El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico

SAMITH TATIANA VEGA AGREDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2019

El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Samith Tatiana Vega Agredo

Luis Cornelio Recalde, PhD.
Director de Tesis

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2019

Contenido

Agradecimientos

El agradecimiento de mi tesis es principalmente para Dios quien me guía, y me da las fuerzas para seguir adelante.
A mi hijo Emmanuel Gómez Vega por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada día, por su gran amor y por ser la razón de mi vida.
A mis padres por haberme forjado la persona que soy en la actualidad, a mi esposo por su aliento en este proceso, a mis hermanos y demás familia por el apoyo que siempre me han brindado.
Y finalmente agradezco a mi director de tesis el Dr. Luis Recalde por su colaboración en cada momento de mi proyecto y por la calidad de ser humano que lo caracteriza.

Resumen

En la presente investigación se realiza un análisis epistemológico al desarrollo histórico del concepto de derivada desde la antigüedad griega hasta el siglo XIX. Se hace énfasis en el periodo que va de Newton y Leibniz, en el siglo XVII, hasta los desarrollos de Cauchy. Partiendo de los movimientos conceptuales que se establecen con la introducción de la noción de recta tangente desde Euclides a Newton y Leibniz, pasando por Fermat y Descartes, se observa la emergencia del obstáculo epistemológico causado por la filiación geométrica de la derivada.
-**Palabras claves**: Desarrollo histórico-epistemológico, obstáculos conceptuales y/o epistemológicos, historia de la derivada, recta tangente, derivada de Newton, Leibniz y Cauchy.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de los fundamentos del cálculo resulta bastante problemáticos, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma mecánica ejercicios que involucran la noción de derivada, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de esta rama de las matemáticas. Si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos. Este es el caso de los problemas de aplicación de la derivada, donde aparece a través de problemas de razón de cambio o en problemas de máximos y mínimos, mediante la interpretación del crecimiento y decrecimiento de una función. En términos generales existe una gran dificultad en la apropiación de los diferentes matices y representaciones de la derivada, persistiendo, generalmente, como interpretación sólo su referente geométrico.

En [4], se afirma que si bien los estudiantes aprenden a calcular la derivada de algunas funciones, tienen muchas dificultades cuando necesitan usar el significado de la noción de derivada, ya sea en su expresión analítica o en su interpretación geométrica. Lo que esta autora también advierte es que se encuentran problemas para que los estudiantes alcancen una buena comprensión de los conceptos.

En [23], se refiere que el tratamiento que se le da al concepto del cálculo en la escuela secundaria, es enfocada al manejo y aplicación de fórmulas, de esta manera se genera en los estudiantes dificultades para la comprensión de este objeto matemático. Pero esto no solo le ocurre a los estudiantes, sino también a los docentes quienes en muchas ocasiones tampoco manejan los aspectos conceptuales de la derivada.

Así mismo en [31], se argumenta que para los estudiantes no es fácil entrar en el campo conceptual del cálculo, y aunque son capaces de resolver ejercicios, aplicando las reglas de derivación, tienen serias dificultades al recurrir a significados más amplios que involucren conceptualmente la derivada.

En diferentes instancias se argumenta que conocer el desarrollo histórico de los conceptos permite reconocer obstáculos conceptuales [1]. En este trabajo de investigación seguimos este planteamiento para el caso de la derivada.

Podemos decir que uno de los precursores en el procedimiento de determinar la recta tangente a una curva fue Descartes, quien desarrolló un método geométrico para encontrar la recta tangente a una curva algebraica en un punto dado. [2] Newton introdujo el concepto de cociente de cantidades infinitamente pequeñas, que luego traduce al lenguaje de los fluentes (funciones definidas paramétricamente) y obtiene las fluxiones, es decir derivadas de los fluentes con respecto al tiempo. De esta manera introduce un punto de vista físico para obtener la pendiente de la recta tangente a una curva, como el cociente entre las fluxiones. Por otro lado, Leibniz interpretó la pendiente de la recta tangente a una curva como el cociente de infinitésimos: $\dfrac{dy}{dx}$. Los trabajos de Newton y Leibniz y sus sucesores, constituyen la antesala a la emergencia histórica del análisis matemático clásico, en el cual no se daba cabida a las cantidades infinitesimales al incorporara el concepto de límite como operación básica. En esta dirección Cauchy definió el concepto de derivada, en la forma en que se conoce actualmente, mediante la formalización del concepto de función y el concepto de límite.

[1] Ver por ejemplo [11]

[2] Otros trabajos influyentes en determinar la recta tangente a una curva fueron desarrollados por Fermat y Barrow

Luego para develar las dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada, consideramos que la via más conveniente es establecer una conexión histórica que permita dar cuenta de los diferentes obstáculos del paso de la concepción geométrica del concepto de derivada al concepto analítico de la misma, de tal forma que sirva como aporte a la comprensión de dicho concepto. Siguiendo este método, en esta investigación abordamos uno de los conceptos centrales del cálculo, como lo es el de derivada; de esta manera la pregunta de investigación que planteamos en esta tesis fue la siguiente: ¿Cuáles son los obstáculos y elementos de causalidad que aparecen en el desarrollo histórico del paso de lo geométrico a lo analítico en el concepto de derivada, desde Newton y Leibniz hasta Cauchy?

Por consiguiente este trabajo se suscribe en la línea de investigación de Historia de las Matemáticas y se centra en el estudio de los obstáculos en el paso del acercamiento geométrico de la noción de derivada al concepto analítico, a partir de establecer conexiones históricas desde la antigüedad griega, pasando por Newton y Leibniz hasta Cauchy. A través de una revisión bibliográfica de fuentes primarias y secundarias sobre el desarrollo histórico del concepto de derivada, hicimos un análisis histórico epistemológico del paso de lo geométrico a lo analítico en la creación y evolución de dicho concepto. De esta manera esperamos ofrecer una visión epistemológica del obstáculo en el concepto de derivada que emerge de lo geométrico a lo analítico de tal forma que sirva como aporte al manejo y comprensión de dicho concepto. Es así como en este proyecto de investigación nos propusimos alcanzar los siguientes objetivos:

Objetivo general

Caracterizar los diferentes obstáculos y elementos de causalidad que se presentaron en el desarrollo histórico del paso de lo geométrico a lo analítico en el concepto de derivada, desde Newton y Leibniz hasta Cauchy.

Objetivos específicos

- Identificar los antecedentes históricos de la noción de derivada tomando como referencia el desarrollo histórico de la noción de recta tangente a una curva en un punto.

- Determinar el desarrollo conceptual de la noción de derivada en los trabajos de Newton y Leibniz, con el propósito de identificar los elementos de causalidad que precedieron su formalización con Cauchy.

- Analizar la propuesta teórica establecida por Cauchy en el *Curso de análisis* de 1821, con el propósito de identificar el proceso de formalización del concepto de derivada.

Para alcanzar estos objetivos desarrollamos cuatro capítulos y un capítulo de conclusiones de la siguiente manera:

En el capítulo I, *El paso de lo geométrico a lo analítico como obstáculo epistemológico*, se analiza el concepto de obstáculo epistemológico, establecido por Bachelard, en términos generales, y adoptado por Brousseau para la matemática. Se muestra su importancia en la construcción de conocimientos, y la manera en que la historia de las matemáticas se convierte en una herramienta a la hora de identificar obstáculos epistemológicos presentes en la construcción de los saberes.

En el capítulo II, *Desarrollo histórico de la noción de tangente*, se establece una línea de desarrollo histórico del trazado de tangentes desde la antigüedad griega, donde se establece la tangente para la circunferencia y algunas cónicas, hasta los trabajos desarrollados por Descartes y Fermat en el siglo XVII, quienes desarrollaron métodos algebraicos para trazar tangentes para algunas curvas más allá de las cónicas.

En el capítulo III, *Newton y Leibniz: de la tangente a la derivada*, se analizan los desarrollos de Newton y Leibniz en torno al problema milenario de la cuadratura de figuras planas, el cual tiene vínculos directos con el problema de establecer la recta tangente a una curva. En el marco de este problema, Newton y Leibniz deben incorporar los infinitesimales, nociones no fundamentadas. Precisamente, en este capítulo mostramos que en la visión cinemática de Newton y en la interpretación de cociente diferencial de Leibniz se pueden identificar las primeras huellas de la noción de derivada.

En el capítulo IV, *La instauración del concepto de derivada con Cauchy*, se analizan los desarrollos de Cauchy, plasmados en su libro *Curso de análisis*. En este texto Cauchy introduce la noción de derivada desde un punto de vista formal, dando salida al problema de la recta tangente a una curva. También se analiza como a través de la técnica de épsilon y delta, Weierstrass realiza una presentación rigurosa del análisis evadiendo toda alusión a aspectos geométricos, físicos y metafísicos.

Y por último, en el capítulo V se presentan las conclusiones que se obtuvieron en la realización de la investigación.

Capítulo 1

El paso de lo geométrico a lo analítico como obstáculo epistemológico

1.1. La noción de obstáculo epistemológico

La teoría de obstáculo epistemológico fue introducida por el filósofo francés Gastón Bachelard (1884-1962) en su libro *La formación del espíritu científico* (1938) [1]. La noción de obstáculo epistemológico constituye una de las grandes contribuciones a la moderna teoría del conocimiento para identificar algunos aspectos que dificultan el aprendizaje de conceptos al interior de las ciencias.

Bachelard en *La formación del espíritu científico*, introduce el concepto de obstáculo epistemológico, contrastando el conocimiento común y el conocimiento científico; Bachelard caracteriza los procesos de producción de los conocimientos científicos en términos de errores rectificables de obstáculos superados, tal como el mismo Bachelard afirma:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy

[1] [5]

> pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.([5], p. 15)

Estas causas de estancamiento y de regresión que Bachelard califica como obstáculos epistemológicos, constituyen uno de los mecanismos más importantes para la construcción de conocimientos científicos; para Bachelard estos obstáculos no se deben a la falta de conocimiento o a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino que se deben a conocimientos que en un contexto determinado son eficaces, pero generan problemas al cambiar de contexto; es decir un obstáculo epistemológico es, por tanto, una concepción, un conocimiento que resulta ser eficaz ante ciertas situaciones; pero que cuando es enfrentado a otro tipo de situaciones resulta ser inadecuado, llevando a conclusiones erróneas.

Los obstáculos epistemológicos no se refieren a los elementos externos que intervienen en el proceso del conocimiento científico, como podría ser la complejidad o la dificultad para captar el nuevo fenómeno, en el que la causa fundamental para no poder acceder al conocimiento radica en la mínima capacidad que tienen los sentidos para captar la realidad, sino a las condiciones psicológicas que impiden evolucionar al espíritu científico en formación.

Es así como Bachelard identifica, a partir de ejemplos históricos, capítulo a capítulo, algunas categorías generales de obstáculos; es decir establece diez obstáculos que se pueden presentar y dificultan el paso de un espíritu precientífico a un espíritu verdaderamente científico; estos son:

1. La experiencia básica o conocimientos previos.

2. El conocimiento general.
3. El obstáculo verbal.
4. El conocimiento unitario y pragmático.
5. El obstáculo sustancialista.
6. El obstáculo realista.
7. El obstáculo animista.
8. El mito de la digestión.
9. Libido y conocimiento objetivo.
10. Los obstáculos del conocimiento cuantitativo.

1.2. Descripción de algunos obstáculos epistemológicos establecidos por Bachelard

1.2.1. Experiencia básica o conocimientos previos

Para Bachelard, antes de iniciar cualquier estudio, el sujeto tiene ya un conjunto de ideas muy propias acerca del tema en consideración. Estas ideas previas influyen en el aprendizaje de nuevos conocimientos.

El obstáculo de la experiencia básica carga de subjetividad las observaciones y se puedan tener concepciones erróneas, ya que los sentidos y la intuición primaria brindan solo algunos datos parciales de lo que se desea aprender. En esta dirección no es un conocimiento fiable.

1.2.2. El conocimiento general

En el segundo obstáculo, Bachelard plantea:

> Nada ha retardado más el progreso del conocimiento científico que la falsa doctrina de lo general que ha reinado desde Aristóteles a Bacon inclusive, y que aún permanece, para tantos espíritus, como una doctrina fundamental del saber. ([5], p. 66)

Para Bachelard el conocimiento general es un obstáculo que estanca el avance de conocimientos pues en cuanto se toma un concepto como ley general; es decir al explicar mediante el uso de generalizaciones un concepto, se cae, en la mayoría de las veces, en equivocaciones, porque los conceptos se vuelven vagos e indefinidos, ya que se dan definiciones demasiado amplias para describir un hecho o fenómeno y se deja de lado aspectos esenciales, los detalles que son los que realmente permiten exponer con claridad y exactitud los caracteres que permiten distinguirlos y conceptuarlos correctamente. Muchas veces se dan falsas definiciones, que lejos de construir un concepto científico, se vuelven como hipótesis erróneas, pues no siempre en la generalidad se reconocen propiedades de la particularidad.

1.2.3. El obstáculo verbal

El tercer obstáculo epistemológico presentado por Bachelalard es el verbal, el cual se presenta cuando se caracteriza un concepto utilizando una sola cualidad o calificativo creyendo que la caracterización es tan evidente que no hay necesidad de explicarla; es decir el obstáculo verbal es concebido como el uso inadecuado de palabras o de imágenes para explicar un concepto o teoría. Así si un estudiante adquiere un conocimiento a través de un ejemplo simple, no puede contrastarlo con la complejidad real del objeto quedándose con una explicación superficial.

1.2.4. El conocimiento utilitario y pragmático

Con respecto al cuarto obstáculo, Bachelard escribe:

> También la utilidad ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse inducción utilitaria. Ella conduce a generalizaciones exageradas. Se puede partir entonces de un hecho comprobado, hasta se puede llegar a una extensión feliz. Pero el empuje utilitario conducirá casi infaliblemente demasiado lejos. Todo pragmatismo, por el mero hecho de ser un pensamiento mutilado, lleva fatalmente a la exageración. El hombre no sabe limitar lo útil. Lo útil por su valorización se capitaliza sin cesar. ([5], p. 109)

Este obstáculo tiene relación con la tendencia a reducir y sintetizar una determinada teoría o concepto mediante la idea de utilidad o beneficio, es decir se acostumbra a simplificar o abreviar el concepto de acuerdo a la utilidad que se le de en cierto contexto, la utilidad es la razón que sirve de base para construir las definiciones y es lo que se usa para brindar las explicaciones sobre las teorías. Para Bachelard:

> En todos los fenómenos se busca la utilidad humana, no sólo por la ventaja positiva que puede procurar, sino como principio de explicación. Encontrar una utilidad, es encontrar una razón. ([5], p. 109)

1.2.5. El obstáculo animista

Este obstáculo da importancia a los contenidos que tengan de por medio la vida o todo lo que se relacione con ella, al realizar ejemplos utilizando la naturaleza para explicarse o utilizar los fenómenos biológicos, como explicación de los fenómenos físicos incurren en el obstáculo animista; es decir consiste en las dificultades que plantea otorgar alma a ciertos objetos, a la hora de adquirir nuevos conocimientos. Es así como se debe relacionar adecuadamente el concepto con la imagen; la imagen debe permitir crear las conexiones cognitivas apropiadas para traducir el concepto apropiado. Según Bachelard:

> En una cierta etapa del desarrollo precientífico, los fenómenos biológicos son los que sirven de medios de explicación de los fenómenos físicos. Cuando se ha valorizado al

> carácter biológico, las experiencias del galvanismo presentan muy claramente, el carácter de obstáculo animista. ([5], p. 191)

Es decir, se responde de acuerdo con lo que se conoce en el medio más cercano y lo relacionan con características propias de los seres vivos, de ahí que las definiciones que dan acerca de los distintos conceptos están cargadas de características vitales, estados anímicos o sensaciones. Cabe resaltar que Bachelard aleja explícitamente las matemáticas de su finalidad. Ellas escapan según él a este tipo de funcionamiento y al respecto escribe:

> En efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce períodos de errores. Ninguna de las tesis que sostenemos en este libro apunta pues al conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo.([5], p. 25)

Sin embargo, las matemáticas están plagadas de este obstáculo, tal como nos muestra la historia. Por ejemplo en el desarrollo histórico del concepto de derivada pueden identificarse periodos en los cuales se daba una visión dinámica. Es el caso de las nociones de fluentes y fluxiones de Newton.

