og for veldig lave korrelasjoner er denne fordelingen unøyaktig, noe som bekrefter at det kan være fornuftig å bruke LHP- modellen når vi vil prise kredittderivater.

### 10.1 LHP- metoden i praksis

Vi ønsker nå å vise hvordan LHP- modellen kan brukes ved å prise transjener i en tenkt CDO- struktur. Resultatene fra denne fremgangsmåten vil så bli sammenlignet med en mer nøyaktig simulering.

Først må vi se litt nærmere på hvordan man formelt kan sette opp dette prisingsproblemet. Vi vet at det betingede prosentvise tapet i en portefølje,  $L(y)$ , kan bestemmes enkelt ved å multiplisere konkurssannsynligheten med tapet gitt konkurs. Sistnevnte er bestemt av størrelsen på ”recovery rate” faktoren, og vil i fortsettelsen bare bli betegnet som LGD (Loss Given Default). Fra (10.4) kan vi da sette opp følgende uttrykk:

$$L(y) = LGD \times N\left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (10.12)$$

For å prise en CDO transje trenger vi å vite sannsynligheten for at tapet i den underliggende porteføljen overstiger den øvre grensen for transjen (i vår oppgave betegnet som  $K_D$ ). Dette kan vi uttrykke som sannsynligheten for at faktoren  $y$  er mindre enn en bestemt kritisk verdi  $d(K)$ . Denne kritiske verdien finner vi ved å sette inn  $K_D$  for  $L(y)$  i (10.12) og løse ut for  $y$ .

$$P[L(y) \geq K_D] = P[y \leq d(K)] = N(d(K)) \quad (10.13)$$

$$d(K) = \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(K_D / LGD)}{\sqrt{\rho}} \quad (10.14)$$

La oss nå ta for oss en egenkapitaltransje, som har nedre grense ( $K_A$ ) lik null, og en øvre grense lik  $K_D$ . Det forventede tapet, som prosent av den totale porteføljen, vil for denne transjen være gitt ved følgende uttrykk:

$$E(L_{0,K_D}) = LGD \times E\left[N\left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \times I\{y > d(K)\}\right] + K_D N(d(K)) \quad (10.15)$$

Det første leddet i uttrykket over er det forventede tapet i de faktorscenarioer der tapet i den underliggende porteføljen ikke overskrider  $K_D$ . Dette blir fanget opp gjennom indikatorvariabelen  $I$ , som tar verdien 1 dersom  $y$  er større enn kritisk grense  $d(K)$ , og 0 ellers. Det andre leddet i uttrykket er det forventede tapet for transjen dersom tapet i den underliggende porteføljen overskrider transjens øvre grense  $K_D$ . I dette tilfellet går hele transjens pålydende verdi tapt. Det første leddet i forventningen gjør at det ikke finnes noen triviell løsning på uttrykket, men Löffler og Posch (2007) viser at forventningen kan skrives som:

$$E(L_{0,K_D}) = LGD \times N_2\left(N^{-1}(p), -d(K), -\sqrt{\rho}\right) + K_D N(d(K)) \quad (10.16)$$

Der  $N_2(x, y, \rho)$  betegner en standard kumulativ bivariat normalfordelingsfunksjon med korrelasjonskoeffisient  $\rho$ . En slik fordeling vet vi fra før er enkel å evaluere i excel (jf. fotnote i kapittel 7.3.1).

Vi kan nå faktisk bruke formelen fra (10.16) til å prise alle transjene i en CDO struktur. Anta at vi ønsker å prise en transje med nedre grense  $K_1$  og øvre grense  $K_2$ . Følgende generelle sammenheng viser oss hvordan dette kan gjøres:

$$E(L_{(K_1, K_2)}) = E(L_{(0, K_2)}) - E(L_{(0, K_1)}) \quad (10.17)$$

### 10.1.1 Eksempel

Vi skal nå prise en CDO som er kjennetegnet av følgende karakteristika:

- Konkurs sannsynligheten i porteføljen er gitt ved  $PD = 5\%$
- Tapet ved konkurs er gitt ved  $LGD = 60\%$
- Pålydende verdi på hvert aktivum settes til 100
- Tidshorisonen settes til  $T = 1$  år
- Premiene betales 1 gang pr. år

Strukturen i CDO-en er gitt i tabellen under:

Transje	Nedre grense	Øvre grense
Egenkapital	0 %	3 %
Junior	3 %	7 %
Senior	7 %	15 %
Supersenior	15 %	100 %

Gitt de antagelsene vi har gjort over gir LHP-modellen oss følgende resultater for ulike verdier på korrelasjonskoeffisienten:



	$\rho=0,1$	$\rho=0,3$	$\rho=0,5$	$\rho=0,7$
Transje	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap
Egenkapital	73,8320 %	54,1058 %	39,8489 %	27,4012 %
Junior	17,1575 %	19,5847 %	17,7718 %	14,7001 %
Senior	1,2174 %	5,8325 %	8,1018 %	8,6576 %
Supersenior	0,0016 %	0,1492 %	0,5241 %	1,0557 %

Vi merker oss at egenkapitaltransjen, i tråd med hva som ble sagt i kapittel 8, får et lavere forventa tap jo høyere korrelasjonen blir. For både senior- og superseniortransjen gjelder det motsatte. Dette også i tråd med hva vi ville forventet. Prisene på de ulike transjene er enkelt å beregne etter at det forventa tapet er estimert. Vi nøyer oss derfor med å beregne prisen for egenkapitaltransjen i de ulike tilfellene. Dette gjøres ved å bruke formel (8.8) fra kapittel 8. Den risikofrie renten settes lik 5 %, og resultatene er gjengitt i tabellen under:

	$\rho=0,1$	$\rho=0,3$	$\rho=0,5$	$\rho=0,7$
Pris (% av transjens pålydende verdi)	70,2311 %	51,4670 %	37,9055 %	26,0649 %

Legg merke til at prisene er konsistente med hva vi ville forvente. Jo høyere de forventa tapene for de ulike transjene er, jo høyere premie vil investorene kreve for å ta på seg risikoen knyttet til den aktuelle transjen.

For å se på hvor nøyaktig LHP- metoden er har vi også utført en mer nøyaktig simulering for de forventa tapene i den samme CDO- strukturen. Her har vi valgt å sette korrelasjonskoeffisienten til 0,1 og variert antallet aktiva (N) i den underliggende porteføljen:

	N=50	N=100	N=200	N=300	N=400	N=500
Transje	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap	Forventa tap
Egenkapital	64,3406 %	69,2612 %	71,2513 %	72,0118 %	72,6024 %	72,7869 %
Junior	21,3037 %	19,3557 %	18,2834 %	17,9320 %	17,8279 %	17,6969 %
Senior	2,5276 %	1,8831 %	1,5049 %	1,4188 %	1,3671 %	1,3689 %
Supersenior	0,0079 %	0,0042 %	0,0022 %	0,0017 %	0,0019 %	0,0023 %

Ikke uventet ser vi at jo høyere antallet aktiva i porteføljen, jo bedre blir tilnærmingen ved hjelp av LHP- metoden. For  $N < 100$  er LHP- tilnærmingen relativt upresis.

## 11. Korrelerte konkurser i redusert form modeller

Redusert form modeller har, siden de først dukket opp i på 90- tallet, blitt den klart mest populære måten å modellere problemer innen fagfeltet kredittrisiko. Dette er heller ikke et unntak når det kommer til modellering av korrelerte konkurser i porteføljer bestående av flere aktiva. Kort oppsummert kan vi si at det eksisterer fire ulike måter å modellere avhengighet mellom aktiva i et redusert form apparat:

1. Korrelerte konkursintensiteter
2. Simultane konkurshendelser
3. Smittsomme konkurser (Contagion models)
4. Bruk av Copula funksjoner

I dette kapittelet skal vi ta for oss de tre første metodene. Hovedvekten vil ligge på den første metoden – korrelerte konkursintensiteter, og denne vil vi utdype ganske grundig. De to andre metodene vil vi bare presentere kort. Når det gjelder bruk av Copula funksjoner så vil vi vie et eget kapittel til disse. Dette fordi forfatterne mener at dette modellapparatet skiller seg relativt mye fra de øvrige metodene, og fordi det også er behov for en grundig og mer omfattende presentasjon av temaet.

Før vi fortsetter med gjennomgangen av de ulike metodene vi har skissert vil vi kort repetere de viktigste byggesteinene i redusert form modeller fra kapittel 5. Vi startet med å innføre en slags telleprosess  $N(t)$ , som økte i verdi hver gang vi fikk et hopp i en eller annen gitt prosess. Basert på dette kunne vi så etter mye om og men komme frem til uttrykket for en såkalt Cox-prosess, som fra (5.30) kunne skrives som:

$$P[N(T) - N(t) = n] = E\left[P(N(T) - n(t) = n | \lambda)\right]$$
$$= E\left[\frac{1}{n!} \left(\int_t^T \lambda(s) ds\right)^n e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}\right]$$

Der  $\lambda(t)$  er en stokastisk prosess, som antas å være definert ved en standard geometrisk brownisk bevegelse.

Videre viste vi også i (5.31) at overlevelsessannsynligheten for en Cox- prosess var gitt ved:

$$P(0, T) = E \left[ e^{-\int_0^T \lambda(s) ds} \right]$$

## 11.1 Korrelerte konkursintensiteter

Den mest logiske måten å inkorporere avhengighet mellom to eller flere Cox- prosesser er å introdusere korrelasjon mellom de respektive intensitetsprosessene, og å la prosessene være uavhengige ellers. Mer formelt kan vi si at vi jobber med følgende antagelser:

- I en portefølje med  $I$  aktiva vil konkursene av aktivum  $i = 1, \dots, I$  bli trigget via det første hoppet i en Cox- prosess  $N_i(t)$  med korrelerte intensiteter  $\lambda_i(t)$ .
- Betinget på realiseringen av de ulike intensitetsprosessene  $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_I(t))$ , vil  $N_i(t)$  være uavhengige inhomogene Poisson prosesser med intensiteter  $\lambda_i(t)$  for alle  $i \leq I$ .

