Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 1 (2018), hal 23-32.

FRIEZE GROUP PADA SENI DEKORATIF MASJID

Asri Rahmawati, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Seni dekoratif adalah seni yang digunakan untuk memperindah bagian dari sebuah bangunan, tembok atau objek-objek tertentu. Seni tersebut sering ditemukan pada dinding, karpet dan atap masjid yang dapat membentuk sebuah pola khusus. Pola-pola yang terbentuk pada seni dekoratif ternyata dapat diidentifikasi menggunakan teori frieze group. Frieze group atau biasa juga disebut pola frieze merupakan subgrup dari grup simetri yang dibangun oleh translasi dalam satu arah. Himpunan isometri yang tidak kosong yang dinyatakan $Sym\ (X)$ *merupakan suatu grup dengan operasi komposisi fungsi dan disebut sebagai grup simetri. Isometri merupakan suatu fungsi yang mempertahankan jarak dari suatu bidang ke bidang itu sendiri. Isometri yang membangun pola frieze diantaranya translasi* (τ), *refleksi horizontal* (β), *refleksi vertikal* (ρ), *rotasi* $180°$ (α), *dan glide* (γ). *Pola frieze memiliki tujuh jenis pola yang dibangun dari kombinasi isometri yang ada. Tujuh pola frieze tersebut dapat diklasifikasikan sebagai grup siklik atau dihedral. Berdasarkan teori-teori yang ada maka akan didapat mengenai hubungan antara frieze group dengan grup siklik dan dihedral. Selain itu juga akan didapat hasil identifikasi pola seni dekoratif masjid berdasarkan frieze group.*

***Kata Kunci** : pola frieze, isometri, grup simetri*

PENDAHULUAN

Seni dekoratif adalah seni yang digunakan untuk memperindah bagian dari sebuah bangunan, tembok atau objek-objek tertentu. Salah satu bangunan berarsitektur Islam yang memiliki unsur seni dekoratif adalah masjid. Masjid adalah tempat ibadah umat Islam. Selain digunakan sebagai tempat ibadah, masjid juga merupakan pusat kehidupan komunitas muslim. Kegiatan-kegiatan perayaan hari besar, diskusi, kajian Islam, ceramah dan belajar Al Qur'an sering dilaksanakan di masjid. Seiring dengan berkembangnya Islam, keragaman arsitektur masjid sangat terpengaruh. Unsur budaya dan seni setempat juga ikut mempengaruhi bentuk, tata ruang, konstruksi, dan dekorasi dari masjid. Kenyataan dalam Islam yang menyatakan bahwa Allah Maha Indah dan menyenangi keindahan mendorong adanya hiasan masjid. Untuk menghindari kemusyrikan, hiasan masjid jarang bermotif manusia atau hewan. Corak yang sering digunakan lebih ke corak geometris bukan figuratif. Unsur seni dekoratif di masjid yang sering ditemukan biasanya terdapat pada dinding, karpet atau atap masjid. Pola-pola yang terbentuk pada seni dekoratif masjid tersebut dapat diidentifikasi menggunakan teori *frieze group*.

Frieze group merupakan subgrup dari grup simetri yang dibangun oleh translasi satu arah. Himpunan isometri yang dinyatakan $Sym\ (X)$ yang tidak kosong merupakan suatu grup dengan operasi komposisi fungsi dan disebut sebagai grup simetri [1]. Isometri adalah suatu fungsi bijektif yang mempertahankan jarak dari suatu bidang ke bidang itu sendiri [2]. *Frieze group* atau yang biasa juga disebut sebagai pola *frieze* memiliki ciri khusus yaitu selalu dibangun oleh translasi. Terdapat tujuh pola berbeda yang mungkin terbentuk dari kombinasi isometri yang ada. Isometri lain yang dapat membangun pola *frieze* yaitu refleksi horizontal, refleksi vertikal, rotasi, dan *glide*. Tujuh pola *frieze* tersebut dapat diklasifikasikan sebagai grup siklik atau dihedral.

Berdasarkan teori yang ada, dapat dianalisis hubungan antara *frieze group* dengan grup siklik dan dihedral serta dapat juga diidentifikasi pola pada seni dekoratif masjid berdasarkan *frieze group*. identifikasi yang dilakukan pada penelitian ini hanya dilakukan pada beberapa pola seni dekoratif masjid dan hanya beberapa masjid di Pontianak yang dijadikan objek penelitian.