1.3. Los obstáculos epistemológicos en la matemática

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales en [5], fue retomada por Guy Brousseau y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas. En 1983, Brousseau, en su artículo *Barreras y problemas epistemológicos en la matemática* [2] considera ampliamente la idea de obstáculo epistemológico y su posible relación con la enseñanza-aprendizaje

[2] [11]

de las Matemáticas. En su publicación reconoce que Bachelard es el primer autor que habla de obstáculos, y manifiesta que la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: a la didáctica, a la psicología, etc. Brousseau lleva a cabo una serie de investigaciones cuyo fin era, además de identificar los obstáculos epistemológicos conectados con las matemáticas que se enseñan en la secundaria, elaborar medios didácticos para que los alumnos pudieran superar dichos obstáculos. Es así como se hace importante el estudio de los obstáculos epistemológicos tanto desde el análisis de la génesis histórica de un conocimiento como en la enseñanza, en la evolución espontánea de un alumno ([11], p. 41). De esta forma, las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos en matemáticas, dice Brousseau, deben dirigirse a:

1. Encontrar los errores recurrentes y mostrar que ellos se agrupan alrededor de concepciones.

2. Encontrar los obstáculos en la historia de las matemáticas.

3. Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico.

Luego Brousseau califica un obstáculo como epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo, en el sentido de que no impida acceder a nuevos conocimientos.

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. ([24])

Así, la noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación; ciertos conocimientos del alumno están ligados a otros conocimientos anteriores que a

menudo son provisorios, imprecisos y poco correctos.
Brousseau expone sus primeras ideas sobre obstáculo en diferentes artículos. Inicia estableciendo una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se situe en uno u otro de los campos del sistema didáctico: alumno-profesor-saber, los cuales se refieren a obstáculos de origen ontogénico, obstáculos de origen epistemológico, y obstáculos de origen didáctico, como se muestra en el siguiente esquema:

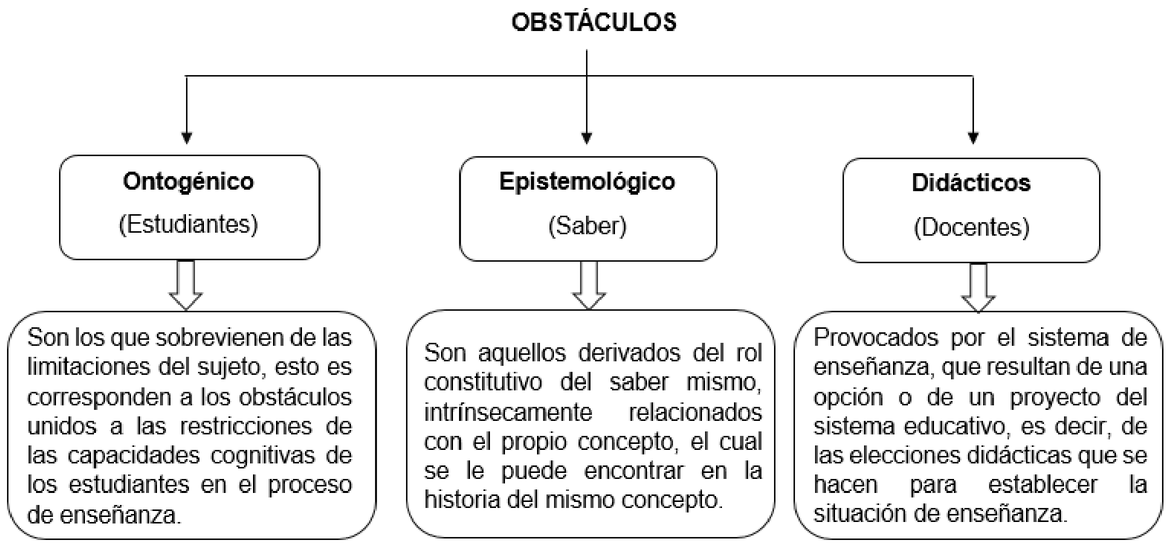


Figura 1.1

Es importante recalcar que identificar obstáculos epistemológicos no es una tarea sencilla, pero parece ser que el mejor camino para identificar obstáculos es en el desarrollo histórico; así cabe resaltar la noción de obstáculo epistemológico en la construcción de conceptos matemáticos y como estos obstáculos pueden ser identificados en los estudiantes, mediante del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos.
Al respecto, Duroux ([11], p. 43) establece una serie de condiciones que debe satisfacer un obstáculo para que sea considerado de tipo epistemológico:

- Un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad o falta de conocimiento.

- Este conocimiento produce respuestas correctas en un determinado contexto que el alumno encuentra a menudo; pero genera respuestas falsas fuera del contexto.
- Este conocimiento se manifiesta resistente a las contradicciones (a las cuales se confronta) y a la sistematización de un conocimiento mejor.
- Después de la toma de conciencia de su falta de precisión, este conocimiento continúa a manifestarse de manera intempestiva y obstinada.

Más precisamente, los elementos que permiten identificar estos obstáculos se deben buscar en el análisis de las resistencias que surgieron en el desarrollo histórico y en los debates que les han permitido superarlas.

Es así que los obstáculos epistemológicos siempre estarán presentes, de una u otra manera, en la mente del alumno. Por lo tanto, para que haya progreso en el desarrollo de un saber, no deben ser evitados; al contrario, deben ser evidenciados y enfrentados de manera consciente hasta lograr superarlos. Para esto, según Brousseau, es necesario que haya una reconstrucción cognitiva, que dé cabida al nuevo conocimiento.

1.4. El obstáculo de lo geométrico a lo analítico en el concepto de derivada

El uso de la representación geométrica de las funciones como puerta de entrada al concepto de derivada, en muchas ocasiones, constituye un obstáculo conceptual cuando se pasa a la definición analítica. Los problemas para relacionar estas formas de representación se ponen de manifiesto cuando se trata de utilizar esta noción en otros contextos. Es por esto conveniente no abusar de las representaciones geométricas, dado que su utilización persistente dificulta el paso de las variaciones geométricas a las variaciones analíticas. En este sentido vale resaltar la importancia de la comprensión de dicho concepto, como por ejemplo cuando se cambia de contexto y en el planteamiento de problemas de aplicación.

En algunas instancias se considera que en el proceso de comprensión del concepto no sólo se reproducen las etapas esenciales, históricamente hablando, sino también las dificultades que se presentaron en su desarrollo histórico. Es de vital importancia reconocer los fundamentos o nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y generalización, y que se constituyen por lo tanto en un obstáculo para el aprendizaje. Uno de los problemas en el proceso de aprendizaje tiene que ver con la contextualización de las nociones matemáticas, es decir en ocasiones los estudiantes pueden llegar a dominar los conceptos matemáticos, entender las definiciones, pero al momento de establecer una aplicación de ese concepto con el mundo fenomenológico presentan muchas dificultades.

Diversas investigaciones muestran que muchos de los obstáculos que ha tenido la humanidad, es decir de orden filogénico, se reproducen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. A este tipo de obstáculos, Bachelard los denomina obstáculos epistemológicos, pues corresponden al saber. Un ejemplo de este tipo de obstáculos es la persistencia de lo geométrico, en el caso de la derivada; puesto que en un principio la noción de tangente surge en un ambiente geométrico desde la antigüedad griega; más adelante, al tratar de generalizar el concepto de tangente de una recta a una circunferencia en un punto, se presentan dificultades conceptuales, como es el caso de intentar mantener la idea de tangencia de manera local para algunas funciones, como la función seno o coseno, en las cuales no es posible hacerlo. Ese tipo de problemas que se presentan en la geométria hacen que se tenga que resolver la idea de la recta tangente a una curva en un punto y desde lo analítico; este método empieza a emerger con los trabajos de Newton y Leibniz, en la línea de desarrollo de la geometría analítica en un proceso que va de las curvas a las ecuaciones y de las ecuaciones a las funciones. Así el problema de trazar la recta tangente a una curva en un punto se convierte en el problema analítico de establecer condiciones para definir la derivada de una función en este punto.

Se puede decir que la noción de derivada tiene históricamente un transfondo geométrico; esto da lugar a propuestas de enseñanza de la derivada a través de una visualización geométrica de recta secante que en el límite se vuelve la tangente. De esta forma, la persistencia de lo geométrico dificulta la comprensión analítica de la noción de derivada. Así, al utilizar la noción de derivada en otro contexto por ejemplo el de la razón de cambio (el cual tiene sentido desde el punto de vista analítico dado que en este estamos interesados en estudiar el comportamiento variacional desligado del aspecto geométrico), el estudiante se tropieza con dificultades, pues no alcanza a adquirir las competencias necesarias en los cambios de representación.

En vista de que en un comienzo la noción de tangente surge a partir de lo geométrico, al pasar a lo analítico se tuvieron que desarrollar muchos elementos conceptuales (por ejemplo, pasar de las ecuaciones a las funciones o de lo infinitamente pequeño al límite), los cuales habría que tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada.

Desde el punto de vista de la teoría de obstáculos, las dificultades que historicamente tuvo la humanidad para convertir un problema geométrico en un problema analítico se trasmiten a los estudiantes. De esta forma la historia, como herramienta, permite reconocer la relación entre la filogénesis y ontogénesis. La filogénesis señala las diferentes etapas que se llevaron a cabo en la humanidad para llegar a la noción de derivada que se tiene actualmente. Mientras que la ontogénesis hace referencia a la manera como el individuo desde sus primeros estadios va adquiriendo madurez para poder establecer distintos acercamientos a la noción de derivada (como es el caso de la recta tangente). Ligado a esto se establecen no solo rutas paralelas entre la evolución del conocimiento matemático en la humanidad y la evolución del aprendizaje de las matemáticas, sino que también se establecen relaciones entre los obstáculos epistemológicos relacionados con ciertos objetos matemáticos y las dificultades que tiene el estudiante en su proceso de aprendizaje.

Es por eso que se habla de que la noción de derivada de una función conlleva diversos aspectos problemáticos entre los que podemos señalar la tensión de un tratamiento geométrico como pendiente de la recta tangente a la curva, o de un tratamiento analítico como límite del cociente incremental; al tener estas representaciones para entender dicho concepto,se puede hablar de la problematica que existe en el proceso de apropiación del conocimiento matemático en el sentido de las competencias que debe adquirir el estudiante. Dichas competencias se deben entender como la capacidad para identificar y procesar el conocimiento matemático en distintos contextos.

Es así como la noción de obstáculo cobra sentido cuando se ha establecido una ruta de desarrollo conceptual, ya que al tener en perspectiva un horizonte conceptual, que en matemática avanzada corresponde a la representación analítica del concepto, se tiene una mejor aprehensión del concepto. La comprensión analítica constituye el marco teórico que permite aplicar el concepto en diferentes instancias o ramas de la matemática.

El problema geométrico de hallar la recta tangente a una curva en un punto, corresponde al problema analítico de hallar la derivada de la función que define la curva en ese punto. Por esta razón, generalmente, el concepto de derivada se suele incorporar a través de un procedimiento geométrico. Dado un punto P en la curva en el plano cartesiano, consideramos un segundo punto Q de la curva, distinto a P, y tomamos la recta secante que pasa por ambos puntos. De esta forma si la curva dada tiene ecuacion $y = f(x)$ y el punto dado tiene coordenadas $P = (x_0, f(x_0))$ entonces suponemos que el punto tomado tiene coordenadas $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ donde h es un número real. Entonces, para determinar la recta tangente procedemos a desplazar el punto Q hacia P sobre la curva (se asume que la curva es continua), lo que es equivalente a hacer que h tome valores cada vez mas pequeños. Entonces definimos la recta tangente como la recta a la cual tienden las rectas secantes cuando hacemos h arbitrariamente pequeño. En términos de las pendientes de las rectas secantes decimos que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es el valor al cual tienden las pendientes de dichas rectas secantes. Es decir, las rectas secantes tienen pendiente determinadas por los puntos P y Q:

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Así, si m_h tiende a m cuando h tiende a cero entonces decimos que m es la pendiente de la recta tangente deseada.

En el sentido analítico de la derivada suponemos que tenemos una función en la variable x y estamos interesados en determinar el límite del cociente diferencial de la función $y = f(x)$. Ese límite corresponde a la derivada de f en x, simbolicamente:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Capítulo 2

Desarrollo histórico de la noción de tangente

2.1. El cálculo de la tangente en la antigüedad griega

En la historia de las matemáticas se evidencia que Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) generalizaron ideas previas desarrolladas por Johannes Kepler (1571-1630), Galileo Galilei (1564- 1642), Gilles de Roberval (1602-1675), René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), entre otros, dandole forma a lo que posteriormente constituye el cálculo como rama de las matemáticas.
Uno de los problemas de mayor transcendencia, planteado por los griegos, fue el problema de las cuadraturas, particularmente la cuadratura del círculo. En el siglo XVIII, otros problemas que motivaron el desarrollo del cálculo fueron los siguientes:

1. El problema de cudraturas de regiones limitadas por curvas y el cálculo de volúmenes determinados por ciertos sólidos de revolución.

2. El problema asociado a la geometría, el cual consistía en obtener la recta tangente

a determinadas curvas mecánicas, como la cuadratriz y la cicloide.

3. El problema de la matematización del movimiento.

4. El problema de obtener el valor máximo o mínimo de una cantidad involucrada en una expresión algebraica.

Como se afirmó antes, uno de los problemas que motivaron el desarrollo del cálculo fue la determinación de la recta tangente a una curva. Desde la antigüedad griega, la caracterización de la recta tangente a una curva en un punto ha sido uno de los asuntos con más interés para muchos matemáticos; durante mucho tiempo no fue posible establecer su definición formal hasta que Cauchy, en 1823, definió la derivada a través del concepto de límite.
Euclides aborda el problema de trazar la recta tangente a un círculo en un punto. En primer lugar establece la siguiente definición:

Definición III-2: Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta. ([20], p. 750)

Más adelante en la proposición 16 del libro III Euclides establece como trazar la recta tangente a un círculo en un punto, de la siguiente manera:

Proposición III-16: La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la periferia no se interpondría ninguna otra. ([20], p. 760)

Demostración: *Demostremos existencia.*

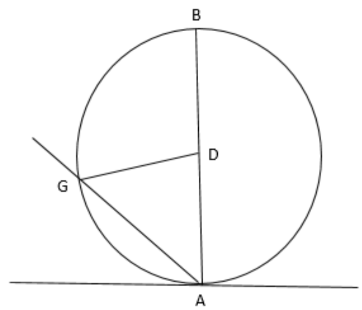


Figura 2.1

Dada la figura 2.1, supongamos que la recta perpendicular al diámetro AB es AG que corta la circunferencia en A y en G. Entonces se forma el triángulo AGD el cual es isósceles puesto que $DG = DA$ (son radios de la circunferncia). Entonces los ángulos $AGD = GAD$ y son rectos, por ser ángulos opuestos a lados iguales de un triángulo isósceles. Por lo tanto el triángulo AGD tendrá dos ángulos rectos, lo cual no es posible porque la suma de los ángulos internos de este triángulo serían más de dos rectos. Luego, la recta perpendicular a la AB en el punto A no cae dentro del círculo, tampoco cae sobre la periferia (mediante un argumento similar al anterior), sino que la toca en el punto A y esa es la recta tangente.

