Aplicación de la transformada de Laplace a circuitos eléctricos

Application of the Laplace transform in electrical circuits

Hugo Lázaro M.[1], Gladys Melgarejo[2], Edison Montoro[3], José Obregón[4], Jorge Diego[5], Vidal Aramburú R.[6]

Recibido: 26/07/2016 - Aprobado: 08/09/2016

RESUMEN

En este artículo se presenta una aplicación de la transformada de Laplace en la solución de los circuitos eléctricos, calculando las corrientes y los voltajes instantáneos que se presentan en diversas partes de un circuito eléctrico dado.

Palabras clave: Leyes de Kirchoffs, circuitos eléctricos, transformada inversa.

ABSTRACT

In this paper we show an application of Kirchoff 's laws to the electric networks for the use of the Laplace transform.

Keywords: Kirchoff 's laws, electric networks, inverse transform.

1 UNMSM. Facultad de Ciencias Matemáticas. E-mail: hlazarom@unmsm.edu.pe
2 UNMSM. Facultad de Ciencias Matemáticas. E-mail: gmelgarejoe@unmsm.edu.pe
3 UNI. Facultad de Ingeniería Mecánica. E-mail: pepeobregons@gmail.com
4 UNMSM. Facultad de Ciencias Matemáticas. E-mail: emontoroa@unmsm.edu.pe
5 UNMSM. Facultad de Ing. Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica. E-mail: jdiegoc@unmsm.edu.pe
6 UNMSM. Facultad de Ing. Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica. E-mail: vidalaramburu@hotmail.com

I. INTRODUCCIÓN

Los circuitos eléctricos son estructuras eléctricas formadas por diversas conexiones entre objetos que tienen características definidas de funcionamiento cuando reciben estímulos de naturaleza electromagnética. Los parámetros característicos de estos objetos son la resistencia *(R)*, la capacitancia *(C)* y la inductancia *(L)* (Da Prata, 1992, 1998).

II. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Cálculo

Para calcular corrientes y voltajes en los circuitos, se utilizan las leyes de Kirchoff, y con ellas se plantean ecuaciones en las que intervienen estas variables del circuito, generando ecuaciones diferenciales y/o integro diferenciales (Rainville, 1966).

Se sabe que los voltajes o las diferencias de potencial a través de los inductores *(L)*, resistores *(R)* o capacitores *(C)* están dados por las siguientes fórmulas:

$$V_L = L\frac{di}{dt};\ V_R = R_i; V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

Por ejemplo, si una fuente de tensión *E(t)* es aplicada a un circuito en serie que contiene *L, R,* y *C* tal como se muestra; la ecuación que se deduce usando la segunda ley de Kirchoff es:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t)$$

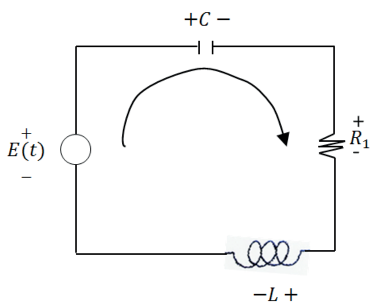

Figura Nº 1. Circuito en serie.

Usando la transformada de Laplace, resultará una ecuación, a partir del cual puede determinarse *I(s)(£i (t)Is)* y aplicándole la transformada inversa se calculará *i(t)* (Sánchez) Figura Nº 1.

III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

3.1. Problema de aplicación

Encuentre la carga en el capacitor cuando f

$$E(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < 1 \\ 50 & , t \geq 1 \end{cases}$$

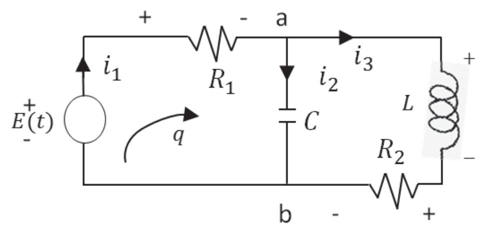

Figura Nº 2. Aplicación ley de KIRCHOFF.

Usando la segunda ley de Kirchoff, que establece que el voltaje entre dos puntos de un circuito es invariable, resulta:

$$V_{ab} = E - i_1 R_1 = \frac{q}{C} = L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 \quad \longrightarrow (1)$$

Asimismo en el nodo *a* se cumple:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

entonces

$$i_1 = i_3 - i_2 \quad \longrightarrow (2)$$

Por definición:

$$i_2 = \frac{dq}{dt} \quad \longrightarrow (3)$$

reemplazando 2 y 3 en 1 se obtiene:

$$E - R_1(i_3 + i_2) = \frac{q}{C} \quad \text{y} \quad \frac{q}{C} = L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3$$

$$E - R_1\left(i_3 + \frac{dq}{dt}\right) = \frac{q}{C} \quad \text{y} \quad \frac{q}{C} = L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3$$

Ordenando adecuadamente se deduce finalmente:

$$R_1\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + R_1(i_3) = E \quad \longrightarrow (4)$$

$$L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 - \frac{q}{C} = 0 \quad \longrightarrow (5)$$