Penentuan jenis pola seni dekoratif masjid dimulai dengan mengidentifikasi pola seni dekoratif masjid untuk mengetahui apakah pola tersebut memiliki translasi atau tidak. Kemudian mengidentifikasi kembali apakah translasi yang terbentuk merupakan translasi satu arah atau tidak. Selanjutnya untuk langkah terakhir yaitu mengidentifikasi apakah pola tersebut juga dibangun oleh isometri lain selain translasi. Isometri yang mungkin terdapat dalam pola *frieze* diantaranya refleksi horizontal, refleksi vertikal, rotasi $180°$, dan *glide*. Dari hasil identifikasi-identifikasi yang ada maka dapat ditentukan jenis pola *frieze* yang ada pada pola seni dekoratif masjid.

ISOMETRI PADA BIDANG

Suatu fungsi bijektif yang mempertahankan jarak dari suatu bidang ke bidang itu sendiri dinamakan isometri. Berikut ini diberikan definisi dari suatu isometri.

Definisi 1 [2] *Isometri pada bidang adalah fungsi bijektif* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *yang mempertahankan jarak dari suatu bidang ke bidang itu sendiri, artinya untuk setiap* $p, q \in \mathbb{R}^2$ *berlaku*

$$|f(P)f(Q)| = |PQ| \text{ atau } |f(p) - f(q)| = |p - q|.$$

P dan Q merupakan sebuah titik sedangkan p dan q adalah vektor posisi dari titik P dan Q.

Terdapat beberapa jenis isometri pada bidang yang dipetakan ke dirinya sendiri yaitu translasi (τ), refleksi horizontal (β), refleksi vertikal (ρ), rotasi $180°$ (α), dan *glide* (γ). Berikut ini definisi dari beberapa jenis isometri.

Definisi 2 [2] *Misalkan $\tau_a(x) \in \mathbb{R}^2$. Translasi τ adalah fungsi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu. Dinotasikan sebagai berikut*

$$\tau_a(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; \tau_a(x) = x + a \; ; \; a, x \in \mathbb{R}^2$$

Isometri pada bidang yang selanjutnya adalah refleksi. Refleksi merupakan pencerminan suatu titik pada bidang yang melalui sumbu refleksinya. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi refleksi.

Definisi 3 [2] *Refleksi $\mathcal{L}$ adalah fungsi $\beta_{\mathcal{L}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dimana setiap titik dipetakan ke dirinya sendiri dan jika P berada dalam garis $\mathcal{L}'$ yang tegak lurus dengan garis $\mathcal{L}$ maka titik potong kedua garis tersebut dinamakan M. $\beta_{\mathcal{L}}(P)$ selalu berada pada $\mathcal{L}'$ dan memenuhi $|M\beta_{\mathcal{L}}(P)| = |MP|$. P dan M memiliki vektor posisi p dan m, sehingga $\beta_{\mathcal{L}}(P) - p = 2(m - p)$ atau $\beta_{\mathcal{L}}(P) = 2m - p$.*

Isometri pada bidang yang lainnya yaitu rotasi. Rotasi merupakan perputaran suatu bidang pada suatu titik dengan besar sudut tertentu. Berikut ini definisinya.

Definisi 4 [2] *Misalkan C sebuah titik dengan vektor posisi c. Kemudian $\alpha_{C,\theta}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah rotasi pada bidang disekitar C yang berlawanan arah jarum jam sebesar θ. Titik C ditetapkan oleh $\alpha_{C,\theta}$, tetapi untuk $\theta = 2\pi k$ dimana $k \in \mathbb{Z}$ tidak ada titik tetap. Untuk $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_{C,2\pi k} = Id_{\mathbb{R}^2}, \alpha_{C,\theta+2\pi k} = \alpha_{C,\theta}$. Untuk rumus $\alpha_{C,\theta}$ pada titik $P(x, y)$ dapat ditemukan dengan $\alpha_{C,\theta}(x, y) = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y, \sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$.*

Isometri yang terakhir yaitu *glide*. *Glide* merupakan hasil komposisi dari translasi dan juga refleksi yang sumbu refleksinya sejajar dengan sumbu translasi. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi *glide*.