Esta proposición brinda el procedimiento para trazar la recta tangente a un círculo que pasa por un punto de él, de la siguiente manera:

Dado el círculo, ver (figura 2.2) y el punto P, por el cual se pide trazar la tangente.

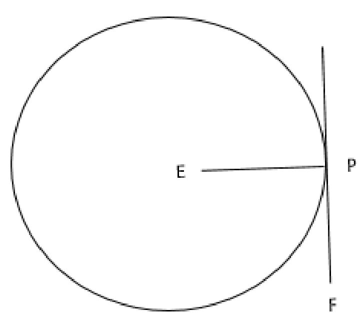


Figura 2.2

En primer lugar se encuentra el centro E del círculo [1] y se traza el radio EP. A continuación se traza la recta PF perpendicular a EP, que pase por P. De acuerdo a la proposición anterior PF es la recta tangente al círculo.

Demostremos unicidad: en la segunda parte se demostrará que la recta tangente es única.

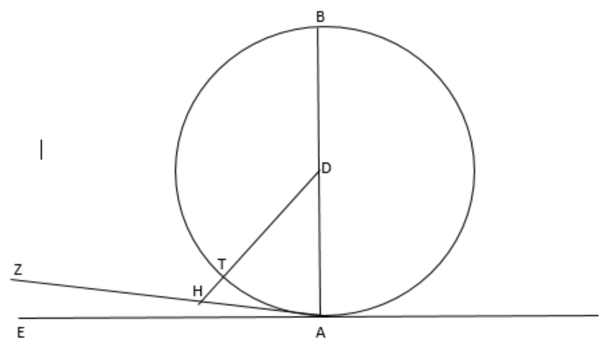


Figura 2.3

Dada la figura 2.3, supongamos que existe otra recta ZA perpendicular a AB. Trazamos la perpendicular DH a ZA. El ángulo AHD es recto y el ángulo HAD es menor que un recto. $DA > HD$ (al ángulo mayor le corresponde el lado opuesto mayor). $DA = DT$, por ser radios de la circunferencia dada, lo cual es imposible puesto daria que $DT > DH$ (por transitividad).

En la siguiente proposición Euclides establece:

Proposición III-17: Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo dado.([20], p. 761)

Demostración:

[1] Se traza una cuerda al círculo dado, se levanta la perpendicular a esta cuerda por su punto medio que ha de cortar al círculo en un diámetro, el punto medio de este diámetro sera el centro.

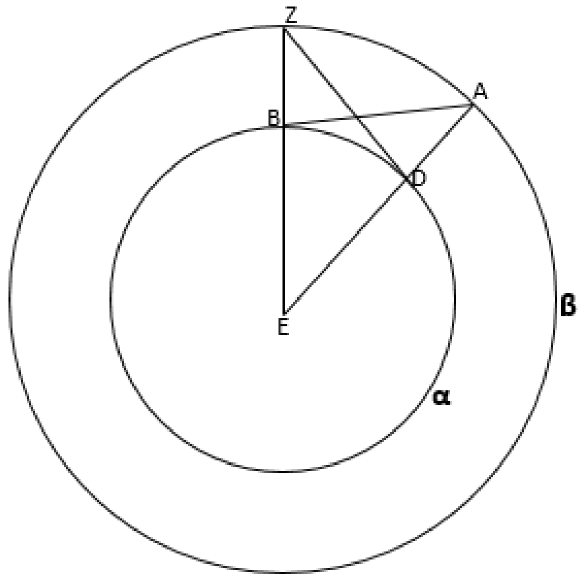


Figura 2.4

Sea α un círculo con centro en E y A un punto exterior a esta, ver (figura 2.4). Formemos el segmento con extremos en E y A. Sea D el punto de intersección entre $\overline{EA}$ y α. Trazamos el círculo β con centro en E y radio $EA = m(\overline{EA})$. Tracemos el segmento perpendicular a $\overline{EA}$ por el punto D, llamemos a este $\overline{DZ}$ ($\overline{DZ} \perp \overline{ED}$). Ahora, trazamos el segmento $\overline{EZ}$ y sea B el punto de intersección de $\overline{EZ}$ y α. Además trazamos el segmento $\overline{BA}$.

Afirmación: $\overline{AB}$ es tangente a α ($\overline{AB}$ pasa por A).

Falta por demostrar que ($\overline{EB} \perp \overline{AB}$) (es decir $m(\sphericalangle B = 90)$). Dado que $\overline{EA}$ y $\overline{EZ}$ son radios de β, entonces $\overline{EA} \cong \overline{EZ}$. De igual modo $\overline{EB} \cong \overline{ED}$ por ser radios del círculo α. Además, el ángulo E es común en los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle ZDE$. Por el criterio de congruencia LAL, tenemos que $\triangle ABE \cong \triangle ZDE$. Así $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 90$.

Para Euclides estas erán las propiedades que caracterizaban la recta tangente a un círculo.

Luego se puede argumentar que los matemáticos griegos establecieron la tangente co-

mo una recta que toca a la curva sin cortarla, tomando como punto de referencia las observaciones sobre el círculo. Sin embargo para otro tipo de figuras geométricas se presentaban problemas al utilizar los métodos euclidianos.
Otro matemático griego que realizó cálculos que incluyen el trazado de tangentes fue Arquímedes (matemático, siglo III a.C), dada la espiral de Arquímedes él encontró la tangente a la curva, siguiendo posiblemente consideraciones de tipo cinemático, que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva. Esto es, la espiral consolida la relación entre la geometría y la mecánica.
Para el siglo XVII, matemáticos como Cavalieri, Descartes y Fermat retomaron los métodos de los antiguos griegos, esta vez con el fin de obtener la tangente a cualquier curva.

2.2. La noción de tangente en Cavalieri

La noción de recta tangente de Cavalieri (1598-1647) aparece en el libro I de la *Geometría*, en el cual Cavalieri establece esta definición en el marco del problema de las cuadraturas y a través de conceptos intuitivos da una explicación acerca de ella. Según la presentación de Andersen:

> Yo digo que una línea recta toca una curva situada en el mismo plano que la línea cuando ésta encuentra la curva o bien en un punto o a lo largo de una línea y cuando la curva está o bien completamente a un lado de la línea (en el caso cuando el encuentro es un punto) o no tiene parte al otro lado de ésta (en el caso cuando el encuentro es un segmento) ([2], p. 294)

Observemos que en la figura 2.5

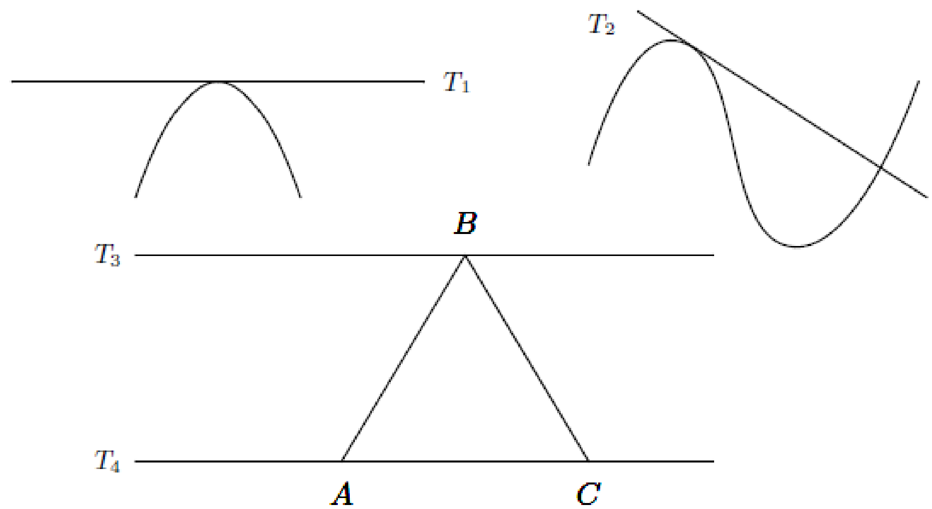


Figura 2.5

T_2 no cumple las condiciones de la definición, mientras que T_1 si las cumple, por lo tanto toca la curva; además, T_3 y T_4 también constituyen rectas que tocan al triángulo ABC.

A través de la definición de recta que toca una curva Cavalieri incorpora el concepto de regula. Según ([32], p. 170) la regula es una recta que se toma como dirección. Dada una figura plana cerrada y una regula, si se traza otra recta, paralela a la regula, puede darse uno solo de los tres siguientes casos:

1. La línea toca la curva que limita la figura plana.

2. La línea y la figura no tienen puntos comunes.

3. La línea intercepta la figura en un segmento de línea.

Así la noción de Cavalieri de recta tangente se diferencia de la noción de tangente establecida por Euclides y sus antecesores; ya que Cavalieri no hace referencia acerca de una recta tangente, sino que hace alusión a las rectas tangentes es decir para Cavalieri no es fundamental la unicidad; puesto que Cavalieri pretende precisar el hecho que toda figura plana cerrada simple se puede acotar entre dos rectas paralelas.

Miremos que en la figura 2.6

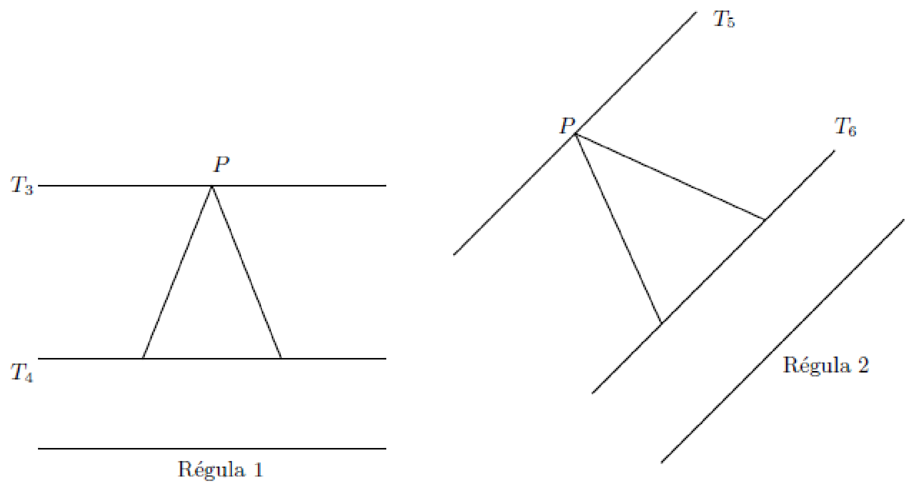


Figura 2.6

No hay contradicción en llamar a las rectas tangentes en el punto P, tanto a T_3 como a T_5, pues la primera se considera paralela con respecto a la regula 1 y la segunda con respecto a la regula 2.

Cavalieri infiere que para toda curva cerrada se puede hallar una recta tangente de manera que tiene como único punto en común el vértice con la curva. Esta recta tangente o regula tiene infinitas paralelas que se distancian de ella hasta que se encuentra con la tangente al lado opuesto.

Esto es dada una curva cerrada, cavalieri toma una dirección cualquiera, esa dirección no es mas que una recta a la cual se le conoce con el nombre de regula. Luego dada la regula la voy moviendo paralelamente de manera que va dejando una marca dentro de la región como una especie de líneas; Cavalieri afirma que en ese movimiento describe segmentos que estan dentro de la región, de tal manera que si se pudiera pensar que se suman todos los segmentos que quedan entre las paralelas, la regula y su opuesta segun la región, entonces la agrupación o reunión de todos esos segmentos formara la figura.

Es asi como también Cavalieri utiliza lo que ha denominado los indivisibles, que emplea para hacer alusión a los elementos que forman la figura, y los cuales se caracterizan por ser objetos de dimensión menor respecto a la dimensión original del objeto (esto es, lo que cavalieri plantea es que toda región se puede descomponer en partes llamadas indivisibles, de una dimension menor). Así por ejemplo, los puntos son los indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas y las regiones planas para los sólidos.

2.3. La noción de tangente en Descartes

Por otro lado Descartes (1596-1650) crea un procedimiento para el problema geométrico de rectas tangentes que es a través de la construcción previa de la recta normal, lo cual se caracteriza por ser puramente algebraico. Descartes establece el trazado tangente en el segundo libro *La Géométrie* de 1637.

> Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto. Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular ([37]).

Miremos un poco la idea utilizada por Descartes para determinar la recta tangente a una curva en un punto. Dada la figura 2.7:

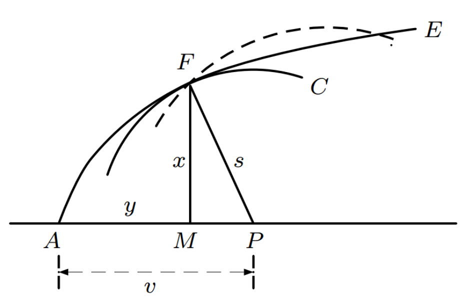


Figura 2.7

Se considera la curva AFE y se toma un punto sobre la curva, el punto F. A continuación se considera la familia de circunferencias que pasa por el punto F y que se trazan haciendo centro en diferentes puntos P localizados en la prolongación de AM; con el fin de encontrar la normal en dicho punto.

Expongamos el proceso seguido por Descartes en notación moderna:

Ejemplo: Supongamos que la ecuación de la curva está dada por

$$x = f(y) = \sqrt{y}$$

La circunferencia C, con centro en P y que pasa por el punto F, tiene como ecuación

$$(v - y)^2 + x^2 = s^2$$

Luego:

$$(v - y)^2 + (\sqrt{y})^2 = s^2 \Longrightarrow y^2 + (1 - 2v)y + v^2 - s^2 = 0$$

Esta circunferencia corta a la curva AFE en dos puntos, uno de los cuales es F. Las dos soluciones de y determinan las primeras componentes de F y del otro punto supongamos Q; hacemos que haya solo una solución, esto es, va a tener solución única cuando el discriminante sea igual a cero, luego:

$$y = \frac{-(1 - 2v)}{2} \Longrightarrow y + \frac{1}{2} = v$$

Calculemos la pendiente de:

$$m_1 = m(\overline{PF}) = \frac{\sqrt{y} - 0}{y - (y + \frac{1}{2})} = -2\sqrt{y}$$

Como la recta normal es perpendicular a la recta tangente es decir $m_1 m_2 = -1$, se tiene:

$$m_2 = m(T_F) = \frac{-1}{m(\overline{PF})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Así Descartes desarrolló un método algebraico para determinar la recta tangente a una curva en un punto, sin embargo este método se torna laborioso para curvas con expresión compleja, por lo cual este método es útil para curvas $y = f(x)$ tal que $(f(x))^2$ sea

un polinomio sencillo.
Cabe resaltar que en la antigüedad griega se intuian solo las curvas que se detallaban por un movimiento de la regla y el compás, o tambien las que se derivaban de interceptar figuras conocidas. Así Descartes incorpora nuevas curvas, las construidas por su mecanismo articulado, esto es las que se pueden representar mediante ecuaciones algebraicas; para ellas existen procesos que permiten el trazado de sus normales y tangentes, y excluye aquellas curvas que no puedan ser representadas mediante ecuaciones, es decir, las curvas llamadas mecánicas y que más tarde Leibniz llamaría trascendentes.