La oss nå se på det enkle tilfellet der vi har to aktiva, A og B. Sannsynligheten for at A og B skal gå konkurs på samme tid,  $p_{AB}$ , kan da skrives slik:

$$p_{AB} = E[1_{\{A\}} 1_{\{B\}}] \tag{11.1}$$

$$= E[E[1_{\{A\}} 1_{\{B\}} | \lambda_A, \lambda_B]]$$

$$= E \left[ \left( 1 - e^{-\int_0^T \lambda_A(s) ds} \right) \left( 1 - e^{-\int_0^T \lambda_B(s) ds} \right) \right]$$

$$= E \left[ 1 - e^{-\int_0^T \lambda_B(s) ds} - e^{-\int_0^T \lambda_A(s) ds} + e^{-\int_0^T (\lambda_A(s) + \lambda_B(s)) ds} \right]$$

$$\begin{aligned}
\rho_{AB} &= 1 - (1 - p_A) - (1 - p_B) + E \left[ e^{-\int_0^T (\lambda_A(s) + \lambda_B(s)) ds} \right] \\
&= p_A + p_B + E \left[ e^{-\int_0^T (\lambda_A(s) + \lambda_B(s)) ds} \right] - 1
\end{aligned} \tag{11.2}$$

Her betegner  $p_A$  og  $p_B$  de individuelle konkurssannsynlighetene for hhv. A og B. Den høyeste korrelasjonen oppnår vi når begge intensitetene er perfekt korrelerte. Det vil med andre ord bety at  $\lambda_A(s) = \lambda_B(s) = \lambda(s)$ . Uttrykket over kan da skrives slik:

$$\rho_{AB} = 2p + E \left[ e^{-2\int_0^T \lambda(s) ds} \right] - 1 \tag{11.3}$$

Vi kan videre beregne den lineære korrelasjonskoeffisienten mellom de to konkursutfallene ved å bruke (7.6) fra kapittel 7. Siden vi har all nødvendig informasjon, kan vi sette direkte inn i uttrykket og finne følgende:

$$\begin{aligned}
\rho_{AB} &= \frac{2p + E \left[ e^{-2\int_0^T \lambda(s) ds} \right] - 1 - p^2}{p(1-p)} \\
&= \frac{E \left[ e^{-2\int_0^T \lambda(s) ds} \right] - (1-p)^2}{p(1-p)}
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Vi merker oss nå at korrelasjonskoeffisienten er avhengig av to ulike parametere, nemlig konkurssannsynlighetene og intensitetsprosessen  $\lambda(s)$ .

## 11.2 Implementering av korrelerte konkursintensiteter

Vi vil nå illustrere hvordan metoden vi har presentert kan tenkes å implementeres, ved å prise en CDO og en first-to-default basket. Metoden vi vil bruke bygger på algoritmer foreslått av Duffie og Singleton (1999).

La oss først se på hvordan vi kan skissere utviklingen til et enkelt aktivum. Som før er tidshorizonten vår ett år. Vi ønsker først og fremst å simulere en stokastisk intensitetsprosess. For å kunne gjøre dette på en oversiktlig måte gjør vi den forenklede antagelsen at intensitetene forandrer seg tilfeldig en gang hver måned (tidsperiodene kan enkelt gjøres kortere dersom det er ønskelig). Vi antar så at intensitetene følger en geometrisk brownisk bevegelse gitt ved:

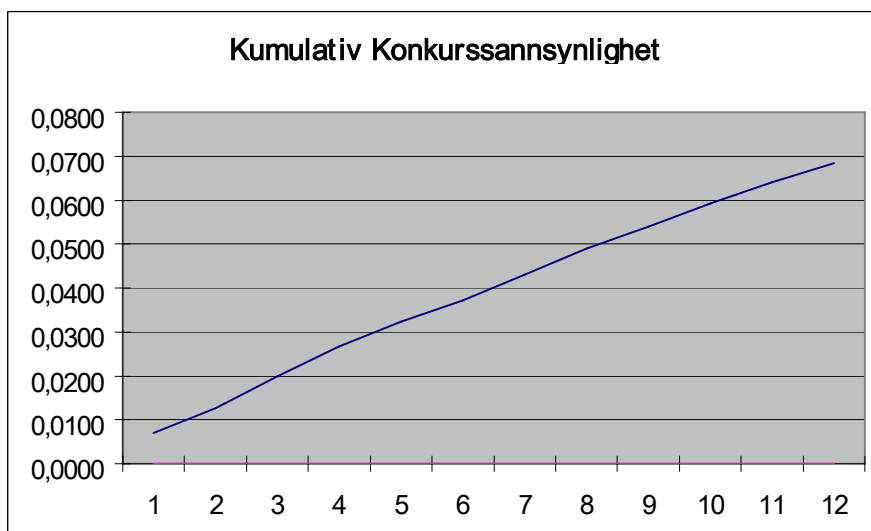
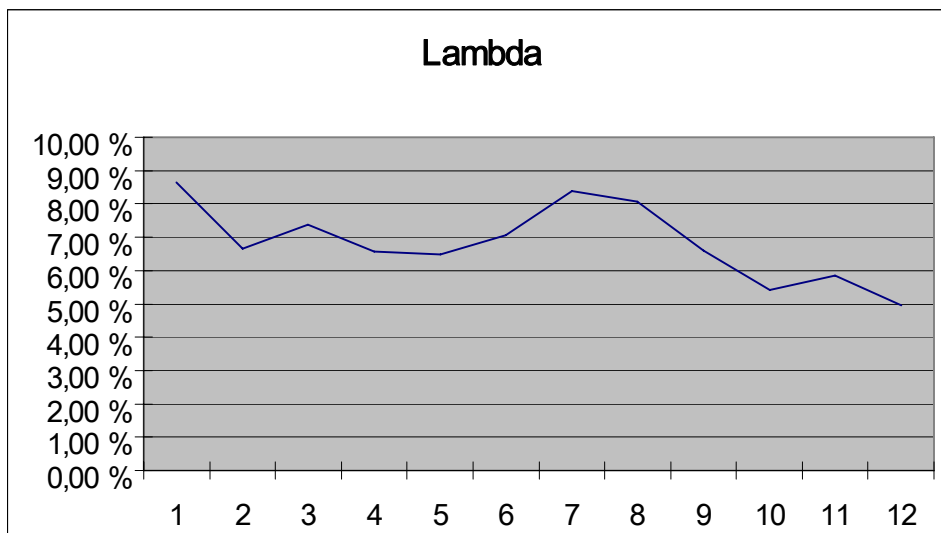
$$d\lambda(t) = \mu\lambda(t)dt + \sigma\lambda(t)dW(t),$$

der  $\mu$  og  $\sigma$  er konstanter.

Dette bruker vi til å simulere månedlige intensiteter på følgende måte:

$$\lambda_h = \lambda_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon} \quad \text{der } \varepsilon \sim N(0,1) \quad (11.6)$$

Merk at metoden som er skissert over er den samme vi bruker når vi simulerer aksjepriser. Vi setter  $\lambda_0 = 10\%$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 40\%$  og  $h = \frac{1}{12}$ . Nedenfor viser vi en simulert sti for intensitetsprosessen, samt en graf over den kumulative konkurssannsynligheten som følger av de simulerte intensitetene.



For å sjekke om dette aktuelle aktivum går konkurs bruker vi også en fremgangsmåte foreslått av Duffie og Singleton (1999) som kalles simulert konkurstidspunkt. Generelt gjelder det at vi kan simulere tilfeldige variabler på følgende måte:

Anta at vi har en tilfeldig variabel  $Y$  med en eller annen fordeling  $F_Y(x)$ . Betrakt så en tilfeldig variabel  $X = F_Y^{-1}(u)$ , der  $u$  er en uniformt fordelt variabel i intervallet  $[0,1]$ . Da er:

$$P[X \leq x] = P[F_Y^{-1}(u) \leq x] = P[F_Y(F_Y^{-1}(u)) \leq F_Y(x)] = P[u \leq F_Y(x)] = F_Y(x),$$

og vi ser at  $X$  og  $Y$  har samme fordeling.

Vi kaller tidspunktet da konkurs inntreffer for  $\tau$ . Deretter trekker vi en tilfeldig uniformt fordelt variabel  $U$ , og finner det simulerte konkurstidspunktet som følger.

$$\text{Sett } \tau = T_m \text{ dersom} \\ 1 - e^{-\lambda(T_{m-1})T_{m-1}} < U \leq 1 - e^{-\lambda(T_m)T_m}$$

Metoden i seg selv er veldig enkel, men kommer kanskje tydeligere frem ved å bruke et enkelt eksempel. Sett at vi har tre perioder:  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 3$ . Et selskap har følgende konkursintensiteter:  $\lambda(1) = 10\%$ ,  $\lambda(2) = 14\%$ ,  $\lambda(3) = 8\%$ . Kalkuler følgende verdier:

$$1 - e^{-0,10 \times 1} = 0,095 \\ 1 - e^{-(0,1 \times 1 + 0,14 \times 1)} = 0,213 \\ 1 - e^{-(0,1 \times 1 + 0,14 \times 1 + 0,08 \times 1)} = 0,274$$

Trekk så en tilfeldig uniformt fordelt variabel  $U$ , og sett tidspunkt for konkurs  $\tau$  basert på  $U$  slik:

$$0 \leq U \leq 0,095 \Rightarrow \tau = 1 \\ 0,095 \leq U \leq 0,213 \Rightarrow \tau = 2 \\ 0,213 \leq U \leq 0,274 \Rightarrow \tau = 3 \\ 0,274 < U \leq 1 \Rightarrow \text{Ingen Konkurs}$$

### 11.2.1 Overgang til en portefølje av aktiva

Vi ønsker nå å gå et steg videre, og simulere konkurser i en portefølje med korrelerte aktiva. Anta at vi har en portefølje med  $N$  aktiva. Vi starter da med å kopiere fremgangsmåten for ett aktivum  $N$  ganger. Videre trenger vi nå en ekstra korrelasjonsparameter som input i vår modell. På samme måte som vi gjorde når vi estimerte korrelasjoner i kapittel 7, antar vi at korrelasjonen er den samme mellom alle par av aktiva, og vi setter denne lik  $\rho$ . I praksis er dette en vanlig antagelse å gjøre siden den forenkler implementeringen mye, men man har også mulighet til å estimere korrelasjoner mellom hvert par av aktiva og konstruere en korrelasjonsmatrise på denne måten (se kapittel 7.2 for forslag til hvordan dette kan gjøres).