Definisi 5 [2] *Glide γ adalah komposisi dari translasi τ_a dan refleksi $\beta_{\mathcal{L}}$ yang sumbu refleksinya sejajar sumbu translasi a. Dapat ditulis dalam bentuk*

$$\gamma(x) = \tau_a(x) \circ \beta_{\mathcal{L}}(x)$$

Selanjutnya berdasarkan proposisi-proposisi di bawah ini dapat ditunjukkan bahwa translasi, refleksi, rotasi, dan *glide* adalah isometri.

Proposisi 6 [2] *Translasi adalah isometri.*
Bukti: Misalkan x, y dua buah titik di $\mathbb{R}^2$. Akan dibuktikan bahwa translasi τ merupakan isometri. Berdasarkan Definisi 2 diketahui bahwa $\tau_a(x) = x + a$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} |\tau_a(x) - \tau_a(y)| &= |(x + a) - (y + a)| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa translasi merupakan isometri.

Proposisi 7 [3] *Refleksi adalah isometri.*
Bukti: Misalkan p, q dua buah titik di $\mathbb{R}^2$. Berdasarkan Definisi 3 diketahui bahwa $\beta_{\mathcal{L}}(p) = 2m - p$ dengan $\beta_{\mathcal{L}}(p)$ adalah refleksi p terhadap sumbu $\mathcal{L}$, m adalah vektor posisi dari titik potong antara titik asal dengan titik yang telah direfleksikan sedangkan p adalah vektor posisi dari titik asal, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} |\beta_{\mathcal{L}}(p) - \beta_{\mathcal{L}}(q)| &= |(2m - p) - (2m - q)| \\ &= |-p + q| \\ &= |(-1)(p - q)| \\ &= |p - q| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa refleksi merupakan isometri.

Proposisi 8 [3] *Rotasi adalah isometri.*
Bukti: Misalkan titik $x, y, z, t \in \mathbb{R}^2$, berdasarkan Definisi 4 diketahui bahwa $\alpha_{C,\theta}(x, y) = (cos\,\theta\, x - sin\,\theta\, y, sin\,\theta\, x + cos\,\theta\, y)$ dengan $\alpha_{C,\theta}$ adalah rotasi titik C disekitar titik asal sebesar θ sehingga untuk membuktikan bahwa rotasi merupakan isometri berlaku:

$$\begin{aligned} \left|(\alpha_{C,\theta}(x, y)) \cdot (s_{C,\theta}(z, t))\right| &= |(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta) \cdot \\ &\quad (z \cos\theta - t \sin\theta, z \sin\theta + t \cos\theta)| \\ &= |(x \cos\theta - y \sin\theta)(z \cos\theta - t \sin\theta) + \\ &\quad (x \sin\theta + y \cos\theta)(z \sin\theta + vt| \\ &= |xz \cos^2\theta + yt \sin^2\theta + xz \sin^2\theta + yt \cos^2\theta| \\ &= |xz (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + yt (\cos^2\theta + \sin^2\theta)| \\ &= |xz + yt| \\ &= |(x, y)(u, v)| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa rotasi disekitar titik asal adalah isometri

Proposisi 9 *Glide adalah isometri.*
Bukti: Misalkan $\gamma(x), \gamma(y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berdasarkan Definisi 5 diketahui bahwa $\gamma(x) = \tau_a(x) \circ \beta_{\mathcal{L}}(x)$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}|\gamma(x)-\gamma(y)| &= |(\tau_a \circ \beta_{\mathcal{L}})\,(x)-(\tau_a \circ \beta_{\mathcal{L}})\,(y)|\\ &= |(\tau_a(2m-x))-(\tau_a(2m-y))|\\ &= |(2m-x+a)-(2m-y+a)|\\ &= |-x+y|\\ &= |(-1)(x-y)|\\ &= |x-y|\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa *glide* adalah isometri.

Berdasarkan uraian proposisi-proposisi di atas terbukti bahwa translasi, refleksi, rotasi dan *glide* merupakan isometri.

GRUP PADA ISOMETRI

Himpunan isometri-isometri yang memenuhi aksioma-aksioma grup dengan operasi komposisi fungsi dinamakan grup simetri. Berikut ini ditunjukkan bahwa isometri memenuhi aksioma grup berdasarkan proposisi-proposisi di bawah ini.