2.4. La nócion de tangente en Fermat

En el año 1636 rondo entre los matemáticos franceses una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, cuya importancia radica de dar un incremento a cierta magnitud que se podría interpretar como la variable independiente.
Su método tiene la particularidad de intuir el uso de una cantidad E muy pequeña, la cual en su procedimiento usa para dividir y luego para eliminar términos que aparecen como sumandos cuando están acompañados por E. Dicho procedimiento genero controversia porque E era considerado como cero, aunque se dividiera por este.
Sin embargo, el método no implica ningún concepto de límite, siendo más bien puramente algebraico, además de que en Fermat no existe una concepción de función.
Hay que reconocer que el método de Fermat no resultaba claro en la presentación de entonces, aunque podemos ver que este tiene la forma del método actual del cálculo diferencial (teoría de los límites).
Observemos el proceso, expuesto por Fermat, para hallar los máximos y los mínimos, el cual sigue los siguientes pasos:

1. Sea a un término que esta relacionado con el problema, es decir el término a

maximizar , y E va a ser una cantidad inifinitamente pequeña.

2. Se sustituye a por $a + E$, y el máximo o mínimo queda expresado en términos de potencias de a y E.

3. Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen aproximadamente iguales y se realizan las correspondientes simplificaciones como reducciones.

4. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E, de tal manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E.

5. Se hace E igual a cero y se igualan las expresiones resultantes.

6. La resolución de la ecuación resultante, dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Para ilustrar este procedimiento, Fermat considera el siguiente ejemplo:
Ejemplo: el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo.
Sea B, la longitud del segmento dado y A, la de la primera parte, como se muestra en la siguiente figura:

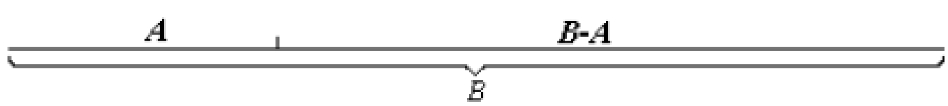


Figura 2.8

La pregunta es donde se debe cortar para que ese rectángulo (ver figura 2.9) tenga el área máxima, es decir, la cantidad $A(B - A)$.

Figura 2.9

Observemos como varía A (variable de la relación) cuando se le aumenta una cantidad infinitamente pequeña. Esto es A es esencialmente igual $A+E$ $(A \sim A+E)$ porque es una cantidad muy pequeña tanto que son muy similares, semejantes casi iguales; luego:

$$A(B-A) \sim (A+E)(B-(A+E))$$

Entonces

$$AB - A^2 \sim AB + BE - A^2 - 2AE - E^2$$

$$0 \sim BE - 2AE - E^2$$

Dividiendo por E ambas expresiones, se tiene:

$$0 \sim B - 2A - E$$

Finalmente haciendo $E=0$, se llega $A = \dfrac{B}{2}$; el cual hace que la cantidad $A(B-A)$ sea un máximo.

Así Fermat desarrolló un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica, como una aplicación de su método para calcular máximos y mínimos. Hay que resaltar que esta forma de calcular tangentes por Fermat, creó inconformidad especialmente en Descartes, quien objetaba que este método de hallar tangentes no era una aplicación del cálculo de máximos y mínimos. Al respecto, Fermat aclara que sólo utiliza el procedimiento derivado del método de máximos y mínimos, satisfaciendo los requerimientos de Descartes.

Luego, Fermat utilizó el método de hacer un incremento infinitamente pequeño y plantear una ecuación algebraica, que había utilizado para hallar máximos y mínimos, para resolver el problema de la tangente. Para entender el método que utilizó Fermat, observemos el siguiente ejemplo en términos modernos:

Ejemplo: Dada la curva $y = f(x)$, determinemos la tangente en el punto (x_0, y_0).

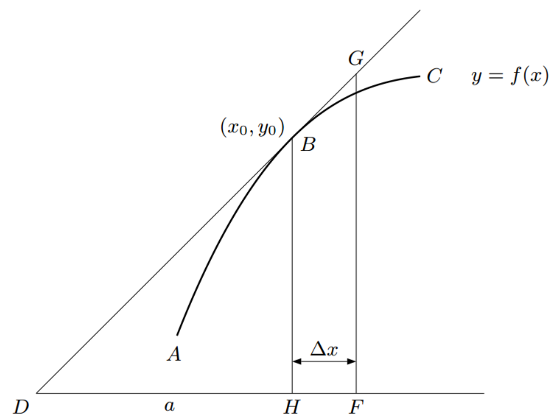


Figura 2.10

Haciendo un pequeño incremento del punto H, se tiene que $F = a + \Delta x$. Dada la construcción de los triángulos DGF y DBH son semejantes, y utilizando la teoría de proporciones se concluye que:

$$\frac{HB}{HD} = \frac{FG}{FD}$$

Esto implica que:

$$\frac{y_0}{a} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{a + \Delta x}$$

Luego se tiene:

$$(a + \Delta x)f(x_0) = a[f(x_0 + \Delta x)]$$

Esto es equivalente a tener:

$$f(x_0)\Delta x = a[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$$

Finalmente se llega a:

$$\frac{f(x_0)}{a} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Luego Fermat expresa que se cancelan términos iguales en $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, se divide po Δx y por último se desprecian los términos que aún contengan Δx; análogo a hacer $\Delta x = 0$, por lo tanto el resultado es la pendiente de la tangente en (x_0, y_0).

Notemos que este cociente diferencial es el usado en la actualidad para calcular la pendiente de la recta tangente; y además dicho cociente diferencial es el que dá la derivada que modernamente la llamamos $f'(x_0)$.

El método que muestra Fermat es equivalente a calcular:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Cabe resaltar que el método de Fermat no implica ningún concepto de límite, siendo mas bien puramente algebraico.

Observemos que haciendo $f'(x_0) = 0$, es el procedimiento que modernamente se utiliza para hallar los máximos y mínimos ordinarios de una función $f(x)$, siempre que la función sea diferenciable.

Las investigaciones de Mátematicos como Cavalieri, Descartes, Fermat, entre otros abrieron el camino para la invención del cálculo, por Newton y Leibniz, en el último tercio del siglo XVII.

Capítulo 3

Newton y Leibniz: de la tangente a la derivada

3.1. El nacimiento del cálculo en Isaac Newton

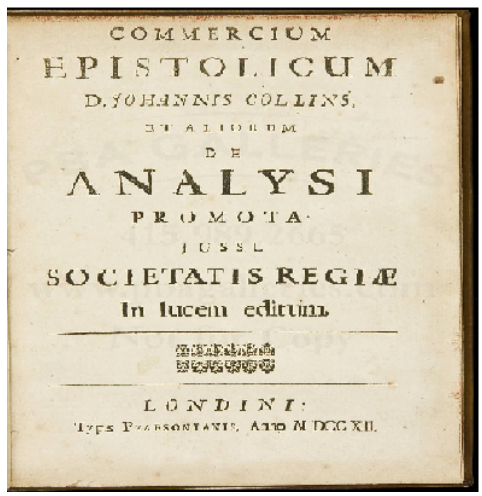
Figura 3.1

- Nació el 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Lincolnshire (Reino Unido).

- Murió el 31 de marzo de 1727 en Londres (Reino Unido).

Newton fue un físico, filósofo y matemático Inglés. Su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural* fue publicada en el año 1687; en ella se puede encontrar lo que se ha denominado los tres momentos de Newton en el acercamiento al cálculo diferencial. Como Newton quería tener una fundamentación estricta del cálculo, lo llevaron a plantear su cálculo de varias formas. Es así como propone tres modos de interpretación para el cálculo:

1. Establece el cálculo en términos de infinitesimales usado en su *De Analysi* (compuesto en 1669 y publicado en 1711)



COMMERCIUM
EPISTOLICUM
D. JOHANNIS COLLINS,
DE
ANALYSI
PROMOTA
SOCIETATIS REGIÆ
In lucem editum.
LONDINI:

Figura 3.2

Newton, en esta primera presentación se apoya en la noción de cantidad infinitesimal la cual se puede definir como una cantidad infinitamente pequeña o como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula. Newton era consciente que en esta primera exposición acerca del cálculo no estaba argumentado o demostrado, solamente estaba justificado; pues presentaba problemas de razonamiento.

Newton también en esta presentación toma algunas nociones de de la física para incorporarlos en sus métodos infinitesimales y para trasladarlo a la concepción cinemática de las curvas. Aunque en *De Analysi* no ha desarrollado completamente la notación de las fluxiones, la deja para su segunda presentación que trabajará las fluxiones como concepto operacional.

2. Establece el cálculo en términos de fluxiones, dado en su *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* (compuesto en 1671 y publicado en 1736).

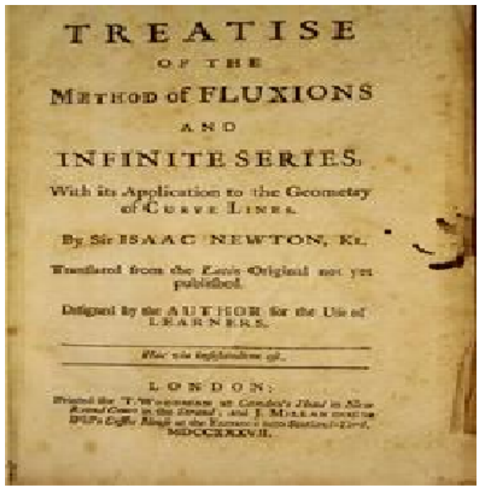

TREATISE
OF THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES,
With its Application to the Geometry of CURVE LINES.
By Sir ISAAC NEWTON, Kt.
Translated from the *Latin* Original not yet published.
Designed by the AUTHOR for the Use of LEARNERS.
LONDON:
MDCCXXXVII.

Figura 3.3

Como en la primera exposición presentaba problemas de rigor, entonces Newton lo que hace es realizar una interpretación desde la física; es decir define basicamente funciones parametricamente a las cuales las llamó fluentes, y fluxiones a cada una de las variaciones del tiempo, esto es a las respectivas velocidades. Por tal razón Newton refiere en *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* su segunda concepción del cálculo incluyendo en sus métodos infinitesimales el concepto de fluxión; o equivalente a decir que la noción principal es la cantidad que fluye continuamente con el tiempo; es decir que las magnitudes van a estar generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales.

En esta segunda presentación Newton procuraba eludir los problemas que se presentaban por el uso de los infinitesimales, indivisibles y su intención era dar una explicación desde la física, luego lo que hizo fue reemplazarlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes.

3. Establece el cálculo en términos de razones primeras y últimas, dado particularmente en la obra *De Quadratura Curvarum* (compuesto en 1676 y publicado en 1704).

ISAACI NEWTONI Equ. Aur.
TRACTATUS
DE
QUADRATURA
CURVARUM
IN
EXPLICATIONIBUS ILLUSTRATUS
A
DANIELE MELANDER,

Figura 3.4

Newton al observar que en su segunda presentación nuevamente tiene el problema del tiempo, entonces lo que hace en su tercera presentación es fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama razones primera y última de incrementos evanescentes. Newton en *De Quadratura Curvarum* hace su exposición en forma operacional mediante el procedimiento de las primeras y últimas razones. De esa forma hace alución a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero (razón primera) o se anulan (razón última).
Se puede observar que esta percepción de Newton recalca la noción matemática de límite; lo que se puede decir en términos modernos, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero despues de 200 años se establecera dicho concepto.

3.2. Newton y las tres versiones de su cálculo

3.2.1. Newton 1: cantidades infinitesimales

Un problema inverso al problema que abordó Wallis consistía en asumir que ya estaba dada la cuadratura y preguntarse por cuál era la curva que determinaba dicha cuadratura. Este problema fue planteado y resuelto por Newton. Dada la cuadratura $\dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, Newton muestra que la curva correspondiente es $y = ax^{\frac{m}{n}}$, donde para ello él incorpora el símbolo "o"(incremento infinitesimal) que representa una cantidad muy pequeña distinta de cero, el cual se utiliza en el desarrollo operacional, con la virtud de que como denominador puede proceder, pero en los respectivos sumandos desaparece. En efecto, Newton considera la expresión de la cuadratura en la forma $z = f(x)$ determinada sobre el segmento $[0, x]$, la cual modernamente representa la medida de una región R del plano cartesiano (ver figura 3.5).

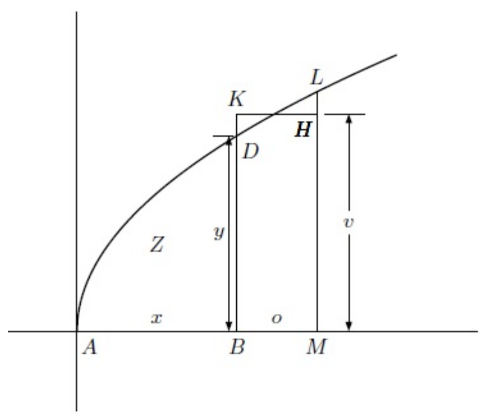


Figura 3.5

A continuación, considera una pequeña variación de la región R la cual puede verse como “la unión de lineas”. Para ello, realiza un incremento infinitesimal o para la abscisa en x, obteniendo un rectángulo de base o y altura y. Esta variación en la abscisa x, determina un incremento ov en la cuadratura z, de tal modo que tiene la expresión $z+ov = f(x+o)$. Después de realizar los cálculos algebraicos correspondientes, Newton obtiene una expresión que involucra las variaciones x, z, o, v e y, donde procede a usar el hecho que o es una cantidad infinitesimal pero no nula. Así, realiza la simplificación de o en la igualdad obtenida, adusiendo que esta es una cantidad no nula y luego suprime las expresiones que involucran aun la cantidad o, bajo el hecho que estas son cantidades infinitamente pequeñas y la contribución de estas cantidades es casi nulo despues de todo. Finalmente encuentra una expresión para y, la cual corresponde a la curva buscada.

Observemos el método utilizado por Newton mediante un ejemplo.

Sea, en la figura anterior, el área $ABD = Z$, $AB = x$, $BD = y$, $BM = o$, $BK = v$ tales que el área $BDLM =$ área $BKHM = ov$.

Tomemos el siguiente caso particular:

Sea $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow z^2 = \frac{4}{9}x^3$

Ahora

$A(x+o) = A(x) + A(BDLM) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + ov = z + ov$

$(A(x+o))^2 = (z+ov)^2 \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}(x+o)^{\frac{3}{2}}\right)^2 = (z+ov)^2$

Asi se tiene que

$\frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2v^2$

$\frac{4}{3}x^2o + \frac{4}{3}xo^2 + \frac{4}{9}o^3 = 2zov + o^2v^2$

Luego Newton toma BM infinitamente pequeño, en cuyo caso, como muestra la figura, se hace $v = y$, y los términos que contienen o desaparecen, asi se sigue que

$\frac{4}{3}x^2 = 2zy$

Sustituyendo el valor de z se concluye

$x^{\frac{1}{2}} = y$

Esta técnica se puede sujetar a todas las funciones polinómicas que nos den z en términos de x. Luego Newton para el caso general sigue el procedimiento del caso anterior.

Dado el caso general:

Si $\dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ corresponde a la cuadratura, entonces $y = ax^{\frac{m}{n}}$ corresponde a la curva.
Sea $z = \dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, $\dfrac{na}{m+n} = c$ y $m + n = p$
Entonces

$(cx^{\frac{p}{n}})^n = z^n \Longrightarrow c^n x^p = z^n$

Ahora si se sustituye

$x \longrightarrow x + o$ y $z \longrightarrow z + ov$

Se tiene que

$c^n(x + o)^p = (z + ov)^n$

$c^n(x^p + px^{p-1}o + ...+) = z^n + nz^{n-1}ov + ...+$

Luego si $o \longrightarrow 0, v \longrightarrow y$

Asi se sigue

$c^n px^{p-1}o + ...+ = nz^{n-1}ov + ...+$

Omitiendo los términos que se desvanecerán se llega a
$\dfrac{c^n px^{p-1}}{nz^{n-1}} = y$
Sustiyuyendo el valor de z y realizando los respectivos procedimientos se tiene
$\dfrac{c^n px^{p-1}}{n(cx^{\frac{p}{n}})^{n-1}} = y$
$\dfrac{cp}{n}x^{\frac{p-n}{n}} = y$
Por lo tanto

$ax^{\frac{m}{n}} = y.$

3.2.2. Newton 2: fluentes y fluxiones

La primera presentación de Newton acerca del cálculo presentaba problemas de coherencia lógica, puesto que se basaba en el concepto de cantidad infinitesimal, esto es entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula. De esta manera Newton, procura formalizar la idea de cantidades infinitesimales bajo la noción de "fluentes y fluxiones", donde:

- Fluentes: son cantidades que varían respecto al tiempo, denotadas como x, y.