Poenget nå er at vi ønsker å innføre en avhengighet mellom aktivaene i porteføljen. Husk at vi simulerte intensitetsprosessene slik:

$$\lambda_h = \lambda_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon} \quad \text{der } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Måten vi innfører avhengighet mellom intensitetsprosessene er å simulere korrelerte standard normalfordelte variabler  $\varepsilon_i$ . Det finnes flere måter å gjøre dette på, men den mest vanlige er å bruke såkalt Cholesky- dekomposisjon.

### 11.2.2 Cholesky- dekomposisjon

Kort fortalt kan man ved å bruke Cholesky- dekomposisjon transformere en kolonnevektor  $\mathbf{U}$  med  $N$  uavhengige tilfeldige variabler  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$  til en kolonnevektor  $\mathbf{V}$  med  $N$  korrelerte tilfeldige variabler  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Vektoren  $\mathbf{V}$  kan finnes ved å multiplisere vektoren  $\mathbf{U}$  med en matrise  $M$ :

$$\mathbf{V} = M * \mathbf{U} \tag{11.7}$$

der  $M$  er en matrise som må tilfredstille følgende krav  $MM^T = R$ . Her er  $R$  en symmetrisk positiv definit korrelasjonsmatrise. Vi dekomponerer altså korrelasjonsmatrisen til et produkt av to matriser.  $M$  multiplisert med den transponerte matrisen  $M^T$  gir oss den opprinnelige korrelasjonsmatrisen  $R$ . La oss se på det enkleste eksempelet der vi har bare to aktiva. Korrelasjonsmatrisen ser ut som følger:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

og matrisen  $M$  vil være gitt ved;

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

siden;



$$MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

### 11.2.3 Prisingseksempel

Med utgangspunkt i metoden vi nå har gått gjennom skal vi prise en CDO og ulike first-m-of-n-to-default baskets. Følgende antagelser for den underliggende porteføljen ligger til grunn for prisingen:

- ✓ Antall aktiv i porteføljen settes til  $N = 20$
- ✓ Pålydende på hvert aktivum settes til 100
- ✓ Tidshorisonen settes til  $T = 1$  år
- ✓  $\lambda_0$  antas å være lik for alle aktiva og settes til 10 %
- ✓ Recovery raten,  $R$ , antas å være lik for alle aktiva og settes til 40 %
- ✓ Premiene betales årlig
- ✓ I tillegg settes risikofri rente lik 5 %

Aller først skal vi prise en CDO som kjennetegnes av følgende transje- struktur:

Transje	Nedre grense	Øvre grense
Egenkapital	0 %	3 %
Junior	3 %	7 %
Senior	7 %	15 %
Supersenior	15 %	100 %

Når vi bruker korrelerte konkursintensiteter foreslår Gravelin (2006) at man konstruerer en kovariansmatrise og lar denne generere avhengigheten i modellen. Dette gjøres enkelt ved å bruke følgende sammenheng:  $\text{cov}(A, B) = \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B$ . Det er også derfor denne matrisen vi må bruke Cholesky- dekomposisjon på. Det finnes ulike Excel add- ins man kan laste ned fra nettet for å få tak i denne Cholesky- funksjonen<sup>2</sup>. Tabellene nedenfor viser de beregnede premiene for hver transje (i % av transjens pålydende), der vi har variert input- faktorene  $\sigma$  og  $\rho$ .

<sup>2</sup> <http://www.cse.csiro.au/poptools/download.htm>

Transje	$\rho=0,1 \sigma=20 \%$	$\rho=0,3 \sigma=20 \%$	$\rho=0,5 \sigma=20 \%$	$\rho=0,7 \sigma=20 \%$	$\rho=0,1 \sigma=40 \%$	$\rho=0,3 \sigma=40 \%$
Egenkapital	81,9696 %	81,7877 %	81,8378 %	82,6019 %	80,1591 %	82,0577 %
Junior	47,6483 %	48,1046 %	46,6177 %	47,9980 %	46,9999 %	46,6321 %
Senior	11,2774 %	11,5848 %	11,7162 %	11,6897 %	11,8651 %	12,0726 %
Supersenior	0,1234 %	0,1103 %	0,1378 %	0,1258 %	0,1266 %	0,1261 %

Transje	$\rho=0,5 \sigma=40 \%$	$\rho=0,7 \sigma=40 \%$	$\rho=0,1 \sigma=60 \%$	$\rho=0,3 \sigma=60 \%$	$\rho=0,5 \sigma=60 \%$	$\rho=0,7 \sigma=60 \%$
Egenkapital	82,6461 %	83,0055 %	81,4986 %	80,8450 %	81,8724 %	82,4265 %
Junior	50,3931 %	49,6453 %	47,4405 %	47,7912 %	48,2560 %	47,9326 %
Senior	13,8373 %	13,4195 %	11,4748 %	11,9014 %	12,4280 %	12,2539 %
Supersenior	0,1359 %	0,1191 %	0,1473 %	0,1202 %	0,1325 %	0,1290 %

La oss nå også prøve å prise noen ulike ”first – m – of – n – to – default” baskets. Vi ser på 4 ulike kontrakter, der  $m = 2,3,4$  og  $5$ . Kontraktene er priset i henhold til (8.1) som vi utledet i kapittel 8. Som i CDO- eksempelet varierer vi  $\rho$  og  $\sigma$ , og tabellen viser prisene på de ulike kontraktene (også her i % av pålydende verdi):

Kontrakt	$\rho=0,1 \sigma=20 \%$	$\rho=0,3 \sigma=20 \%$	$\rho=0,5 \sigma=20 \%$	$\rho=0,7 \sigma=20 \%$	$\rho=0,1 \sigma=40 \%$	$\rho=0,3 \sigma=40 \%$
First 2 of 20	80,3271 %	72,8761 %	83,0000 %	84,0288 %	67,5159 %	72,2907 %
First 3 of 20	22,5000 %	22,7273 %	22,9558 %	23,8827 %	20,9434 %	21,2720 %
First 4 of 20	7,4074 %	6,7333 %	8,7973 %	6,5116 %	6,9565 %	6,0000 %
First 5 of 20	2,3029 %	2,2383 %	2,4974 %	2,2383 %	2,3676 %	2,1739 %
Kontrakt	$\rho=0,5 \sigma=40 \%$	$\rho=0,7 \sigma=40 \%$	$\rho=0,1 \sigma=60 \%$	$\rho=0,3 \sigma=60 \%$	$\rho=0,5 \sigma=60 \%$	$\rho=0,7 \sigma=60 \%$
First 2 of 20	73,7639 %	69,4397 %	72,0000 %	62,0732 %	68,6081 %	76,5000 %
First 3 of 20	22,6135 %	19,1304 %	24,1176 %	21,8256 %	22,0492 %	25,6776 %
First 4 of 20	6,5854 %	6,3646 %	6,3646 %	6,0000 %	7,6351 %	7,7878 %
First 5 of 20	2,2383 %	2,0455 %	2,3676 %	1,9175 %	2,4974 %	3,1546 %

Ved simulering av disse prisene har vi programmert en enkel makro som registrerer verdiene for hver simulering. For de som er interesserte er denne dokumentert i appendix F. På grunn av tidshensyn har vi kun gjort 1000 simuleringer hver gang. For et mer nøyaktig prisestimat bør antallet simuleringer økes til minst 10 000.

#### 11.2.4 Ulemper ved bruk av korrelerte konkursintensiteter

Ankepunktet mot å bruke denne metoden til prisingsformål er at den ofte ikke kan produsere høye nok korrelasjoner (dvs. riktige) mellom aktivaene i den underliggende porteføljen. Dette kan være et alvorlig hinder for korrekt prising, siden vi vet at korrelasjoner, sammen med

konkurssannsynligheter og andel tilbakebetalt er de aller viktigste faktorene som påvirker pris. Problemet blir større for lave konkurssannsynligheter (aktiva med høy kredittverdighet), lav volatilitet og kort tid til forfall. Likevel viser det seg at metoden er nyttig, siden den er relativt grei å implementere. Dette er ikke tilfellet for alle alternative fremgangsmåter. Grunnen til at det er vanskelig å oppnå høye korrelasjoner mellom aktiva kommer av at koblingene mellom aktivaene er veldig indirekte. Dersom vi går tilbake til to aktiva og ser på tilfellet der aktivum A er gått konkurs, så har vi følgende dynamikk:

- $\lambda_A$  var sannsynligvis høy.
- Dette betyr at  $\lambda_B$  sannsynligvis også er høy.
- Siden  $\lambda_B$  er høy er det også mer sannsynlig at aktivum B vil gå konkurs.

### 11.3 Simultane konkurshendelser

I 1998 presenterte Duffie og Singleton en alternativ metode til korrelerte intensiteter. De foreslo å innføre det vi kan kalle for simultane konkurshendelser. I denne modellen blir konkurser mellom to eller flere aktiva trigget gjennom en egen hoppeprosess:

- $N'_A$  med  $\lambda'_A$  - aktiva A går konkurs alene.
- $N'_B$  med  $\lambda'_B$  - aktiva B går konkurs alene.
- $N'_{AB}$  med  $\lambda'_{AB}$  - aktiva A og B går konkurs sammen.

Dersom man setter  $\lambda'_A = \lambda'_B = 0$  og  $\lambda'_{AB} > 0$  vil man oppnå perfekt avhengighet, siden bare felles konkurser nå er mulig. Dette er en stor forbedring fra bruk av korrelerte intensiteter, siden vi nå kan oppnå alle mulige nivå av korrelasjoner. Selv om metoden i teorien er interessant, har den likevel ikke vunnet frem siden den er meget krevende å implementere. Bare tenk på et scenario der vi har en liten portefølje med bare 6 aktiva. For å oppnå en fullstendig spesifikasjon av konkursintensitetene vil vi måtte kalkulere en konkursintensitet for alle mulige undergrupper i porteføljen. Med 6 aktiva vil dette være  $2^6 = 32$  ulike felles intensiteter. Mer formelt kan vi si at antallet undergrupper vokser eksponensielt med antall aktiva. Selv om det er mulig å gjøre visse forenklete antagelser, som kan bidra til å gjøre dette arbeidet lettere, er det likevel vanskelig å finne frem til en effektiv og god måte å gjøre

dette på. Andre kritikker av metoden går også ut på at det er urealistisk å tro at flere bedrifter/aktiva skal gå konkurs på akkurat samme tid, men dette er tross alt bare en approksimasjon, og ikke nødvendigvis avgjørende for om modellen er god eller dårlig.