Proposisi 10 [1] *Misalkan* $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*merupakan dua isometri. Komposisi dari dua isometri* $(u \circ v)$, $(v \circ u)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *adalah isometri.*

Bukti*:* Untuk dua titik $p, q \in \mathbb{R}^2$ didapat.

$$|(u \circ v)(p)-(u \circ v)(q)| = \big|u\big(v(p)\big)-u\big(v(q)\big)\big| = |u(p)-u(q)| = |p-q|$$

$$|(v \circ u)(p)-(v \circ u)(q)| = \big|v\big(u(p)\big)-v\big(u(q)\big)\big| = |v(p)-v(q)| = |p-q|$$

Jadi, terbukti bahwa $(u \circ v)$ dan $(v \circ u)$ adalah isometri.

Proposisi 11 *Misalkan* $u, v, w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *merupakan isometri yang operasi komposisi fungsinya bersifat asosiatif.*

Bukti: Misalkan $x \in \mathbb{R}^2$, sehingga didapat.

$$\begin{aligned}\big((u \circ v) \circ w\big)(x) &= (u \circ v)\big(w(x)\big)\\ &= u\Big(v\big(w(x)\big)\Big)\\ \big(u \circ (v \circ w)\big)(x) &= u \circ \big((v \circ w)(x)\big)\\ &= u\Big(v\big(w(x)\big)\Big)\end{aligned}$$

Jadi, karena $\big((u \circ v) \circ w\big)(x) = \big(u \circ (v \circ w)\big)(x)$ terbukti bahwa komposisi dari beberapa isometri bersifat asosiatif.

Proposisi 12 *Terdapat* $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $I(x) = x$ *disebut sebagai elemen identitas yang memenuhi* $(u \circ I)(x) = (I \circ u)(x) = u(x)$ *, untuk setiap* $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *merupakan isometri.*

Bukti: Misalkan $x \in \mathbb{R}^2$ pada u, berdasarkan definisi elemen identitas [3] diketahui bahwa $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $I(x) = x$ disebut sebagai pemetaan identitas sehingga didapat.

$$\begin{aligned}(u \circ I)(x) &= u\big(I(x)\big)\\ &= u(x)\\ (I \circ u)(x) &= I\big(u(x)\big)\\ &= u(x)\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa elemen identitas juga merupakan isometri. Misalkan x, y dua buah titik di $\mathbb{R}^2$ sehingga:

$$|I(x) - I(y)| = |x - y|$$

Jadi, terdapat elemen identitas $I(x)$ sedemikian sehingga $(u \circ I)(x) = (I \circ u)(x) = u(x)$ dan terbukti bahwa isometri memiliki elemen identitas yang merupakan isometri juga.

Proposisi 13 [1] *Misalkan* $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *merupakan isometri dan* u *memiliki invers yang juga merupakan isometri.*

Bukti: Berdasarkan Definisi 1 diketahui bahwa isometri merupakan fungsi bijektif. Fungsi bijektif pasti memiliki invers sehingga terdapat u^{-1} yang memenuhi $(u \circ u^{-1})(x) = I(x) = (u^{-1} \circ u)(x)$ dengan $I(x)$ adalah fungsi identitas. Misalkan $x, y \in \mathbb{R}^2$ pada u. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa u^{-1} adalah isometri.

$$\begin{aligned} |u^{-1}(x) - u^{-1}(y)| &= \left|u\left(u^{-1}(x)\right) - u\left(u^{-1}(y)\right)\right| \\ &= |I(x) - I(y)| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa u^{-1} adalah isometri.

Berdasarkan proposisi-proposisi di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan isometri dengan operasi komposisi fungsi merupakan suatu grup karena telah memenuhi aksioma grup. Dari pembahasan-pembahasan sebelumnya mengenai isometri diketahui bahwa translasi, refleksi, rotasi, dan *glide* merupakan isometri, karena isometri memenuhi aksioma grup sehingga himpunan yang berisi translasi, refleksi, rotasi, atau *glide* juga merupakan suatu grup dengan operasi komposisi fungsi.

FRIEZE GROUP

Himpunan semua isometri yang memenuhi aksioma grup dengan operasi komposisi fungsi dinamakan grup simetri [3]. Berikut ini akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai grup simetri.

Definisi 14 [3] *Misalkan* X *suatu himpunan titik pada* R^n*. Grup simetri* X *pada* R^n *yang dinotasikan dengan* $Sym(X)$ *adalah himpunan semua isometri pada* R^n *yang memetakan* X *ke dirinya sendiri dengan operasi komposisi fungsi.*

Terdapat dua kelas grup simetri yang berhubungan dengan pola, yaitu grup siklik dan grup dihedral [4]. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi dari grup siklik dan dihedral.