- Fluxiones: es la rapidez de cambio de los fluentes, representadas por $\dot{x}, \dot{y}$.

- Newton interpretó el cociente de las fluxiones como la pendiente de la recta tangente, esto es: $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{dy}{dx}$.

Luego Newton, al incorporar al tratamiento de curvas una visión cinemática, pensó que se resolvería el problema de los incrementos infinitamente pequeños; sin embargo, las cantidades infinitesimales o infinitamente pequeñas introdujeron en la comunidad matemática de la época inconformidad. Dicha inconformidad se hallaba en el hecho que las cantidades infinitesimales cumplían la curiosa ley de poder dividir por ser distintas de cero, y desaparecer en determinadas expresiones (como sumandos) al no afectar el resultado, por ser infinitamente pequeñas. A estas cantidades se le conocía como çantidades evanescentes".

Pero Newton a través de procesos algorítmicos dió cuenta en términos generales de estos problemas. Es decir, a los incrementos correspondientes a las fluxiones las expreso en función de los incrementos de tiempo; esto es si o es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo, entonces los incrementos correspondientes a x, y están dados por $\dot{x}o, \dot{y}o$, llamados momentos.

A través de un ejemplo observemos el proceso usado por Newton:

Sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo $x \longrightarrow x + \dot{x}o$, $y \longrightarrow y + \dot{y}o$ respectivamente, tenemos:

$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$

Desarrollando los binomios establecidos tenemos que:

$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + ax\dot{y}o + ay\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 + \dot{y}^3o^3 = 0$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contengan a o, resulta

$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$

Así se tiene el cociente diferencial

$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$

El cual es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y) de la misma.

3.2.3. Newton 3: Razones primera y última de incrementos evanescentes

En su última presentación Newton, con el fin de evitar los problemas de rigor que provenían de despreciar las cantidades infinitesimales en el cálculo, en su obra: *De Quadratura Curvarum*, desarrolla su teoría de razones primeras y últimas de cantidades evanescentes, la cual constituye uno de los antecedentes del concepto de límite. Newton considera que las cantidades no están formadas por partes infinitesimales, sino descritas por un movimiento continuo. Mediante la idea de considerar cantidades que se mueven en el tiempo pensaba Newton que podría resolver las dificultades de fundamentación que planteaba el uso de incrementos pequeños de las respectivas variables.

Observemos con un ejemplo el significado de estas ideas; Newton calcula la fluxión de $y = x^n$, para ello considera un incremento o de forma que x pasa a $x + o$, entonces x^n se convierte en $(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + ...$

Así se tiene que la variación de x es o y la variación de x^n es $nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + ...$

Esto es:

$$\begin{aligned}
\frac{variaciondex^n}{variaciondex} &= \frac{nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + ...}{o} \\
&= \frac{o\left[nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + ...\right]}{o} \\
&= \frac{nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + ...}{1}
\end{aligned}$$

Finalmente, Newton hace que los incrementos se anulen obteniendo como resultado que

$$\frac{\text{fluxión}x^n}{\text{fluxión}x} = \frac{nx^{n-1}}{1}$$

.

3.3. El nacimiento del cálculo en Gottfried Leibniz

Figura 3.6

- Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig (Alemania).
- Murió el 14 de noviembre de 1716 en Hannover (Alemania).

Leibniz fue un filósofo y matemático Alemán, fue uno de los fundadores de la primera revista Alemana el *Acta Eruditorum* en el cual se encuentran numerosos artículos donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas y desarrolla su cálculo diferencial e integral.
Se puede decir que las ideas fundamentales del cálculo de Leibniz son:

1. **Primera idea (lenguaje simbólico apropiado):** Desde otro punto de vista el razonamiento de Leibniz es diferente al de Newton; ya que recordemos que Newton parte de ideas físicas, mientras que Leibniz lo hace de ideas filosóficas puesto que uno de sus mayores intereses era tratar de buscar un lenguaje universal, es decir desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo. A través de ideas filosóficas pretendía que existiéra un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. En matemáticas su cálculo es en parte esto, un algoritmo para escribir los métodos geométricos de cuadraturas y tangentes por medio de símbolos y fórmulas, de hecho su notación muy superior a la de Newton es la que se usa actualmente.

2. **Segunda idea (sumas y diferencias de ordenadas):** Leibniz por otra parte ya proponía un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes, es decir Leibniz no tardó en aplicar a la geometría sus observaciones de que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro.

   Miremos esta idea de Leibniz, dada la figura 3.7, Leibniz considera una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal.

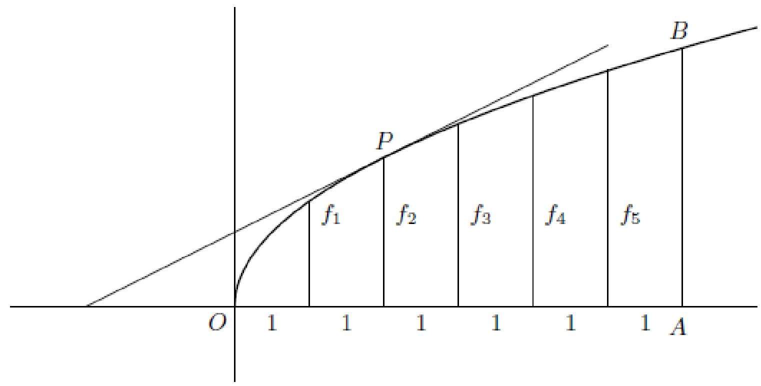


Figura 3.7

A la curva OPB se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, ...$ y una sucesión de ordenadas $f_1, f_2, f_3, ...$, donde los puntos (x_i, f_i) están todos ellos en dicha curva. Ahora en esta curva se considera una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad. El pensamiento o razonamiento de Leibniz era que cuanto más pequeña se elija la unidad 1, mejor serían estas aproximaciones, es decir si la unidad pudiera ser tomada infinitamente pequeña estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, Leibniz dedujo que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

3. **Tercera idea (uso del triángulo característico):** posteriormente para incorporar el cálculo diferencial, Leibniz recurre al triángulo característico, el cual se identifica por ser un triángulo de lados infinitesimales.

   Observemos que dada la figura 3.8 Leibniz procede a sacar lo que denominamos la derivada

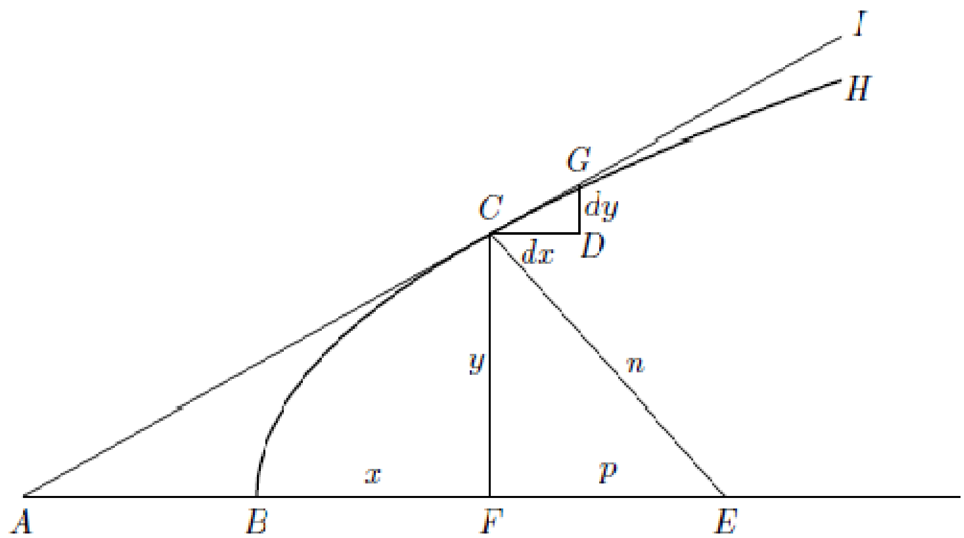


Figura 3.8

Se toma la curva BCH, de manera que la recta AI es tangente a la curva en el punto C de coordenadas (x, y). Trazando paralelas al eje x y al eje y, se traza el triángulo característico CDG, donde sus lados son infinitesimales, dadas las denominaciones $CD = dx$, $DG = dy$. Con la particularidad de que el diferencial dx es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequena en comparación con x, es decir es una cantidad infinitesimal, significado análogo tiene dy. Se puede decir que $CE = n$ es la normal o es equivalente a mencionar que CE es perpendicular a AI. De esta manera se puede observar que la pendiente de la tangente viene dada por $\dfrac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial.

Como el triángulo CDG y CFE son semejantes se obtiene la relación: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}$.

Ejemplo: Dada la parte superior de la circunferencia $y = \sqrt{2x - x^2}$:

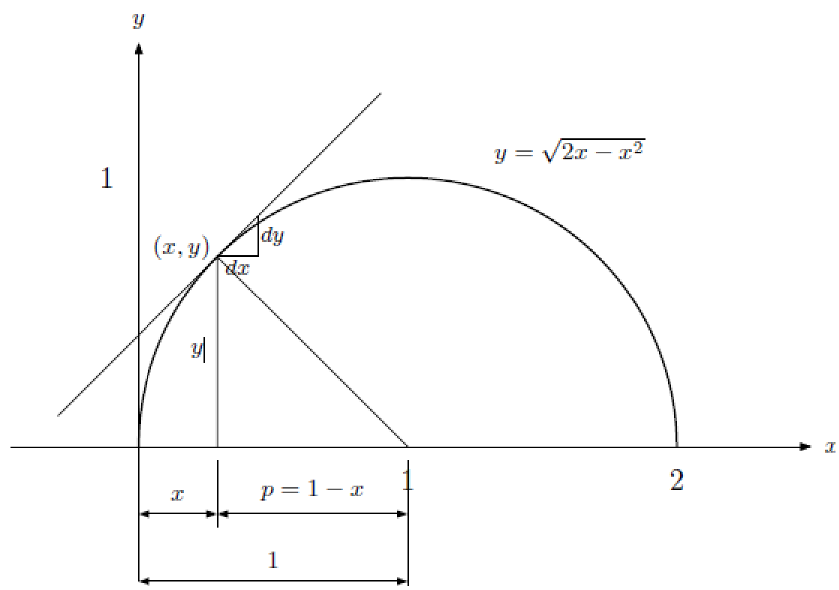


Figura 3.9

Se puede observar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Notemos que esta es la derivada, se encuentra la derivada de una función a lo Leibniz, esto es se deriva sin usar el concepto de límite.

Los trabajos de Newton y Leibniz y sus sucesores, fueron la antesala para el análisis en el sentido que la inclusión de las cantidades infinitesimales, permitieron que emergiera un nuevo concepto, el de límite, que dio un nuevo significado al método analítico.

Capítulo 4

La instauración del concepto de derivada con Cauchy

4.1. La formación matemática de Cauchy

Figura 4.1

- Nació el 21 de agosto de 1789 en París.

- Murió el 23 de mayo de 1857 en Sceaux.

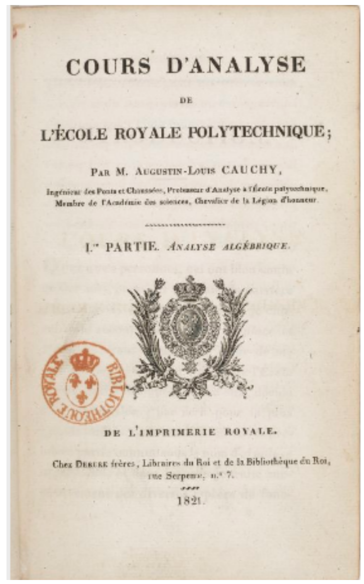
Cauchy fue un matemático francés, miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor en la Escuela Politécnica. Realizó investigaciones prácticamente en todas las áreas matemáticas de la época, publicando más de 800 artículos; uno de sus mayores aportes fue en el ánalisis. En términos generales, desarrolló la teoría de límites y continuidad que manejamos actualmente.

Según la historia, Cauchy fue primogénito de seis hermanos, su padre, Louis-Francois, importante personaje del Senado, quiso que tuviera una buena formación humanística, por lo que cursó estudios de composición literaria, griego y latín. Después, a partir de los quince años, y por recomendación de dos de los grandes matemáticos de la época, Laplace y Lagrange, se matriculó en la Escuela Politécnica y se diplomó como ingeniero de caminos. Cauchy además de ser un hombre con unas capacidades extraordinarias, matematicamente hablando, también era un hombre religioso; consideraba que la labor principal de un científico era la búsqueda de lo absoluto, de la verdad.

Posteriormente Cauchy decide seguir las sugerencias de Lagrange y Laplace, por lo cual abandona los trabajos como ingeniero y regresa a París para consagrarse de lleno a las Matemáticas. En 1813, con veinticuatro años, vuelve a París y atrae ya el interés de los matemáticos más eminentes de la época por sus investigaciones, ocupando diversos puestos en la Facultad de Ciencias, El Colegio de Francia y La Escuela Politécnica. Con veintisiete años ya era uno de los matemáticos de mayor prestigio y empezó a trabajar en las funciones de variable compleja; once años más tarde publicó trabajos sobre límites, continuidad y sobre la convergencia de las series infinitas. En 1823, Cauchy publicó *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal*, donde introduce formalmente las definiciones de función, continuidad y, sobre todo, de límite que le permiten tener la fundamentación en el análisis, sobre unas bases sólidas, más aritméticas que geométricas, y más firmes que las de sus antecesores. Un infinitésimo, lo que hasta entonces se consideraba un número constante infinitamente pequeño, pasa a verse como una variable.

Se puede decir que las tres grandes obras de Cauchy fueron:

- *Curso de Análisis* (1821)



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

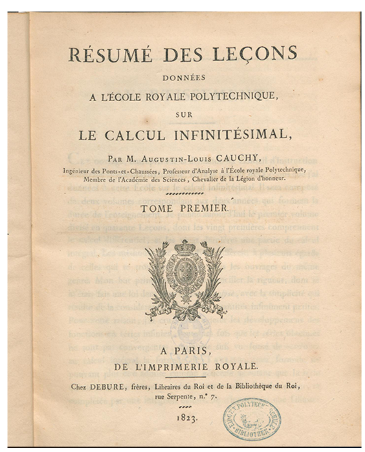
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Figura 4.2

- *Resumen de Lecciones sobre el Cálculo Infinitesimal* (1823)



RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.

A PARIS,

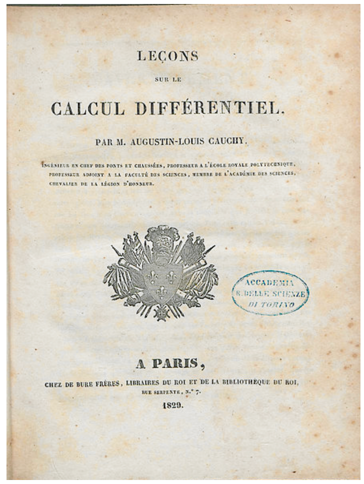
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1823.