#### **11.4 Smittsomme konkurser (Contagion models)**

En tredje modell som tar sikte på å modellere en mer realistisk fordeling av konkurser ble presentert av henholdsvis Davis og Lo (1999, 2001), og Jarrow og Yu (2001). De presenterte en metode som prøver å fange opp det faktum at risikoen for en del aktiva kan øke, dersom en eller annen signifikant kreditthendelse oppstår. Modellverktøyet til Davis og Lo kan settes opp slik:

- I utgangspunktet har aktivaene i en portefølje konkursintensitetene  $\lambda_i(0) = \lambda$
- Ved hvert aktivum som går konkurs, vil konkursintensitetene til de resterende aktiva i porteføljene øke med en faktor  $a \geq 1$ , til  $a\lambda$ ;  $a$  blir gjerne betegnet som en risikofremmende faktor.
- Etter en viss tid, som er modellert som en eksponensialfordeling, vil konkursintensitetene gå tilbake til det opprinnelige nivået  $\lambda$ .

Ideen bak denne modellen er altså å tillate at konkurser skjer i bølger, dvs. at vi vil oppleve mange konkurser når vi har høye intensiteter  $a\lambda$ , men at ingen av konkursene skjer på akkurat samme tidspunkt. Det er da mulig å reprodusere klynger av konkurser i løpet av en viss tidshorisont, skapt av for eksempel økonomiske kriser og resesjoner.

Modellenoppsettet til Jarrow og Yu skiller seg noe fra den foregående fremgangsmåten. De deler aktivaene i en portefølje opp i to ulike klasser; store nøkkelaktiva og små avhengige aktiva. Dersom et nøkkelaktivum går konkurs vil konkursintensitetene til de små avhengige aktivum øke, men ikke dersom det motsatte skulle være tilfelle.

For begge modellene som er presenterte gjelder den samme problemstillingen som vi diskuterte for Duffie og Singletons modell. Problemer med å implementere og kalibrere modellene på en effektiv og lettfattelig måte har ført til at de enda har til gode å vinne gunst blant praktikerne i markedet.

## 11.5 Copula- funksjoner

Bruk av såkalte copula- funksjoner til å modellere avhengigheter ved prising av kredittderivater ble først introdusert i en artikkel av Li (2000). Ordet copula kommer opprinnelig fra Latin og betyr ”å koble sammen”. I vår sammenheng er dette imidlertid et statistisk begrep som dreier seg om hvordan tilfeldige variabler forholder seg til hverandre. Det var Abe Sklar som først introduserte dette begrepet i en artikkel fra 1959 (Schweizwer / Sklar, 2005). Kort fortalt vil en copula- funksjon ta en samling av univariate marginale sannsynlighetsfordelinger og føre disse sammen til en multivariat sannsynlighetsfordeling. La oss først se litt nærmere på egenskapene til en copula- funksjon.

En formell definisjon av en copula- funksjon kan bli funnet i Schönbucher (2001):

En funksjon  $C : [0,1]^I \rightarrow [0,1]$  er en copula dersom:

- ✓ Det finnes tilfeldige variabler  $U_1, \dots, U_i$  som antar verdier i intervallet  $[0,1]$ , slik at  $C$  er variablenes fordelingsfunksjon.
- ✓  $C$  har uniforme marginalfordelinger, dvs for alle  $i \leq I, u_i \in [0,1]$  så er

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$$

I sin artikkel beskriver Li (2000) en copula- funksjon slik:

For  $m$  uniforme tilfeldige variabler,  $U_1, U_2, \dots, U_m$  kan den felles fordelingsfunksjonen  $C$ , definert som:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m, \rho) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_m \leq u_m] \text{ kalles en copula- funksjon.}$$

Copula- funksjoner blir altså brukt til å linke sammen marginale fordelinger slik at vi får en multivariat fordeling. La oss definere en copula- funksjon  $C$ . For gitte univariate marginale fordelingsfunksjoner  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)$  vil funksjonen  $C$  resultere i en multivariat fordelingsfunksjon som vist under:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m), \rho) = F(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (11.8)$$

Dette kan vises mer formelt slik:

$$\begin{aligned}
 C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m), \rho) &= P[U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2), \dots, U_m \leq F_m(x_m)] \\
 &= P[F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2, \dots, F_m^{-1}(U_m) \leq x_m] \\
 &= P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m] \\
 &= F(x_1, x_2, \dots, x_m)
 \end{aligned}$$

En av egenskapene som gjør bruk av copula- funksjoner attraktive er at de fokuserer på avhengighetsstrukturen mellom en samling variabler, slik at de marginale fordelingene er irrelevante. Disse blir bare satt til uniforme fordelinger som er svært enkle å simulere, og som dessuten gjør det relativt enkelt å inkorporere andre marginale fordelinger. Grunnen til at vi kan konsentrere oss om copula- funksjonen alene er gitt i Sklars teorem. Sklar beviste i 1959 at enhver multivariat fordelingsfunksjon  $F$  kan representeres i form av en copula funksjon. Dersom vi har en fordelingsfunksjon  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , så eksisterer det altså en copula funksjon  $C(u_1, u_2, \dots, u_m)$  slik at:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)) \quad (11.9)$$

Dersom hver  $F_i$  er kontinuerlig er  $C$  unik. Det er nettopp resultatene fra dette teoremet som gjør copula- funksjoner så attraktive til vårt bruk. Det sier nemlig at for enhver multivariat fordeling, så kan vi separere de univariate fordelingene og avhengighetsstrukturen. Avhengighetsstrukturen er fullstendig karakterisert av copulaen  $C$ , og en copula er dermed med andre ord et mye mer generelt begrep enn for eksempel en lineær korrelasjonskoeffisient.

### 11.5.1 Eksempler på copulas

I utgangspunktet finnes det et uendelig antall ulike copulas. Den enkleste av dem alle er uavhengighetscopulaen, eller også referert til som produktcopulaen. Dette er den copula-funksjonen som er felles for alle vektorer bestående av  $I$  uavhengige og tilfeldige variabler. Mer formelt sier vi at den  $I$ - dimensjonale produktcopulaen,  $\Pi^I$  er gitt ved:

$$\Pi^I(V) = v_1 \cdot v_2 \cdots v_I \quad (11.10)$$

En produktcopula er nyttig å snakke om, siden vi vet at en copula fullt ut beskriver hele avhengighetsstrukturen for en vektor av tilfeldige variabler. I så måte vet vi at de tilfeldige variablene  $X_1, X_2, \dots, X_I$  bare er uavhengige dersom den I- dimensjonale copulaen C for  $X_1, X_2, \dots, X_I$  er lik produktcopulaen:

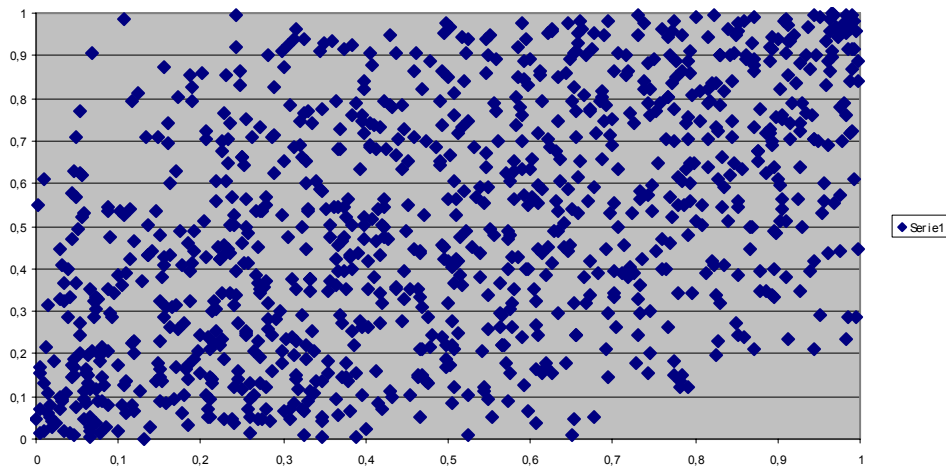
$$C(F(x)) = \Pi^I(F(x))$$

Når vi nå skal bruke copula- funksjoner til å prise våre kredittderivater ønsker vi å fokusere på to typer:

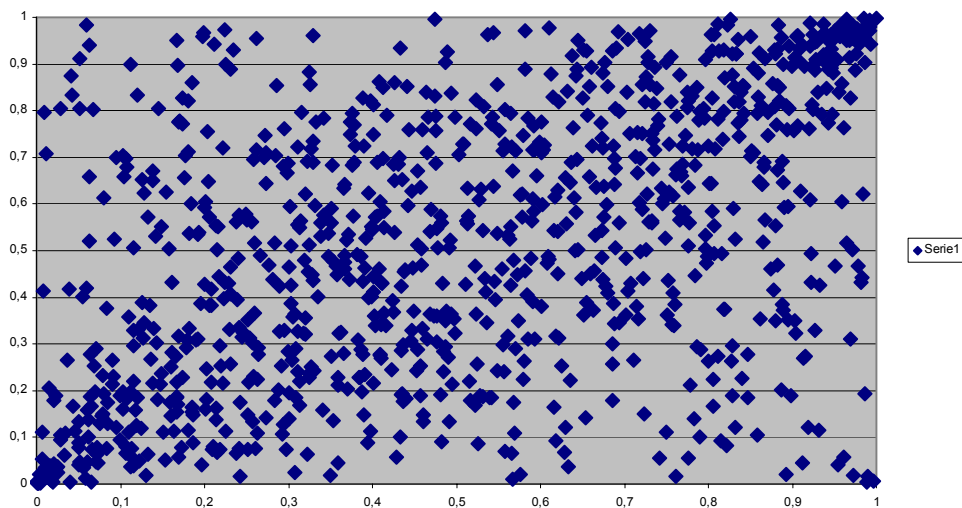
- Gaussisk Copula
- t- Copula

Felles for disse to er at de er enkle å implementere, og vi kjenner fordelingene og de tilhørende egenskapene til fordelingene godt fra før. Selv om den Gaussiske copulaen er den klart mest utbredte i dagens finansmiljø kan den også gi oss problemer siden normalfordelingen har relativt tynne haler. Empiri tilsier at det ofte kan være lurt å bruke fordelinger som tillater flere ekstreme hendelser (les: mange/ store konkurser), og i så måte er en t-fordeling fin å bruke. Denne er relativt lik normalfordelingen, men har tykkere haler. For å illustrere forskjellen mellom disse to copula- funksjonene skisserer vi nedenfor ulike grafer der vi har latt nettopp disse copulaene generere 2 kolonnevektorer med 1000 tilfeldige tall i hver vektor. Diagrammene viser plottet av hvert av de 1000 tallparene for en korrelasjon på 0,5. I t- fordelingen har vi i tillegg valgt en frihetsgrad på  $v = 2$ .