Definisi 15 [5] *Grup* C *disebut grup siklik, apabila ada suatu elemen di* C*, misalnya* $\tau \in C$ *sedemikian sehingga* $C_n = \langle \tau | \tau^n = I \rangle$*, dengan* τ *adalah pembangun dan* n *adalah sebuah bilangan bulat. Grup siklik hanya dibangun oleh pembangun tunggal. Grup siklik order* n *dinotasikan* C_n *sedangkan grup siklik tak terbatas dapat dinotasikan dengan* $C_\infty = \langle \tau | \ \rangle$.

Definisi 16 [5] *Misalkan* $D_{2n} = \langle \alpha, \beta | \alpha^n = \beta^2 = I, \beta\alpha = \alpha^{-1}\beta \rangle$ *dengan* α, β *adalah pembangun dan* n *adalah sebuah bilangan bulat. Grup dihendral order* $2n$ *dinotasikan dengan* D_{2n}*, sedangkan grup dihedral tak terbatas dinotasikan dengan* D_∞.

Frieze group merupakan subgrup dari grup simetri yang selalu dibangun oleh translasi satu arah. Setiap pola *frieze* dapat diklasifikasikan sebagai grup siklik atau dihedral. Berikut ini diberikan definisi dari *frieze group*.

Definisi 17 [5] *Frieze group merupakan subgrup dari grup simetri yang dibangun oleh translasi satu arah, sehingga membentuk pola linear yang berulang dalam satu arah.*

Frieze group atau biasa juga disebut dengan pola *frieze* memiliki tujuh jenis pola yang setiap polanya dibangun oleh kombinasi dari isometri-isometri. Ciri penting yang terdapat dalam ketujuh pola *frieze* yaitu adanya translasi satu arah disetiap pola. Setiap pola memiliki ketentuan yang berbeda-beda dan setiap pola tersebut dapat diklasifikasikan sebagai grup siklik atau dihedral. Berikut ini tujuh jenis pola *frieze* yang ada.

1. Pola F_1

Pola F_1 tidak memiliki isometri lain selain translasi. Grup simetri pada pola ini merupakan grup siklik tak terbatas, $C_\infty = \langle \tau | \ \rangle$ dengan τ adalah translasi. Pola F_1 isomorfik terhadap $\mathbb{Z}$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi pola F_1 dengan menggunakan huruf b yang ditranslasikan seperti di bawah ini.

… b b b b b b b b b b b b b b b …

Pola F_1 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

Gambar 1. Ilustrasi Pola F_1 [6]

2. Pola F_2

Pola F_2 hanya memiliki *glide*. Grup simetri untuk pola ini merupakan grup siklik tak terbatas, $C_\infty = \langle \gamma | \ \rangle$ dengan γ adalah *glide*. Pola F_2 isomorfik terhadap $\mathbb{Z}$. Sebagai contoh, berikut ini akan ditunjukkan deretan huruf b yang mengalami *glide*.

... b p b p b p b p b p b p b p...

Pola F_2 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

Gambar 2. Ilustrasi Pola F_1

3. Pola F_3

Pola F_3 memiliki refleksi yang sumbu simetrinya sejajar dengan arah translasi. Grup simetri pada pola ini dibangun oleh translasi τ dan refleksi β terhadap sumbu x, $C_\infty \times C_2 = \langle \tau, \beta | \beta^2 = I, \beta\tau = \tau\beta \rangle$. Pola F_3 isomorfik terhadap $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi Pola F_3 dengan menggunakan huruf b seperti di bawah ini.

… b b b b b b b b b b b …
… p p p p p p p p p p p …

Pola F_3 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

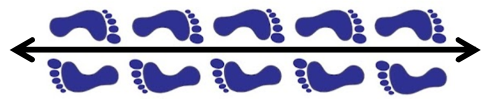
Gambar 3. Ilustrasi Pola F_3

4. Pola F_4

Pola ini memiliki rotasi. Grup simetri pada pola ini adalah grup dihedral tak terbatas yang dibangun oleh translasi τ dan rotasi α, $D_\infty = \langle \tau, \alpha | \alpha^2 = I, \alpha\tau = \tau^{-1}\alpha \rangle$. Pola F_4 isomorfik terhadap $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_2$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi Pola F_4 dengan menggunakan huruf b seperti di bawah ini.