Figura 4.3

- *Lecciones sobre el Cálculo Diferencial* (1829)



LEÇONS

SUR LE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

ACCADEMIA R. DELLE SCIENZE DI TORINO

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N.° 7.

1829.

Figura 4.4

Estos tres ejemplares, constituyen la obra en que Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con todo rigor, y donde hace una presentación precisa del cálculo basándose en el concepto fundamental de límite de una función. En particular, define la derivada de una función como el límite de cocientes de los incrementos de las variables y demuestra sus distintas propiedades; presenta el teorema del valor medio y sus aplicaciones a la aproximación de funciones por polinomios; establece rigurosamente los criterios para la existencia de máximos y mínimos de funciones; define la integral definida de una función continua en un intervalo mediante el límite de sumas asociadas a particiones de ese intervalo; y formula, con todo rigor, el llamado teorema fundamental del cálculo, estableciendo la relación inversa que existe entre los procesos de derivación e integración de funciones.

Cauchy muere el 23 de mayo de 1857 en Sceaux, en soledad y abandonado por su familia y amigos. En su lecho de muerte se arrepentiría de lo que él consideraba como su único error en la vida, no haber dedicado más tiempo a la matemática. En su última semana antes de morir, exclamó: “No me imagino una vida más plena que una vida dedicada a la matemática”. Augustin Louis Cauchy fue uno de los primeros matemáticos modernos, y de los más prolíficos que han existido; sus últimas palabras, dirigidas al arzobispo de

París que había ido a visitarle fueron: “Los hombres pasan; pero sus obras quedan”.

4.2. La emergencia del análisis matemático

Se puede decir que formalmente, el problema de la recta tangente a una curva se resuelve en el análisis. Recordemos que tanto Descartes como Fermat incorporaron una forma para calcular tangentes por métodos algebraicos que sólo servián para ciertas curvas. Newton y Leibniz dan un paso adelante, pero con la desventaja de incorporar las cantidades infinitamente pequeñas. En este sentido Cauchy establece una teoría rigurosa en el *Curso de análisis* de 1821. Para ello entiende que desde el análisis las nociones fundamentales son las funciones y se debe incluir una nueva operación que es el límite. Sin embargo la consolidación de las nociones de límite y función se dio en un proceso largo y complejo. Se trataba de introducir formalmente las nociones de función y límite, de una manera que se superarán los problemas de rigor que arrastraban los matemáticos que le predecieron.

Estos problemas de rigor aparecieron en los métodos usados por Newton y Leibniz debido al uso de las cantidades infinitamente pequeñas. Estas dificultades se empiezan a solucionar con la inclusión del concepto de límite. Recordemos que con el método cartesiano, muchos problemas geométricos se transformaron en problemas algebraicos. De esta forma, a los problemas geométricos se les da un referente algebraico con las variables, entonces era natural esperar que con la inclusión del sistema de coordenadas, emergieran representaciones de las situaciones a través de ecuaciones. De esta forma, para estudiar las curvas se necesitaba conocer su ecuación, con el próposito de realizar manipulaciones que permitieran describir nociones como la recta tangente y área bajo la curva; pero muchas curvas no se dejaban manipular al no tener una ecuación que la representara; esto hacía casi imposible pensar en una definición de recta tangente para esas curvas (curvas transcendentes). De esta forma se tuvo que establecer una nueva representación de las curvas que superaran las ecuaciones. Esa nueva representación se hizo a través de la noción de función.

4.3. Desarrollo histórico de la noción de función

La introducción de la noción de función a las matemáticas no fue un proceso inmediato; se dio en un lapso de más de 200 años. Se dice que fue James Gregory (1638-1675), quien introdujo una primera definición de función en su libro *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667). Gregory define función como una cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades a través de operaciones algebraicas o mediante variadas operaciones. Por la misma época, Newton introduce un proceso que lleva directamente a lo que modernamente se conocen como funciones paramétricas. Newton veía una curva como una sucesión de puntos en movimiento; los puntos se consideraban parejas que dependían del tiempo, entonces para un cierto instante de tiempo estamos en un punto $(x(t), y(t))$. De esta forma, los puntos se movían de acuerdo al tiempo, determinando dos ecuaciones, que hoy en día se conocen como una parametrización en el tiempo de una curva en el espacio. Leibniz utilizó explícitamente la palabra función para designar cualquier cantidad que varía de un punto a otro en una curva.

Es así como se va delineando una noción que tiene relación con cantidades que varían de acuerdo a la variación de otras cantidades, a ese aspecto común se busca caracterizarlo con un apelativo. En este sentido, James Gregory resalta algo que ya los matemáticos habían tratado de darle un nombre o habían coincidido con llamar de alguna manera a la variación: fluentes, variación, o función. De esta manera existía la necesidad que surgiera un nuevo objeto matemático (función) con su simbología y significado propio; una noción que no estuviera sujeto al movimiento o basado en cosas físicas o metafísicas, sino que fuera un concepto matemático puro.

De forma panorámica, veamos las diferentes variaciones del concepto de función en los siglos XVIII y XIX:

Leonard Euler (1707-1748) en *Introductio in analysis infinitorum* (1783) define:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o cantidades constantes. [1]

Puede decirse que Euler concibe el concepto de función mediante una dependencia explícita de un valor que está variando; esta dependencia sugiere la combinación de operaciones, números y expresiones conocidas, dadas en algo que podríamos llamar una (fórmula).

Louis Lagrange (1736-1813) en *Teoría de funciones analíticas* (1797) define:

> Una función de una o más variables es una expresión del cálculo en la cual entran dichas cantidades de una manera cualquiera. [2]

En Lagrange el concepto de función puede estar dado en varias cantidades variables sin ninguna restricción en la forma como se relacionan.

Francois Lacroix (1765-1843) en *Traité* (1797) define:

> Toda cantidad cuyo valor depende de una o varias otras es llamada una función de estas últimas, ya sea que uno conozca o no por medio de qué operaciones es necesario pasar de las últimas a la primera cantidad. [3]

Así en Lacroix se resalta que en su concepto surge un primer acercamiento a la idea de variable dependiente de unas variables que toman valores libremente (variables independientes), sin que importe la forma como estas estén relacionadas para determinar la (variable dependiente).

Joseph Fourier (1768-1830) en *Teoría analítica del calor* (1808) define:

> La función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria. No se supone que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a otra cualquier manera, sea la que fuere. [4]

[1] [34], p. 269

[2] [34], p. 269

[3] [34], p. 269

[4] [34], p. 269

Fourier extendió el concepto de función, insistiendo que las funciones no necesitaban ser representables por una expresión analítica; es decir en Fourier se desliga del concepto de función la necesidad de una expresión analítica, acercándose a la noción conjuntista donde la relevancia está en el conjunto de valores que toma.

Augustin Cauchy (1789-1857) en *Curso de análisis* (1821) define:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable. [5]

Para Cauchy en el concepto de función puede haber una relación de dependencia entre varias variables, como puede ser en una expresión implícita. De este modo conociendo el valor de una variable, que podríamos pensar independiente, pueden encontrarse una dependencia de las demás en términos de estas a modo de funciones paramétricas en función de la variable independiente.

4.4. Desarrollo histórico de la noción de límite antes de Cauchy

Recordemos que los matemáticos del siglo XVIII tenían problemas para aceptar la existencia de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, pues eran conceptos que carecían de rigor matemático, y solo estaban basados en la heurística o en cuestiones metafísicas o fenomenológicas. Como lo hemos dicho antes, los problemas con los que se toparon Newton y Leibniz en la determinación de tangentes y las cuadraturas estaban ligados al uso de las cantidades infinitamente pequeñas, nociones que no estaban claramente definidas en matemáticas y que llevaban a contradicciones .

[5] [34], p. 270

De esta forma Berkeley, el obispo irlandés hacía notar que no había una fundamentación matemática para las cantidades infinitamente pequeñas pues llevaban a incoherencias. A estas cantidades Berkeley las denominó los "fantasmas de las cantidades evanescentes". Históricamente, la salida conceptual a estos problemas se da a partir de la incorporación del concepto de límite definido por Cauchy. Sin embargo, la introducción formal del concepto de límite no se dio de manera inmediata, sino que se dio en un proceso de más de 50 años.

En el siglo XVII, las paradojas que emergieron con el uso de las cantidades infinitamente pequeñas se convirtió en un gran problema para el desarrollo del cálculo. En este sentido muchos matemáticos entendieron que debían sustituir la noción de infinitamente pequeño por la noción de infinitamente cercano a través del concepto de límite. En este sentido, Louis Lagrange convocó a un premio en 1784, durante el período en el cual era director de la sección matemática de la Academia de Berlín, a quien desarrollara una teoría formal del infinito matemático:

> Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño...La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como...un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito...([22], p. 134)

De esta forma, veamos algunos autores que aportaron en este proceso:

1. **Jean D'Alembert (1717- 1783)**: El límite de una cantidad variable corresponde al valor limitador, al cual la cantidad variable se puede aproximar tan cerca como se quiera. Concretamente D'Alembert escribe: "Una magnitud se dice que es límite de otra magnitud cuando la segunda se puede aproximar a la primera en menos que cualquier magnitud dada, por pequeña que ésta sea, aunque la primera magnitud no pueda superar a la magnitud a la que se aproxima"([7], p. 121).

2. **Francois Lacroix (1765-1843)**: No define de manera explícita la noción de

límite, pero en el tratamiento de casos particulares se nota que lo maneja conceptualmente. Lacroaix afirma que el límite de la función $\dfrac{bx}{b+x}$, cuando x crece indefinidamente, es b, puesto que la diferencia entre b y la función "se vuelve más pequeño a medida que x crece indefinidamente, y se puede hacer menor que cualquier cantidad dada, de modo que la fracción que proviene de la función [al darle valores a x] puede acercarse a b, tanto como se quiera"([21], p. 80).

3. **Simon Lhuilier (1750-1840)**: Ganó en 1786 el premio convocado por Lagrange, estableciendo una teoría de límite muy cercana a la moderna. Lhuilier define el límite de una cantidad variable como el valor constante del cual la cantidad variable llega a diferir en menos de una cantidad arbitrariamente pequeña. Además Lhuilier incluyó la notación de lím y demostró los teoremas que conciernen al cociente y producto de límites como son:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_n}{g_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f_n}{\lim\limits_{n\to\infty} g_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n g_n)=(\lim_{n\to\infty} f_n)(\lim_{n\to\infty} g_n)$$

De esta manera Lhuilier define la derivada como un cociente incremental o como el límite del cociente de las diferencias, donde hace la aclaración de que $\dfrac{dy}{dx}$ no puede ser interpretado como una razón sino que debe ser reconocido como un símbolo único, Lhuilier llamó a $\dfrac{dy}{dx}$ "razón diferencial".

4. **Lazare Carnot (1753-1823)**: Carnot también participó del concurso convocado por Lagrange, sin embargo a pesar de que no ganó, su propuesta se difundió a través de la memoria: *Reflexiones* de 1797, la cual gozó de gran popularidad porque estaba escrita en un lenguaje más sencillo que la de Lhuilier. La obra de Lhuilier no tuvo mucha difusión ya que hacía una presentación muy exhaustiva y detallada acerca de la teoría de límites. Aunque Carnot no presenta una definición formal de límite, argumenta: "Un límite no es otra cosa que una cantidad fija a la

que se supone que tiende indefinidamente una cantidad auxiliar, de manera que puede diferir de ella en tan poco como queramos, y que su razón última a ella sea una razón de igualdad"([22], p. 136).

4.5. Desarrollo histórico de las nociones de límite y función en Cauchy

Tengamos en cuenta que gracias a los aportes de Newton y Leibniz el cálculo infinitesimal tuvo un gran avance, pero los conceptos básicos, como el de infinito, el de infinitamente grande o el de infinitamente pequeño, permanecían todavía en el terreno de la intuición física o geométrica. Entonces se hacía necesario que existieran unas bases sólidas que permitiera tener una fundamentación para el cálculo.
Desde el punto de vista del rigor, Cauchy llevó el cálculo infinitesimal al contexto de las propiedades aritméticas de los números reales, independizándolo de lo geométrico, tanto así que en el *curso de análisis* no se recurre a ninguna representación gráfica. Cauchy introduce los conceptos de derivada e integral desde el discurso analítico, basando todo su desarrollo en el concepto de límite. Tal como se hace modernamente, Cauchy introduce un capítulo de preliminares teóricos para luego pasar a definir la noción de límite.

4.5.1. Preliminares del *Curso de análisis* de Cauchy

En los preliminares Cauchy aclara que va a introducir los requerimientos teóricos para poder construir el análisis matemático. En primer lugar, establece la diferencia entre *número* y *cantidad*. Cauchy toma el *número* [6] en el sentido aritmético definiéndolo como la medida absoluta de las magnitudes. Para Cauchy la *cantidad* [7] corresponde

[6] [13], p.75
[7] [13], p.75

a los números precedidos del signo más o menos, es decir corresponde a cantidades reales positivas o negativas. Cauchy toma la noción de *magnitud* [8] en el sentido clásico de la palabra, teniendo en cuenta que una magnitud se puede comparar con otra, es decir las magnitudes son objetos matemáticos que se pueden sumar, multiplicar, y se puede establecer una relación de orden con ellos. Más adelante Cauchy define el *valor numérico* [9] de una cantidad como el número que proviene de ella.

De acuerdo a sus definiciones, se puede decir que Cauchy no tiene claridad en lo que respecta a lo que es número y cantidad; sin embargo, si nos atenemos a sus procedimientos matemáticos Cauchy tiene como horizonte el conjunto de los números reales. A partir de los de números reales define los conceptos de función y límite. Justamente, sobre estos tres conceptos va a levantar su propuesta de análisis matemático.

Con base en estas interpretaciones podemos distinguir lo que es una *cantidad variable* y una *cantidad constante*.

Una *cantidad variable* se refiere fundamentalmente a una variación numérica que no es fija, como lo establece concretamente:

> Se llama cantidad variable a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros. Se designa a una cantidad semejante por una letra tomada de ordinario de entre las últimas del alfabeto. ([13], p. 75)

Son ejemplos de cantidad variable: $\{1, 2, 3, 4, ...\}$, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$, x, $3x+1$, entre otros. Cauchy llama *cantidad constante* [10] a un número determinado del conjunto referencial numérico (los números reales). Como ejemplos de cantidad constante se tiene: 1, -5, -1, 7, entre otros.

[8] [13], p.75

[9] [13], p.75

[10] [13], p.76

4.5.2. Definición de límite de Cauchy

Después de establecer las nociones de cantidad variable y cantidad constante, Cauchy define la noción de límite, de la siguiente manera:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todas las demás. ([13], p. 76)

Cauchy ejemplifica esta noción de límite diciendo que: "Un número irraccional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos de él"([13], p. 76). Observemos que el ejemplo anterior es significativo puesto que refuerza la idea que Cauchy visualiza el conjunto de los números reales, el cual esta compuesto por números racionales y números irracionales, aunque Cauchy no define ni construye formalmente este conjunto.

Posteriormente Cauchy introduce las nociones de *infinitamente pequeño* e *infinitamente grande*.