Figur 1: Gaussisk Copula plot



Figur 2: t- Copula plot



Forskjellene på de to framkommer ved at antallet ”ekstreme” hendelser øker ved bruk av en t-copula. Dette ser vi gjennom at klyngene i hvert av hjørnene (0,0) og (1,1) er tydelig tettere i det siste diagrammet.



### 11.5.2 Gaussisk copula

En Gaussiske copula kan defineres på følgende måte:

La  $X_1, \dots, X_I$  være normalfordelte tilfeldige variabler med gjennomsnitt  $\mu_1, \dots, \mu_I$ , standardavvik  $\sigma_1, \dots, \sigma_I$ , og en korrelasjonsmatrise R. Da vil fordelingsfunksjonen  $C_R(u_1, \dots, u_I)$  av de tilfeldige variablene,

$$U_i = N\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right), \quad i \leq I \quad (11.11)$$

være en copula, og nærmere bestemt den Gaussiske copula med korrelasjonsmatrise R. Her betegner  $N(\bullet)$  den kumulative *univariate* standard normalfordelingsfunksjonen. Observer at:

$$N^{-1}(U_i) = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0,1)$$

### 11.5.3 T- copula

Definisjonen på en t- copula skiller seg ikke vesentlig fra den Gaussiske:

La  $X_1, \dots, X_I$  være standard normalfordelte variabler med gjennomsnitt null, standardavvik en, og korrelasjonsmatrise R. La så Y være en kjikvadrat- fordelt ( $\chi^2$ ) tilfeldig variabel med v frihetsgrader, som i tillegg er uavhengig av  $(X_1, \dots, X_I)$ . Da vil fordelingsfunksjonen  $C_{v,R}(u_1, \dots, u_I)$  av de tilfeldige variablene,

$$U_i = t_v\left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{Y}} X_i\right), \quad i \leq I$$

Være en copula, og nærmere bestemt en t- copula med v frihetsgrader og korrelasjonsmatrise R. Her betegner  $t_v$  den *univariate* t- fordelingsfunksjonen med v frihetsgrader.

### 11.5.4 Hvordan simulere en multivariat konkurfordeling ved bruk av copulas?

Når vi nå skal forsøke å implementere copula- metoden i excel vil vi ta utgangspunkt i fremgangsmåten som Li (2000) foreslår. Husk at vi i forrige delkapittel innførte en avhengighet mellom konkursintensitetene til de ulike aktivaene i den underliggende porteføljen. Dette skapte så i sin tur en korrelasjon mellom konkurstidspunktene til aktivaene. Når vi bruker copula- funksjoner vil vi la konkursintensitetene til de ulike aktivaene være helt uavhengige, og heller innføre en direkte kobling mellom de simulerte konkurstidspunktene til hvert aktivum. Igjen gjør vi bruk av Cholesky- dekomposisjon, som vi forklarte i kapittel 11.2.2, for å få til dette.

Ved å bruke Duffie og Singletons (1999) metode, som vi også forklarte i kapittel 11.2, kunne vi simulere konkurstidspunkt på følgende måte:

$$\text{Sett } \tau = T_m \text{ dersom} \\ 1 - e^{-\lambda(T_{m-1})T_{m-1}} < U \leq 1 - e^{-\lambda(T_m)T_m}$$

For å kunne simulere korrelerte konkurser i en portefølje med N aktiva foreslår Li (2000) å bruke en Gaussisk copula til å gjøre dette. Følgende algoritme kan da brukes:

1. Finn først konkursintensitetene for hvert aktivum i porteføljen, eller sagt med andre ord, finn kredittkurven til hvert aktivum. Vi diskuterte flere måter å gjøre dette på i kapittel 6.
2. Lag så en kolonnevektor  $\mathbf{V}$  ved å trekke N uavhengige standard normalfordelte variabler  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$  ved hjelp av den velkjente metoden  $N^{-1}(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
3. Lag en  $N \times N$  korrelasjonsmatrise. Det mest vanlige er å anta at de parvise korrelasjonene er identiske for alle aktiva (jf. kapittel 7), men det er også fullt mulig å estimere og fylle inn ulike korrelasjoner for hvert par selv om dette er mer tidkrevende.
4. Bruk Cholesky- dekomposisjon på korrelasjonsmatrisen, og finn den tilhørende triangulære Cholesky- matrisen.
5. Multipliser Cholesky- matrisen med kolonnevektoren  $\mathbf{V}$ . Dette gir oss en ny kolonnevektor, nå med korrelerte standard normalfordelte variabler  $(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_N^*)$ .

6. Finn nå de  $N$  korrelerte tilfeldige variablene  $(U_1^*, \dots, U_N^*)$  ved hjelp av den standard kumulative normalfordelingsfunksjonen  $N(\varepsilon_i^*)$  for  $i = 1, \dots, N$ .
7. Finn så til slutt de korrelerte konkurstidspunktene for hvert aktivum i porteføljen ved hjelp av fremgangsmåten foreslått i kapittel 11.2.

Dersom vi ønsker å bruke en  $t$ -copula må vi huske å lage kolonnevektoren  $\mathbf{V}$  i punkt 2 ved å generere  $N$   $t$ -fordelte variabler ved hjelp av følgende fremgangsmåte:

$$N^{-1}(U_i) \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{Y}} \text{ der } v \text{ er antall frihetsgrader, og } Y \text{ er en } \chi^2 \text{-fordelt variabel.}$$

I tillegg må vi i punkt 6 finne de korrelerte tilfeldige (nå  $t$ -fordelte) variablene slik:

$$U_i^* = t_v \left( \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{Y}} X_i \right), \quad i = 1, \dots, N$$

### 11.5.5 Prisingseksempel

Nå vil vi bruke de skisserte fremgangsmåtene til å prise en CDO og ulike "first-m-of-n-to-default" baskets. Følgende antagelser ligger til grunn for prisingen:

- ✓ Antall aktiva i porteføljen settes til  $N = 20$
- ✓ Pålydende på hvert aktivum settes til 100
- ✓ Tidshorisonten settes til  $T = 1$  år
- ✓ Recovery raten,  $R$ , antas å være lik for alle aktiva og settes til 40 %
- ✓ Premiene betales årlig
- ✓ I tillegg settes risikofri rente lik 5 %

Når det gjelder konkursintensitetene så antar vi for enkelhets skyld en flat kredittkurve for hvert aktivum. For nærmere informasjon om de tallene som er brukt her henviser vi til appendix G.

Nedenfor følger to tabeller der vi har brukt en Gaussisk copula og en t- copula for å prise vår CDO, som fortsatt er beskrevet av følgende struktur:

Transje	Nedre grense	Øvre grense
Egenkapital	0 %	3 %
Junior	3 %	7 %
Senior	7 %	15 %
Supersenior	15 %	100 %

Vi har også variert korrelasjonskoeffisienten for å se hvordan prisene forandrer seg. Prisene er notert i prosent av transjens pålydende, og antall simuleringer er her satt til 2000:

#### Gaussisk Copula

Transje	$\rho = 0,01$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$
Egenkapital	75,2359 %	68,1279 %	55,3128 %	43,3021 %	34,8129 %
Junior	37,9775 %	35,3290 %	30,3519 %	25,6291 %	22,1771 %
Senior	7,9530 %	10,4059 %	13,3535 %	13,6530 %	13,7758 %
Supersenior	0,0710 %	0,1597 %	0,5279 %	1,1412 %	1,6923 %

#### T- Copula

Transje	$\rho = 0,01$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$
Egenkapital	67,1564 %	66,9429 %	64,0580 %	61,8028 %	57,2026 %
Junior	31,7920 %	31,7108 %	29,9940 %	27,3737 %	27,6499 %
Senior	9,7851 %	9,5378 %	9,9575 %	10,0075 %	9,5582 %
Supersenior	0,2770 %	0,4053 %	0,5956 %	0,7841 %	0,9456 %

Vi legger først merke til at prisene vi får, ved bruk av begge typer copula, er konsistente med hva vi ville forvente når vi forandrer  $\rho$ . Jo høyere korrelasjonen i den underliggende porteføljen er, jo billigere blir egenkapitaltransjen. Det motsatte gjelder for superseniortransjen – jo høyere korrelasjon, jo høyere pris.

Det er videre interessant å merke seg at det blir relativt store prisingsforskjeller når vi går over fra en Gaussisk til en t- copula. Det faktum at denne copulaen har fetere haler, er med på å senke prisen på egenkapitaltransjen og juniortransjen, for lave korrelasjoner. Dette kommer av at sannsynlighetene for få eller ingen konkurser øker, og dermed minker den forventede utbetalingen fra transjeinvestorene. For superseniortransjen gjelder igjen det motsatte. Sannsynligheten for å oppleve store tap øker med fetere haler, og dermed øker forventet utbetaling og pris. For høye korrelasjoner (her  $\geq 0,3$ ) ser vi akkurat de motsatte tendensene. Egenkapitaltransjen og juniortransjen synker mye mindre i pris enn ved bruk av Gaussisk

copula, og superseniortransjen stiger mindre i pris. For seniortransjen er det ingen klare trekk som skiller seg ut.