… b q b q b q b q b q b q b q …

Pola F_4 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.



Gambar 4. Ilustrasi Pola F_4

5. Pola F_5

Pola F_5 memiliki rotasi dan juga refleksi vertikal. Grup simetri pada pola ini dibangun oleh translasi τ, refleksi ρ terhadap sumbu y dan rotasi α $180°$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D_\infty \times C_2 = \langle \tau, \rho, \alpha | \rho^2 = \alpha^2 = I, \rho\tau = \tau^{-1}\rho, \alpha\rho = \rho\alpha, \alpha\tau = \tau^{-1}\alpha \rangle$$

Pola F_5 isomorfik terhadap $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_2$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi Pola F_5 dengan menggunakan huruf b seperti dibawah ini.

… bd bd bd bd bd bd …

… pq pq pq pq pq …

Pola F_5 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

Gambar 5. Ilustrasi Pola F_5

6. Pola F_6

Pola F_6 memiliki translasi dan refleksi vertikal. Grup simetri dari pola ini adalah $D_\infty = \langle \tau, \rho | \rho^2 = I, \rho\tau = \tau^{-1}\rho \rangle$ dengan τ adalah translasi dan ρ adalah refleksi terhadap sumbu y. Pola F_3 isomorfik terhadap $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_2$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi Pola F_6 dengan menggunakan huruf b seperti dibawah ini.

... b d b d b d b d b d b d b d ...

Pola F_6 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

Gambar 6. Ilustrasi Pola F_6

7. Pola F_7

Pola F_6 memiliki translasi, refleksi vertikal dan refleksi horizontal. Grup simetri pada pola ini adalah $D_\infty = \langle \tau, \beta, \rho | \beta^2 = \rho^2 = I, \beta\tau = \tau\beta, \rho\beta = \beta\rho, \rho\tau = \tau^{-1}\rho \rangle$. Pola F_7 isomorfik terhadap $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_2$. Berikut ini ditunjukkan ilustrasi Pola F_7 dengan menggunakan huruf b seperti dibawah ini.

… b d b d b d b d b d b d b d …
… p q p q p q p q p q p q p q …

Pola F_7 ini bisa juga diilustrasikan menggunakan bentuk telapak kaki sebagai berikut.

Gambar 7. Ilustrasi Pola F_7

IDENTIFIKASI POLA SENI DEKORATIF MASJID BERDASARKAN *FRIEZE GROUP*

Pola seni dekoratif yang terdapat pada dinding, pintu, atau karpet masjid memiliki keterkaitan dengan matematika. Pola-pola pada seni dekoratif masjid tersebut dapat diklasifikasikan ke dalam tujuh jenis pola berdasarkan teori *frieze group*. Berikut ini contoh dari beberapa pola seni dekoratif masjid yang ada di Pontianak yang telah diidentifikasi.

1. Pola F_1

Gambar 8. Pola Sajadah di Masjid Nurul Hidayah

Pada pola sajadah di atas terdapat pola berulang, sehingga dapat diidentifikasi bahwa pola pada sajadah tersebut memiliki translasi. Satu bentuk pada sajadah tersebut ditranslasikan kearah kanan sehingga membuat sebuah pola translasi searah. Tidak terdapat isometri lain pada pola sajadah tersebut.

2. Pola F_2.

Gambar 9. Pola pada dinding bangunan di Masjid Nurul Hidayah

Pada Gambar 9 dapat diidentifikasi bahwa pola memiliki translasi. Translasi yang terdapat pada pola tersebut merupakan translasi searah karena tidak ada percabangan arah lain. Selain itu pada pola tersebut juga terdapat *glide*.

3. Pola F_3

Gambar 10. Pola pada dinding Alhambra (Yeso)

Dari enam Masjid yang diamati dalam penelitian ini tidak ditemukan pola yang sesuai dengan kriteria pola F_3, sehingga diambil contoh pola yang terdapat dalam prosiding [7]. Pada Gambar 10 dapat diidentifikasi bahwa pola memiliki translasi yang searah dan juga refleksi horizontal.