Cantidad infinitamente pequeña:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que se suele llamar un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene al cero por límite. ([13], p. 76)

Como ejemplo de una cantidad infinitamente pequeña se tiene a la sucesion de valores

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Cantidad infinitamente grande:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, se dice que esta variable tiene por límite al infinito positivo, indicado por el signo ∞, si es que se trata de una variable positiva, y al infinito negativo, indicado por la notación $-\infty$, si se trata de una

> variable negativa. Los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de cantidades infinitas. ([13], p. 76)

Un ejemplo de una cantidad infinitamente grande es la sucesión de valores

$$1, 2, 3, ..., n, ...$$

4.5.3. Definición de función en Cauchy

En el **capítulo I: De las funciones reales** del *curso de análisis* en el apartado **Consideraciones generales sobre las funciones**, Cauchy introduce la definición de función así:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente estas diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente; y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable. ([13], p. 77)

Más adelante, Cauchy establece que las funciones se pueden clasificar de la siguiente manera: [11]

Función explícita: Se define como la función de una o varias variables, las cuales se encuentran expresadas por medio de esas mismas variables, es decir que estas funciones tendrían la forma $y = f(x)$.

Función implícita: Son aquellas en las cuales las variables se hayan relacionadas mediante una expresión algebraica sin que sea necesario expresar la una en función de las otras de manera explícita.

Función simple: Estas funciones se definen como aquéllas que se deducen de una sola operación efectuada sobre una variable. Las funciones simples se caraterizan también porque se relacionan unas con el álgebra y otras con la trigonometría.

[11] Aquí se toma como referencia [13], p. 78-81

Función compuesta: Se caracterizan porque son las funciones que resultan de una sola variable a través de diversas operaciones.

Funciones de funciones: Se derivan de varias operaciones sucesivas, donde la primera operación se ejecuta sobre la variable y cada una de las otras sobre el resultado de la operación precedente.

Funciones algebraicas: Son las que se determinan por medio de las operaciones del álgebra; es decir: la suma , la resta, la multiplicación, la división, y la elevación a una potencia fija.

Función exponencial o logarítmica: Son aquellas funciones que incluyen exponentes variables o logaritmos.

Función racional: Se denominan de esta forma porque la variable sólo se encuentra elevada a potencias enteras.

Función entera: Se llama así a todo polinomio donde sólo incluye potencias enteras de la variable.

Función fraccionaria: Es aquella que esta determinada por el cociente de dos polinomios semejantes.

Función lineal: Es la que puede ser representada por una línea recta.

Funciones trigonometricas o circulares: Son aquellas funciones que producen las operaciones de la trigonometría.

Cauchy hace la aclaración de que estos variados nombres que se le dieron a las funciones compuestas de una sola variable, pueden ser aplicadas a funciones de varias variables, siempre y cuando cada una de las variables que encierran cumpla con las propiedades que cada denominación supone.

4.5.4. La noción de función continua en Cauchy

En el análisis de Cauchy aparece formalmente, por primera vez, la diferencia entre funciones continuas y discontinuas. Cauchy introduce estas definiciones en el **capítulo**

II, concretamente en el apartado 2: **De la continuidad de las funciones**.

Cauchy parte de una función $f(x)$ donde x varía entre dos valores constantes a y b. Modernamente se refiere a funciones del tipo:

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

No es claro que Cauchy tome el intervalo abierto (a, b) o el cerrado $[a, b]$; sin embargo, de acuerdo a las condiciones particulares toma uno u otro caso. Teniendo en cuenta estas anotaciones, para Cauchy una función $f(x)$, con x variando entre dos límites es continua si:

> A partir de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá como incremento la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$, que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x. Dado esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función *continua* de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función. ([13], p. 90)

Se discute si la definición de Cauchy se refiere a continuidad puntual o continuidad uniforme. El mismo Cauchy pretende aclarar este aspecto de la siguiente manera:

> Cuando una función $f(x)$ deja de ser continua en la vecindad de un valor particular de la variable x, se dice que ella deviene entonces *discontinua* y que existe para este valor particular una solución de continuidad. ([13], p. 91)

De esta forma, se puede advertir que la definición de Cauchy no es de tipo global, sino que se trata de una definición local, muy cercana a nuestra definición moderna de continuidad puntual. A continuación, Cauchy aclara los conceptos de continuidad y discontinuidad a partir de algunos ejemplos: [12]

[12] [13], p. 92-93

- Las funciones: $a + x, a - x, ax, A^x, \sin x, \cos x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$; donde A es un número constante, y $a = \pm A$ es una cantidad constante.
- La función $\dfrac{a}{x}$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y es discontinua en $x = 0$.
- La función $\ln x$ es continua en $(0, \infty)$.
- Las funciones $\arcsin x, \arccos x$ son continuas en $(-1, 1)$.

4.6. El concepto de derivada en Cauchy

En la **Segunda parte** de [13]: **Cálculo infinitesimal**, **Tercera lección: Derivadas de funciones de una sola variable**, Cauchy introduce la noción de derivada de la siguiente forma:

> Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de las diferencias
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
> serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. ([13], p. 235)

Cabe anotar que, cuando existe, el límite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando i tiende a cero, Cauchy lo representa como:

$$y' \text{ o } f'(x)$$

Esto es algo sorprendente porque Cauchy esta introducciendo no la variación en puntos particulares, sino la variación de la variación, lo cual lleva a la denominación de esta segunda variación como función derivada.

Para aclarar la definición de derivada de Cauchy, calculemos la función derivada de algunas funciones.

Sea la función $f(x) = x^2$, entonces,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
$$= \frac{(x+i)^2 - x^2}{i}$$
$$= \frac{x^2 + 2xi + i^2 - x^2}{i}$$
$$= \frac{2xi + i^2}{i}$$
$$= \frac{(2x+i)i}{i}$$

Aquí es conveniente advertir que i es una cantidad variable que tiende a cero, pero no es cero, por lo tanto se puede hacer la cancelación respectiva obteniendo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + i$$

Como i es una cantidad infinitamente pequeña $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendrá por límite $2x$. Por lo tanto, $f'(x) = 2x$.

Tomando a como una cantidad constante, calculemos la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = a + x$
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i) - (a+x)}{i} = \frac{a+x+i-a-x}{i} \Longrightarrow f'(x) = 1.$$
- $f(x) = a - x$
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[a-(x+i)] - (a-x)}{i} = \frac{a-x-i-a+x}{i} \Longrightarrow f'(x) = -1.$$
- $f(x) = ax$
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i) - ax}{i} = \frac{ax+ai-ax}{i} = \frac{ai}{i} \Longrightarrow f'(x) = a.$$
- $f(x) = \frac{a}{x}$
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = \frac{\frac{ax - a(x+i)}{x(x+i)}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{a}{x^2}.$$

Al respecto de la definición de derivada de Cauchy, en la introducción de [13], Carlos Alvarez [13] afirma que esta definición no sigue la línea de los desarrollos de Newton o Leibniz, sino que está más cercana a la definición de función derivada presentada por Lagrange, quien en su *Teoría de funciones analíticas* señala que una función derivada es una función que "proviene"de otra función en su totalidad y no sólo para ciertos valores.

Recordemos que Newton hace referencia a la derivada a través del método de las fluxiones, y Leibniz por medio del cálculo de las diferencias; es decir que Newton y Leibniz parten del principio de la variación, esto es, la variación se hace alrededor de un punto; mientras que para Lagrange la operación se realiza sobre una función.

Es necesario resaltar que el interés de Cauchy no es encontrar la derivada para valores particulares, sino de determinar todos los valores en los cuales la operación derivada tenga sentido. Esto lo hace a través del concepto de límite, estableciendo la función derivada.

[13] Historiador mexicano traductor y comentador de [13]

4.7. La introducción del estilo ϵ y δ por parte de Karl Weierstrass

Figura 4.5

- Nació el 31 de octubre de 1815 en Ennigerloh (Alemania).
- Murió el 19 de febrero de 1897 en Berlín (Alemania).

Karl Weierstrass fue un matemático alemán, considerado como uno de los precursores del rigor en el análisis, también conocido como el padre del análisis matemático o el padre del análisis moderno; muchos teoremas fundamentales de las ramas del análisis llevan su nombre, ya sea porque él los descubrió o por haber sido el primero en darles una demostración completa y rigurosa.

Weierstrass desarrolló, en sus conferencias de 1859 y 1860, una presentación rigurosa del análisis que evadía toda alusión a aspectos geométricos, físicos y metafísicos, a través de la implementación de un lenguaje matemático especial. Weierstrass entendió que el rigor en el análisis solo era posible si se partía de la construcción formal de los números reales.

Las conferencias desarrolladas por Weierstrass en un curso de cuatro semestres que continuó impartiendo hasta 1890 fueron:

1. La introducción a la teoría de funciones analíticas.

2. Las funciones elípticas.

3. Las funciones abelianas.

4. El cálculo de variaciones o aplicaciones de funciones elípticas.

Además, de sus aportes a las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, aborda un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar de forma rigurosa, tales como: el teorema del valor medio [14], el teorema de Bolzano-Weierstrass [15] y el teorema de Heine-Borel [16].

Si bien es cierto que Newton y Leibniz son considerados los creadores del cálculo diferencial, la rigorización del análisis matemático comenzó en 1821, cuando Cauchy fundamentó las nociones de infinitamente pequeño e infinitamente grande a partir del concepto de límite, usando un formato retórico que aún no lograba desprenderse de algunas nociones cinemáticas tales como la expresión “Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo”. Del mismo modo, Cauchy introdujo las nociones de función continua, derivada e integral. El paso decisivo hacia un lenguaje propiamente matemático fue dado por Weierstrass, a través del álgebra de inecuaciones que involucra las variables cuantificadas épsilon-delta. De esta manera la formalización y desarrollo del análisis fue llevada a cabo, fundamentalmente por Weierstrass, y es con él con quien la técnica de épsilon-delta se transformó en el lenguaje básico del análisis moderno.

Hay que recalcar que Weierstrass no escribió un libro propiamente de análisis. Sus

[14] Teorema del valor medio: Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

[15] Teorema de Bolzano-Weierstrass: Todo conjunto infinito y acotado, de números reales, diferente de vacío, tiene un punto de acumulación.

[16] Teorema de Heine-Borel: $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

resultados fueron socializados a través de las notas del curso que dictaba en las universidades alemanas. En particular es conocido el manuscrito de Hermann Schwarz del curso de 1861. En este curso comienza definiendo las nociones de variable y cantidades que varían continuamente, sin establecer una definición formal de números reales. Luego incorpora la definición de función siguiendo los delineamientos de Dirichlet, de la siguiente manera:

> Si dos cantidades variables pueden ser llevadas de tal manera que cada valor determinado de la una se corresponda con un valor determinado de la otra, entonces el último se llama función del primero. ([18], p. 50)

Más adelante, introduce la definición de límite de una función f, de variable x, reemplazando la idea de variación infinitamente pequeña de x y de la función f a través de la técnica épsilon-delta. Tal como puede observarse en la siguiente cita, esta definición constituye el soporte formal de las nociones de límite y continuidad en el sentido moderno.

> Si es posible determinar un valor δ tal que para cualquier valor de h menor en valor absoluto que δ, $f(x+h)-f(x)$ sea menor que una cantidad ϵ tan pequeña como se desee, entonces se hará corresponder a una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función. ([18], p. 50)

Como se puede observar, el estilo de Weierstrass persiste en los textos escolares de cálculo y análisis modernos. La técnica épsilon-delta constituye el vehículo que formaliza la idea intuitiva de "tender hacia", organizando el discurso analítico del análisis desde un lenguaje matemático que se basa en el álgebra de inecuaciones y la lógica de primer orden. De esta forma, decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es L, denotado como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0) : (\mid x - a \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon)$$

Notemos que esta definición esconde completamente los procesos infinitos y desemboca en una noción fundamentada en el álgebra de inecuaciones.

Capítulo 5

Conclusiones

De acuerdo al desarrollo histórico que se ha establecido en esta indagación, se puede corroborar que la instauración formal de la noción de derivada se dio en un proceso lento y complejo. Los movimientos conceptuales nos permiten ubicar, de manera implícita, los rudimentos de esta noción en la definición de recta tangente a una curva. En principio se hace usando regla y compás (rectas y círculos); un método que sólo permite resolver el problema para unas pocas curvas y tomando como referencia la recta tangente a un círculo, cuyo procedimiento fue establecido por Euclides en los *Elementos*. A partir de los desarrollos de los antiguos griegos, el problema de cálculo de cuadraturas se fue emparentando con el problema del trazado de la recta tangente. Este movimiento epistémico se hizo evidente con Newton y Leibniz, quienes establecen la relación inversa entre las operaciones de trazado de tangentes y cálculo de áreas, en principio, apoyados en relaciones geométricas. La introducción de las cantidades infinitamente pequeñas, como herramienta procedimental, hizo que Newton estableciera una interpretación del cálculo de tangentes a través de la noción física del movimiento.

Las contradicciones que se producían con el uso de las cantidades infinitamente pequeñas obligó a un replanteamiento teórico en el sigo XIX. De esta manera se establece, con el análisis de Cauchy, una salida formal a través de la noción de límite, el cual es aplicado a otro nuevo concepto, como es el de función.

De esta forma, se nota que en el desarrollo de la noción de derivada se puede identificar un movimiento conceptual que lleva de lo geométrico y físico a lo analítico. Observemos que ese movimiento no se dio de manera directa, sino como resultado de diversas apuestas conceptuales de matemáticos de diferentes latitudes. Esta problemática, que históricamente del siglo XIX se conoce como período de rigorización del análisis, nos permite identificar un obstáculo epistemológico.

A partir del *Curso de análisis* de Cauchy, se establecen unos protocolos que aún se guardan en los libros de análisis modernos, en los cuales se hace una presentación completamente analítica de las nociones de derivada e integral. Sin embargo no ocurre lo mismo en los libros de cálculo, los cuales hacen una presentación que sigue un protocolo similar al que hemos establecido en el desarrollo histórico, parten de una presentación intuitiva hasta llegar a una presentación formal.

Para corroborar la anterior afirmación, tomemos como referencia uno de los libros más utilizados en los cursos, como es *Cálculo con geometría analítica* de Edwards y Penney [19], y observemos el esquema que presenta para introducir el concepto de derivada. En este libro para introducir la noción de límite se incorpora primero la definición de recta tangente a través de una visión geométrica; en el capítulo 2.1 "Rectas tangentes y la derivada: un primer vistazo"se hace como primera instancia una introducción geométrica de la derivada, preparando la concepción de este concepto a partir de establecer tangentes a las curvas. El proceso seguido es el de tratar de que el estudiante entienda como se va formando la noción de tangente a partir de las distintas secantes, tratando de perfilar la definición de límite.

Más adelante se introduce la concepción del concepto de derivada a través del límite del cociente diferencial, el cual de forma panorámica se ha dilucidado en el apartado anterior. Se trata justamente de sacar el límite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando h tiende a cero.

En primer lugar, los límites se calculan haciendo diversas evaluaciones, y a partir de esa idea se visualiza el valor del límite que se corrobora informalmente con la definición. Por medio de este procedimiento se analiza la existencia y la no existencia del límite, utilizando muchos ejemplos y haciendo uso de algunos teoremas, los cuales se incorporan básicamente de manera intuitiva.