Vi har også brukt de to copulaene til å prise ulike "first – m – of – n – to – default" kontrakter. Igjen er prisene notert i % av kontraktens pålydende verdi. Resultatene er gjengitt i de to tabellene nedenfor:

#### Gaussisk Copula

Kontrakt	$\rho = 0,01$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$
First 2 of 20	49,8445 %	43,5893 %	32,2120 %	24,5493 %	18,8830 %
First 3 of 20	14,5251 %	17,1594 %	17,2090 %	16,2286 %	13,5211 %
First 4 of 20	3,9979 %	6,7371 %	9,9650 %	10,8319 %	10,4164 %
First 5 of 20	1,2864 %	3,0899 %	5,8946 %	8,1772 %	8,5274 %

#### T- Copula

Kontrakt	$\rho = 0,01$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$
First 2 of 20	38,0082 %	34,9091 %	35,3614 %	31,3699 %	29,2639 %
First 3 of 20	13,5211 %	13,7017 %	13,8831 %	12,5877 %	13,7017 %
First 4 of 20	6,1852 %	6,7000 %	6,7371 %	6,5521 %	8,0612 %
First 5 of 20	3,4231 %	3,8278 %	4,0662 %	4,1689 %	4,7922 %

### 11.5.6 Implisitte korrelasjoner og korrelasjonssmil

De fleste praktikere ser i dag ut til å være enige om at copulas representerer den beste metoden for å prise korrelasjonsavhengige kredittderivater. Ikke bare er denne metoden enkel å implementere i forhold til sine konkurrenter, men den gir også i de fleste tilfeller relativt gode prisestimer. Man er likevel klar over at metoden har sine svakheter. Det såkalte korrelasjonssmilet i CDO- transjene blir ofte brukt som bevis for disse.

De fleste kjenner nok til uttrykket implisitte volatiliteter i forbindelse med europeisk opsjonsprising. For en gitt markedspris på en opsjon kan man bruke Black- Scholes formelen for å finne den volatiliteten som gir en teoretisk pris lik markedsprisen. På samme måte kan man bruke ulike copula- funksjoner, og numerisk finne implisitte korrelasjoner i ulike CDO- transjer. Dette forutsetter igjen at man antar at korrelasjonen er lik for alle par av aktiva i den underliggende porteføljen. Dersom prisingsmodellen som er brukt er helt korrekt, dvs. klarer å fange opp alle kilder til konkursrisiko, og klarer å modellere en fullstendig

avhengighetsstruktur, så skal de implisitte korrelasjonene vi finner være identiske for alle transjene i CDO- en. Dette er imidlertid ikke tilfelle. Typisk så er den implisitte korrelasjonen høyere for egenkapital- og seniortransjene enn mezzanine- /juniortransjene. Dette fenomenet er kjent som korrelasjonssmil, og er et av de feltene som er gjenstand for intens forskning av dagens akademikere.

Det finnes flere ulike forklaringer på hvordan et slikt korrelasjonssmil oppstår. Noen går ut på at modellene som blir brukt til prising ikke er sofistikerte nok, mens andre fokuserer på forskjeller mellom aktørene i markedet. Vi har tidligere i oppgaven forklart at banker som setter sammen CDO- er ofte velger å sitte igjen med den risikable egenkapitaltransjen selv. Motivet for dette har vært å vise potensielle transjeinvestorer at kontraktene er rettferdige, og at banken ikke forsøker å ”prakke på” andre aktører råttene gjeld, for eksempel. Denne utbredte praksisen har ført til at mange banker har blitt sittende med mye kredittrisiko som kommer fra de første konkursene, og fått en overeksponering mot dette segmentet. Når denne eksponering er blitt stor nok, velger mange banker å re-selge egenkapitaltransjene i markedet. Financial Times argumenterte i en artikkel fra 2005 at ”This demand imbalance between different sections of the CDO capital structure, has pushed up equity tranche spreads, which, according to some bankers, means they offer higher returns and better value than warranted by fundamental factors. The spreads and returns on mezzanine tranches, meanwhile, have been suppressed.”

Andre potensielle forklaringer på korrelasjonssmilet går ut på at det finnes ulike segmenter av investorer fordelt mellom de ulike transjene, og at disse investorene har ulike syn eller holdninger til korrelasjoner. Korrelasjonssmilet kan også reflektere en usikkerhet i prisingen, og at de transjene som er mest sensitive for korrelasjoner, derfor har en risikopremie utover den teoretiske prisen knyttet til seg.

## 12. Oppsummering og konklusjon

Det globale markedet for kredittderivater har vokst med enorm fart det siste tiåret. De seneste årene har nye spennende produkter som ”default baskets” og ikke minst ”Collateralized Debt Obligations (CDO) økt kraftig i popularitet. Felles for disse produktene er at det underliggende aktivum er portefølje av flere ulike aktiva. Dette kompliserer prisingen av slike kontrakter betraktelig, siden vi nå må ta hensyn til konkursskorrelasjoner i den underliggende porteføljen. Målet med denne oppgaven har derfor vært å studere og sammenligne ulike teoretiske prisingsmodeller som forsøker å finne adekvate løsninger på disse utfordringene. Det har også vært viktig å vise hvordan disse kan implementeres i praksis.

I kredittrisikolitteraturen er det hovedsakelig to typer modeller som blir brukt for å modellere konkurser. Strukturerte modeller ser på konkurs som tidspunktet et firmas eiendeler faller under en kritisk grense, og det var Robert Merton som gjorde det første arbeidet på dette området. I redusert form modeller blir konkurs sett på som en plutselig og overraskende hendelse. Sentralt i disse modellene er at man bruker en betinget konkurssannsynlighet, eller en hasardrate for å uttrykke overlevelseshets- og konkurssannsynligheter.

De viktigste faktorene som påvirker prisene på CDO og ”default- baskets” er de individuelle konkurssannsynlighetene til hvert aktivum, andelen vi får tilbakebetalt når konkurs inntreffer, og konkursskorrelasjonene i den underliggende porteføljen. Individuelle konkurssannsynligheter kan utledes fra historiske data, eller tilgjengelige markedsdata. Mens historiske data gir oss faktiske konkurssannsynligheter, vil markedsdata gi oss risikonøytrale sannsynligheter. Til alle prisingsformål konkluderte vi med at det eneste riktige var å bruke markedsdata, siden disse inneholder all tilgjengelig informasjon om den fremtidige utviklingen.

Andel tilbakebetalt ved konkurs kan beregnes på ulike måter. I praksis er det mest vanlig å sette denne lik en andel av aktivumets pålydende verdi. Statistikk viser at denne andelen i de fleste tilfeller ligger rundt 40 %.

Hovedmålet med denne oppgaven var som sagt å studere modeller som tok sikte på å løse utfordringene knyttet til konkursskorrelasjon. Alle tilgjengelige data viser nemlig at konkurser inntreffer uregelmessig, og ofte i klynger. Dersom man ønsker å priske kredittderivater med

store underliggende porteføljer, ligger det en stor utfordring i å estimere alle parvise korrelasjoner i porteføljen. I praksis er dette ofte en altfor tidkrevende oppgave, og man velger derfor heller å innføre en forenklet struktur som reduserer antallet parametere som trengs å estimeres. Dette blir gjort ved å ta i bruk faktormodeller.

Faktormodeller er nært knyttet til strukturerte kredittrisikomodeller. De antar at verdiutviklingen av et firmas eiendeler blir drevet av én eller flere systematiske faktorer, og én firmaspesifikk faktor. Korrelasjonen mellom verdiutviklingen av to firma er da bestemt av faktorsensitivitetene i modellen.

Den første konkrete modellen vi så på, var Moody's egenutviklede BET- modell. Denne modellen forsøker å løse korrelasjonsutfordringene på en praktisk måte. Man forsøker her å konstruere en hypotetisk portefølje av uavhengige aktiva, som har de samme konkursegenskapene som den opprinnelige porteføljen. Fordelen med dette er da at man kan bruke en standard binomisk fordeling for å regne på konkurssannsynlighetene. Selv om BET-modellen gir en enkel løsning på korrelasjonsproblematikken, konkluderte vi med at denne modellen er uegnet til prising. Dette fordi den mangler teoretisk grunnlag, gir for lite presise estimater og ikke tar hensyn til tidsdimensjonen.

Vasiceks LHP- modell gir oss, ved å gjøre et sett forenklete antagelser, en enkel "closed form" løsning på prisingsproblemet. Modellen bygger på strukturerte kredittrisikomodeller og faktormodeller, og en av de sentrale antagelsene er at vi har en uendelig stor underliggende portefølje. På tross av alle forenklingene som blir gjort viste vi at modellen kunne produsere relativt gode prisestimater, men bare dersom antall aktiva i den underliggende porteføljen var mange.

Vi så til slutt på fire ulike prisingsmodeller som alle bygde på redusert form modellene. Felles for disse modellene er at de bygger på et godt teoretisk fundament. På tross av dette er flere av de vanskelige å implementere i praksis. De modellene vi gav betegnelsen "simultane konkurshendelser" og "smittsomme konkurser" viser seg å ha den største begrensningen på dette området, og de har derfor ikke blitt populære blant praktikerne i markedet. De to modellene som imidlertid har vunnet gunst er korrelerte konkursintensiteter og copulas. Den første av disse forsøker, som navnet tilsier, å bygge inn korrelasjoner ved å la de respektive aktivas intensitetsprosesser være korrelerte. Hovedproblemet med denne metoden er at det har



vist seg vanskelig å produsere høye nok korrelasjoner i den underliggende porteføljen på grunn av de indirekte koblingene.

Bruk av copula- funksjoner til å modellere korrelerte konkurser vokser stadig i popularitet blant dagens praktikere. Det viser seg at man ved å ta i bruk slike funksjoner kommer frem til en prisingsmetode som både er enkel å implementere og som, sammenlignet med sine konkurrenter, ser ut til å produsere de beste prisestimatene.