Usando los datos propuestos, en las dos ecuaciones diferenciales deducidas, se obtiene:

$$\frac{dq}{dt} + q + i_3 = \begin{cases} 0 & , si\ 0 < t < 1 \\ 50\,e^{-t} & , si\ t \geq 1 \end{cases} \quad \longrightarrow (6)$$

$$\frac{di_3}{dt} + i_3 - q = 0 \quad \longrightarrow (7)$$

$$i_3(0) = q(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales:

$$sQ(s) - q(0) + Q(s) + I_3(s) = \mathcal{L}\begin{cases} 0 & , si\ 0 < t < 1 \\ 50\,e^{-t} & , si\ t \geq 1 \end{cases}$$

Para efectuar la transformada indicada en el segundo miembro; a este se le escribe así:

$$50\, e^{-t}\mu_1(t)$$

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & ,si\ t < 1 \\ 0 & ,si\ t \geq 1 \end{cases}$$

Aplicando el teorema que establece:

Si $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ entonces $\mathcal{L}\{f((t-1)\mu_1\} = e^{-as}F(s)$

La transformada de $50\, e^{-t}\mu_1$ resultará así:

$$\mathcal{L}\{(50e^{-(t-1)}\mu_1)e^{-1}\} = 50e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}$$

La primera ecuación diferencial transformada resultará:

$$sQ(s) + Q(s) + I_3(s) = 50e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \longrightarrow 8$$

La segunda ecuación diferencial ya transformada es:

$$sI_3(s) + I_3(s) - Q(s) = 0 \longrightarrow 9$$

De (9) se obtiene:

$$I_3(s) = \frac{Q(s)}{s+1} \longrightarrow 10$$

Reemplazando en la ecuación 8 se tiene:

$$sQ(s) + Q(s) + \frac{Q(s)}{s+1} = 50\, e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}$$

Simplificando, se tiene

$$\frac{(s^2 + 2s + 2)Q(s)}{(s+1)} = 50e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Q(s) = 50e^{1}e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}$$

Transformando inversamente en ambos miembros:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = 50e^{-1}\mathcal{L}\left\{e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}\right\}$$

Para obtener el resultado del segundo miembro, se utiliza el siguiente teorema:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ entonces $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mu_1$

En este caso resultará:

$\mathcal{L}^{-1}Q(s) = q(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-1}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\} = f(t-1)\mu_1$

donde:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\} = e^{t}\ sen\ (t)$$

Usando finalmente estos resultados, se obtiene:

$$q(t) = 50e^{-1}e^{(t-1)}sen\ (t-1)\mu_1(t)$$
$$50\, e^{-t}sen\ (t-1)\mu_1(t)$$

pero: $\mu_1(t) = 0\ \ (t < 1)$ y $\mu_1(t) = 1\ (t \geq 1)$;

$$q(t) = 50\, e^{-t}\ sen\ (t-1), t \geq 1$$

3.2. Interpretación gráfica

El resultado obtenido significa que la carga instantánea del capacitor tiene una variación sinusoidal decreciente, determinada por la función exponencial. Una gráfica aproximada de esta carga instantánea, que es la respuesta del circuito al estímulo aplicado como voltaje instantáneo, es la que se muestra a continuación (Zill, 2002). Figura Nº 3

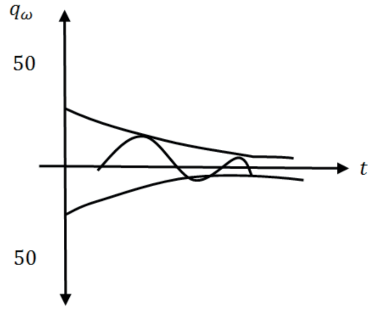

Figura Nº 3. Respuesta al estimulo aplicado.

cuando transcurra un tiempo ilimitado la carga tenderá a desaparecer, porque:

$$\lim_{n\to\infty} q(t) = \lim_{n\to\infty} 50\, e^{-t}sen\ (t-1) = 0$$

3.2. Recomendaciones

- Es fundamental escribir correctamente las ecuaciones diferenciales que ponen de manifiesto el funcionamiento de los circuitos.
- Establecer con precisión la dirección de las corrientes eléctricas y la polaridad de los voltajes.
- Aplicar la transformación de Laplace a cada expresión con exactitud, usando convenientemente las condiciones iniciales.

  (Kreysgic, 1971).

IV. CONCLUSIONES

- El método de la transformada de Laplace es el más completo y preciso para resolver circuitos eléctricos.
- Este método permite matematizar todas las expresiones eléctricas de cualquier tipo y expresar con el lenguaje matemático apropiado las soluciones.

V. AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y al Instituto de Investigación IIGEO por su apoyo invalorable.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Da Prato, G. and Zabczyb, J.(1992) Stochastic Equation in infinite Dimensions. Cambridge: Cam-

bridge University Press.

[2] Da Prato, G. and Zabczyb, J. (1996). Ergodicity for infinite Dimensional Systems. Cambridge: Cambridge University Press. .

[3] Zill Dennis, G. (2002). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado MATH Learning,

[4] Rainville, E.D.(1996). The Laplace Transform. New York: The Mac Millan Company.

[5] Sánchez, L. M. - Legua, M.P. Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace con Aplicaciones.

[6] Kreysgic, E. (1971). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I.