4. Pola F_4

Gambar 11. Pola hiasan dinding di tempat wudhu Masjid Dzakirin

Pada Gambar 11 dapat diidentifikasi bahwa pola yang terbentuk memiliki translasi satu arah. Selain itu pola juga memiliki rotasi. Satu bentuk pada hiasan dinding tersebut dirotasikan sehingga membuat sebuah pola seperti pada hiasan dinding di atas.

5. Pola F_5

Gambar 12. Pola hiasan tangga di Masjid Al-Hadi

Pada Gambar 12 dapat diidentifikasi bahwa pola yang terbentuk memiliki translasi satu arah. Selain itu pola juga memiliki rotasi dan juga refleksi. Pada gambar terlihat pola sedikit miring, hal tersebut dikarenakan faktor pengambilan gambar dan arah tangga yang memang miring. Bila diamati sebenarnya pola tersebut berpola lurus sesuai dengan tempat penempatan pola.

6. Pola F_6

Gambar 13. Pola pada pagar Masjid At-Taqwa

Pada Gambar 13 dapat diidentifikasi bahwa terdapat pola berulang yang menandakan bahwa pola tersebut mengandung translasi. Translasi yang dimiliki pola tersebut merupakan pola satu arah. Selain itu, pola di atas juga memiliki refleksi vertikal.

7. Pola F_7

Gambar 14. Ventilasi Masjid Maulidiyah

Pada Gambar 14 dapat diidentifikasi bahwa terdapat pola berulang pada ventilasi tersebut. Pola berulang yang terbentuk merupakan pola berulang yang searah. Selain itu pola tersebut juga memiliki refleksi vertikal dan refleksi horizontal.

Pola-pola yang telah dijelaskan sebelumnya merupakan contoh seni dekoratif masjid yang memang dapat diklasifikasikan menggunakan teori *frieze group*. Dari hasil pengamatan enam masjid, juga didapat pola-pola yang tidak dapat diklasifikasikan ke dalam *frieze group*. Pola-pola tersebut juga merupakan subset dari grup simetri yang dibangun oleh isometri. Berikut ini akan ditunjukkan contoh pola yang dibangun oleh isometri tapi tidak termasuk dalam ketujuh pola *frieze*.

Gambar 15. Pola pada tiang di Masjid Dzakirin

Pola pada Gambar 15 tidak dapat diidentifikasi menggunakan teori *frieze group* karena pola di atas tidak dibangun oleh translasi dalam satu arah. Grup simetri pada pola tersebut merupakan grup siklik terbatas yang dibangun oleh rotasi $90°$. Contoh pola lain yang tidak dapat diidentifikasi menggunakan teori *frieze group* adalah sebagai berikut.

Gambar 16. Pola dinding di Masjid Nurul Hidayah

Pola pada Gambar 16 dapat terlihat bahwa pola dibangun oleh translasi, tetapi translasi yang ada pada Gambar 16 bukan translasi satu arah sehingga pola pada dinding tersebut bukan termasuk salah satu dari pola *frieze*.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah disampaikan maka dapat disimpulkan bahwa terdapat keterkaitan antara *frieze group* dengan grup siklik dan dihedral, yaitu pola *frieze* dapat di klasifikasikan sebagai grup siklik atau dihedral. Tidak semua pola pada seni dekoratif masjid dapat diklasifikasikan ke dalam tujuh pola *frieze*. Selain itu, ketujuh pola *frieze* juga tidak selalu ada dalam satu masjid. Dari enam masjid yang diamati, pola yang banyak terdapat di masjid tersebut adalah pola F_6 dan pola F_7.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Gallian JA. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning; 2013.

[2]. Baker A. *Groups and Symmetry*. Glasgow: University of Glasgow; 2005.

[3]. Cohen MM. and Pilgrim KM. *Groups and Geometry*. Ithaca: Cornell University; 2004.

[4]. Scott R. *Symmetry Groups and Pattern Types*, Amerika Serikat: Northwest Missouri State University; 2008.

[5]. Cooper CDH. *Techniques of Algebra*. Australia: Macquarie University; 2013.

[6]. Conway J. *John Conway's Dance Step Frieze Patterns*. Boston: Northeastern University; 2017

[7]. Bodner BL. Frieze Patterns of the Alhambra. *Proceedings Bridges Donostia: Mathematics, Music, Art, Architecture, and Culture*. 2007; 7: 203-208

ASRI RAHMAWATI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, asry.rahma@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, frandly88@gmail.com