For at markedene for korrelasjonsavhengige kredittderivater skal fortsette å ekspandere i fremtiden er det viktig at man finner frem til modeller som er i stand til å prise disse kontraktene rettfærdig. Det vil være med på å øke graden av effisiens i markedene, og lokke til seg stadig flere aktører. Etter hvert kan man da få bygd opp solide og velfungerende markeder for kredittrisikooverføring. Det synes imidlertid klart at pr. dags dato er det fortsatt en vei å gå før man finner frem til en prisingsmodell som kan bli en markedsstandard. Det eneste som er sikkert er at forskningen på området pågår med større intensitet enn noen gang før, og at nye og bedre modeller vil fortsette å dukke opp.

## Kilder

1. Angelo Arvanitis og Jon Gregory: «Credit – the complete guide to pricing, hedging and risk management», Risk Books, 2001.
2. Basel Committee on Banking Supervision: «International Convergence of Capital measurement and Capital standards; A revised framework», juni 2004.
3. Bjørn Skogstad Asmo, Kredittilsynet: «Hedgefond og finansielle derivater, muligheter og trusler for marked og investorer», januar 2006.
4. Brigo, D., and Errais, E.: «A correlation bridge between structural models and reduced form models for multivariate credit derivatives», June 2005.
5. British Banker's Association: «Credit Derivatives Report 2001».
6. British Banker's Association: «Credit Derivatives Report 2006», september 2006.
7. Burtschell, X., Gregory, J., and Laurent, J.-P.: «A comparative analysis of CDO pricing models», April 2005.
8. Celent Research Services: «Collateralized Debt Obligations Market; report 31.12.2005».
9. David Lando: «Credit Risk Modeling», Princeton University Press, 2004.
10. David Li: «Constructing a credit curve», Risk, november 1998.
11. David X. Li: «On Default Correlation: A Copula Function Approach», april 2000.
12. Davis, M. and Lo, V.: «Infectious Defaults», Quantitative Finance 1, 2001.
13. Duffie, D. and Singleton, K. J.: «Simulating Correlated Defaults», Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1999.
14. Duffie, D., and Singleton, K.: «Modeling Term Structure of Defaultable Bonds», Working paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1997.
15. Elizalde A: «Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models», desember 2005.
16. Elizalde A: «Credit Risk Models II: Structural model», 2005.
17. Elizalde A: «Credit Risk Models III: Reconciliation Reduced-Structural Models», 2005.
18. Elizalde A: «Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs», 2005.
19. Espen Gaarder Haug: «The complete guide to option pricing formulas», McGraw-Hill, 2007, 2 utgave.
20. Financial Times: «Getting rid of unwanted leftovers», desember 2005.

21. Gunter Löffler og Petter N. Posch: «Credit risk modeling using Excel and VBA», John Wiley & Sons Ltd, 2007.
22. Harald Martin Myhre, Arve Ree og Amund Westbye: «Pricing Credit Derivatives», desember 2003.
23. Håvard Bergli: «Advokatfirmaet Steenstrup Stordrange: Verdipapirisering», 2004.
24. Herleif-André Håvik, DnB Markets: «Kredittderivater – en introduksjon», august 1999.
25. Hull, J., Predescu, M. and White, A.: «The valuation of correlation-dependent credit derivatives using a structural model», november 2006.
26. Ingrid Andresen og Karsten R. Gerdrup: «Kredittrisikooverføring», april 2004.
27. Jarrow, R. and Turnbull, S.: «Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk», Journal of Finance 50, 1995.
28. Jarrow, R., Lando, D. and Turnbull, S.: «A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads», Review of Financial Studies 10, 1997.
29. Jeremy Graveline og Michael Kokalari: «Credit Risk», The Research Foundation of CFA Institute, 2006.
30. John C. Hull: «Option, futures, and other derivatives», Pearson Prentice Hall, 2006, 6 utgave.
31. Jostein Lillestøl: «Sannsynlighetsregning og statistikk med anvendelser», Cappelen Akademisk Forlag, Oslo 1997, 5 utgave.
32. Kalemanova, A., Schmid, B. and Werner, R.: «The normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing», 2005.
33. Ketil Johann Rakkestad og Sindre Weme: «CDO- er: Nye muligheter for å investere i kredittmarkedet», 2006.
34. Lehman Brothers: «CDO/ Structured Credit Annual 2006», desember 21, 2005.
35. Lionel Gomez Sanchez: «Pricing Basket of credit derivatives and CDO in factor models framework», mars 2004.
36. Merton, R.: «On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates», Journal of Finance 29, 1974.
37. Moody's Investors Service: «The Binominal Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis», desember 13, 1996.
38. Philipp J. Schönbucher: «Credit derivatives pricing models», John Wiley & Sons Ltd, 2003.
39. Schweizer B. / Abe Sklar: «Probabilistic metric spaces», november 2005.

40. Sklar, A.: «Random Variables, Joint Distribution Functions and Copulas», Kybernetika 9, 1973.
41. Vasicek O.: «Limiting Loan Loss Distribution», KMV Corporation, 1991.
42. Vasicek O.: «Loan Portfolio Value», KMV Corporation, 2002.
43. Vasicek O.: «Probability of Loss on Loan Portfolio», KMV Corporation, 1987.
44. [www.iboxx.com](http://www.iboxx.com)
45. [www.investopedia.com](http://www.investopedia.com)

## Appendix A

Ob2						
Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	102,6797	61,60782	0,9827	60,5391Q1
1,5	Q2	40 %	102,2305	61,3383	0,9489	58,2011Q2
Total						60,5391Q1+58,2011Q2

$$60,5391 \times 0,008232 + 58,2011Q_2 = 1,4589$$

$$58,2011Q_2 = 0,96054$$

$$Q_2 = 1,6504\%$$

Ob3						
Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	103,1133	61,86798	0,9827	60,7947Q1
1,5	Q2	40 %	102,6797	61,60782	0,9489	58,4568Q2
2,5	Q3	40 %	102,2305	61,3383	0,9162	56,1993Q3
Total						60,7947Q1+58,4568Q2+56,1993Q3

$$60,7947 \times 0,008232 + 58,4568 \times 0,016504 + 56,1993Q_3 = 2,7129$$

$$56,1993Q_3 = 1,24767$$

$$Q_3 = 2,2201\%$$

Ob4						
Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	103,9365	62,3619	0,9827	61,2801Q1
1,5	Q2	40 %	103,5321	62,11926	0,9489	58,9421Q2
2,5	Q3	40 %	103,1133	61,86798	0,9162	56,6846Q3
3,5	Q4	40 %	102,6797	61,60782	0,8847	54,5048Q4
4,5	Q4	40 %	102,2305	61,3383	0,8543	52,3999Q4
Total						61,2801Q1+58,9421Q2+56,6846Q3+52,3999Q4

$$61,2801 \times 0,008232 + 58,9421 \times 0,016504 + 56,6846 \times 0,022201 + 52,3999Q_4 = 5,6819$$

$$52,3999Q_4 = 2,94621$$

$$Q_4 = 2,7559\%$$

Ob5						
Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	104,7039	62,82234	0,9827	61,7325Q1
1,5	Q2	40 %	104,3269	62,59614	0,9489	59,3946Q2
2,5	Q3	40 %	103,9365	62,3619	0,9162	57,1371Q3
3,5	Q4	40 %	103,5321	62,11926	0,8847	54,9573Q4
4,5	Q4	40 %	103,1133	61,86798	0,8543	52,8524Q4
5,5	Q5	40 %	102,6797	61,60782	0,8249	50,8199Q5
6,5	Q5	40 %	102,2305	61,3383	0,7965	48,8573Q5
Total			61,7325Q1+59,3946Q2+57,1371Q3+107,8097Q4+99,6772Q5			

$$61,7325 \times 0,008232 + 59,3946 \times 0,016504 + 57,1371 \times 0,022201 + 107,8097 \times 0,02766 + 99,6772Q_5 = 9,0879$$

$$99,6772Q_5 = 3,35984$$

$$Q_5 = 3,3707\%$$

Ob6						
Tid	Konk. Sannsynlighet	Recovery	Risikofri verdi	LGD	Disk.faktor	NV forventa tap
0,5	Q1	40 %	105,759	63,4554	0,9827	62,3546Q1
1,5	Q2	40 %	105,4195	63,2517	0,9489	60,0166Q2
2,5	Q3	40 %	105,068	63,0408	0,9162	57,7592Q3
3,5	Q4	40 %	104,7039	62,82234	0,8847	55,5793Q4
4,5	Q4	40 %	104,3269	62,59614	0,8543	53,4744Q4
5,5	Q5	40 %	103,9365	62,3619	0,8249	51,4420Q5
6,5	Q5	40 %	103,5321	62,11926	0,7965	49,4794Q5
7,5	Q6	40 %	103,1133	61,86798	0,7691	47,5843Q6
8,5	Q6	40 %	102,6797	61,60782	0,7427	45,7544Q6
9,5	Q6	40 %	102,2305	61,3383	0,7171	43,9875Q6
Total			62,3546Q1+60,0166Q2+57,7592Q3+109,0537Q4+100,9214Q5+137,3263Q6			

$$62,3546 \times 0,008232 + 60,0166 \times 0,016504 + 57,7592 \times 0,022201 + 109,0537 \times 0,02766 +$$

$$100,9214 \times 0,033707 + 137,3263Q_6 = 14,4247$$

$$137,3263Q_6 = 5,22039$$

$$Q_6 = 3,8014\%$$

## Appendix B

Eksempel på data hentet fra iTraxx- indeksen:

11.04.2006 16:29

Company	5y BID Spread	5y OFFER Spread	5y MID Spread
Alstom	122	130	126
British Airways Plc	123	128	125,5
Cable & Wireless Plc	270	280	275
Cablecom Luxembourg, SCA	215	235	225
Cap Gemini SA	116	126	121
Casino Guichard Perrachon SA	70	73	71,5
Cognis GmbH	330	360	345
Colt Telecom Group Plc	189	199	194
Corus Group Plc	168	175	171,5
Eircom Ltd	210	220	215
EMI Group Plc	150	170	160
Fiat SpA	190	200	195
FKI Plc	135	145	140
Fresenius AG	126	136	131
Grohe Holding GmbH	560	585	572,5
Havas SA	225	245	235
HeidelbergCement AG	72	77	74,5
Ineos Group Holdings plc	425	455	440
Infineon Technologies AG	260	290	275
International Power Plc	185	205	195
Invensys Plc	288	298	293
ISS Global A/S	390	410	400
JSG Funding Plc	415	435	425
Kabel Deutschland GmbH	433	448	440,5
Koninklijke Ahold NV	144	149	146,5
Ladbroke plc	120	125	122,5
Metso Oyj	98	103	100,5
M-real Oyj	335	345	340
Nell AF SARL	395	415	405
NTL Cable Plc	355	375	365
ONO Finance	550	575	562,5
ProSieben Media AG	125	140	132,5
Rank Group Plc	145	148	146,5
Ray Acquisitions SCA	420	440	430
Rhodia SA	250	260	255
Scandinavian Airlines System AB	355	380	367,5
Seat Pagine Gialle SpA	248	258	253
Sol Melia SA	92	102	97
TDC A/S	229	239	234
TUI AG	190	200	195
Unity Media GmbH	598	613	605,5
UPC Holding BV	475	500	487,5
VNU NV	150	160	155
WDAC Subsidiary Corp	415	435	425
Wind Acquisition Finance S.p.A.	375	395	385

## Appendix C

Standard and Poor's Global Corporate Default Summary

Year	Total Defaults*	Investment grade defaults	Speculative grade defaults	# of inv. grade obligors	# of speculative grade obligors
1981	2	0	2	1070	322
1982	18	2	15	1099	341
1983	12	1	10	1122	342
1984	14	2	12	1181	371
1985	19	0	18	1216	420
1986	34	2	30	1337	533
1987	19	0	19	1334	687
1988	33	0	30	1349	760
1989	42	2	34	1400	753
1990	69	2	56	1447	694
1991	94	3	65	1496	590
1992	35	0	30	1661	525
1993	25	0	13	1823	562
1994	20	1	15	1916	717
1995	35	1	29	2144	832
1996	20	0	16	2336	897
1997	23	2	20	2551	1016
1998	58	4	49	2718	1334
1999	108	4	92	2790	1674
2000	129	5	104	2835	1782
2001	229	6	173	2929	1806
2002	223	14	158	3049	1726
2003	121	3	90	2998	1837
2004	51	0	37	3117	1955
2005	37	1	29	3264	2151



## Appendix D

Hypotetisk CDO struktur												
Pålydende verdi	100		Senior Transje		Rf	11 %						
Kupong	11 %		Pålydende	80								
Konkurssanns.	22 %		Kupong	6 %								
Diversifiseringsscore	20		EK- transje									
Recovery Rate	40 %		Pålydende	20								
Forfall	6		Kupong	12 %								
År	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Tapsfordeling	0 %	50 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %
# Konkurser	11	Sanns.	0,1049%	Tap	0,3637%							
Pålydende	100,00 %	72,50 %	72,50 %	67,00 %	67,00 %	61,50 %	61,50 %	56,00 %	56,00 %	50,50 %	50,50 %	45,00 %
Recovery	0,00 %	11,00 %	11,00 %	13,20 %	13,20 %	15,40 %	15,40 %	17,60 %	17,60 %	19,80 %	19,80 %	22,00 %
Renter på recovery	0,00 %	0,61 %	0,61 %	0,73 %	0,73 %	0,85 %	0,85 %	0,97 %	0,97 %	1,09 %	1,09 %	1,21 %
Collat kupong	5,50 %	3,99 %	3,99 %	3,69 %	3,69 %	3,38 %	3,38 %	3,08 %	3,08 %	2,78 %	2,78 %	2,48 %
Tilgjengelig kontanter	5,50 %	6,60 %	7,75 %	8,79 %	9,89 %	10,87 %	11,90 %	12,80 %	13,75 %	14,58 %	15,45 %	16,19 %
Etter betalte renter	1,90 %	3,00 %	4,15 %	5,19 %	6,29 %	7,27 %	8,30 %	9,20 %	10,15 %	10,98 %	11,85 %	12,59 %
Senior CFs	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	2,40 %	81,99 %
Senior NPV	79,71 %											

Tabellen ovenfor viser vi beregningen som vi har brukt i kapitel 9.3.1. Her har vi vist et eksempel med 11 konkurser. Sannsynligheten av 11 konkurser er 0,1049 %, og tapet er 0,3637 %. Konkursene er ”front loaded”, det vil si at 50 % inntreffer ved slutten av første året og 10 % inntreffer ved slutten av hvert år for 5 etterfølgende år. Vi tar for eksempel slutten av første året hvor 50 % av konkursene inntreffer. Pålydende (face) i år 1 blir da pålydende i år 0,5 minus forholdet mellom antall konkurser og diversifiseringsscore ganger 50 % konkurs:  $100 \% - (11/20 * 50 \%) = 72,50 \%$ . Andel tilbakebetalt (Recovery) i år 1 blir:  $40 \% * (1 - 72,5) = 11,00 \%$ . Renten på recovery blir recovery ganger risikofri renten (reinvestment) på 11 % i et halv år:  $11 \% / 2 * 11,00 \% = 0,61 \%$ . Collat coupon er kupongrenten på den underliggende aktivum (11 %) ganger med pålydende verdi det året:  $11 \% / 2 * 72,50 \% = 3,99 \%$ . Available cash er interest on recovery plus collat coupon plus after interest fra perioden før ganger risikofri renten:  $0,61 \% + 3,99 \% + 1,90 \% * (1 + 11 \% / 2) = 6,60 \%$ . After interest blir: størst av  $[6,60 \% - 6 \% / 2 * 80 - 12 \% / 2 * 20 ; 0] = 3,00 \%$ . Kontantstrøm til seniortransjen (senior CFs) i år 1 er: minst av  $[6,60 \% ; 6 \% / 2 * 80] = 2,40 \%$ . Netto nåverdi til seniortransjen (senior NPV) er summen av kontantstrømmen (senior CFs) ganger diskonteringsraten (DF) i hver periode. Sannsynligheten for 11 konkurser blir beregnet av

binomisk fordeling:  $P(X = 11) = \binom{20}{11} 0,22^{11} (1 - 0,22)^9 = 0,1049\%$  . Tapet (loss) blir:

$$\frac{80 - 79,71}{80} = 0,3637\% .$$

# Appendix E

Moody's "Idealized" Cumulative Expected Loss Rates (%)										
Rating	Year									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	0,00028	0,000110	0,000390	0,000990	0,001600	0,002200	0,002890	0,003630	0,004510	0,005500
Aa1	0,000314	0,001650	0,005500	0,011550	0,017050	0,023100	0,029700	0,036850	0,045100	0,055000
Aa2	0,000748	0,004400	0,014300	0,025850	0,037400	0,048950	0,061050	0,074250	0,090200	0,110000
Aa3	0,001661	0,010450	0,032450	0,055550	0,078100	0,100650	0,124850	0,149600	0,179850	0,220000
A1	0,003196	0,020350	0,064350	0,103950	0,143550	0,181500	0,223300	0,264000	0,315150	0,385000
A2	0,005979	0,038500	0,122100	0,189750	0,256850	0,320650	0,390500	0,455950	0,540100	0,660000
A3	0,021368	0,082500	0,198000	0,297000	0,401500	0,500500	0,610500	0,715000	0,836000	0,990000
Baa1	0,049500	0,154000	0,308000	0,456500	0,605000	0,753500	0,918500	1,083500	1,248500	1,430000
Baa2	0,093500	0,258500	0,456500	0,660000	0,869000	1,083500	1,325500	1,567500	1,782000	1,980000
Baa3	0,231000	0,577500	0,940500	1,309000	1,677500	2,035000	2,381500	2,733500	3,063500	3,355000
Ba1	0,478500	1,111000	1,721500	2,310000	2,904000	3,437500	3,883000	4,339500	4,779500	5,170000
Ba2	0,858000	1,908500	2,849000	3,740000	4,625500	5,373500	5,885000	6,413000	6,957500	7,425000
Ba3	1,545500	3,030500	4,328500	5,384500	6,523000	7,419500	8,041000	8,640500	9,190500	9,713000
B1	2,574000	4,609000	6,369000	7,617500	8,866000	9,839500	10,521500	11,126500	11,682000	12,210000
B2	3,938000	6,418500	8,552500	9,971500	11,390500	12,457500	13,205500	13,832500	14,421000	14,960000
B3	6,391000	9,135500	11,566500	13,222000	14,877500	16,060000	17,050000	17,919000	18,579000	19,195000
Caa	14,300000	17,875000	21,450000	24,134000	26,812500	28,600000	30,387500	32,175000	33,962500	35,750000

## Appendix F

Makrokode brukt til å kjøre simuleringer

```
Sub CDO_beregning()  
' Dim M As long, i as long  
  Application.ScreenUpdating = False  
  Application.Calculation = xlCalculationAutomatic  
  
'Fjern output fra forrige kjøring  
  Range("at1:at65536").Clear  
  
'Gir beskjed om hvor mange simuleringer som skal gjøres  
  M = Range("g3")  
  
'Utfør simulering  
  For i = 1 To M  
  
'Viser fremdriften av simuleringene som prosenttall på statuslinjen  
  Application.StatusBar = Int(i / M * 100) & "%"  
  
'Skriv porteføljeverdien inn i regneark  
  Range("at" & i + 1) = Range("d5")  
  Next i  
  
End Sub
```

## Appendix G

Inputdata brukt i eksempelet med copula- beregninger:

	Konkursintensiteter
Aktivum 1	10 %
Aktivum 2	8 %
Aktivum 3	6,50 %
Aktivum 4	3 %
Aktivum 5	14 %
Aktivum 6	15 %
Aktivum 7	6 %
Aktivum 8	4 %
Aktivum 9	9 %
Aktivum 10	11 %
Aktivum 11	2,75 %
Aktivum 12	10,50 %
Aktivum 13	7 %
Aktivum 14	7 %
Aktivum 15	8,50 %
Aktivum 16	17 %
Aktivum 17	2 %
Aktivum 18	10 %
Aktivum 19	7,75 %
Aktivum 20	3,25 %