Finalmente, después de ese recorrido, de trabajar un poco el límite, al terminar el capítulo del libro se introduce la noción de límite de una manera formal:

Definición del límite: El número L es el *límite* de $F(x)$ cuando x tiende a a siempre que, dado cualquier número $\epsilon > 0$, exista un número $\delta > 0$ tal que

$$\mid F(x) - L \mid < \epsilon$$

para toda x tal que

$$0 < \mid x - a \mid < \delta$$

Notemos que este es un esquema el cual tiene una gran carga conceptual para poder definir la noción de derivada, donde se parte de lo intuitivo geométrico, a lo intuitivo físico, hasta llegar a una definición analítica del concepto, que constituye la noción formal que sintetiza el proceso abstracto de una segunda variación, mediante la cual se pueden modelar fenómenos físicos, químicos, de ingeniería o de economía, entre otros. Resulta que cuando se pone énfasis en este esquema, los estudiantes presentan muchas dificultades para poder establecer la naturaleza de la función derivada. Esto nos lleva a concluir que la insistencia en lo geométrico produce obstáculos epistemológicos en los estudiantes puesto que para ellos es complicado desprenderse de la visión geométrica para posteriormente introducirse en un ambiente analítico en el cual aparecen las propiedades básicas de la derivada, mediante las cuales se puede establecer procesos de modelación. Podemos decir que se crea un obstáculo en el desarrollo, en la construcción y el uso de los significados del concepto de la derivada, puesto que los problemas para relacionar estas formas de representación se ponen de manifiesto cuando en un contexto

diferente al geométrico o al físico, los estudiantes no pueden visualizar en la noción de derivada la herramienta que les permitirá la comprensión de los fenómenos (conducción del calor, movimiento planetario, procesos químicos, cambio poblacional, entre otros).
Es importante recalcar que estos obstáculos que presentan los estudiantes, también se dieron en el desarrollo histórico del concepto de la derivada, puesto que en un principio hubo un acercamiento al problema de la tangente a partir de lo geométrico, y para pasar de lo geométrico a lo analítico se tuvieron que incorporar formalmente algunos objetos matemáticos que en principio emergieron como proceso. Tal es el caso del concepto de función, y el del paso al límite. De aquí la importancia de estudiar las condiciones históricas en las cuales un obstáculo ha sido reconocido, ya que esto puede ayudar a comprender los orígenes y la naturaleza de los problemas de aprendizaje de los estudiantes. Esto es algo que se debe tomar de referencia a la hora de elaborar situaciones didácticas y adidácticas.
En [16] se muestra que la mayoría de los estudiantes aprenden y son capaces de resolver ejercicios aplicando las reglas de derivación, es decir no tienen inconvenientes en el cálculo de derivadas de funciones algebraicas con procesos algorítmicos, pero presentan grandes dificultades en la contextualización acerca de la noción de derivada con los problemas fenomenológicos, como también cuando recurren a significados más amplios sobre el concepto de derivada, esto es como límite del cociente incremental, o como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Esto problemas se deben a varios factores como son: textos donde predomina el trabajo algorítmico, enfoque exclusivamente al planteamiento de la interpretación geométrica de la derivada, poca relación que se enseña del concepto con los fenómenos de la variación física, y dificultades derivadas del rol constitutivo del saber mismo.
En [17], se argumenta que el obstáculo al que hacemos referencia se debe fundamentalmente a la concepción griega de tangente formada en los estudiantes, es decir, una recta que toca una curva y prolongada no la corta. En [29], se comenta que otro de los

problemas radica en el poco entendimiento que los estudiantes llegan a tener de que la tangente se puede obtener por medio de una sucesión de secantes; y por último en [36], se menciona que los estudiantes consideran que el límite se obtiene solamente evaluando la función en el punto deseado, el límite lo manejan únicamente como una aproximación y también resalta que los estudiantes presentan dificultades en los procesos infinitos.
Es así como en [16] se reconoce algunos enfoques que pueden ser de gran ayuda para la enseñanza de la derivada, los cuales se dividen en dos grupos:

1. **Enfoques que priorizan la estructura del contenido clásico**

    a) Enfoque algebraico: Bajo este enfoque la derivada se trabaja con incrementos, límite del cociente incremental, reglas de derivación; es decir prioriza el trabajo con los algoritmos y culmina con la interpretación geométrica de la derivada omitiendo su significado físico.

    b) Enfoque numérico: En este enfoque se pretende darle mayor significado a la interpretación geométrica de la derivada, como también la relación entre la derivada y la variación física.

    c) Enfoque formal: Para este enfoque es importante conocer la definición del límite en términos de épsilon y delta, pero con la relevancia de haber formalizado rigurosamente los conceptos de números reales, función, límite y continuidad.

    d) Enfoque infinitesimalista: Con este enfoque se pretende que los estudiantes alcancen una mayor comprensión de la derivada ya que a través de las ideas infinitesimales en la formación de los conceptos por medio de los problemas de la variación se puede llegar a tener un mejor entendimiento en la noción de la derivada.

    e) Aproximación afín local: Para introducir el concepto de derivada se parte de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante. Para así incorporar la idea de tangente como el límite de una sucesión de secantes y con ellos se establece la noción de aproximación afín.

2. **Enfoques que priorizan los significados**

   a) Enfoque geométrico: Para este enfoque es relevante el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, donde se toma como referencia algunos aspectos del desarrollo histórico de la formación de la noción derivada tales como el método algebraico de Descartes y el método de los límites de Fermat.

   b) Enfoque variacional: En este enfoque se le da importancia a la variación física, como también se asume a la razón de cambio como su concepto fundamental. De esta manera se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite.

   c) Enfoque computacional: Este enfoque es de gran utilidad y más aún hoy en día donde se está en un mundo desarrollado, y las TIC son de gran ayuda para el proceso de aprendizaje en los estudiantes porque permite tener una visualización y un acercamiento intuitivo en particular del límite y de la derivada, como por ejemplo a través de un programa matemático se puede visualizar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente, entre otros.

Estos enfoques establecidos en [16], dan cuenta de que se puede introducir la noción de derivada a través de la variación desde el origen histórico; pues recordemos que los antecedentes históricos están enlazados al problema de la recta tangente, y como se menciona en [16], desde el enfoque geométrico es importante tener como referencia algunos aspectos del desarrollo histórico de la formación de la derivada, como el método de Descartes, mediante el cual se dio el primer paso hacia las matemáticas de las variables; también permitió que la geometría de los antiguos griegos avanzara un poco más en el sentido de que la solución de los problemas se hacía a través del uso del álgebra simbólica. El método de Fermat también es significativo ya que en su proceso de hallar máximos y mínimos y sin considerar cantidades infinitesimales, tuvo un gran acercamiento al proceso que se usa hoy en día para hallar la derivada de una función en un punto y específicamente para hallar los valores máximos y mínimos de una función. Por otra parte, Newton y Leibniz retomaron las ideas y métodos que sus antecesores habían desarrollado para hallar tangentes, como también para encontrar áreas, máximos y mínimos, los cuales constituyen los conceptos que en la actualidad se conocen como derivada e integral. Pero recordemos que Newton y Leibniz desarrollaron el cálculo de manera independiente y con notaciones diferentes, pero con la particularidad de que en la construcción del cálculo fue sobre cantidades variables, lo cual ayudó a que más adelante la derivada fuera definida como un límite en la forma en la que se conoce actualmente.

En [16] se recalca la importancia de conocer la definición de límite iniciando con el conjunto de los números reales, concepto de función, y por último establecer la definición de límite en términos de épsilon y delta. Es aquí donde Cauchy realiza un trabajo significativo para el cálculo, ya que en [13] se establece una teoría rigurosa, con la cual se instaura la definición adecuada de función, función continua y límite que permiten tener la fundamentación en el análisis sobre unas bases firmes y donde Cauchy infiere que los objetos del análisis son las funciones y a las operaciones básicas, se adiciona el paso al límite como una nueva operación. Sin embargo, cuando Cauchy fundamenta las nociones de infinitesimales, a partir del concepto de límite, no logró desprenderse de algunas nociones cinemáticas; es así como el paso decisivo hacia un lenguaje propiamente matemático fue dado por Weierstrass ya que a través de la técnica de épsilon y delta implementó el lenguaje básico en el análisis mediante el álgebra de inecuaciones.

De esta manera es Weierstrass quien realiza una presentación rigurosa del análisis que evade toda alusión a aspectos geométricos, físicos y metafísicos que acarreaban sus antecesores.

Es importante entender que la noción de obstáculo epistemológico permite explicar las múltiples dificultades que se dieron en el paso del cálculo al análisis. Como hemos referido en esta indagación, la relación entre el cálculo de cuadraturas se encuentra ligado al de recta tangente. Puede visualizarse en Euclides, cuando utiliza el método de agotamiento en un intento de cuadrar el círculo a través de una sucesión de polígonos estrictamente creciente o a través de una sucesión de polígonos circunscritos estrictamente decrecientes. En ese sentido demuestra que se puede hallar un polígono tan cercano al círculo como se quiera, pero no podrá conseguirse nunca el círculo, pues se llega a un proceso infinito potencial que se da en la sucesión de polígonos. Durante siglos, este problema no tiene mayores avances, ni siquiera con los indivisibles de Cavalieri. Con Newton y Leibniz se da un paso fundamental a la condición de introducir la noción obscura de "magnitud infinitesimal". Esto contradice los preceptos aristotélicos que le niegan legitimidad al infinito actual en matemáticas. En esta dirección Newton intenta dar una salida formal a través de una interpretación cinemática del problema geométrico. Sin embargo él mismo entiende que su salida es incompleta y trata de reinterpretar el problema tomando en consideración las nociones de primera y última razón. Leibniz se limita a considerar el cociente diferencial como una herramienta auxiliar, sin sustento matemático.

En el desarrollo histórico que aquí se ha presentado hemos puesto de presente que la gran dificultad para establecer la noción de derivada e integral, se debió al posecionamiento de un problema que se soportaba en magnitudes geométricas. Los matemáticos debían romper un modelo basado en lo geométrico y reinterpretarlo en términos de funciones, tomando como referencia una nueva operación, como lo es el paso al límite. Nos queda entonces claro que la pertinencia de lo geométrico constituye un saber que obstaculiza la emergencia de lo analítico en lo concerniente a la interpretación de la derivada. Tuvieron que pasar más de cien años para que el concepto de límite se instalará formalmente en las matemáticas a través de los desarrollos de Cauchy.

Por último resalto que el conocer el desarrollo histórico de un concepto, en particular el de la noción de derivada es de gran importancia ya que se pueden reconocer algunos sucesos que dieron paso a la formalización del concepto, lo cual puede ser una herramienta importante para el docente a la hora de impartir su curso de cálculo porque puede aumentar el interés y la motivación de los estudiantes frente a un concepto, puesto que les permite tener una mejor visualización acerca de cómo surgió el concepto y de las dificultades que se encontraron para poderlo establecer. El desarrollo histórico, también ayuda a reconocer y contextualizar obstáculos epistemológicos frente a la noción de derivada que especialmente es difícil de comprender para el estudiante porque permite explicar las incomprensiones que presentan los estudiantes en torno a tal noción.

Bibliografía

[1] Andersen, Kirsti: *Las técnicas del cálculo 1630-1660.* En: *Grattan-Guinness, I. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica.* Alianza Editorial. Madrid, 1984, pp. 22-66.

[2] Andersen, Kirsti :*Cavalieri's method of indivisibles.* Denmark: Arch. Hist. Exact Sci, Vol.31, 1985, pp. 292-367.

[3] Artigue Michèle, Douady Régine y Moreno Luis: *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* En: *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. Bogotá, 1995, pp. 97-135.

[4] Artigue Michèle: *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?.* RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 1, Núm. 1, marzo 1998, pp. 40-55.

[5] Bachelard, G: *La formación del espíritu Científico.* Mexico: Siglo XXI editores, S. A. de cv, 2004.

[6] Barrantes, H: *Los Obstáculos Epistemológicos.* Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2006.

[7] Bos, H.J: *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana*. En: *Grattan-Guinness, I. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial. Madrid, 1984, pp. 69-123.

[8] Boyer, Carl. *La época de Fermat y Descartes*. En: *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987, pp. 423-460.

[9] Boyer, Carl. *Newton y Leibniz*. En: *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987, pp. 493-519.

[10] Boyer, Carl. *El periodo de Gauss y Cauchy*. En: *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987, pp. 627-654.

[11] Brousseau, G. (1983): *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques 4(22), 165-198.

[12] Brousseau, G. (1986): *Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2), 33-115.

[13] Cauchy, Augustin-Louis: *Curso de análisis*. Servicios Editoriales de la Facultad de ciencias, UNAM, México, 1994.

[14] Descartes, René: *La geometría*. Editorial Espasa-Calpe S.A., Buenos Aires, 1947.

[15] Didáctica de la Matemática: *Teoría y práctica para la innovación en el proceso de enseñanza-aprendizaje*. Guía de aprendizaje para capacitación Universidad Tecnológica de Chile INACAP. Pontificia Universidad Catolica de Valparaiso.

[16] Dolores, Crisólogo: *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada*. En: Cantoral, R. (coordinador): *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Grupo Editorial Iberoamérica. México 2000, pp.155-181.

[17] Dolores, C: *Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada*; Memorias de la tercera reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa, San José de Costa Rica, C.A, 1989.

[18] Dugac, Pierre: *Sur les fondements de lánalyse de Cauchy á Baire*. Thése de doctorat, de la Universidad Pierre et Marie Curie, París, 1978.

[19] Edwards, C. y Penney, David: *Cálculo con geometría analítica*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1994.

[20] Euclides, *Elementos de Geometría*, en: Vera, F., Científicos griegos, Aguilar, Madrid, Vol. I, 1970.

[21] Grabiner, Judith: *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1981.

[22] Grattan-Guinness: *La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1880*. En: *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial. Madrid, 1984, pp. 125-190.

[23] Hitt, F: *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia (México), 2003.

[24] http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau. 05/03/2005.

[25] Kline, Morris: *La creación del Cálculo*. En: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, Madrid, 1994, Vol I, pp. 452-514.

[26] Kline, Morris: *El cálculo infinitesimal en el siglo XVIII*. En: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, Madrid, 1994, Vol II, pp. 533-577.

[27] Muñoz Lecanda y Román Roy: *Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal*. Departamento de matemática aplicada y telemática. C/ Jordi Girona 1; Edificio C-3, Campus Norte UPC E-08034 Barcelona.

[28] Newton, Isacc: *Tratado de métodos de series y fluxiones* (Traducción e introducción de Marco Panza). México: Facultad de ciencias, UNAM, Colección matemática, 2001 (primera versión 1736).

[29] Orton A, *Chords, secants, tangents and elementary calculus*; Mathematics Teaching, Núm. 78, pp. 48-49, 1977.

[30] Panza, Marco: *Newton les origines del analyse 1664-1666*. Editions Albert Blanchard. París, 2005.

[31] Pino-Fan, L: *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada, España, 2013.

[32] Recalde, Luis. *La evolución del álgebra y los indivisibles de Cavalieri*. En: *Lecturas de historia de las matemáticas*. Editorial Universitaria- Universidad del valle, Santiago de Cali, 2018, pp. 151-185.

[33] Recalde, Luis. *El origen del cálculo en el marco y del problema de las cuadraturas*. En: *Lecturas de historia de las matemáticas*. Editorial Universitaria- Universidad del valle, Santiago de Cali, 2018, pp. 219-261.

[34] Recalde, Luis. *La instauración del Análisis como rama de las matemáticas*. En: *Lecturas de historia de las matemáticas*. Editorial Universitaria- Universidad del valle, Santiago de Cali, 2018, pp. 263-301.

[35] Ribnikov, Konstantin: *Historia de las matemáticas*. Editorial. Mir Moscú, 1991.

[36] Sierpinska, A; *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite*; Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6, número 1, pp. 5-67, 1985.

[37] Suzuki, J. (2005): *The lost Calculus (1637-1670): Tangency and optimization without limits*. Mathematics Magazine, vol.78, nº 5, pp. 339-353

[38] Vargas, Viviana: *De los indivisibles a los infinitesimales en la aritmética del infinito de Jonh Wallis 1656*. Universidad del valle, Santiago de Cali, 2007.

[39] Vega Penagos Claudia: *Aportes realizados por Leibniz a la consolidación del cálculo diferencial*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C, 2013.

[40] Vrancken Silvia y Engler Adriana: *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico*. Revista Iberoamericana De Educación Matemática, número 33, 2012, pp. 53-70.